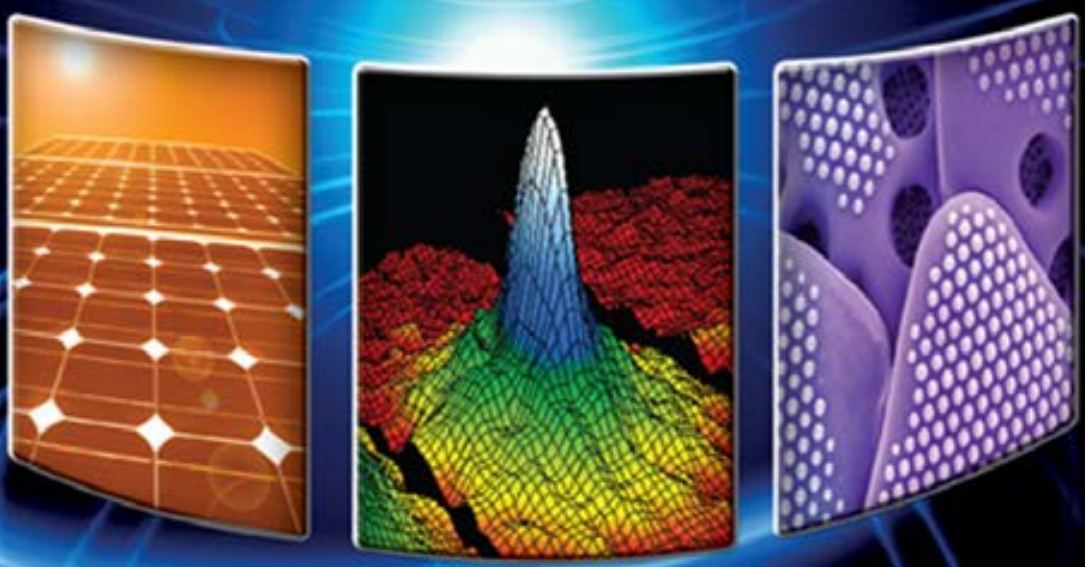
Física

para ingeniería y ciencias

con *física moderna*



VOLUMEN 2

Wolfgang Bauer | Gary D. Westfall

Mc Graw Hill

Física

para ingeniería y ciencias

con *física moderna*

Física

para ingeniería y ciencias con *física moderna*

volumen 2

Wolfgang Bauer
Michigan State University

Gary D. Westfall
Michigan State University

Revisión técnica

Jorge Álvarez Díaz
Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey, Campus Cuernavaca, México

Enrique Adelaido Bravo Medina
Universidad Nacional Autónoma de México

Ángel de Andrea González
Universidad Carlos III, Madrid, España

Carlos Gutiérrez Aranzeta
Instituto Politécnico Nacional, México

Joel Ibarra Escutia
Instituto Tecnológico de Toluca

Adolfo Finck Pastrana
Universidad Iberoamericana, Ciudad de México

Wendi Olga López Yépez
Universidad Nacional Autónoma de México

Miguel Ángel Pascual Iglesias
Universidad Politécnica de Madrid, España

Mauro Ricardo Pintle Monroy
Instituto Politécnico Nacional, México

Víctor F. Robledo Rella
Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey, Campus Ciudad de México

Honorino Rubio García
Universidad de Oviedo, España

Marcela M. Villegas Garrido
Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey, Campus Estado de México

Mc Graw Hill

MÉXICO • BOGOTÁ • BUENOS AIRES • CARACAS • GUATEMALA • MADRID • NUEVA YORK
SAN JUAN • SANTIAGO • SÃO PAULO • AUCKLAND • LONDRES • MILÁN • MONTREAL
NUEVA DELHI • SAN FRANCISCO • SINGAPUR • ST. LOUIS • SIDNEY • TORONTO

Director Higher Education: Miguel Ángel Toledo Castellanos
Editor sponsor: Pablo E. Roig Vázquez
Coordinadora editorial: Marcela I. Rocha Martínez
Editora de desarrollo: Ana L. Delgado Rodríguez
Supervisor de producción: Zeferino García García

Traducción: Francisco Sánchez Fragoso, Thomas Werner Bartenbach, Hugo Villagómez Velázquez

FÍSICA PARA INGENIERÍA Y CIENCIAS, CON FÍSICA MODERNA. Volumen 2

Prohibida la reproducción total o parcial de esta obra,
por cualquier medio, sin la autorización escrita del editor.

Educación

DERECHOS RESERVADOS © 2011 respecto a la primera edición en español por
McGRAW-HILL/INTERAMERICANA EDITORES, S.A. DE C.V.
A Subsidiary of ***The McGraw-Hill*** *Companies, Inc.*
Edificio Punta Santa Fe
Prolongación Paseo de la Reforma 1015, Torre A
Piso 17, Colonia Desarrollo Santa Fe,
Delegación Álvaro Obregón
C.P. 01376, México, D.F.
Miembro de la Cámara Nacional de la Industria Editorial Mexicana, Reg. Núm. 736

ISBN 978-607-15-0546-0

Traducido de la primera edición de *University Physics with Modern Physics* by Wolfgang Bauer and Gary D. Westfall
Copyright © 2011 by The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved. ISBN: 978-0-07-285736-8

1234567890 1098765432101

Impreso en China *Printed in China*

Contenido breve

El panorama general xxv

PARTE 5: ELECTRICIDAD

21 Electrostática 683

22 Campos eléctricos y ley de Gauss 710

23 Potencial eléctrico 745

24 Capacitores 773

25 Corriente y resistencia 804

26 Circuitos de corriente directa 838

PARTE 6: MAGNETISMO

27 Magnetismo 864

28 Campos magnéticos de cargas en movimiento 892

29 Inducción electromagnética 925

30 Oscilaciones y corrientes electromagnéticas 958

31 Ondas electromagnéticas 992

PARTE 7: ÓPTICA

32 Óptica geométrica 1025

33 Lentes e instrumentos ópticos 1058

34 Óptica ondulatoria 1096

PARTE 8: RELATIVIDAD Y FÍSICA CUÁNTICA

35 Relatividad 1132

36 Física cuántica 1170

37 Mecánica cuántica 1206

38 Física atómica 1251

39 Física de partículas elementales 1286

40 Física nuclear 1325

Apéndice A: Matemáticas Primer A-1

Apéndice B: Masas de isótopos, energías de enlace y vidas media A-9

Apéndice C: Propiedades de los elementos A-19

Respuestas de problemas y preguntas seleccionadas RES-1

Acerca de los autores

Wolfgang Bauer nació en Alemania y obtuvo un doctorado en física nuclear teórica en la Universidad de Giessen en 1987. Después de una beca de investigación posdoctoral en el California Institute of Technology, fue nombrado catedrático de la Michigan State University en 1988. Ha trabajado en una gran variedad de temas de física computacional, desde la superconductividad a alta temperatura hasta las explosiones de supernovas; pero se ha interesado especialmente en colisiones nucleares relativistas. Quizás es más conocido por su trabajo sobre transiciones de fase de la materia nuclear en colisiones de iones pesados. En años recientes, el doctor Bauer ha enfocado gran parte de su investigación y de su cátedra en temas relativos a la energía, incluyendo fuentes de combustibles fósiles, modos de usar más eficientemente la energía y, especialmente, fuentes de energía alternativas y neutras al carbono. Actualmente trabaja como Presidente del departamento de Física y Astronomía, así como director del Institute for Cyber-Enabled Research.

Gary D. Westfall comenzó su carrera en el Center for Nuclear Studies de la Universidad de Texas en Austin, donde hizo su doctorado en física nuclear experimental en 1975. De ahí se trasladó al Lawrence Berkeley National Laboratory (LBNL), en Berkeley, California, para llevar a cabo su trabajo posdoctoral en física nuclear de alta energía, y luego permaneció como científico de cátedra. Mientras estuvo en el LBNL, el doctor Westfall fue conocido internacionalmente por su trabajo sobre el modelo nuclear de bola de fuego y el uso de la fragmentación para producir núcleos lejos de la estabilidad. En 1981, el doctor Westfall ingresó al National Superconducting Cyclotron Laboratory (NSCL) en la Michigan State University (MSU), como profesor investigador; ahí concibió, construyó y operó el detector MSU 4π. Su investigación basada en el uso del detector 4π produjo información acerca de la respuesta de la materia nuclear cuando se le comprime en un colapso de supernova. En 1987, el doctor Westfall ingresó al Departamento de Física y Astronomía de la MSU como profesor asociado, mientras continuaba llevando a cabo su investigación en el NSCL. En 1994, el doctor Westfall ingresó a la STAR Collaboration, que actualmente lleva a cabo experimentos en el Relativistic Heavy Ion Collider (RHIC) en el Brookhaven National Laboratory, en Long Island, Nueva York.

La asociación Westfall-Bauer Los doctores Bauer y Westfall han colaborado en la investigación de física nuclear y en investigación física educativa durante más de dos décadas. La asociación comenzó en 1988, cuando ambos autores dieron conferencias en la misma convención y decidieron ir a esquiar juntos después de la sesión. En esa ocasión, Westfall contrató a Bauer para unirse como catedrático en la Michigan State University (en parte amenazándolo con empujarlo del teleférico si se rehusaba). Obtuvieron fondos de NSF para desarrollar nuevas técnicas de enseñanza y de laboratorio, hicieron CD multimedios de física para sus estudiantes en la Lyman Briggs School, y coescribieron un libro de texto en CD-ROM llamado *cliXX Physik*. En 1992, fueron de los primeros en adoptar la internet para enseñar y aprender, desarrollando la primera versión de su sistema *on-line* para tareas en casa. En años subsiguientes, participaron en la creación del Learning*Online* Network con CAPA, que se usa ahora en más de 70 universidades y escuelas superiores en Estados Unidos y en otras partes del mundo. Desde 2008, Bauer y Westfall han sido parte de un equipo de profesores, ingenieros y físicos que investigan el uso de la enseñanza asistida por compañeros en el programa de física introductoria. Este proyecto ha recibido financiamiento del Programa de Expansión de Talentos de NSF STEM, y sus mejores prácticas se han incorporado en este libro de texto.

Dedicatoria Este libro está dedicado a nuestras familias. Sin su paciencia, aliento y apoyo, no podríamos haberlo terminado.

Nota de los autores

La **física** es una ciencia floreciente, animada por el reto de cambio intelectual, y presenta innumerables problemas de investigación sobre temas que van desde las más grandes galaxias hasta las más pequeñas partículas subatómicas. Los físicos han logrado aportar a nuestro mundo entendimiento, orden, congruencia y predictibilidad, y continuarán con este cometido en el futuro.

Sin embargo, cuando abrimos la mayoría de los libros de texto de introducción a la física, encontramos otra historia. La física se presenta como una ciencia terminada en la que los principales progresos sucedieron en el tiempo de Newton, o quizás a principios del siglo xx. Sólo hacia el final de los libros de texto convencionales se cubre la "física moderna", e incluso esta cobertura a menudo incluye únicamente descubrimientos realizados hasta la década de 1960.

Nuestra motivación principal para escribir este libro es cambiar esta percepción entretejiendo de manera adecuada la apasionante física contemporánea en todo el texto. La física es una disciplina estimulante y dinámica, que está continuamente en la frontera de nuevos descubrimientos y aplicaciones que cambian la vida. Para ayudar a los estudiantes a percibir esto, necesitamos contar toda la emocionante historia de nuestra ciencia integrando adecuadamente la física contemporánea dentro del curso de primer año, basado en el cálculo. Tan sólo el primer semestre ofrece muchas oportunidades para hacer esto, al vincular resultados de la investigación física en dinámica no lineal, caos, complejidad y alta energía, en el programa introductorio. Como estamos realizando investigación de manera activa en este campo, sabemos que muchos de los resultados de vanguardia están accesibles en su esencia para el estudiante de primer año.

Autores en muchos otros campos, tales como la biología y la química, ya incorporan la investigación contemporánea en sus libros de texto, y reconocen los cambios sustanciales que están afectando los fundamentos de sus disciplinas. Esta integración de la investigación contemporánea da a los estudiantes la impresión de que la biología y la química son lo último en emprendimientos de investigación. Los fundamentos de la física, por otro lado, descansan en terreno mucho más firme; pero los nuevos avances son igualmente intrigantes y apasionantes, si no es que más. Necesitamos encontrar una manera de compartir con nuestros estudiantes los avances en la física.

Creemos que hablar acerca del amplio tema de la energía ofrece un gran aliciente introductorio para captar el interés de los estudiantes. Los conceptos de fuentes de energía (fósil, renovable, nuclear, etc.), eficiencia energética, fuentes alternativas de energía y efectos ambientales de las decisiones de suministro de energía (calentamiento global) son mucho más accesibles en el nivel de física introductoria. Constatamos que los temas de energía detonan el interés de nuestros estudiantes como ningún otro tema actual, y hemos tratado diferentes aspectos de energía en todo nuestro libro.

Además de estar expuesto al estimulante mundo de la física, los estudiantes se benefician en gran medida al obtener la capacidad de **resolver problemas y pensar lógicamente acerca de una situación**. La física se basa en un conjunto central de ideas que es fundamental para toda la ciencia. Reconocemos esto y proporcionamos un útil método de resolución de problemas (descrito en el capítulo 1) que se usa en todo el libro. Este método de resolución de problemas se basa en un formato de pasos múltiples que ambos hemos desarrollado con los estudiantes en nuestras clases.

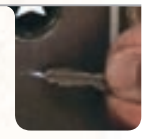
Considerando todo esto, y junto al deseo de escribir un libro de texto cautivante, hemos creado lo que esperamos que sea una herramienta que capte la imaginación de los estudiantes y los prepare para cursos futuros en los campos que elijan (con la esperanza, lo reconocemos, de convencer en el camino por lo menos a unos pocos estudiantes para que estudien física como carrera). Fue de gran ayuda en este enorme trabajo contar con la realimentación de más de 300 personas, incluyendo un consejo de asesores, varios colaboradores, revisores de manuscritos y participantes en grupos de enfoque, como también lo fueron las pruebas de campo de nuestras ideas con aproximadamente 4 000 estudiantes en nuestras clases introductorias de física en la Michigan State University. ¡Gracias a todos!

—Wolfgang Bauer y Gary D. Westfall

Contenido

Prefacio xi
Desarrollo de 360° xix
Agradecimientos xxiii
El panorama general xxv

PARTE 5: ELECTRICIDAD



21 Electrostática 683

21.1 Electromagnetismo 684
21.2 Carga eléctrica 685
21.3 Aislantes, conductores, semiconductores y superconductores 688
21.4 Carga electrostática 690
21.5 Fuerza electrostática: ley de Coulomb 692
21.6 Ley de Coulomb y ley de gravitación de Newton 699
Lo que hemos aprendido/Guía de estudio para examen 699
Preguntas de opción múltiple/Preguntas/Problemas 704

22 Campos eléctricos y ley de Gauss 710

22.1 Definición de campo eléctrico 711
22.2 Líneas de campo 712
22.3 Campo eléctrico debido a cargas puntuales 714
22.4 Campo eléctrico debido a un dipolo 716
22.5 Distribuciones continuas de carga 717
22.6 Fuerza debida a un campo eléctrico 721
22.7 Flujo eléctrico 725
22.8 Ley de Gauss 726
22.9 Simetrías especiales 729
Lo que hemos aprendido/Guía de estudio para examen 735
Preguntas de opción múltiple/Preguntas/Problemas 738

23 Potencial eléctrico 745

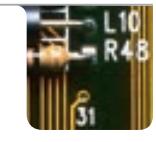
23.1 Energía potencial eléctrica 746
23.2 Definición de potencial eléctrico 747
23.3 Superficies y líneas equipotenciales 752
23.4 Potencial eléctrico de varias distribuciones de carga 755
23.5 Determinación del campo eléctrico a partir del potencial eléctrico 759
23.6 Energía potencial eléctrica de un sistema de cargas puntuales 761
Lo que hemos aprendido/Guía de estudio para examen 763
Preguntas de opción múltiple/Preguntas/Problemas 766

24 Capacitores 773

24.1 Capacitancia 774
24.2 Circuitos 776
24.3 Capacitor de placas paralelas 777
24.4 Capacitor cilíndrico 779
24.5 Capacitor esférico 779
24.6 Capacitores en circuitos 780
24.7 Energía almacenada en capacitores 784
24.8 Capacitores con dieléctricos 788
24.9 Perspectiva microscópica sobre los dieléctricos 791
Lo que hemos aprendido/Guía de estudio para examen 793
Preguntas de opción múltiple/Preguntas/Problemas 797

25 Corriente y resistencia 804

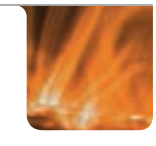
25.1 Corriente eléctrica 805
25.2 Densidad de corriente 808
25.3 Resistividad y resistencia 811
25.4 Fuerza electromotriz y la ley de Ohm 816
25.5 Resistores en serie 818
25.6 Resistores en paralelo 821
25.7 Energía y potencia en circuitos eléctricos 825
25.8 Diodos: calles de un solo sentido en circuitos 827
Lo que hemos aprendido/Guía de estudio para examen 828
Preguntas de opción múltiple/Preguntas/Problemas 831



26 Circuitos de corriente directa 838

26.1 Leyes de Kirchhoff 839
26.2 Circuitos de bucle único 842
26.3 Circuitos multiloop 843
26.4 Amperímetros y voltímetros 847
26.5 Circuitos RC 849
Lo que hemos aprendido/Guía de estudio para examen 855
Preguntas de opción múltiple/Preguntas/Problemas 857

PARTE 6: MAGNETISMO



27 Magnetismo 864

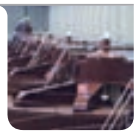
27.1 Imanes permanentes 865
27.2 Fuerza magnética 868

27.3 Movimiento de partículas cargadas en un campo magnético 871
27.4 Fuerza magnética sobre un alambre conductor de corriente 878
27.5 Momento de torsión sobre un bucle conductor de corriente 880
27.6 Momento dipolar magnético 881
27.7 Efecto Hall 881
Lo que hemos aprendido/Guía de estudio para examen 883
Preguntas de opción múltiple/Preguntas/Problemas 885

28 Campos magnéticos de cargas en movimiento 892

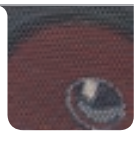
28.1 Ley de Biot-Savart 893
28.2 Campos magnéticos debidos a distribuciones de corriente 894
28.3 Ley de Ampère 903
28.4 Campos magnéticos de solenoides y toroides 904
28.5 Átomos como imanes 909
28.6 Propiedades magnéticas de la materia 910
28.7 Magnetismo y superconductividad 913
Lo que hemos aprendido/Guía de estudio para examen 914
Preguntas de opción múltiple/Preguntas/Problemas 918

29 Inducción electromagnética 925



29.1 Experimentos de Faraday 926
29.2 Ley de inducción de Faraday 928
29.3 Ley de Lenz 932
29.4 Generadores y motores 937
29.5 Campo eléctrico inducido 939
29.6 Inductancia de un solenoide 939
29.7 Autoinductancia e inducción mutua 940
29.8 Circuitos RL 943
29.9 Energía y densidad de energía de un campo magnético 946
29.10 Aplicaciones a la tecnología de la información 947
Lo que hemos aprendido/Guía de estudio para examen 948
Preguntas de opción múltiple/Preguntas/Problemas 951

30 Oscilaciones y corrientes electromagnéticas 958



30.1 Circuitos LC 959
30.2 Análisis de oscilaciones LC 961
30.3 Oscilaciones amortiguadas en un circuito RLC 964
30.4 Circuitos impulsados por CA 965
30.5 Circuito RLC en serie 968
30.6 Energía y potencia en circuitos AC 975
30.7 Transformadores 979
30.8 Rectificadores 981
Lo que hemos aprendido/Guía de estudio para examen 982
Preguntas de opción múltiple/Preguntas/Problemas 986

31 Ondas electromagnéticas 992

31.1 Campos magnéticos inducidos 993
31.2 Corriente de desplazamiento 994
31.3 Ecuaciones de Maxwell 996
31.4 Soluciones de onda para las ecuaciones de Maxwell 996
31.5 La velocidad de la luz 1000
31.6 El espectro electromagnético 1000
31.7 Ondas electromagnéticas viajeras 1003
31.8 Vector de Poynting y transporte de energía 1004
31.9 Presión de radiación 1006
31.10 Polarización 1010
31.11 Deducción de la ecuación de onda 1014
Lo que hemos aprendido/Guía de estudio para examen 1015
Preguntas de opción múltiple/Preguntas/Problemas 1019

PARTE 7: ÓPTICA

32 Óptica geométrica 1025

32.1 Rayos de luz y sombras 1026
32.2 Reflexión y espejos planos 1029
32.3 Espejos curvos 1033
32.4 Refracción y ley de Snell 1041
Lo que hemos aprendido/Guía de estudio para examen 1052
Preguntas de opción múltiple/Preguntas/Problemas 1053

33 Lentes e instrumentos ópticos 1058

33.1 Lentes 1059
33.2 Lupa 1067
33.3 Sistemas de dos o más elementos ópticos 1068
33.4 El ojo humano 1071
33.5 Cámara fotográfica 1074
33.6 El microscopio 1077
33.7 Telescopio 1078
33.8 Trampas de rayos láser 1083
Lo que hemos aprendido/Guía de estudio para examen 1084
Preguntas de opción múltiple/Preguntas/Problemas 1089

34 Óptica ondulatoria 1096

34.1 Ondas de luz 1097
34.2 Interferencia 1100
34.3 Interferencia de rendija doble 1101
34.4 Interferencia de película delgada y anillos de Newton 1104
34.5 Interferómetro 1107
34.6 Difracción 1109
34.7 Difracción de una sola rendija 1110
34.8 Difracción mediante una abertura circular 1113
34.9 Difracción de doble rendija 1114
34.10 Rejillas 1115
34.11 Difracción de rayos X y estructura cristalina 1121
Lo que hemos aprendido/Guía de estudio para examen 1122
Preguntas de opción múltiple/Preguntas/Problemas 1126

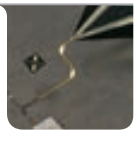
PARTE 8: RELATIVIDAD Y FÍSICA CUÁNTICA

35 Relatividad 1132

35.1 En busca del éter 1133
35.2 Postulados de Einstein y marcos de referencia 1134
35.3 Dilatación del tiempo y contracción de la longitud 1138
35.4 Corrimiento relativista de la frecuencia 1144
35.5 Transformación de Lorentz 1145
35.6 Transformación relativista de la velocidad 1148
35.7 Cantidad de movimiento y energía relativista 1151
35.8 Relatividad general 1158
35.9 Relatividad en nuestra vida cotidiana: GPS 1160
Lo que hemos aprendido/Guía de estudio para examen 1161
Preguntas de opción múltiple/Preguntas/Problemas 1164

36 Física cuántica 1170

36.1 La naturaleza de la materia, el espacio y el tiempo 1171
36.2 Radiación de cuerpo negro 1172
36.3 Efecto fotoeléctrico 1177
36.4 Dispersión de Compton 1182
36.5 Naturaleza ondulatoria de las partículas 1185
36.6 Relación de incertidumbre 1188
36.7 Espín 1192
36.8 Espín y estadística 1193
Lo que hemos aprendido/Guía de estudio para examen 1198
Preguntas de opción múltiple/Preguntas/Problemas 1201



37 Mecánica cuántica 1206

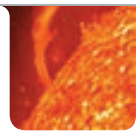
37.1 Función de onda 1207
37.2 Ecuación de Schrödinger 1210
37.3 Pozo de potencial infinito 1211
37.4 Pozos de potencial finitos 1217
37.5 Oscilador armónico 1225
37.6 Funciones de onda y mediciones 1228
37.7 Principio de correspondencia 1232
37.8 Ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo 1233
37.9 Función de onda de muchas partículas 1234
37.10 Antimateria 1238
Lo que hemos aprendido/Guía de estudio para examen 1242
Preguntas de opción múltiple/Preguntas/Problemas 1246

38 Física atómica 1251

38.1 Líneas espectrales 1252
38.2 El modelo del átomo de Bohr 1255
38.3 Función de onda del electrón de hidrógeno 1258
38.4 Otros átomos 1270
38.5 Láseres 1276
Lo que hemos aprendido/Guía de estudio para examen 1280
Preguntas de opción múltiple/Preguntas/Problemas 1283

39 Física de partículas elementales 1286

39.1 Reduccionismo 1287
39.2 Sondeo de la subestructura 1290
39.3 Partículas elementales 1297
39.4 Extensiones del modelo estándar 1305
39.5 Partículas compuestas 1309
39.6 Cosmología del Big Bang 1315
Lo que hemos aprendido/Guía de estudio para examen 1319
Preguntas de opción múltiple/Preguntas/Problemas 1321



40 Física nuclear 1325

40.1 Propiedades nucleares 1326
40.2 Decaimiento nuclear 1334
40.3 Modelos nucleares 1346
40.4 Energía nuclear: fisión y fusión 1351
40.5 Astrofísica nuclear 1358
40.6 Medicina nuclear 1359
Lo que hemos aprendido/Guía de estudio para examen 1361
Preguntas de opción múltiple/Preguntas/Problemas 1364

Apéndice A Matemáticas Primer A-1
Apéndice B Masas de isótopos, energías de enlace y vidas medias A-9
Apéndice C Propiedades de los elementos A-19
Respuestas de problemas y preguntas seleccionadas RES-1

Créditos C-1
Índice I-1

Prefacio

Física para ingeniería y ciencias, volumen 2, está concebida para usarse en la secuencia de física introductoria basada en cálculo en universidades e institutos superiores. Se puede emplear ya sea en una secuencia introductoria de dos semestres, o en una secuencia de tres semestres. El curso está diseñado para estudiantes de las carreras de ciencias biológicas, ciencias físicas, matemáticas e ingeniería.

Habilidades para la resolución de problemas: aprender a pensar como un científico

Quizás una de las habilidades más importantes que los estudiantes pueden adquirir en su curso de física es la de **resolver problemas y pensar críticamente acerca de una situación**. La física se basa en un núcleo de ideas fundamentales que se pueden aplicar a diversas situaciones y problemas. *Física para ingeniería y ciencias*, volumen 2, de Bauer y Westfall reconoce este hecho, y proporciona un método de resolución de problemas probado en clase por los autores, que se utiliza en todo el texto, el cual utiliza un formato de pasos múltiples.

> La sección "Lineamientos para resolución de problemas" ayuda a los estudiantes a mejorar su destreza en la resolución de problemas, al enseñarles cómo desmontar un enunciado de problema en sus componentes clave. Los pasos claves para escribir ecuaciones correctas se describen muy bien y son de gran ayuda para los estudiantes.
>
> *—Nina Abramzon, California Polytechnic University, Pomona*

> Con frecuencia escucho la desalentadora queja de estudiantes: "no sé por dónde empezar para resolver problemas". Yo creo que el enfoque sistemático de ustedes, una estrategia claramente expuesta, puede ayudar.
>
> *—Stephane Coutu, The Pennsylvania State University*

Método de resolución de problemas

Problema resuelto

Los **Problemas resueltos** numerados del libro son problemas totalmente trabajados, y cada uno de ellos sigue estrictamente el método de siete pasos que se describe en el capítulo 1:

1. **PIENSE:** Lea cuidadosamente el problema. Pregúntese cuáles cantidades se conocen, cuáles serían útiles pero se desconocen y cuáles se piden en la solución. Escriba estas cantidades y represéntelas con los símbolos que comúnmente se usan. Convierta a unidades SI, si es necesario.
2. **ESBOCE:** Haga un diagrama de la situación física que le ayude a visualizar el problema. Para muchos estilos de aprendizaje, es esencial una representación visual o gráfica, y ésta es a menudo indispensable para definir las variables.
3. **INVESTIGUE:** Escriba los principios físicos o leyes que se apliquen al problema. Use ecuaciones que representen estos principios y conecte entre sí las cantidades conocidas y desconocidas. A veces, habrá que deducir las ecuaciones combinando dos o más ecuaciones conocidas para obtener la desconocida.

PROBLEMA RESUELTO 6.6 **Energía producida por las Cataratas del Niágara**

PROBLEMA

Las Cataratas del Niágara vierten un promedio de 5 520 m^3 de agua en una caída de 49.0 m cada segundo. Si toda la energía potencial de esa agua se pudiese convertir en energía eléctrica, ¿cuánta potencia eléctrica podrían generar las Cataratas del Niágara?

SOLUCIÓN

PIENSE

La masa de un metro cúbico de agua es de 1 000 kg. El trabajo realizado por el agua al caer es igual al cambio en su energía potencial gravitacional. La potencia media es el trabajo por unidad de tiempo.

ESBOCE

Un croquis del eje vertical de coordenadas se sobrepone a una foto de las Cataratas del Niágara en la figura 6.22.

INVESTIGUE

La potencia media está dada por el trabajo por unidad de tiempo:

$$\bar{P} = \frac{W}{t}.$$

El trabajo que realiza el agua que cae es igual al cambio en la energía potencial gravitacional,

$$\Delta U = W.$$

El cambio en energía potencial gravitacional de una masa dada m de agua al caer una distancia h está dada por

$$\Delta U = mgh.$$

SIMPLIFIQUE

Podemos combinar las tres ecuaciones anteriores para obtener

$$\bar{P} = \frac{W}{t} = \frac{mgh}{t} = \left(\frac{m}{t}\right)gh.$$

(*continúa*)

CALCULE

Primero calculamos la masa del agua que se mueve en las cataratas por unidad de tiempo, a partir del volumen dado de agua por unidad de tiempo, usando la densidad del agua:

$$\frac{m}{t} = \left(5\,520\ \frac{\text{m}^3}{\text{s}}\right)\left(\frac{1\,000\ \text{kg}}{\text{m}^3}\right) = 5.52\cdot 10^6\ \text{kg/s}.$$

La potencia media es entonces

$$\bar{P} = \left(5.52\cdot 10^6\ \text{kg/s}\right)\left(9.81\ \text{m/s}^2\right)\left(49.0\ \text{m}\right) = 2\,653.4088\ \text{MW}.$$

REDONDEE

Redondeamos a tres cifras significativas:

$$\bar{P} = 2.65\ \text{GW}.$$

VUELVA A REVISAR

Nuestro resultado es comparable con la producción de plantas eléctricas grandes, del orden de 1 000 MW (1 GW). La capacidad combinada de generación eléctrica de todas las plantas hidroeléctricas en las Cataratas del Niágara tiene un pico de 4.4 GW durante la temporada de aguas altas en la primavera, lo cual es cercano a nuestra respuesta. Sin embargo, usted puede preguntar cómo produce electricidad el agua simplemente al caer de las Cataratas del Niágara. La respuesta es que no lo hace. En vez de esto, una gran fracción del agua del Río Niágara se desvía aguas arriba de las cataratas y se envía por túneles, donde mueve generadores de energía eléctrica. El agua que pasa por las cascadas durante el día y en la temporada turística de verano es sólo alrededor de 50% del caudal del Río Niágara. Este flujo se reduce todavía más, hasta 10%, y se desvía más agua para la generación de energía durante la noche y en el invierno.

4. **SIMPLIFIQUE:** Simplifique algebraicamente el resultado tanto como sea posible. Este paso es especialmente útil cuando se tiene que determinar más de una cantidad.
5. **CALCULE:** Sustituya con números y unidades en la ecuación simplificada y calcule. Típicamente, se obtienen en la respuesta un número y una unidad física.
6. **REDONDEE:** Considere el número de cifras significativas que debe contener el resultado. Un resultado obtenido por multiplicación o división se debe redondear al mismo número de cifras significativas de la cantidad de entrada que tenga el menor número de cifras significativas. No redondee en los pasos intermedios, ya que redondear antes de tiempo podría dar una solución errónea. Incluye las unidades adecuadas en la respuesta.
7. **VUELVA A REVISAR:** Considere el resultado. ¿Parece realista la respuesta (tanto por el número como por las unidades)? Examine los órdenes de magnitud. Pruebe su solución con casos límite.

Ejemplos

Los **ejemplos** más breves y concisos (solamente el planteamiento del problema y la solución) se enfocan en un punto o concepto específico. Los ejemplos más breves también sirven como puente entre los **Problemas resueltos** totalmente con el proceso completo de solución (con todos los siete pasos) y los problemas para tarea en casa.

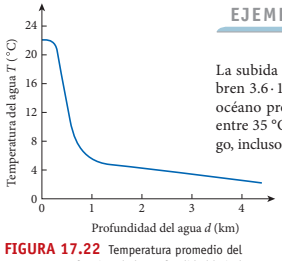


FIGURA 17.22 Temperatura promedio del océano como función de la profundidad bajo la superficie.

EJEMPLO 17.4 **Subida del nivel del mar debido a la expansión térmica del agua**

La subida en el nivel de los océanos de la Tierra es de preocupación actual. Los océanos cubren $3.6\cdot 10^8\ \text{km}^2$, un poco más de 70% del área superficial de la Tierra. La profundidad del océano promedio es de 3 700 m. La temperatura superficial del océano varía ampliamente, entre 35 °C en verano en el golfo Pérsico y –2 °C en las regiones árticas y antárticas. Sin embargo, incluso si la temperatura superficial del océano supera los 20 °C, la temperatura del agua cae rápidamente como función de la profundidad y alcanza 4 °C a una profundidad de 1 000 m (figura 17.22). La temperatura promedio global de toda el agua del mar es aproximadamente de 3 °C. La tabla 17.3 lista un coeficiente de expansión de cero para el agua a una temperatura de 4 °C. De esta manera, es seguro suponer que el volumen del agua oceánica cambia muy poco a una profundidad mayor a 1 000 m. Para los 1 000 m de la parte superior del agua oceánica, supongamos que la temperatura promedio global es de 10.0 °C y calculemos el efecto de la expansión térmica.

PROBLEMA

¿Cuánto cambiaría el nivel del mar, sólo como resultado de la expansión térmica del agua, si la temperatura del agua de todos los océanos se incrementara por $\Delta T = 1.0$ °C?

SOLUCIÓN

El coeficiente de expansión térmica del agua a 10.0 °C es $\beta = 87.5\cdot 10^{-6}\ ^\circ\text{C}^{-1}$ (de la tabla 17.3), y el cambio en el volumen de los océanos está dado por la ecuación 17.9, $\Delta V = \beta V \Delta T$, o

$$\frac{\Delta V}{V} = \beta \Delta T. \qquad \text{(i)}$$

Podemos expresar el área superficial total de los océanos como $A = (0.7)4\pi R^2$, donde R es el radio de la Tierra y el factor 0.7 refleja el hecho de que más o menos 70% de la superficie de esta esfera está cubierta de agua. Suponemos que el área superficial de los océanos se incrementa

Práctica para resolución de problemas

La **Práctica para resolución de problemas** proporciona **Problemas resueltos adicionales** que, de nuevo, siguen el formato completo de siete pasos. Esta sección se encuentra inmediatamente antes de los problemas de final de capítulo. También aquí se presentan **Estrategias y lineamientos para resolución de problemas.**

> Constituyen una útil herramienta para que los estudiantes mejoren sus habilidades en la solución de problemas. Los autores hicieron un buen trabajo al tratar, en cada capítulo, los pasos más importantes para llegar a la solución de los problemas de fin de capítulo. Los estudiantes que nunca antes tuvieron un curso de física encontrarán estos lineamientos muy benéficos. Me gustó especialmente la conexión entre el lineamiento y el problema resuelto. La descripción detallada de cómo resolver estos problemas ciertamente ayudará a los estudiantes a entender mejor los conceptos.
>
> *—Luca Bertello, University of California, Los Ángeles*

PRÁCTICA PARA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Lineamientos de problemas resueltos: energía cinética, trabajo y potencia

1. En todos los problemas que incluyan la energía, el primer paso es identificar claramente el sistema y los cambios en sus condiciones. Si un objeto sufre un desplazamiento, verifique que éste se mida siempre desde el mismo punto del objeto, como la orilla frontal o el centro del objeto. Si la rapidez del objeto cambia, identifique las rapideces inicial y final en puntos específicos. Con frecuencia es útil un diagrama para mostrar la posición y la rapidez del objeto en dos tiempos interesantes diferentes.
2. Tenga cuidado de identificar la fuerza que hace el trabajo. También observe si las fuerzas que hacen el trabajo son constantes o variables, porque se necesitan tratar en forma diferente.
3. Usted puede calcular la suma del trabajo realizado por fuerzas individuales que actúan sobre un objeto, o el trabajo realizado por la fuerza neta que actúa sobre un objeto; el resultado debe ser el mismo. (Usted puede usar esto como una forma de verificar sus cálculos.)
4. Recuerde que el sentido de la fuerza de reposición ejercida por un resorte es siempre opuesto al sentido del desplazamiento del resorte desde su punto de equilibrio.
5. La fórmula para la potencia, $P = \vec{F} \bullet \vec{v}$, es muy útil, pero se aplica sólo a una fuerza constante. Cuando use una definición más general de la potencia, asegúrese de distinguir entre la potencia media, $\bar{P} = \frac{W}{\Delta t}$, y el valor instantáneo de la potencia, $P = \frac{dW}{dt}$.

PROBLEMA RESUELTO 5.2 **Levantamiento de ladrillos**

PROBLEMA

Una carga de ladrillos en una obra de construcción tiene una masa de 85.0 kg. Una grúa levanta esta carga desde el piso hasta una altura de 50.0 m en 60.0 s a una rapidez baja constante. ¿Cuál es la potencia media de la grúa?

SOLUCIÓN

PIENSE

Subir los ladrillos con una rapidez baja constante significa que la energía cinética es despreciable, de modo que el trabajo en esta situación se realiza sólo contra la gravedad. No hay aceleración y la fricción es despreciable. La potencia media es entonces el trabajo realizado contra la gravedad dividido entre el tiempo necesario para elevar la carga de ladrillos hasta la altura especificada.

ESBOCE

En la figura 5.20 se muestra un diagrama de cuerpo libre de la carga de los ladrillos. Aquí hemos definido el sistema de coordenadas en el que el eje y es vertical y positivo hacia arriba. La tensión, T, que ejerce el cable de la grúa es una fuerza en sentido ascendente, y el peso, mg, de la carga de ladrillos es una fuerza descendente. Como la carga se mueve con rapidez constante, la suma de la tensión y el peso es cero. La carga se mueve verticalmente una distancia h, como se muestra en la figura 5.21.

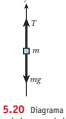


FIGURA 5.20 Diagrama de cuerpo libre de la carga de ladrillos de masa m que levanta una grúa.

INVESTIGUE

El trabajo, W, que realiza la grúa está dado por

$$W = mgh.$$

La potencia media, $\bar{P}$, necesaria para subir la carga en el tiempo dado Δt es

$$\bar{P} = \frac{W}{\Delta t}.$$

SIMPLIFIQUE

Combinando las dos ecuaciones anteriores se obtiene

$$\bar{P} = \frac{mgh}{\Delta t}.$$

CALCULE

Ahora introducimos los números y obtenemos

$$\bar{P} = \frac{(85.0\ \text{kg})(9.81\ \text{m/s}^2)(50.0\ \text{m})}{60.0\ \text{s}} = 694.875\ \text{W}.$$

FIGURA 5.21 La masa m se eleva una distancia h.

(*continúa*)

Preguntas y conjuntos de problemas de final de capítulo

Además de proporcionar lineamientos de solución de problemas, ejemplos y estrategias, *Física para ingeniería y ciencias*, volumen 2, ofrece también una amplia variedad de **preguntas y problemas de fin de capítulo**. Los profesores con frecuencia dicen: "no necesito un montón de problemas, sólo algunos problemas realmente buenos". Esta obra tiene ambas cosas. Las preguntas y los problemas de fin de capítulo se crearon con la idea de hacerlos interesantes para el lector. Los autores, junto con un panel de excelentes escritores (quienes, quizá sea lo más importante, son también instructores experimentados de física), escribieron las preguntas y los problemas para cada capítulo, asegurándose de proporcionar una amplia variedad en cuanto a nivel, contenido y estilo. Incluido en cada capítulo, hay un conjunto de Preguntas de opción múltiple, Preguntas, Problemas (por sección) y Problemas adicionales (sin "pista" de sección). Un punto así • identifica los problemas ligeramente más desafiantes, y dos puntos •• identifican los problemas aún más desafiantes.

PREGUNTAS DE OPCIÓN MÚLTIPLE

13.1 El agua salada tiene una densidad mayor que el agua dulce. Un bote flota tanto en el agua dulce como en el agua salada. La fuerza de flotación sobre el bote en el agua salada es _____ que en el agua dulce.

a) igual *b*) menor *c*) mayor

13.2 Usted llena un vaso alto con hielo y entonces agrega agua hasta el nivel del borde del vaso, de tal suerte que alguna parte del hielo flota sobre el borde. Cuando se derrite el hielo, ¿qué pasa con el nivel del agua? (Desprecie la evaporación y suponga que el hielo y el agua permanecen a 0 °C mientras el hielo se derrite.)

a) El agua se derrama por los bordes.
b) El nivel del agua cae por debajo del borde.
c) El nivel del agua permanece a nivel del borde.
d) Depende de la diferencia de la densidad entre el agua y el hielo.

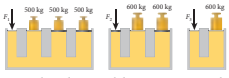
13.3 La figura muestra cuatro tanques abiertos idénticos, llenos hasta el borde con agua y puestos en una báscula. Unas bolas flotan en los tanques (2) y (3), pero un objeto se hunde hasta el fondo del tanque (4). ¿Cuál de los siguientes ordenan correctamente los pesos mostrados en las básculas?

a) (1) < (2) < (3) < (4) *c*) (1) < (2) = (3) = (4)
b) (1) < (2) = (3) < (4) *d*) (1) = (2) = (3) < (4)

13.4 Se encuentra en un bote lleno con grandes piedras a la mitad de un estanque pequeño. Usted comienza a tirar las piedras al agua. ¿Qué le pasa al nivel del agua del estanque?

a) Sube.
b) Baja.
c) No cambia.
d) Sube momentáneamente y luego baja cuando las piedras llegan al fondo.
e) No hay suficiente información para decidir.

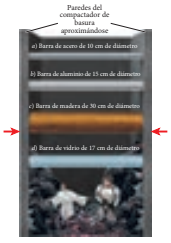
13.5 Ordene jerárquicamente, de mayor a menor, las magnitudes de las fuerzas F_1, F_2 y F_3 requeridas para equilibrar las masas mostradas en la figura.



13.6 En una tubería horizontal de agua que se estrecha a un radio menor, la velocidad del agua en la sección con el radio menor será mayor. ¿Qué pasa con la presión?

a) La presión será la misma tanto en la sección más ancha como en la más angosta de la tubería.
b) La presión será mayor en la sección más estrecha de la tubería.
c) La presión será mayor en la sección más ancha de la tubería.
d) Es imposible decir.

13.7 En una de las películas de *Star Wars* cuatro de los héroes quedan atrapados en un compactador de basura de la Estrella de la Muerte. Las paredes del compactador comienzan a acercarse y los héroes necesitan escoger un objeto de entre la basura para colocarlo entre las paredes que se acercan para detenerlas. Todos los objetos tienen la misma longitud y la misma sección transversal circular, pero sus diámetros y composiciones son diferentes. Suponga que cada objeto está orientado horizontalmente y no se dobla. Tienen el tiempo y la fuerza para sostener sólo uno de estos objetos entre las paredes. ¿Cuál de los objetos mostrados en la figura serviría mejor, esto es, resistiría la mayor fuerza por unidad de compresión?



13.8 Muchos altímetros determinan los cambios de altura midiendo los cambios en la presión atmosférica. Un altímetro que está diseñado para ser capaz de detectar cambios de altitud de 100 m cerca del nivel del mar debería ser capaz de detectar cambios de

a) aproximadamente 1 Pa.
b) aproximadamente 10 Pa.
c) aproximadamente 100 Pa.
d) aproximadamente 1 kPa.
e) aproximadamente 10 kPa.

13.9 ¿Cuál de las siguientes afirmaciones *no* se hizo de la derivación de la ecuación de Bernoulli?

a) Las líneas de corriente no se cruzan.
b) Hay viscosidad despreciable.
c) Hay fricción despreciable.
d) No hay turbulencia.
e) Hay gravedad despreciable.

13.10 Un vaso de precipitado se llena con agua hasta el borde. Cuando se coloca suavemente un patito de plástico de juguete ocasiona que algo de agua se derrame. El peso del vaso de precipitado con el patito flotando en él es

a) mayor que el peso antes de poner al patito.
b) menor que el peso antes de poner al patito.
c) igual que el peso antes de poner al patito.
d) mayor o menor que el peso antes de poner al patito, dependiendo del peso del patito.

13.11 Un pedazo de corcho (densidad = 0.33 g/cm^3) con una masa de 10 g se mantiene en su sitio bajo el agua mediante una cuerda, como se muestra en la figura. ¿Cuál es la tensión, T, en la cuerda?

a) 0.10 N *c*) 0.30 N *e*) 200 N
b) 0.20 N *d*) 100 N *f*) 300 N

PREGUNTAS

13.12 Usted sabe por experiencia que si el auto en el que está viajando se detiene súbitamente, los objetos pesados en la parte trasera se mueven hacia la parte delantera. ¿Por qué un globo lleno de helio en una situación semejante se mueve, en lugar de esto, hacia la parte trasera del auto?

13.13 Un pedazo de papel se dobla a la mitad y después se coloca sobre una mesa plana, de tal manera que se "levante" en la mitad como se muestra en la figura. Si usted sopla aire entre el papel y la mesa, ¿se moverá el papel hacia arriba o hacia abajo? Explique.

13.14 ¿En qué dirección actúa la fuerza debida al agua que fluye de la regadera sobre la cortina del baño, hacia adentro en la dirección de la ducha o hacia fuera? Explique.

13.15 Indique y discuta cualesquiera fallas en la siguiente afirmación: *El ascensor de coches hidráulico es un dispositivo que funciona sobre la base del principio de Pascal. Semejante dispositivo puede producir grandes fuerzas de salida con pequeñas fuerzas de entrada. De esta manera, con una pequeña cantidad de trabajo realizado por la fuerza de entrada, se produce una cantidad mucho mayor por la fuerza de salida, y se puede levantar el enorme peso de un coche.*

13.16 Dados dos resortes de tamaño y forma idénticos, uno hecho de acero y otro de aluminio, ¿cuál tiene la mayor constante de resorte? ¿Depende la diferencia más en el módulo de corte o en el módulo volumétrico del material?

13.17 Un material tiene una mayor densidad que otro. ¿Son los átomos o moléculas individuales del primer material necesariamente más pesados que aquellos del segundo?

13.18 Las balanzas analíticas se calibran para dar valores correctos de la masa de artículos como objetos de acero con una densidad de ρ_s = 8 000.00 kg/m^3. La calibración compensa la fuerza de flotación que surge debido a que las mediciones se realizan en el aire, con una densidad de ρ_a = 1.205 kg/m^3. ¿Qué compensación debe hacerse para medir masas de objetos de un material distinto, de densidad ρ? ¿Tiene alguna importancia la fuerza de flotación del aire?

13.19 Si usted abre el grifo en el lavabo del baño, observará que la corriente parece estrecharse a partir del punto en el cual deja la abertura del grifo hasta el punto en el cual golpea contra el fondo del lavabo. ¿Por qué ocurre esto?

13.20 En muchos problemas que involucran a la segunda ley de Newton al movimiento de los objetos sólidos, se desprecia la fricción a fin de hacer la solución más fácil. La contraparte de la fricción entre sólidos es la viscosidad de los líquidos. ¿Se tornan los problemas que involucran el flujo de los fluidos más simples si se desprecia la viscosidad? Explique.

13.21 Usted tiene dos esferas de plata idénticas y dos fluidos desconocidos, A y B. Coloca una esfera en el fluido A y se hunde; coloca la otra esfera en el fluido B y flota. ¿Qué puede concluir acerca de la fuerza de flotación del fluido A contra la del fluido B?

13.22 El agua fluye de la abertura circular de un grifo de radio r_0, dirigido verticalmente hacia abajo, a velocidad v_0. Conforme la corriente de agua cae, se estrecha. Encuentre una expresión del radio de la corriente como función de la distancia que ha caído, $r(y)$, donde y se mide hacia abajo a partir de la abertura. Desprecie la fragmentación eventual de la corriente en gotitas y cualquier resistencia debida al arrastre o la viscosidad.

PROBLEMAS

Una • y dos •• indican un nivel creciente de dificultad del problema.

Secciones 13.1 y 13.2

13.23 El aire está formado por moléculas de diversos tipos, con una masa molar media de 28.95 g. Un adulto que inhala 0.50 L de aire a nivel del mar, ¿cómo cuántas moléculas inspira?

•**13.24** La sal de mesa ordinaria (NaCl) consiste de iones de sodio y cloro dispuestos en una *red cristalina cúbica centrada en las caras*. Esto es, los cristales de cloruro de sodio consisten de celdas unitarias cúbicas con un ion de sodio en cada esquina y en el centro de cada cara y un ion de cloro en el centro del cubo y en el punto medio de cada arista. La densidad del cloruro de sodio es de 2.165 · 10^3 kg/m^3. Calcule el espacio entre los iones de sodio y de cloro adyacentes en el cristal.

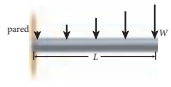
Sección 13.3

13.25 Un candelabro de 20 kg se encuentra suspendido del techo por cuatro alambres de acero verticales. Cada alambre tiene una longitud sin carga de 1 m y un diámetro de 2 mm y cada uno soporta la misma carga. Cuando se cuelga el candelabro, ¿cuánto se estiran los cables?

13.26 Encuentre el diámetro mínimo de una cuerda de nailon de 50.0 m de largo que no se estirará más de 1.00 cm cuando se suspenda una carga de 70.0 kg de su extremo inferior. Suponga que Y_{nailon} = 3.51 · 10^8 N/m^2.

13.27 Un alambre de acero de 2.0 m de largo en un instrumento musical tiene un radio de 0.03 mm. Cuando el cable está bajo una tensión de 90 N, ¿cuánto cambia su longitud?

•**13.28** Una barra de longitud L se fija a una pared. La carga sobre la barra se incrementa linealmente (como se muestra por las flechas en la figura) desde cero en el extremo izquierdo a W newton por unidad de longitud en el extremo derecho. Encuentre la fuerza de corte (cortante) en



a) el extremo derecho, *b*) el centro y *c*) el extremo izquierdo.

•**13.29** El abismo de Challenger en la Fosa de las Marianas del Océano Pacífico es el punto más profundo conocido en los

La técnica de resolución de problemas, para tomar prestada una frase de mis estudiantes, "no es una alucinación". Yo soy escéptico cuando otros proponen enfoques "unitalla" para resolución de problemas. He visto demasiados de estos enfoques que simplemente no funcionan desde el punto de vista pedagógico. El enfoque usado por los autores, sin embargo, está hecho de tal manera que los estudiantes se ven realmente forzados a usar su intuición antes de comenzar reflexionando en los primeros principios pertinentes. . .

¡Guau! Hay algunos problemas realmente bonitos al final del capítulo. Mis felicitaciones a los autores. Había una linda diversidad de problemas, y la mayoría de ellos exigían mucho más que un simple "conectar y jugar". Encontré muchos problemas que yo me sentiría inclinado a asignar.

—Brent Corbin, University of California, Los Ángeles

El texto logra un equilibrio muy bueno al proporcionar detalles matemáticos y rigor, junto con una presentación clara e intuitiva de los conceptos físicos. El equilibrio y la variedad de los problemas, tanto problemas resueltos como problemas de fin de capítulo, son extraordinarios. En este libro se encuentran muchas características que son difíciles de encontrar en otros textos estándar, incluyendo el uso correcto de la notación vectorial, la evaluación explícita de las integrales múltiples, por ejemplo en los cálculos de momento de inercia y las intrigantes conexiones con la física moderna.

—Lisa Everett, University of Wisconsin, Madison

Temas contemporáneos: cautivar las imaginaciones de los estudiantes

Física para ingeniería y ciencias, volumen 2, incluye una amplia variedad de temas contemporáneos, así como presentaciones basadas en investigación, diseñadas para ayudar a los estudiantes a apreciar la belleza de la física y a ver cómo los conceptos de la física se relacionan con el desarrollo de nuevas tecnologías en los campos de la ingeniería, la medicina, la astronomía y otros. La sección "El panorama general", al principio del texto, está diseñada para introducir a los estudiantes a algunas asombrosas nuevas fronteras de la investigación que se están explorando en diversos campos de la física, y a los resultados que se han estado logrando durante los años recientes. Los autores vuelven a estos temas en varios puntos dentro del libro para una exploración más a fondo.

Los autores de este libro también presentan reiteradamente diferentes aspectos del amplio tema de la energía, tratando conceptos de fuentes de energía (fósiles, nucleares, renovables, alternativas, etc.), eficiencia energética y efectos ecológicos de las decisiones sobre suministro de energía. Se tratan las fuentes alternativas de energía y los recursos renovables dentro del marco de posibles soluciones a la crisis energética. Estas discusiones brindan una formidable oportunidad para captar el interés de los estudiantes, y son accesibles en el nivel de física introductoria.

En el texto se encuentran los siguientes temas de investigación de la física contemporánea y los siguientes análisis temáticos sobre energía (en verde):

Capítulo 21
Sección 21.3 Superconductores
Sección 21.5 Fuerza electrostática. Coulomb. Precipitador electrostático

Capítulo 22
Ejemplo 22.4 Cámara de proyección de tiempo (STAR TPC)
La sección 22.6 explica la generación no invasiva de imágenes de los campos eléctricos del cerebro y la interfaz cerebro-computadora

Capítulo 23
La sección 23.2 describe nuevas baterías
Ejemplo 23.2 Automóviles accionados por baterías

Capítulo 24
Ejemplo 24.4 La National Ignition Facility
Sección 24.9 Supercapacitores

Capítulo 25
Ejemplo 25.1 Iontoforesis
Sección 25.3 Dependencia de la temperatura y superconductividad
Problema resuelto 25.2 Sonda cerebral (ECoG)
La sección 25.7, Energía y potencia en circuitos eléctricos, explica la transmisión de corriente eléctrica de alto voltaje
Sección 25.8 Diodos: calles de un solo sentido en circuitos
Problema resuelto 25.4 Diámetro de cable para línea eléctrica

Capítulo 27
Sección 27.3 y ejemplo 27.1 STAR TPC
La sección 27.3 tiene una subsección sobre la levitación magnética
Ejemplo 27.3 Ciclotrón

Capítulo 28
Problema resuelto 28.1 Acelerador de rieles electromagnéticos
La sección 28.7 explica los imanes superconductores y el efecto Meissner

Capítulo 29
La sección 29.4, Generadores y motores, explica el frenado regenerativo
La sección 29.10 explica los discos duros de computadora y la magnetorresistencia gigante

Capítulo 30
Sección 30.7 Transformadores

Capítulo 31
Ejemplo 31.1 Uso de paneles solares para cargar un automóvil eléctrico

Capítulo 32
La sección 32.2 explica los espejos "perfectos" e intervenciones quirúrgicas con láser

Capítulo 33
Sección 33.8 Trampas de rayos láser

Capítulo 35
El ejemplo 35.2 explica la posibilidad de un colisionador de muones
La sección 35.6 explica las partículas en un acelerador
La sección 35.8 explica el Telescopio Espacial Hubble y el efecto de ondas gravitacionales, agujeros negros, LIGO y LISA
Sección 35.9 La relatividad en nuestra vida diaria: GPS

Capítulo 36
La sección 36.2, Radiación de cuerpo negro, describe la radiación de fondo cósmica
La sección 36.3 explica los dispositivos de visión nocturna
La sección 36.8, subsección sobre el "Condensado Bose-Einstein"

Capítulo 37
Introducción a la computación cuántica, la nanociencia y la nanotecnología
La sección 37.9 analiza la función de onda de dos fermiones y la modelación en computadora para sistemas físicos, así como la computación cuántica

Capítulo 38
La sección 38.4 tiene una subsección titulada "Producción de rayos X" que explica su uso en medicina
La sección 38.5 analiza el uso de los láseres en la cirugía, proyectiles, mediciones, enlaces químicos, láseres de electrón libre y el sistema de láser NIF

Capítulo 39
La sección 39.1 explica el CERN, el LHC, sistemas complejos de nivel atómico, plegado pruteínico, ADN y el origen de la vida.
La sección 39.3 explica las partículas elementales y los bosones de Higgs
La sección 39.4 tiene una subsección titulada "Supersimetría y teoría de cuerdas"

Capítulo 40
La sección 40.2 explica las desintegraciones doble beta sin neutrinos
La sección 40.3 describe el modelo de capa nuclear y los modelos de colisiones nucleares
La sección 40.4, Energía nuclear: fisión y fusión, explica el uso de la fusión controlada para la producción de energía, así como la instalación ITER y el NIF

¡Esta idea me parece genial! Ayudaría al instructor a mostrar a los estudiantes que la física es un tema vivo y apasionante. . . . porque muestra que la física es una materia que trata de lo que está sucediendo, que es indispensable para descubrir cómo funciona el universo, que es necesaria para desarrollar nuevas tecnologías, y cómo puede beneficiar a la humanidad . . . . Los (capítulos) contienen un montón de interesantes temas modernos y los explican con mucha claridad.

—Joseph Kapusta, University of Minnesota

La sección 17.5 sobre la temperatura superficial de la Tierra es excelente y es un ejemplo de lo que *falta* en muchos libros de texto introductorios: ejemplos que sean relevantes y apasionantes para los estudiantes.

—John William Gary, University of California, Riverside

Pienso que la idea de incluir la física moderna o contemporánea en todo el texto es genial. Los estudiantes a menudo abordan la física como una ciencia de conceptos que se descubrieron hace mucho tiempo. Ven a la ingeniería como la ciencia que les ha dado los avances en tecnología que ven actualmente. Sería genial mostrar a los estudiantes dónde exactamente comienzan estos avances, con la física.

—Donna W. Stokes, University of Houston

La característica más fuerte. . . El uso de matemáticas reales, especialmente cálculo, para deducir relaciones cinemáticas, las relaciones entre cantidades en movimiento circular, la dirección de la fuerza gravitacional, la magnitud de la fuerza de mareas, la extensión máxima de un conjunto de bloques apilados. Los problemas resueltos siempre se tratan primero simbólicamente. Con demasiada frecuencia, los libros de texto no dejan que las matemáticas trabajen para ellos.

—Kieran Mullen, University of Oklahoma

Contenido enriquecido: flexibilidad para sus estudiantes y para las necesidades del curso

A los instructores que buscan cobertura adicional de ciertos temas y apoyo matemático para éstos, *Física para ingeniería y ciencias*, volumen 2, les ofrece también flexibilidad. Este libro incluye algunos temas y algunos cálculos que no aparecen en muchos otros textos. Sin embargo, estos temas se han presentado de tal manera que su exclusión no afectará el curso total. Todo el texto está escrito en un nivel adecuado para el estudiante típico de física introductoria. En seguida hay una lista de contenido de cobertura flexible, así como de apoyo matemático adicional.

Capítulo 22

Sección 22.9 El problema resuelto 22.3 cubre el campo eléctrico para una distribución de carga esférica no uniforme.

Capítulo 25

Sección 25.5 El problema resuelto 25.2, Sonda cerebral, trata un caso de sección transversal no constante.

Capítulo 32

Sección 32.3 Este libro de texto profundiza más en el cálculo diferencial e integral que muchos otros, mediante la demostración de cómo se puede usar el cálculo para deducir de las leyes del movimiento de Newton la forma necesariamente parabólica de las superficies líquidas que tienen un movimiento circular.

Algunos problemas de fin de capítulo, tales como el problema 32.43, también usan el cálculo para resolver un problema de minimización.

Capítulo 34

Sección 34.10 Esta sección explica la calidad de las rejillas de difracción usando el concepto de dispersión. En muchos libros de texto de física similares, simplemente se da la fórmula de la dispersión. Este texto, sin embargo, usa el cálculo para obtener la dispersión de una manera clara.

Capítulo 35

Sección 35.2 Esta sección tiene una deducción muy instructiva e intuitiva de las variables del cono de luz, que sobrepasa lo que se encuentra en la mayoría de textos estándar.

Sección 35.6 El texto contiene deducciones basadas en cálculo diferencial e integral para la transformación de la velocidad y la energía (basadas en la integración de la dependencia del trabajo con respecto a la distancia). Mientras que la deducción de la energía utiliza técnicas estándar de integración y se usa en la mayoría de los libros, la deducción de la transformación de la velocidad es sin igual y muy instructiva.

Capítulo 36

Sección 36.2 El nivel de detalle que caracteriza la deducción de varias leyes de radiación (Wien, Planck, Boltzmann, Raleigh-Jeans) no se encuentra en muchos otros libros de texto.

Sección 36.8 La introducción de las estadísticas de Bose-Einstein y Fermi-Dirac es importante y exclusiva de este libro de texto. La conexión con las leyes de radiación es especialmente importante. Los problemas de fin de capítulo relacionados con la sección 36.8, en especial los problemas 36.53 a 36.55, constituyen un reto y utilizan las matemáticas pertinentes.

Capítulo 37

La mayor parte de los libros de texto enseñan la mecánica cuántica con uso mínimo del cálculo diferencial e integral, con un enfoque más que nada conceptual. Este libro utiliza un enfoque más formal, de la sección 35.1 sobre funciones de onda. Los estudiantes están expuestos a deducciones características de la física moderna, comenzando por la condición de normalización de la función de onda sobre los operadores para momento y energía cinética, y continuando con soluciones para potenciales infinitos y finitos. Se introducen los hamiltonianos y se aplican a las ecuaciones de Schrödinger y Dirac. La función de onda de muchas partículas se cubre luego en la sección 37.9. Los problemas de fin de capítulo que utilizan el cálculo incluyen del 37.28 al 37.39.

Capítulo 38

Este libro de texto deduce toda la solución de la función de onda de electrones de hidrógeno y la desglosa en sus partes radial y angular. Esta solución completa permite al estudiante deducir la degeneración de los niveles cuánticos en vez de simplemente aprender una mera fórmula para calcular los niveles sin entender su origen físico.

Sección 38.3 La solución de la ecuación de Schrödinger en la sección 38.3 se basa en las deducciones del capítulo 37, y el texto continúa explorando la solución completa de la función de onda de electrones de hidrógeno. Los problemas de fin de capítulo 38.35, 38.36 y 38.37 usan el cálculo diferencial e integral del capítulo.

Capítulo 39

La definición de sección transversal de dispersión diferencial se da en las ecuaciones 39.3 y 39.4, basadas en la física clásica (Rutherford). (Muchos otros textos simplemente muestran y describen las gráficas.) La sección transversal diferencial a partir de consideraciones cuánticas se da en la ecuación 39.6, y el factor de forma (desviación de Rutherford y desviación de partícula punto) se da en las ecuaciones 39.7 y 39.8. Los factores de forma no se describen a menudo en otros textos. Aunque esta explicación aporta detalle matemático, podría fácilmente omitirse para acomodarse a las necesidades del curso. El problema de fin de capítulo 39.32 usa el cálculo diferencial e integral para calcular la fracción de partículas dispersadas dentro de un rango de ángulos.

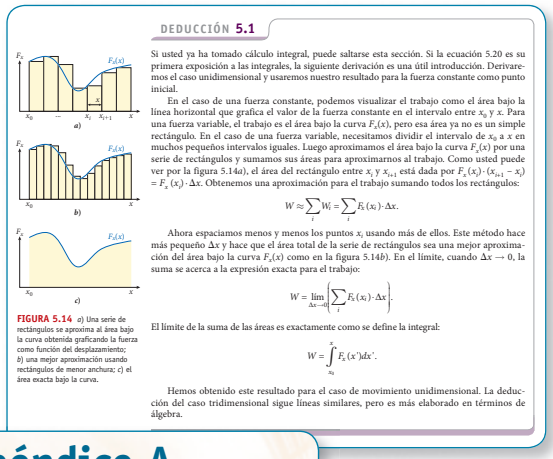
Capítulo 40

El texto presenta una explicación un poco más detallada que la que usualmente se ve en la deducción de la energía de Fermi, al mismo tiempo que trata el modelo de núcleo de Fermi en la sección 40.3. Algunos problemas de fin de capítulo podrían implicar la integración simple de la función exponencial: 40.31, 40.33, 40.52, 40.53 y 40.61.

Deducciones

En el texto se proporcionan deducciones generales como ejemplos para los estudiantes, que finalmente necesitarán desarrollar sus propias deducciones al repasar los problemas resueltos, al trabajar con los ejemplos y al resolver los problemas de fin de capítulo. Las deducciones se identifican en el texto con encabezados numerados para que los instructores puedan incluir este detallado material según sea necesario para acomodarse a las necesidades de sus cursos.

> Nuevamente, la deducción que da como resultado la ecuación 6.15 es formidable. Pocos libros de los que he visto muestran a los estudiantes los pasos matemáticos de las deducciones. Éste es un punto fuerte de este libro. Asimismo, en la siguiente sección, me gusta mucho la generalización a tres dimensiones de la relación entre fuerza y energía potencial. Esto es algo que siempre hago en clase, aunque la mayoría de los libros no se acercan a esto.
>
> *—James Stone, Boston University*



DEDUCCIÓN **5.1**

Si usted ya ha tomado cálculo integral, puede saltarse esta sección. Si la ecuación 5.20 es su primera exposición a las integrales, la siguiente derivación es una útil introducción. Derivaremos el caso unidimensional y usaremos nuestro resultado para la fuerza constante como punto inicial.

En el caso de una fuerza constante, podemos visualizar el trabajo como el área bajo la línea horizontal que grafica el valor de la fuerza constante en el intervalo entre x_0 y x. Para una fuerza variable, el trabajo es el área bajo la curva $F_x(x)$, pero esa área ya no es un simple rectángulo. En el caso de una fuerza variable, necesitamos dividir el intervalo de x_0 a x en muchos pequeños intervalos iguales. Luego aproximamos el área bajo la curva $F_x(x)$ por una serie de rectángulos y sumamos sus áreas para aproximarnos al trabajo. Como usted puede ver por la figura 5.14*a*), el área del rectángulo entre x_i y x_{i+1} está dada por $F_x(x_i)\cdot(x_{i+1} - x_i) = F_x(x_i)\cdot\Delta x$. Obtenemos una aproximación para el trabajo sumando todos los rectángulos:

$$W \approx \sum_i W_i = \sum_i F_i(x_i)\cdot\Delta x.$$

Ahora espaciamos menos y menos los puntos x_i usando más de ellos. Este método hace más pequeño Δx y hace que el área total de la serie de rectángulos sea una mejor aproximación del área bajo la curva $F_x(x)$ como en la figura 5.14*b*). En el límite, cuando $\Delta x \to 0$, la suma se acerca a la expresión exacta para el trabajo:

$$W = \lim_{\Delta x \to 0}\left(\sum_i F_i(x_i)\cdot\Delta x\right).$$

El límite de la suma de las áreas es exactamente como se define la integral:

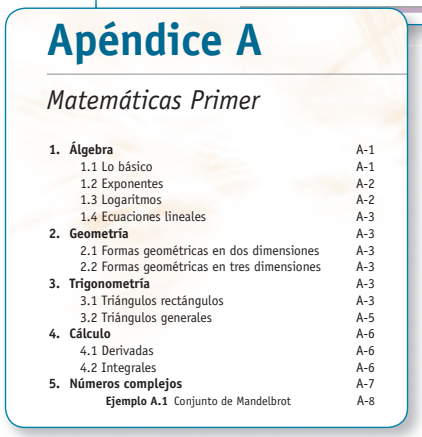
$$W = \int_{x_0}^{x} F_x(x')dx'.$$

Hemos obtenido este resultado para el caso de movimiento unidimensional. La deducción del caso tridimensional sigue líneas similares, pero es más elaborado en términos de álgebra.

FIGURA 5.14 *a*) Una serie de rectángulos se aproxima al área bajo la curva obtenida graficando la fuerza como función del desplazamiento; *b*) una mejor aproximación usando rectángulos de menor anchura; *c*) el área exacta bajo la curva.

Introducción al cálculo diferencial e integral

En los apéndices se puede encontrar una introducción al cálculo diferencial e integral. Como la secuencia de este curso típicamente se imparte en el primer año de estudio en las universidades, presupone un conocimiento de la física y de las matemáticas anterior. Es preferible que los estudiantes hayan tenido un curso de cálculo diferencial e integral antes de comenzar esta secuencia del curso; pero también se puede tomar el cálculo en paralelo. Para facilitar esto último, el texto contiene una breve introducción en el apéndice, que da los resultados principales del cálculo diferencial e integral sin las rigurosas deducciones.



Apéndice A

Matemáticas Primer

1. **Álgebra** A-1
   - 1.1 Lo básico A-1
   - 1.2 Exponentes A-2
   - 1.3 Logaritmos A-2
   - 1.4 Ecuaciones lineales A-3
2. **Geometría** A-3
   - 2.1 Formas geométricas en dos dimensiones A-3
   - 2.2 Formas geométricas en tres dimensiones A-3
3. **Trigonometría** A-3
   - 3.1 Triángulos rectángulos A-3
   - 3.2 Triángulos generales A-5
4. **Cálculo** A-6
   - 4.1 Derivadas A-6
   - 4.2 Integrales A-6
5. **Números complejos** A-7

Ejemplo A.1 Conjunto de Mandelbrot A-8

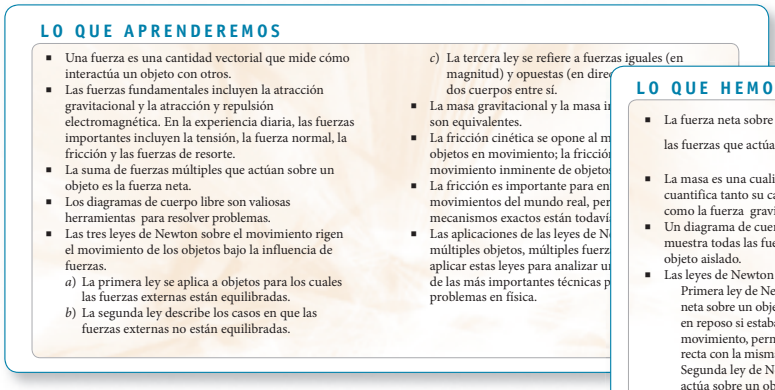
Construcción del conocimiento: el sistema de aprendizaje del texto

Sinopsis de inicio de capítulo

Al principio de cada capítulo hay una sinopsis que presenta los títulos de las secciones del capítulo. Esta sinopsis también incluye los títulos de los ejemplos y de los problemas resueltos que se encuentran en el capítulo. De un vistazo, los estudiantes y los instructores saben si un tema, ejemplo o problema que desean está en el capítulo.

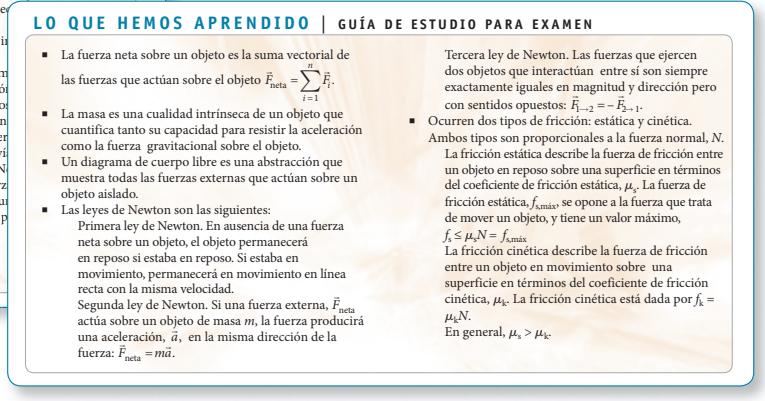
Lo que aprenderemos/Lo que hemos aprendido

Cada capítulo de *Física para ingeniería y ciencias*, volumen 2, está organizado como un buen seminario de investigación. Alguna vez se dijo: "Di lo que les dirás, luego diles, y luego diles lo que les dijiste". Cada capítulo comienza con **Lo que aprenderemos**: un rápido resumen de los puntos principales, sin ninguna ecuación. Al final de cada capítulo, **Lo que hemos aprendido/Guía de estudio para examen** contiene los conceptos clave, incluyendo las ecuaciones principales, los símbolos principales y los términos clave. También se da una lista de todos los símbolos que se usan en las fórmulas del capítulo.



LO QUE APRENDEREMOS

- Una fuerza es una cantidad vectorial que mide cómo interactúa un objeto con otros.
- Las fuerzas fundamentales incluyen la atracción gravitacional y la atracción y repulsión electromagnética. En la experiencia diaria, las fuerzas importantes incluyen la tensión, la fuerza normal, la fricción y las fuerzas de resorte.
- La suma de fuerzas múltiples que actúan sobre un objeto es la fuerza neta.
- Los diagramas de cuerpo libre son valiosas herramientas para resolver problemas.
- Las tres leyes de Newton sobre el movimiento rigen el movimiento de los objetos bajo la influencia de fuerzas.
  a) La primera ley se aplica a objetos para los cuales las fuerzas externas están equilibradas.
  b) La segunda ley describe los casos en que las fuerzas externas no están equilibradas.
  c) La tercera ley se refiere a fuerzas iguales (en magnitud) y opuestas (en dire… dos cuerpos entre sí.
- La masa gravitacional y la masa i… son equivalentes.
- La fricción cinética se opone al m… objetos en movimiento; la fricció… movimiento inminente de objeto…
- La fricción es importante para en… movimientos del mundo real, per… mecanismos exactos están todaví…
- Las aplicaciones de las leyes de N… múltiples objetos, múltiples fuerz… aplicar estas leyes para analizar u… de las más importantes técnicas p… problemas en física.



LO QUE HEMOS APRENDIDO | GUÍA DE ESTUDIO PARA EXAMEN

- La fuerza neta sobre un objeto es la suma vectorial de las fuerzas que actúan sobre el objeto $\vec{F}_{\text{neta}} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i$.
- La masa es una cualidad intrínseca de un objeto que cuantifica tanto su capacidad para resistir la aceleración como la fuerza gravitacional sobre el objeto.
- Un diagrama de cuerpo libre es una abstracción que muestra todas las fuerzas externas que actúan sobre un objeto aislado.
- Las leyes de Newton son las siguientes:
  Primera ley de Newton. En ausencia de una fuerza neta sobre un objeto, el objeto permanecerá en reposo si estaba en reposo. Si estaba en movimiento, permanecerá en movimiento en línea recta con la misma velocidad.
  Segunda ley de Newton. Si una fuerza externa, $\vec{F}_{\text{neta}}$ actúa sobre un objeto de masa m, la fuerza producirá una aceleración, $\vec{a}$, en la misma dirección de la fuerza: $\vec{F}_{\text{neta}} = m\vec{a}$.
  Tercera ley de Newton. Las fuerzas que ejercen dos objetos que interactúan entre sí son siempre exactamente iguales en magnitud y dirección pero con sentidos opuestos: $\vec{F}_{1\to 2} = -\vec{F}_{2\to 1}$.
- Ocurren dos tipos de fricción: estática y cinética. Ambos tipos son proporcionales a la fuerza normal, N.
  La fricción estática describe la fuerza de fricción entre un objeto en reposo sobre una superficie en términos del coeficiente de fricción estática, μ_s. La fuerza de fricción estática, $f_{s\text{máx}}$, se opone a la fuerza que trata de mover un objeto, y tiene un valor máximo, $f_s \le \mu_s N = f_{s\text{máx}}$.
  La fricción cinética describe la fuerza de fricción entre un objeto en movimiento sobre una superficie en términos del coeficiente de fricción cinética, μ_k. La fricción cinética está dada por $f_k = \mu_k N$.
  En general, $\mu_s > \mu_k$.

Introducciones conceptuales

Se proporcionan explicaciones conceptuales en el texto, antes de las explicaciones matemáticas, fórmulas o deducciones, con objeto de dejar claro para el estudiante por qué se necesita la cantidad, por qué es útil y por qué se debe definir exactamente. Los autores pasan entonces de la explicación y definición conceptual a una fórmula y unos términos exactos.

> Esta sección sobre expansión térmica es extraordinaria, y los problemas de ejemplo que la apoyan están muy bien hechos. Esta sección se puede poner a competir con cualquier texto que haya en el mercado, y salir vencedora. Los autores lo hacen muy bien en conceptos básicos.
>
> *—Marllin Simon, Auburn University*

6.3 Oportunidad de autoexamen

¿Por qué la pelota de color más claro llega al fondo en la figura 6.10 antes que la otra pelota?

FIGURA 6.10 Carrera de dos pelotas que bajan por diferentes inclinaciones, desde la misma altura.

6.3 La pelota de color más claro desciende primero a una elevación inferior y, por lo tanto, convierte primero más de su energía potencial en energía cinética. Mayor energía cinética significa mayor rapidez. Por lo tanto, la pelota de color más claro alcanza rapideces más altas más pronto y puede moverse al extremo inferior de la pista más rápidamente, aun cuando la longitud de su trayectoria sea mayor.

Oportunidades de autoexamen

En seguida de la exposición de los conceptos principales dentro del texto, se incluyen conjuntos de preguntas para animar a los estudiantes a que dialoguen internamente. Estas preguntas ayudan a los estudiantes a pensar de manera crítica acerca de lo que acaban de leer, a decidir si han captado bien el concepto y a elaborar una lista de preguntas de seguimiento para plantear en la clase. Las respuestas para los autoexámenes se encuentran al final de cada capítulo.

> Las oportunidades de autoexamen son eficaces para animar a los estudiantes a ubicar lo que han aprendido en este capítulo en el contexto de la comprensión conceptual más amplia que han estado estudiando a lo largo de los capítulos precedentes.
>
> *— Nina Abramzon, California Polytechnic University, Pomona*

2.2 Ejercicio en clase

El lanzamiento de una pelota verticalmente hacia arriba proporciona un ejemplo de caída libre. En el instante en que la pelota llega a su altura máxima, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?

a) La aceleración de la pelota apunta hacia abajo, y su velocidad hacia arriba.

b) La aceleración de la pelota es cero, y su velocidad señala hacia arriba.

c) La aceleración de la pelota apunta hacia arriba, y su velocidad hacia arriba.

d) La aceleración de la pelota apunta hacia abajo, y su velocidad es cero.

e) La aceleración de la pelota apunta hacia arriba, y su velocidad es cero.

f) La aceleración de la pelota es cero y su velocidad apunta hacia abajo.

Ejercicios en clase

Los ejercicios en clase están diseñados para usarse con la tecnología de sistema de respuesta personal. Aparecerán en el texto de tal manera que los estudiantes puedan comenzar a contemplar los conceptos.

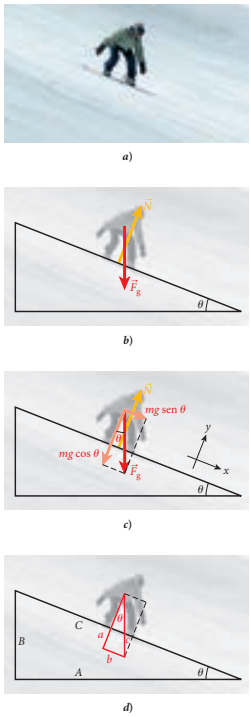


FIGURA 4.16 *a*) El patinador de tabla sobre nieve es un ejemplo de movimiento en un plano inclinado. *b*) Diagrama de cuerpo libre del patinador sobre el plano inclinado. *c*) Diagrama de cuerpo libre del patinador, con un sistema de coordenadas agregado. *d*) Triángulos semejantes en el problema del plano inclinado.

Programa visual

La familiaridad con el trabajo de artes gráficas en internet y en los juegos de video ha aumentado las exigencias para la presentación gráfica en libros de texto, que debe ser ahora más sofisticada para que resulte atractiva tanto para estudiantes como para profesores. Aquí se dan algunos ejemplos de técnicas e ideas que se implementan en *Física para ingeniería y ciencias*:

- Sobreposiciones de dibujos lineales sobre fotografías conectan conceptos físicos a veces muy abstractos con las realidades y las experiencias cotidianas de los estudiantes.
- Una vista tridimensional de los dibujos lineales añade plasticidad a la presentación. Los autores crearon gráficas matemáticamente exactas en programas de software tales como Mathematica, y luego los artistas gráficos las usaron para asegurar una completa exactitud junto con un estilo visualmente atractivo.

El proceso de desarrollo de 360° es un procedimiento continuo, orientado al mercado, para desarrollar productos asertivos e innovadores, impresos y digitales. Está dedicado a la mejora continua, y se guía por múltiples circuitos de realimentación de los clientes y por diversos puntos de verificación. Este proceso se inicia durante las primeras etapas de la planeación de nuestros nuevos productos, se intensifica durante el desarrollo y la producción, y luego comienza nuevamente en el momento de la publicación, en anticipación de la siguiente edición.

Un principio clave en el desarrollo de cualquier texto sobre física es su capacidad para adaptarse a las especificaciones de enseñanza en forma universal. La única forma de lograr esto es al tener contacto con voces universales, y aprender de sus sugerencias. Confiamos en que nuestro libro tenga el contenido más actual que la industria ofrece, lo cual impulsa nuestro deseo de exactitud al nivel más elevado posible. Para conseguir este objetivo, nos hemos movido por un camino arduo de producción. Los consejos y la mente abierta fueron cruciales en la producción de un texto de calidad superior.

Hemos comprometido a más de 200 profesores y estudiantes para guiarnos en el desarrollo de esta primera edición. Al invertir en esta amplia tarea, McGraw-Hill le ofrece a usted un producto que se ha creado, refinado, probado y validado como una herramienta exitosa para su curso.

Consejo de consultores

Se eligió cuidadosamente a un grupo de prestigiados instructores activos en el curso de física basada en cálculo diferencial e integral y en grupos de investigación que sirvieron como los principales consejeros y consultores para los autores y el equipo editorial con respecto al desarrollo del manuscrito. El consejo de consultores revisó el manuscrito; sirvió como grupo de evaluación para las cuestiones pedagógicas, de medios y de diseño; ayudaron a responder a señalamientos de otros revisores; aprobaron cambios de organización, y asistieron a grupos de enfoque para confirmar que el manuscrito estaba listo para su publicación.

Nina Abramzon, *California Polytechnic University–Pomona*
Rene Bellweid, *Wayne State University*
David Harrison, *University of Toronto*
John Hopkins, *The Pennsylvania State University*
David C. Ingram, *Ohio University–Athens*
Michael Lisa, *The Ohio State University*
Amy Pope, *Clemson University*
Roberto Ramos, *Drexel University*

Colaboradores

Un panel de excelentes escritores creó las preguntas y los problemas adicionales para aumentar la variedad de los ejercicios que se encuentran en cada capítulo:

Carlos Bertulani, *Texas A&M University–Commerce*
Ken Thomas Bolland, *Ohio State University*
John Cerne, *State University of New York–Buffalo**
Ralph Chamberlain, *Arizona State University*
Eugenia Ciocan, *Clemson University**
Fivos Drymiotis, *Clemson University*
Michael Famiano, *Western Michigan University**
Yung Huh, *South Dakota State University*
Pedram Leilabady, *University of North Carolina–Charlotte**
M.A.K. Lodhi, *Texas Tech University*
Charley Myles, *Texas Tech University*
Todd Pedlar, *Luther College**
Corneliu Rablau, *Kettering University*
Roberto Ramos, *Drexel University*
Ian Redmount, *Saint Louis University*
Todd Smith, *University of Dayton**
Donna Stokes, *University of Houston**
Stephen Swingle, *City College of San Francisco*
Marshall Thomsen, *Eastern Michigan University*
Prem Vaishnava, *Kettering University**
John Vasut, *Baylor University**

*Estos colaboradores también fueron autores de preguntas para el banco de pruebas que acompaña a esta obra, junto con David Bannon de la Oregon State University, mientras que Richard Halstein, de Michigan State University, organizó y revisó todas las colaboraciones. Además, Suzanne Willis, de North Illinois University, nos ayudó a compilar nuestro material para el *e-book*. Jack Cuthbert, del Holmes Community College de Ridgeland, compuso los textos de los ejercicios en clase en archivos PowerPoint. Collette March y Deborah Damcott, del Harper College, editaron las clases en PowerPoint, y finalmente, pero no por ello de menor importancia, Rob Hagood, del Waschtenaw Community College y Amy Pope de la Clemson University, emplearon horas innumerables revisando y proporcionando observaciones vitales sobre la calidad de nuestro contenido para Connect.

Pruebas en clase

Durante cinco años antes de la producción de este libro, los autores probaron y refinaron los materiales con aproximadamente 4 000 de nuestros estudiantes de la Michigan State University. Recogieron la realimentación por escrito y también llevaron a cabo entrevistas individuales con una muestra representativa de los estudiantes, además de las pruebas en el salón de clase de los ejercicios y de las diapositivas PowerPoint. Varios de los colegas de los autores (Alexandra Gade, Alex Brown, Bernard Pope, Carl Schmidt, Chong-Yu Ruan, C.P. Yuan, Dan Stump, Ed Brown, Hendrik Schatz, Kris Starosta, Lisa Lapidus, Michael Harrison, Michael Moore, Reinhard Schwienhorst, Salemeh Ahmad, S.B. Mahanti, Scott Pratt, Stan Schriber, Tibor Nagy y Thomas Duguet), quienes coimpartieron la secuencia de física introductoria en cursos paralelos, también proporcionaron ayuda e ideas invaluables, y sus contribuciones hicieron mucho más fuerte el presente libro.

1a. RONDA: MANUSCRITO DE LOS AUTORES

- √ Rondas múltiples de revisión por parte de profesores universitarios de física
- √ Revisión independiente de la precisión del texto, de los ejemplos y de los problemas resueltos por una firma profesional que empleó a matemáticos y a físicos
- √ Segunda revisión independiente de precisión de los problemas de final de capítulo por el equipo de autores del manual de soluciones

2a. RONDA: PRUEBAS TIPOGRÁFICAS

- √ Autores
- √ Primera lectura de pruebas de imprenta
- √ Tercera revisión de exactitud del texto, de los ejemplos, de los problemas resueltos y de los problemas de fin de capítulo por la misma firma profesional que empleó a matemáticos y a físicos

3a. RONDA: PRUEBAS TIPOGRÁFICAS REVISADAS

- √ Autores
- √ Segunda lectura de pruebas de imprenta
- √ Revisión de precisión de cualquier punto no resuelto por la firma profesional que empleó a matemáticos y a físicos
- √ Se hace una cuarta revisión de precisión del contenido de los problemas del final de cada capítulo y de las soluciones, después de que este contenido se introdujo en el sistema de tareas en línea Connect, lo cual permitió corregir cualquier asunto posterior en el texto impreso y los manuales de soluciones en línea
- √ Revisiones por profesores de física

4a. RONDA: CONFIRMACIÓN DE LAS PRUEBAS TIPOGRÁFICAS

- √ Revisión final por los autores

RONDA FINAL: IMPRESIÓN

Aseguramiento de la exactitud

Los autores y los editores reconocen el hecho de que las inexactitudes pueden causar frustración en los instructores y en los estudiantes. Por lo tanto, durante toda la escritura y la producción de esta primera edición, hemos trabajado diligentemente para eliminar errores e inexactitudes. Ron Fitzgerald, John Klapstein y su equipo de trabajo en MathResources llevaron a cabo una revisión de precisión independiente y trabajaron en todas las preguntas y los problemas de final de capítulo en la versión definitiva del manuscrito. Luego coordinaron la resolución de discrepancias entre revisiones de precisión, lo que asegura la exactitud del texto, de las respuestas del final de libro, y los manuales de soluciones. Luego se hicieron correcciones al manuscrito antes de su composición tipográfica.

Las páginas del texto tipográficamente compuestas se sometieron a doble lectura de revisión contra el manuscrito, para asegurar la corrección de cualesquier errores introducidos al maquetar el manuscrito. Cualquier punto relativo a los ejemplos textuales, a los problemas resueltos y a las soluciones, a las preguntas y a los problemas de final de capítulo, y a las respuestas a problemas se revisaron respecto a su precisión por parte MathResources nuevamente en la etapa de páginas compuestas tipográficamente, después de haber maquetado el texto. Esta última ronda de correcciones se revisó en forma cruzada contra los manuales de soluciones. Los problemas de final de capítulo del texto, junto con sus soluciones, se sometieron a revisión doble por dos firmas independientes a su entrada en el sistema de tareas en línea Connect Physics, y nuevamente, se trataron todos los puntos en el texto y en los manuales de soluciones.

Simposios de desarrollo

McGraw-Hill llevó a cabo cuatro simposios y grupos de enfoque de revisores directamente relacionados con el desarrollo de esta obra. Estos eventos constituyeron una oportunidad para que los editores, los gerentes de marketing y los productores digitales de McGraw-Hill obtuvieran información acerca de las necesidades y los retos de profesores que impartían cursos de física basada en cálculo diferencial e integral, y para confirmar el rumbo de la primera edición de este libro, sus suplementos y sus productos digitales.

Nina Abramzon, *California State Polytechnic University–Pomona*
Ed Adelson, *The Ohio State University*
Mohan Aggarwal, *Alabama A&M University*
Rene Bellweid, *Wayne State University*
Jason Brown, *Clemson University*
Ronald Brown, *California Polytechnic University San Luis Obispo*
Mike Dubson, *University of Colorado–Boulder*
David Elmore, *Purdue University*
Robert Endorf, *University of Cincinnati*
Gus Evrard, *University of Michigan*
Chris Gould, *University of Southern California*
John B. Gruber, *San Jose State University*
John Hardy, *Texas A&M University*
David Harrison, *University of Toronto*
Richard Heinz, *Indiana University*
Satoshi Hinata, *Auburn University*
John Hopkins, *The Pennsylvania State University*
T. William Houk, *Miami University–Ohio*
David C. Ingram, *Ohio University–Athens*
Elaine Kirkpatrick, *Rose-Hulman Institute of Technology*
David Lamp, *Texas Tech University*
Michael McInerney, *Rose-Hulman Institute of Technology*
Bruce Mellado, *University of Wisconsin–Madison*
C. Fred Moore, *University of Texas–Austin*
Jeffrey Morgan, *University of Northern Iowa*
Kiumars Parvin, *San Jose State University*
Amy Pope, *Clemson University*
Earl Prohofsky, *Purdue University*
Roberto Ramos, *Drexel University*
Dubravka Rupnik, *Louisiana State University*
Homeyra Sadaghiani, *California State Polytechnic University–Pomona*
Sergey Savrasov, *University of California–Davis*
Marllin Simon, *Auburn University*
Leigh Smith, *University of Cincinnati*
Donna Stokes, *University of Houston*
Michael Strauss, *University of Oklahoma*
Gregory Tarlé, *University of Michigan*

Revisores del texto

Numerosos docentes participaron en más de 200 revisiones del manuscrito y la tabla de contenido propuesta, para proporcionar realimentación sobre el texto narrativo, el contenido, los elementos pedagógicos, la precisión, la organización, los conjuntos de problemas y calidad general. Esta realimentación la resumió el equipo de trabajo del libro y se usó para guiar la dirección de la versión final del manuscrito.

Nina Abramzon, *California Polytechnic University–Pomona*
Edward Adelson, *Ohio State University*
Albert Altman, *UMASS Lowell*
Paul Avery, *University of Florida*
David T. Bannon, *Oregon State University*
Marco Battaglia, *UC Berkeley and LBNL*
Douglas R. Bergman, *Rutgers, The State University of New Jersey*
Luca Bertello, *University of California–Los Angeles*
Peter Beyersdorf, *San Jose State University*
Helmut Biritz, *Georgia Institute of Technology*
Ken Thomas Bolland, *Ohio State University*
Richard Bone, *Florida International University*
Dieter Brill, *University of Maryland–College Park*
Branton J. Campbell, *Brigham Young University*
Duncan Carlsmith, *University of Wisconsin–Madison*
Neal Cason, *University of Notre Dame*
K. Kelvin Cheng, *Texas Tech University*
Chris Church, *Miami University of Ohio–Oxford*
Eugenia Ciocan, *Clemson University*
Robert Clare, *University of California–Riverside*
Roy Clarke, *University of Michigan*
J. M. Collins, *Marquette University*
Brent A. Corbin, *University of California–Los Angeles*
Stephane Coutu, *The Pennsylvania State University*
William Dawicke, *Milwaukee School of Engineering*

Mike Dennin, *University of California–Irvine*
John Devlin, *University of Michigan–Dearborn*
John DiNardo, *Drexel University*
Fivos R. Drymiotis, *Clemson University*
Michael DuVernois, *University of Hawaii–Manoa*
David Ellis, *The University of Toledo*
Robert Endorf, *University of Cincinnati*
David Ermer, *Mississippi State University*
Harold Evensen, *University of Wisconsin–Platteville*
Lisa L. Everett, *University of Wisconsin–Madison*
Frank Ferrone, *Drexel University*
Leonard Finegold, *Drexel University*
Ray Frey, *University of Oregon*
J. William Gary, *University of California–Riverside*
Stuart Gazes, *University of Chicago*
Benjamin Grinstein, *University of California–San Diego*
John Gruber, *San Jose State University*
Kathleen A. Harper, *Denison University*
Edwin E. Hach, III, *Rochester Institute of Technology*
John Hardy, *Texas A & M University*
Laurent Hodges, *Iowa State University*
John Hopkins, *The Pennsylvania State University*
George K. Horton, *Rutgers University*
T. William Houk, *Miami University–Ohio*
Eric Hudson, *Massachusetts Institute of Technology*
A. K. Hyder, *University of Notre Dame*
David C. Ingram, *Ohio University–Athens*
Diane Jacobs, *Eastern Michigan University*
Rongying Jin, *The University of Tennessee–Knoxville*
Kate L. Jones, *University of Tennessee*
Steven E. Jones, *Brigham Young University*
Teruki Kamon, *Texas A & M University*
Lev Kaplan, *Tulane University*
Joseph Kapusta, *University of Minnesota*
Kathleen Kash, *Case Western Reserve*
Sanford Kern, *Colorado State University*
Eric Kincanon, *Gonzaga University*
Elaine Kirkpatick, *Rose-Hulman Institute of Technology*
Brian D. Koberlein, *Rochester Institute of Technology*
W. David Kulp, III, *Georgia Institute of Technology*
Fred Kuttner, *University of California–Santa Cruz*
David Lamp, *Texas Tech University*
Andre' LeClair, *Cornell University*
Patrick R. LeClair, *University of Alabama*
Luis Lehner, *Louisiana State University–Baton Rouge*
Michael Lisa, *The Ohio State University*
Samuel E. Lofland, *Rowan University*
Jerome Long, *Virginia Tech*
A. James Mallmann, *Milwaukee School of Engineering*
Pete Markowitz, *Florida International University*
Daniel Marlow, *Princeton University*
Bruce Mason, *Oklahoma University*
Martin McHugh, *Loyola University*
Michael McInerney, *Rose-Hulman Institute of Technology*
David McIntyre, *Oregon State University*
Marina Milner-Bolotin, *Ryerson University–Toronto*
Kieran Mullen, *University of Oklahoma*
Curt Nelson, *Gonzaga University*
Mark Neubauer, *University of Illinois at Urbana–Champaign*
Cindy Neyer, *Tri-State University*
Craig Ogilvie, *Iowa State University*
Bradford G. Orr, *The University of Michigan*
Karur Padmanabhan, *Wayne State University*
Jacqueline Pau, *University of California–Los Angeles*
Leo Piilonen, *Virginia Tech*
Claude Pruneau, *Wayne State University*
Johann Rafelski, *University of Arizona*
Roberto Ramos, *Drexel University*
Lawrence B. Rees, *Brigham Young University*
Andrew J. Rivers, *Northwestern University*
James W. Rohlf, *Boston University*
Philip Roos, *University of Maryland*
Dubravka Rupnik, *Louisiana State University*
Ertan Salik, *California State Polytechnic University–Pomona*
Otto Sankey, *Arizona State University*
Sergey Savrasov, *University of California–Davis*
John Schroeder, *Rensselaer Polytech*
Kunnat Sebastian, *University of Massachusetts–Lowell*
Bjoern Seipel, *Portland State University*
Jerry Shakov, *Tulane University*
Ralph Shiell, *Trent University*
Irfan Siddiqi, *University of California–Berkeley*
Marllin L. Simon, *Auburn University*
Alex Small, *California State Polytechnic University–Pomona*
Leigh Smith, *University of Cincinnati*
Xian-Ning Song, *Richland College*
Jeff Sonier, *Simon Fraser University–Surrey Central*
Chad E. Sosolik, *Clemson University*
Donna W. Stokes, *University of Houston*
James Stone, *Boston University*
Michael G. Strauss, *University of Oklahoma*
Yang Sun, *University of Notre Dame*
Maarij Syed, *Rose-Hulman Institute of Technology*
Douglas C. Tussey, *The Pennsylvania State University*
Somdev Tyagi, *Drexel University*
Erich W. Varnes, *University of Arizona*
Gautam Vemuri, *Indiana University-Purdue University–Indianapolis*
Thad Walker, *University of Wisconsin–Madison*
Fuqiang Wang, *Purdue University*
David J. Webb, *University of California–Davis*
Kurt Wiesenfeld, *Georgia Tech*
Fred Wietfeldt, *Tulane University*
Gary Williams, *University of California–Los Angeles*
Sun Yang, *University of Notre Dame*
L. You, *Georgia Tech*
Billy Younger, *College of the Albemarle*
Andrew Zangwill, *Georgia Institute of Technology*
Jens Zorn, *University of Michigan–Ann Arbor*
Michael Zudov, *University of Minnesota*

Revisores internacionales del texto

El Hassan El Aaoud, *University of Hail, Hail KSA*
Mohamed S. Abdelmonem, *King Fahd University of Petroleum and Minerals, Dhahran, Saudi Arabia*
Sudeb Bhattacharya, *Saha Institute of Nuclear Physics, Kolkata, India*
Shi-Jian Gu, *The Chinese University of Hong Kong, Shatin, N.T., Hong Kong*
Nasser M. Hamdan, *The American University of Sharjah*
Moustafa Hussein, *Arab Academy for Science & Engineering, Egypt*
A.K. Jain, *I.I.T. Roorkee*
Carsten Knudsen, *Technical University of Denmark*
Ajal Kumar, *The University of the South Pacific, Fiji*
Ravindra Kumar Sinha, *Delhi College of Engineering*
Nazir Mustapha, *Al-Imam University*
Reza Nejat, *McMaster University*
K. Porsezian, *Pondicherry University, Puducherry*
Wang Qing-hai, *National University of Singapore*
Kenneth J. Ragan, *McGill University*

Agradecimientos

Reza Nejat, *McMaster University*
K. Porsezian, *Pondicherry University, Puducherry*
Wang Qing-hai, *Universidad Nacional de Singapur*
Kenneth J. Ragan, *McGill University*

Es imposible editar un libro como el que usted tiene en sus manos sin el tremendo trabajo de un increíble número de individuos dedicados. Primero que nada, nos gustaría agradecer al talentoso equipo de mercadotecnia y editorial de McGraw-Hill: Marty Lange, Kent Peterson, Thomas Timp, Ryan Blankenship, Mary Hurley, Liz Recker, Daryl Bruflodt, Lisa Nicks, Dan Wallace y, especialmente, Deb Hash nos ayudaron en formas innumerables y lograron reencender nuestro entusiasmo después de cada revisión. Su espíritu de equipo, buen humor e inquebrantable optimismo nos mantuvo en el camino y siempre hizo divertido para nosotros dedicar las horas aparentemente interminables que fueron necesarias para producir el manuscrito.

Los editores de desarrollo, Richard Heinz y David Chelton nos ayudaron a pasar por la cantidad casi infinita de comentarios y sugerencias para mejoras por parte de nuestros revisores. Ellos, así como los revisores y nuestro consejo de asesores, merecen una gran parte del crédito por mejorar la calidad del manuscrito final. Nuestros colegas catedráticos del Departamento de Física y Astronomía en la Michigan State University —Alexandra Gade, Alex Brown, Bernard Pope, Carl Schmidt, Chong-Yu Ruan, C. P. Yuan, Dan Stump, Ed Brown, Hendrik Schatz, Kris Starosta, Lisa Lapidus, Michael Harrison, Michael Moore, Reinhard Schwienhorst, Salemeh Ahmad, S. B. Mahanti, Scott Pratt, Stan Schriber, Tibor Nagy y Thomas Duguet— nos ayudaron también en formas innumerables, impartiendo sus clases y secciones con los materiales desarrollados por nosotros y, en este proceso, proporcionando inapreciable realimentación sobre lo que funcionaba bien y lo que necesitaba refinamiento adicional. Les damos las gracias a todos.

Decidimos pedir la participación de un gran número de instructores de física en todo el país en la creación de los problemas de fin de capítulo, con objeto de asegurar que estos problemas tuvieran la máxima calidad y pertinencia y el máximo valor didáctico. Agradecemos a todos quienes aportaron problemas por compartir con nosotros algo de su mejor trabajo, especialmente a Richard Hallstein, quien se echó a cuestas la tarea de organizar y procesar todas las contribuciones.

En el momento en que entregamos el manuscrito final al editor, entró en acción todo un ejército nuevo de profesionales y añadió otra capa de refinamiento, que transformó un manuscrito en un libro. John Klapstein y el equipo de MathResources trabajó en todos y cada uno de los problemas de tarea en casa, cada ejercicio y cada número y ecuación que escribimos. Los investigadores fotográficos, especialmente Danny Meldung, mejoraron inmensamente la calidad de las imágenes que se usaron en el libro, e hicieron divertido para nosotros el proceso de selección. Pamela Crews y el equipo de Precision Graphics usaron nuestros dibujos originales, pero mejoraron sustancialmente su calidad, aunque permanecieron al mismo tiempo fieles a nuestros cálculos originales que se usaron para producir los dibujos. Nuestra correctora final Jane Hoover y su equipo pusieron todo junto en su forma final, descifraron nuestros garabatos y se aseguraron de que el producto final fuera tan legible como fuera posible. El equipo de diseño y producción de McGraw-Hill, Jayne Klein, David Hash, Carrie Burger, Sandy Ludovissy, Judi David y Mary Jane Lampe, guió el libro y sus materiales auxiliares con pericia a lo largo del proceso de publicación. Todos ellos merecen nuestra enorme gratitud.

Finalmente, no podríamos haber sobrevivido durante los últimos seis años de esfuerzo sin el apoyo de nuestras familias, que tuvieron que aguantarnos trabajando en el libro durante innumerables tardes, fines de semana e incluso durante muchas vacaciones. Esperamos que toda su paciencia y el aliento que nos dieron haya dado frutos, y les agradecemos desde el fondo de nuestros corazones por acompañarnos durante la realización de este libro.

—Wolfgang Bauer
—Gary D. Westfall

El panorama general

Fronteras de la física moderna

Este libro intenta darle una visión de algunos avances recientes en la física. Ejemplos de áreas avanzadas de la investigación son accesibles con el conocimiento disponible en el nivel introductorio. En muchas de las principales universidades, los estudiantes de reciente ingreso y los más avanzados ya participan en investigación de vanguardia en física. Con frecuencia, esta participación no exige nada más que las herramientas que se presentan en este libro, unos pocos días o semanas de lectura adicional, la curiosidad y decisión necesarias para aprender verdades y habilidades nuevas.

Las páginas que siguen introducen algunas de las asombrosas fronteras de la investigación actual en física y describen algunos resultados que se han obtenido durante los últimos años. Esta introducción se limita al nivel cualitativo, obviando todos los detalles matemáticos y técnicos. Los números de capítulo entre paréntesis indican dónde se pueden encontrar exploraciones más a fondo sobre los temas.

Física cuántica

En el 2005 fue el centenario de los históricos escritos de Albert Einstein sobre el movimiento browniano (donde mostró que los átomos son reales; vea los capítulos 13 y 38), sobre la teoría de la relatividad (capítulo 35) y sobre el efecto fotoeléctrico (capítulo 36). Este último escrito introdujo una de las ideas que forman la base de la mecánica cuántica, la física de la materia a la escala de átomos y moléculas. La mecánica cuántica es un producto del siglo xx que condujo, por ejemplo, a la invención de los láseres, que ahora se usan rutinariamente en los reproductores de CD, DVD y Blu-ray, en los lectores de precios e incluso en cirugía oftálmica, entre muchas otras aplicaciones. La mecánica cuántica también ha proporcionado un entendimiento más fundamental de la química: los físicos usan pulsos láser ultracortos menores de 10^{-15} s de duración para comprender cómo se desarrollan los enlaces químicos. La revolución cuántica ha incluido descubrimientos exóticos como la antimateria, y no se ve un final. Durante la última década, se han formado grupos de átomos llamados *condensados de Bose-Einstein* en trampas electromagnéticas; este trabajo ha abierto un campo enteramente nuevo de investigación en física atómica y cuántica (vea los capítulos 36 a 38).

Física de la materia condensada y electrónica

Las innovaciones de la física crearon y siguen impulsando la industria de alta tecnología. Hace poco más de 50 años, se inventó el primer transistor en los Laboratorios Bell, con lo que dio inicio la era de la electrónica. La unidad central de procesamiento (CPU) de una computadora típica de escritorio o portátil contiene ahora más de 100 millones de elementos de transistor. El crecimiento increíble en la potencia y el alcance de aplicaciones de las computadoras durante las últimas décadas se ha hecho posible por la investigación en la física de materia condensada. Gordon Moore, cofundador de Intel, hizo una célebre observación de que la potencia de procesamiento por computadora se duplica cada 18 meses, una tendencia que, según se predice, continuará por lo menos durante otra década o más.

Incluso la capacidad de almacenamiento en computadora crece más rápido que la potencia de procesamiento, con un periodo de duplicación de 12 meses. El premio Nobel de física de 2007 se otorgó a Albert Fert y Peter Grünberg por su descubrimiento, en 1988, de la *magnetorresistencia gigante*. Al cabo de una década para que este descubrimiento se aplicara en los discos duros de computadora, permitiendo capacidades de almacenamiento de cientos de gigabytes (1 gigabyte = 1 mil millones de fragmentos de información), e incluso terabytes (1 terabyte = 1 billón de fragmentos de información).

La capacidad de las redes crece con rapidez incluso mayor que la capacidad de almacenamiento o la potencia de procesamiento, duplicándose cada nueve meses. Ahora puede ir a casi cualquier país del mundo y encontrar puntos de acceso inalámbrico con los cuales puede conectar su laptop o teléfono celular habilitado para WiFi a internet. Con todo, han pasado menos de un par de décadas desde la concepción de la World Wide Web por Tim Berners-Lee, quien a la sazón trabajaba en el laboratorio de física de partículas CERN en Suiza, y desarrolló este nuevo medio para facilitar la colaboración entre físicos de partículas en diferentes partes del mundo.

Los teléfonos celulares y otros potentes dispositivos de comunicación han llegado a las manos de casi todos. La investigación de la física moderna permite una miniaturización progresiva de los dispositivos electrónicos de consumo. Este proceso impulsa una convergencia digital, que hace posible equipar los teléfonos celulares con cámaras digitales, grabadoras de video, capacidad de recibir correo electrónico, buscadores en la red y receptores del sistema de posicionamiento global. Continuamente se agrega más funcionalidad, mientras los precios siguen bajando. Ahora, cuarenta años después del primer alunizaje, muchos teléfonos celulares acumulan más y más capacidad de cómputo que la que usó la nave espacial *Apollo* para el viaje a la Luna.

Computación cuántica

Los investigadores de física todavía están esforzándose por vencer los límites de la computación. En la actualidad, muchos grupos investigan maneras de construir una computadora cuántica. Teóricamente, una computadora cuántica que consiste de N procesadores podría ejecutar 2^N instrucciones de manera simultánea, mientras que una computadora convencional que consiste de N procesadores puede ejecutar sólo N instrucciones al mismo tiempo. Así, una computadora cuántica que consiste de 100 procesadores excedería la capacidad de cómputo de todas las supercomputadoras que existen en la actualidad. Por supuesto, se tienen que resolver muchos problemas de fondo antes de que esta visión se pueda volver realidad; pero, de nuevo, hace 50 años parecía totalmente imposible poner 100 millones de transistores en un chip de computadora del tamaño de una uña de pulgar.

Física computacional

La interacción entre la física y las computadoras funciona en ambos sentidos. Tradicionalmente, las investigaciones de física eran de naturaleza ya sea física o teórica. Los libros de texto parecen favorecer el lado teórico, porque presentan las fórmulas principales de la física; pero, de hecho, analizan las ideas conceptuales que están encapsuladas en las fórmulas. Por otro lado, gran parte de la investigación tiene su origen en el lado experimental, cuando fenómenos observados por primera vez parecen desafiar la descripción teórica. Sin embargo, con el advenimiento de las computadoras, se ha hecho posible una tercera rama de la física: la física computacional. La mayoría de los físicos se apoyan en las computadoras para procesar datos, visualizar información, resolver grandes sistemas de ecuaciones conjugadas o estudiar sistemas para los cuales no se conocen formulaciones analíticas sencillas.

El nuevo campo del caos y la dinámica no lineal es el ejemplo básico de tal estudio. Se afirma que el físico atmosférico Edward Lorenz, del MIT, fue el primero en simular el comportamiento caótico con la ayuda de una computadora, en 1963, cuando resolvió tres ecuaciones conjugadas para un modelo climatológico sencillo, y detectó una dependencia sensible respecto a las condiciones iniciales; aun las diferencias más pequeñas al principio de la simulación daban como resultado desviaciones muy grandes posteriormente. En la actualidad a este comportamiento se le llama a veces *efecto mariposa*, por la idea de que una mariposa que aletea en China puede

cambiar el clima en Estados Unidos unas pocas semanas después. Esta sensibilidad implica que la predicción determinista del clima a largo plazo es imposible.

Complejidad y caos

Con frecuencia los sistemas de muchos elementos muestran un comportamiento muy complejo, aun cuando los elementos individuales sigan reglas muy sencillas de dinámica no lineal. Los físicos han comenzado a estudiar la complejidad en muchos sistemas, que incluye simples montones de arena, congestionamientos de tránsito, el mercado de valores, la evolución biológica, los fractales y el autoensamble de moléculas y nanoestructuras. La ciencia de la complejidad es otro campo que se descubrió apenas durante la última década y está experimentando un rápido crecimiento.

El caos y la dinámica no lineal se explican en el capítulo 7 acerca de la cantidad de movimiento y en el capítulo 14 acerca de las oscilaciones. Los modelos son a veces bastante simples, y los estudiantes de física de primer año pueden hacer contribuciones valiosas. Sin embargo, la solución generalmente exige algo de habilidad en programación de computadoras. La pericia en programación le permitirá contribuir en muchos proyectos avanzados de investigación en física.

Nanotecnología

Los físicos están comenzando a adquirir el conocimiento y las habilidades que se necesitan para manipular la materia átomo por átomo. Durante las últimas dos décadas se inventaron los microscopios de escaneo o barrido, de túnel y de fuerza atómica, que permiten a los investigadores ver átomos individuales (figura 1). En algunos casos se pueden mover átomos individuales en formas controladas. La nanociencia y la nanotecnología se dedican a este tipo de retos, cuya solución es prometedora de grandes avances tecnológicos, desde componentes electrónicos todavía más miniaturizados y, por lo tanto más potentes, hasta el diseño de nuevos medicamentos o incluso la manipulación del ADN para curar algunas enfermedades.

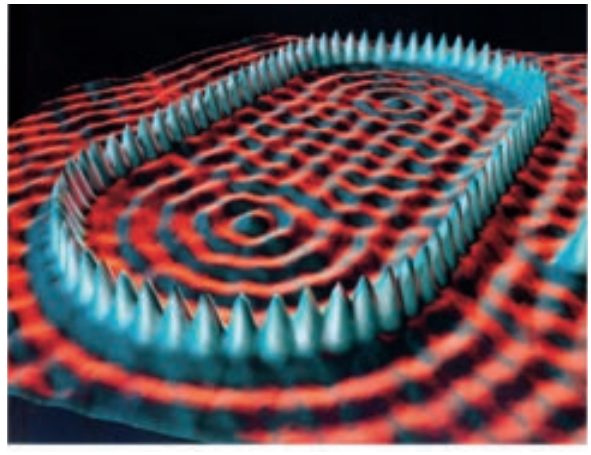


FIGURA 1 Átomos individuales de hierro dispuestos en la forma de un estadio sobre una superficie de cobre. Las ondulaciones dentro del estadio son el resultado de ondas estacionarias formadas por distribuciones de densidad electrónica. Este arreglo se creó y luego se obtuvo su imagen mediante un microscopio de efecto túnel (capítulo 37).

Biofísica

Igual que los físicos penetraron al terreno de los químicos durante el siglo, está teniendo lugar en el siglo xxi una rápida convergencia interdisciplinaria de la física y la biología molecular. Los investigadores ya pueden usar pinzas láser (capítulo 34) para mover biomoléculas individuales. La cristalografía de rayos X (capítulo 34) se ha vuelto suficientemente sofisticada para permitir a los investigadores obtener imágenes de estructuras tridimensionales de proteínas muy complicadas. Además, la biofísica teórica está comenzando a acertar en la predicción de la estructura espacial y la funcionalidad asociada de estas moléculas a partir de la secuencia de aminoácidos que contienen.

La figura 2 muestra un modelo de estructura espacial de la proteína ARN Polimerasa II, con el código de color que representa la distribución de cargas (azul es positivo, rojo es negativo) en la superficie de esta biomolécula. (El capítulo 23, sobre potenciales eléctricos, le ayudará a entender la determinación de distribuciones de carga y sus potenciales para arreglos mucho más sencillos.) También se muestra en la figura un segmento de la molécula de ADN (estructura espiral amarilla en el centro), que indica cómo la ARN Polimerasa II se conecta al ADN y funciona como un agente de escisión.

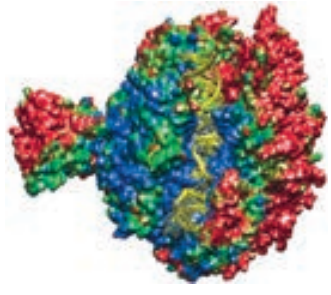
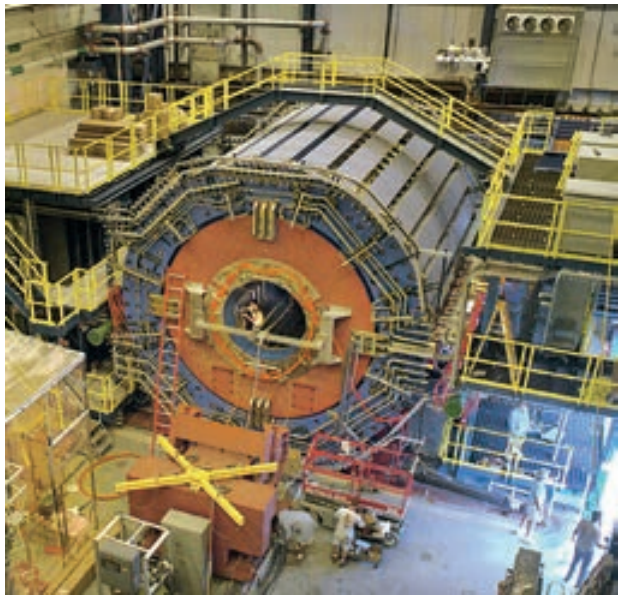


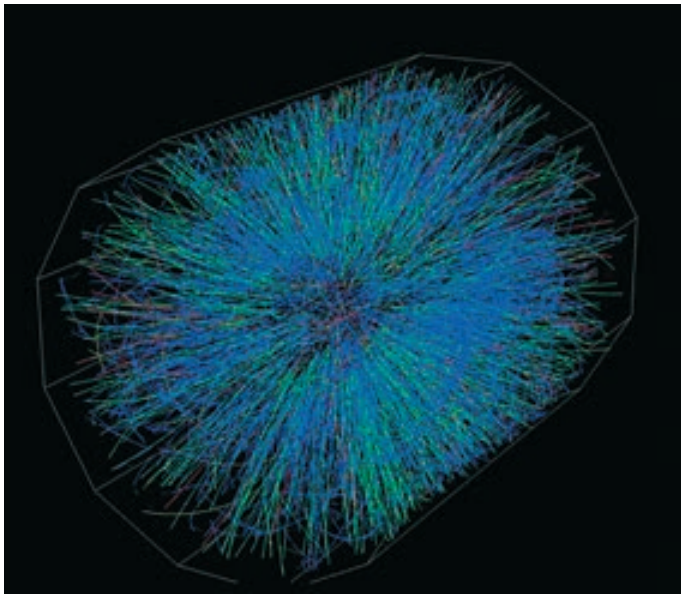
FIGURA 2 Modelo de proteína ARN Polimerasa II.

Fusión nuclear

Hace setenta años, el físico nuclear Hans Bethe y sus colegas determinaron cómo la fusión nuclear en el Sol produce la luz que hace posible la vida en la Tierra. Actualmente, los físicos nucleares están trabajando sobre la forma de utilizar la fusión nuclear en la Tierra para la pro



a)



b)

FIGURA 3 *a*) El detector STAR en el RHIC durante su construcción. *b*) Trayectorias reconstruidas electrónicamente de más de 5 000 partículas subatómicas con carga producidas dentro del detector STAR por una colisión de alta energía de dos núcleos de oro.

ducción casi ilimitada de energía. El capítulo 5 introduce el concepto de energía, que se explica en numerosas ocasiones en todo el libro. El reactor internacional de fusión termonuclear (capítulo 40), en la actualidad en construcción en el sur de Francia mediante la colaboración de muchos países industrializados, será un gran avance hacia la respuesta de muchas de las más importantes interrogantes que se necesitan resolver antes de que el uso de la fusión sea técnicamente factible y comercialmente viable.

FIGURA 4 Vista aérea de Ginebra, Suiza, con la ubicación del túnel subterráneo del Gran Colisionador de Hadrones señalada con el círculo rojo.

Física de alta energía y de partículas

Los físicos nucleares y de partículas están sondeando con profundidad cada vez mayor en los constituyentes más pequeños de la materia (capítulos 39 y 40). En el Brookhaven National Laboratory en Long Island, por ejemplo, el Colisionador Relativista de Iones Pesados (Relativistic Heavy Ion Collider: RHIC) estrella núcleos de oro uno contra otro con objeto de recrear el estado en que se encontraba el universo una pequeña fracción de segundo después de su comienzo, el *Big Bang*. La figura 3*a*) es una foto del STAR, un detector del RHIC; la figura 3*b*) muestra un análisis en computadora de las trayectorias que dejaron en el detector STAR las más de 5 000 partículas subatómicas producidas en dicha colisión. Los capítulos 27 y 28 sobre el magnetismo y el campo magnético explican cómo se analizan estas trayectorias con objeto de encontrar las propiedades de las partículas que las produjeron.

Se acaba de terminar un instrumento todavía mayor para la investigación de la física de partículas en el laboratorio del acelerador CERN en Ginebra, Suiza. El Gran Colisionador de Hadrones (Large Hadron Collider: LHC) está ubicado en un túnel circular subterráneo con una circunferencia de 27 km (16.8 mi), que se indica en el círculo rojo de la figura 4. Este nuevo instrumento es la instalación de investigación más

FIGURA 5 Algunos de los 27 radiotelescopios individuales que forman parte del Very Large Array.

costosa que se haya jamás construido, con un costo de más de 8 mil millones de dólares, y se puso en operación en septiembre de 2008. Los físicos de partículas todavía usan esta instalación para tratar de determinar qué es lo que hace que diferentes partículas elementales tengan distintas masas, a fin de averiguar cuáles son los verdaderos constituyentes elementales del universo y, quizá, para buscar dimensiones ocultas adicionales u otros fenómenos extraños.

Teoría de cuerdas

La física de partículas tiene un modelo estándar de todas las partículas y sus interacciones (capítulo 39); pero todavía no se entiende por qué este modelo funciona tan bien. En la actualidad se piensa que la teoría de cuerdas es la posibilidad más viable para un marco que a la larga produzca esta explicación. A veces, la teoría de cuerdas se llama presuntuosamente la *Teoría de todo*. Predice dimensiones espaciales adicionales, lo cual de pronto suena como ciencia ficción; pero muchos físicos están tratando de encontrar maneras para probar de manera experimental esta teoría.

Astrofísica

La física y la astronomía tienen un extenso traslape interdisciplinario en las áreas de investigación de la historia del universo primitivo, modelación de la evolución de las estrellas y estudio del origen de las ondas gravitacionales o de los rayos cósmicos de las más altas energías. Se han construido observatorios cada vez más precisos y sofisticados, tales como el telescopio Very Large Array (VLA) de Nuevo México (figura 5) para estudiar estos fenómenos.

Los astrofísicos siguen haciendo descubrimientos asombrosos para dar nueva forma a nuestro entendimiento del universo. Sólo durante los últimos años se ha descubierto que la mayor parte de la materia del universo no está contenida en las estrellas. Todavía se desconoce la composición de esta *materia oscura* (capítulo 12); pero sus efectos se revelan en las *lentes gravitacionales*, como se muestra en la figura 6, por los arcos observados en el cúmulo de galaxias. Abell 2218, que está a 2 mil millones de años luz de la Tierra, en la constelación Draco. Estos arcos son imágenes de galaxias todavía más distantes, distorsionadas por la presencia de grandes cantidades de materia oscura. Este fenómeno se presenta en más detalle en el capítulo 35 que trata sobre la relatividad.

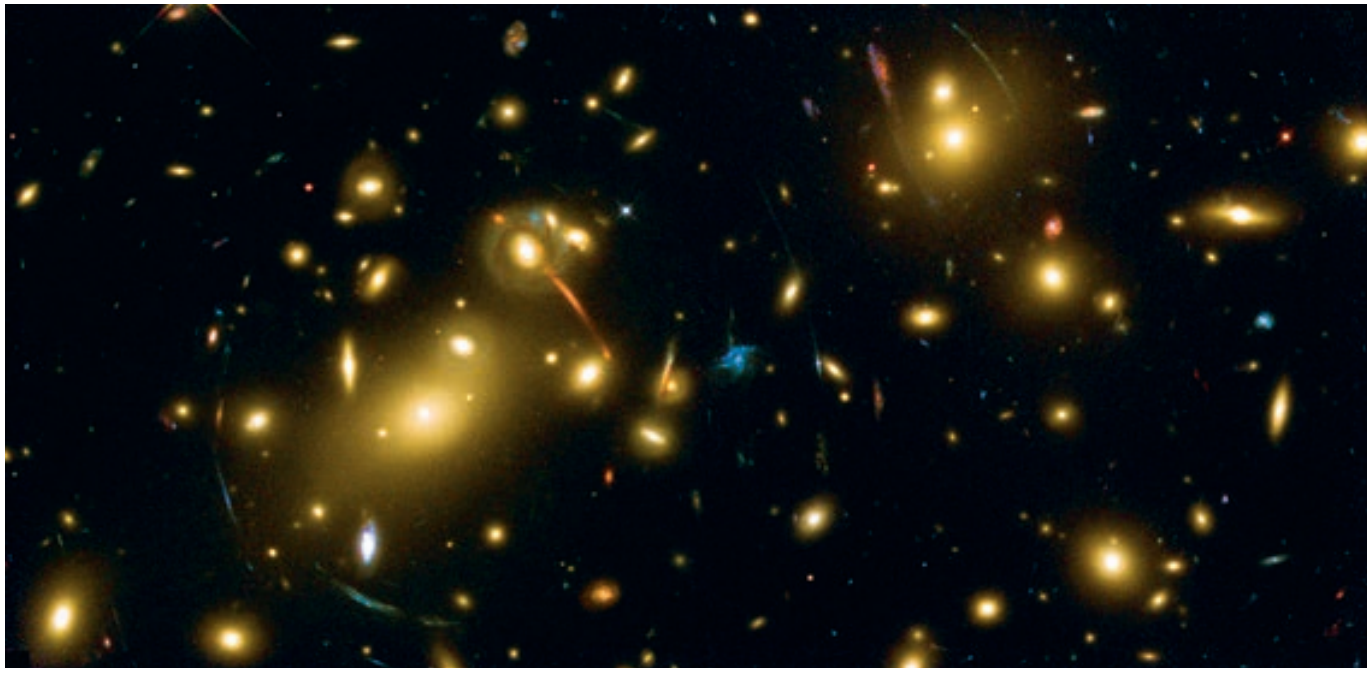


FIGURA 6 Cúmulo de galaxias Abell 2218, con los arcos creados por el efecto de lente gravitacional debido a la materia oscura.

Simetría, sencillez y elegancia

Desde las partículas subatómicas más pequeñas hasta el universo como un todo, las leyes físicas gobiernan todas las estructuras y la dinámica de núcleos atómicos hasta hoyos negros. Los físicos han descubierto una gran cantidad, pero cada descubrimiento abre un nuevo y provocativo territorio ignoto. Así, seguimos construyendo teorías para explicar todos y cada uno de los fenómenos físicos. El desarrollo de estas teorías está guiado por la necesidad de hacer coincidir los datos experimentales, así como por la convicción de que la simetría, la sencillez y la elegancia son principios clave de diseño. El hecho de que las leyes de la naturaleza se puedan formular en sencillas ecuaciones matemáticas ($F = ma$, $E = mc^2$, y muchas otras, menos famosas) es asombroso.

Esta introducción ha intentado transmitir un poco de lo que son las fronteras de la investigación de la física moderna. Este libro de texto debe ayudarle a construir un fundamento para apreciar, entender y tal vez participar en esta tarea de investigación, que sigue redefiniendo y dando nueva forma a nuestra comprensión del mundo que nos rodea.

PARTE 5 ELECTRICIDAD

21 Electrostática

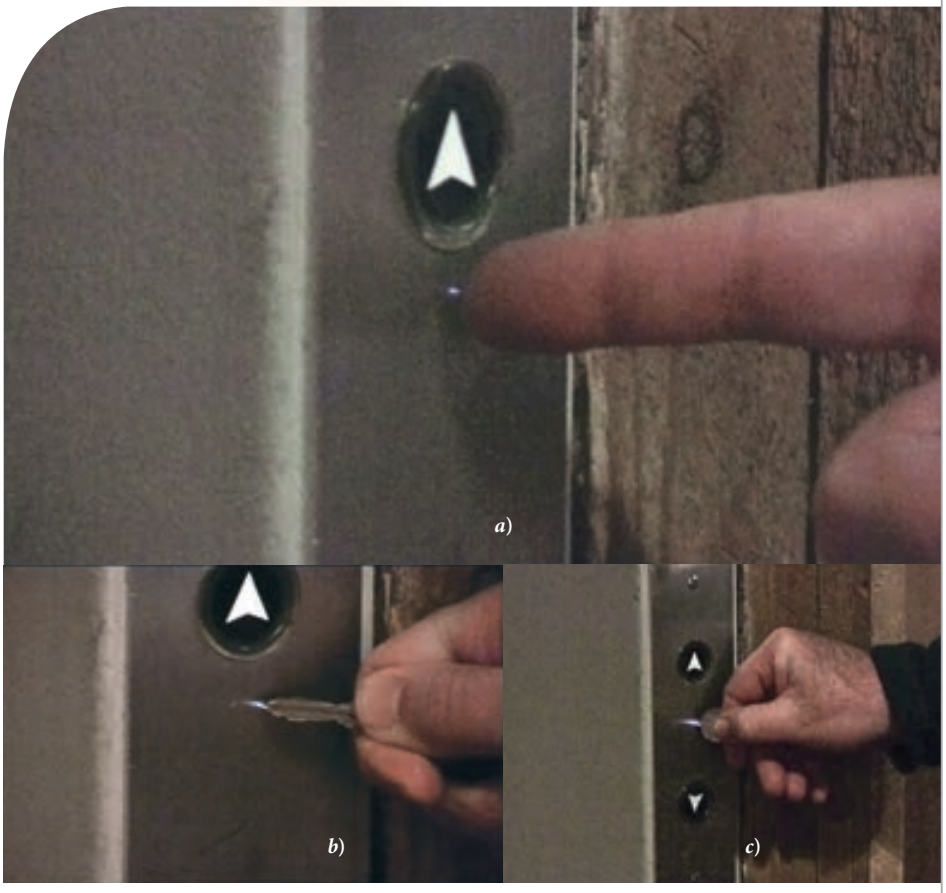


FIGURA 21.1 *a*) Cuando una persona oprime el botón de un ascensor puede ocurrir una chispa entre su mano y la superficie metálica, que se debe a la electricidad estática. *b*) y *c*) Cuando la persona sostiene un objeto metálico, como las llaves de un automóvil o una moneda, se generan chispas semejantes, aunque no son dolorosas porque se forman entre la superficie metálica y el objeto de metal.

LO QUE APRENDEREMOS 684

21.1 Electromagnetismo 684
21.2 Carga eléctrica 685
Carga elemental 687
Ejemplo 21.1 Carga neta 688
21.3 Aislantes, conductores, semiconductores y superconductores 688
Semiconductores 689
Superconductores 689
21.4 Carga electrostática 690
21.5 Fuerza electrostática: ley de Coulomb 692
Principio de superposición 693
Ejemplo 21.2 Fuerza electrostática dentro del átomo 693
Ejemplo 21.3 Posición de equilibrio 694
Problema resuelto 21.1 Esferas cargadas 695
Precipitador electrostático 697
Impresora láser 698
21.6 Ley de Coulomb y ley de gravitación de Newton 699
Ejemplo 21.4 Fuerzas entre electrones 699

LO QUE HEMOS APRENDIDO/ GUÍA DE ESTUDIO PARA EXAMEN 699

Práctica para resolución de problemas 700
Problema resuelto 21.2 Cuenta metálica en un alambre 700
Problema resuelto 21.3 Cuatro objetos cargados 702
Preguntas de opción múltiple 704
Preguntas 705
Problemas 706

LO QUE APRENDEREMOS

- La electricidad y el magnetismo juntos constituyen el electromagnetismo, una de las cuatro fuerzas fundamentales de la naturaleza.
- Hay dos tipos de carga eléctrica: positiva y negativa. Cargas iguales se repelen y cargas diferentes se atraen.
- La carga eléctrica está cuantizada, lo cual significa que esto ocurre sólo en múltiplos enteros de una cantidad elemental más pequeña. La carga eléctrica también se conserva.
- La mayor parte de los materiales a nuestro alrededor son eléctricamente neutros.
- El electrón es una partícula elemental y su carga es la cantidad más pequeña observable de carga eléctrica.
- Los aislantes conducen electricidad de manera deficiente o no la conducen. Los conductores conducen bien electricidad, pero no perfectamente: se pierde algo de energía.
- Los semiconductores son capaces de cambiar de un estado de conducción a uno de no conducción.
- Los superconductores conducen electricidad perfectamente.
- Los objetos pueden cargarse directamente por contacto o indirectamente por inducción.
- La fuerza que dos cargas eléctricas estacionarias ejercen entre sí es proporcional al producto de las cargas y varía como el inverso del cuadrado de la distancia entre las dos cargas.

Muchas personas piensan en la electricidad estática como la molesta chispa que ocurre cuando, en un día seco después de haber caminado sobre una alfombra, tocan un objeto metálico, como la perilla de una puerta (figura 21.1). De hecho, muchos fabricantes de aparatos electrónicos colocan pequeñas placas metálicas en el equipo, de modo que los usuarios puedan descargar cualquier chispa sobre la placa, sin dañar las partes más sensibles del equipo. No obstante, la electricidad estática es más que una molestia ocasional; es el punto de partida para cualquier estudio de la electricidad y el magnetismo, fuerzas que han cambiado a la sociedad humana de manera tan radical como no se veía desde el descubrimiento del fuego o la rueda.

En este capítulo analizamos las propiedades de la carga eléctrica. Una carga eléctrica en movimiento origina un fenómeno por separado, denominado *magnetismo*, que se abordará en capítulos posteriores. Aquí estudiamos objetos cargados que no se mueven; de ahí el término *electrostática*. Todos los objetos tienen carga, puesto que las partículas cargadas pueden constituir átomos y moléculas. A menudo no observamos los efectos de la carga eléctrica porque la mayor parte de los objetos son eléctricamente neutros. Las fuerzas que mantienen juntos a los átomos y separados a los objetos, incluso cuando están en contacto, son de naturaleza eléctrica.

21.1 Electromagnetismo

FIGURA 21.2 Relámpagos sobre la ciudad de Seattle.

Quizá ningún misterio fue tan extraño para las civilizaciones antiguas como la electricidad, fundamentalmente en forma de relámpagos (figura 21.2). La fuerza destructiva inherente a los rayos, capaz de incendiar objetos y matar a personas y animales, parecía divina. Los antiguos griegos, por ejemplo, creían que Zeus, padre de los dioses, tenía la habilidad de lanzar rayos. Las tribus germánicas atribuían este poder al dios Thor, y los romanos al dios Júpiter. Es decir, la capacidad para producir rayos pertenecía al dios más importante de la jerarquía divina (o a uno cercano a ésta).

Los antiguos griegos sabían que si frotaban un trozo de ámbar con uno de tela podían atraer objetos pequeños y ligeros. Ahora sabemos que al frotar ámbar con tela se transfieren partículas cargadas negativamente denominadas *electrones*. (Las palabras *electrón* y *electricidad* se derivan de la palabra griega para ámbar.) Los rayos también constan de un flujo de electrones. Los primeros griegos y otros pueblos también conocían objetos magnéticos que existen en la naturaleza denominados *piedra imán*, que se encontraban en depósitos de magnetita, un mineral que consiste de óxido de hierro. Estos materiales también se usaban para elaborar brújulas ya desde 300 a.C.

La relación entre la electricidad y el magnetismo no se comprendió sino hasta mediados del siglo XIX. Los siguientes capítulos revelarán cómo la electricidad y el magnetismo pueden unificarse en un marco de referencia común denominado *electromagnetismo*. No obstante, la unificación de fuerzas no termina ahí. Durante la primera parte del siglo XX se descubrieron dos fuerzas fundamentales más: la interacción débil, que opera en el decaimiento beta (en el que un electrón y un neutrino se emiten espontáneamente desde ciertos tipos de núcleos) y la interacción fuerte, que actúa dentro del núcleo atómico. Estudiaremos estas fuerzas con mayor detalle en el capítulo 39, sobre física de

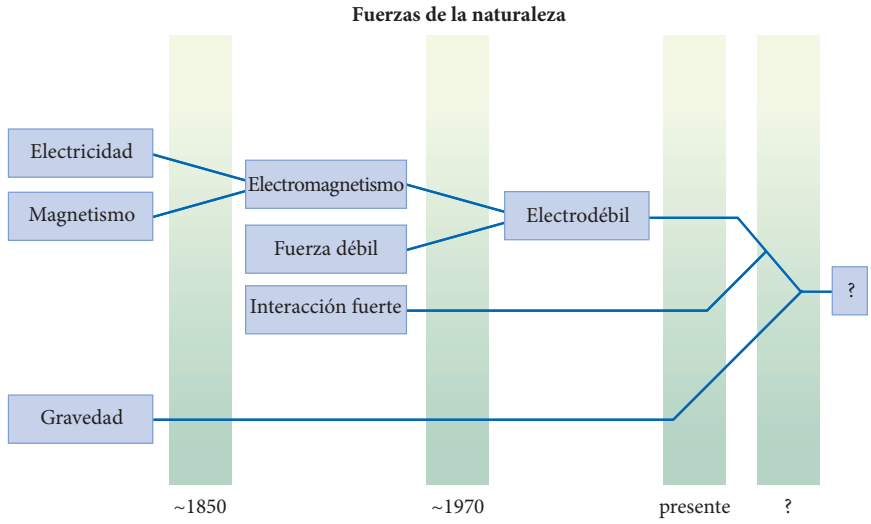


FIGURA 21.3 Historia de la unificación de las fuerzas fundamentales.

partículas. Normalmente, las interacciones electromagnéticas débil y fuerte se consideran como dos aspectos de la fuerza electrodébil (figura 21.3). Para los fenómenos que se analizan en los siguientes capítulos, esta unificación electrodébil no tiene ninguna influencia; se vuelve importante en las colisiones de partículas de más alta energía. Debido a que la escala para la unificación electrodébil es tan alta, la mayor parte de los libros de texto continúan hablando de cuatro fuerzas fundamentales: gravitacional, electromagnética, y las interacciones débil y fuerte.

Hoy, un gran número de físicos cree que la fuerza electrodébil y la interacción fuerte también pueden unificarse; es decir, describirse en un marco de referencia común. Varias teorías proponen diversas formas para lograrlo, pero aún falta evidencia experimental. Es interesante saber que la fuerza que se ha conocido durante más tiempo que cualquier otra de las fuerzas fundamentales, la gravedad, parece ser la más difícil de introducir en un marco de referencia común con las otras fuerzas fundamentales. La gravedad cuántica, la supersimetría y la teoría de cuerdas constituyen focos actuales de la investigación física de vanguardia en la que los teóricos están intentando construir esta gran unificación y descubrir la (desmedidamente llamada) teoría del todo. Ellos se guían fundamentalmente por principios de simetría y la convicción de que la naturaleza debe ser elegante y simple.

Volveremos a estas consideraciones en los capítulos 39 y 40. En este capítulo abordamos la carga eléctrica, cómo los materiales reaccionan a ésta, la electricidad estática y las fuerzas resultantes de las cargas eléctricas. La **electrostática** abarca situaciones en las que las cargas permanecen en su sitio y no se mueven.

21.2 Carga eléctrica

Investiguemos más a fondo sobre la causa de las chispas eléctricas que usted recibe ocasionalmente un día seco de invierno, al caminar sobre una alfombra y tocar la perilla de una puerta. (Las chispas electrostáticas han incluso encendido los vapores de gas cuando alguien llena el tanque de su automóvil en una estación de servicio. Ésta no es una leyenda urbana: las cámaras de vigilancia de las estaciones de servicio han registrado algunos de estos casos.) Los procesos que originan este chispazo se denominan **carga**, que consiste en la transferencia de partículas con carga negativa, denominadas **electrones**, desde los átomos y las moléculas del material de la alfombra a la suela de sus zapatos. Esta carga puede moverse con relativa facilidad a través de su cuerpo, incluyendo las manos. La carga eléctrica acumulada se descarga en la perilla metálica de la puerta, creando una chispa.

Los dos tipos de carga eléctrica que hay en la naturaleza son la **carga positiva** y la **carga negativa**. Normalmente, parece que los objetos a nuestro alrededor no están cargados; pero esto no es exacto: son eléctricamente neutros. Los objetos neutros contienen el mismo número de carga positiva y de carga negativa que se cancelan entre sí. El efecto de la carga eléctrica sólo se observa cuando las cargas positiva y negativa no están en equilibrio.

Si usted frota una barra de vidrio con un trozo de tela, la barra se carga y la tela adquiere una carga de signo opuesto. Si frota una barra de plástico con piel, la barra y la piel también se cargan opuestamente. Si acerca entre sí dos barras de vidrio cargadas, se repelen mutuamente. En forma semejante, si aproxima entre sí dos barras de plástico, también se repelen mutuamente. No obstante, una barra de vidrio cargada y una barra de plástico cargada se atraen mutuamente. Esta diferencia surge porque la barra de vidrio y la de plástico tienen cargas opuestas. Esta observación lleva a la

ley de las cargas eléctricas
Cargas semejantes se repelen y cargas opuestas se atraen.

La unidad de la carga eléctrica es el **coulomb** (C), llamada así en honor del físico francés Charles-Augustine de Coulomb (1736-1806). El coulomb se define en términos de la unidad SI para la corriente, el amperio (A), nombrado así en honor de otro físico francés, André-Marie Ampère (1775-1836). Ni el coulomb ni el amperio pueden deducirse en términos de otras unidades SI: metro, kilogramo y segundo. En lugar de eso, el amperio es otra unidad fundamental SI. Es por esto que el sistema internacional de unidades algunas veces se denomina *sistema MKSA* (*metro-kilogramo-segundo-amperio*). La unidad de carga se define como

$$1\ \text{C} = 1\ \text{A s}. \tag{21.1}$$

La definición del amperio debe esperar hasta que analicemos la corriente en capítulos posteriores. No obstante, es posible definir la magnitud del coulomb al especificar simplemente la carga de un solo electrón:

$$q_e = -e \tag{21.2}$$

donde q_e es la carga y e tiene el valor (actualmente el más aceptado y determinado experimentalmente)

$$e = 1.602176487(40)\cdot 10^{-19}\ \text{C}. \tag{21.3}$$

(Por lo general esto basta sólo llevar de dos a cuatro cifras significativas de esta mantisa. En este capítulo usaremos un valor útil de 1.602, pero debe tomar en cuenta que la ecuación 21.3 proporciona toda la precisión hasta la que se ha medido esta carga.)

La carga del electrón es una de sus propiedades intrínsecas, así como su masa. La carga del **protón**, otra partícula básica de los átomos, es exactamente de la misma magnitud que la del electrón, sólo que su carga es positiva:

$$q_p = +e. \tag{21.4}$$

21.1 Ejercicio en clase

¿Cuántos electrones se requieren para obtener 1.00 C de carga?

a) $1.60\cdot 10^{19}$ *d*) $6.24\cdot 10^{18}$

b) $6.60\cdot 10^{19}$ *e*) $6.66\cdot 10^{17}$

c) $3.20\cdot 10^{16}$

La decisión de cuál carga es positiva y cuál es negativa es arbitraria. La elección de costumbre de $q_e < 0$ y $q_p > 0$ se debe al estadista, científico e inventor estadounidense Benjamin Franklin (1706-1790), quien fue pionero de los estudios sobre electricidad.

Un coulomb es una unidad de carga extremadamente grande. Más tarde veremos, en este mismo capítulo, cuán grande es, cuando investiguemos la magnitud de las fuerzas de cargas entre sí. Suelen usarse unidades de μC (microcoulombs, 10^{-6} C), nC (nanocoulombs, 10^{-9} C) y pC (picocoulombs, 10^{-12} C).

Asimismo, Benjamin Franklin propuso que la carga también se conserva. Por ejemplo, cuando usted frota una barra de plástico con piel, a la barra se transfieren electrones, dejando una carga neta positiva en la piel. (Los protones no se transfieren porque suelen estar incrustados dentro de los núcleos atómicos.) La carga no se crea ni se destruye; simplemente se mueve de un objeto a otro.

Ley de conservación de la carga
La carga eléctrica total de un sistema aislado se conserva.

Esta ley es la cuarta ley de conservación encontrada hasta la fecha; las tres primeras son las leyes de conservación de la energía total, cantidad de movimiento lineal y cantidad de movimiento angular. Las leyes de conservación constituyen un hilo conductor que atraviesa toda la física y, por lo mismo, atraviesa todo este libro.

Resulta importante observar que hay una ley de conservación para la carga, pero *no* para la masa. Más tarde veremos en este libro que la masa y la energía no son independientes entre sí. Lo que algunas veces se describe en química elemental como conservación de la masa no es una ley de conservación exacta, sino sólo una aproximación usada para seguir el rastro del número de átomos en una reacción química. (Se trata de una buena aproximación hasta un gran número de cifras significativas, pero no es una ley exacta, como la conservación de la carga.) La conservación de la carga es válida para todos los sistemas, desde el sistema macroscópico de la barra de plástico y piel hasta sistemas de partículas subatómicas.

Carga elemental

La carga eléctrica sólo ocurre en múltiplos enteros de un tamaño mínimo. Esto se expresa al afirmar que la carga está **cuantizada**. La unidad más pequeña observable de carga eléctrica es la carga del electrón, que es $-1.602 \cdot 10^{-19}$ C (como se define en la ecuación 21.3).

El hecho de que la carga eléctrica está cuantizada fue comprobado en un experimento ingenioso llevado a cabo en 1910 por el físico estadounidense Robert A. Millikan (1868-1953) y se conoce como *experimento de Millikan de la gota de aceite* (figura 21.4). En este experimento se rociaron gotas de aceite en una especie de cámara, donde algunos de sus electrones fueron extraídos al ser impactados por alguna forma de radiación, como los rayos X. A las gotas resultantes, cargadas positivamente, se les dejó caer entre dos placas cargadas eléctricamente. Para que las gotas dejaran de moverse en caída libre, se ajustó la carga de las placas, lo cual permitió medir su carga. Lo que Millikan observó fue que la carga estaba cuantizada, en lugar de ser continua. (En el capítulo 23 se presentará un análisis cuantitativo de este experimento sobre potencial eléctrico.) Es decir, este experimento y sus refinamientos posteriores establecieron que la carga sólo se presenta en múltiplos enteros de la carga de un electrón. En experiencias cotidianas con electricidad no se observa que la carga está cuantizada porque la mayor parte de los fenómenos eléctricos implican una gran cantidad de electrones.

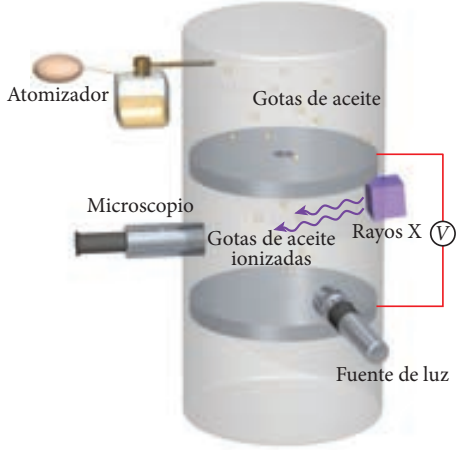


FIGURA 21.4 Esquema del experimento de Millikan de la gota de aceite.

En el capítulo 13 se analizó el hecho de que la materia está compuesta por átomos y que un átomo consta de un núcleo que contiene protones cargados y neutrones neutros. La figura 21.5 muestra un esquema de un átomo de carbono. Un átomo de carbono tiene seis protones y (normalmente) seis neutrones en su núcleo. Este núcleo está rodeado por seis electrones. Observe que este dibujo no está a escala. En la forma verdadera, la distancia de los electrones al núcleo es mucho más grande (por un factor del orden de 10 000) que el tamaño del núcleo. Además, los electrones se muestran en órbitas circulares, lo cual tampoco es del todo correcto. En el capítulo 38 veremos que las ubicaciones de los electrones en el átomo pueden caracterizarse sólo por distribuciones de probabilidad.

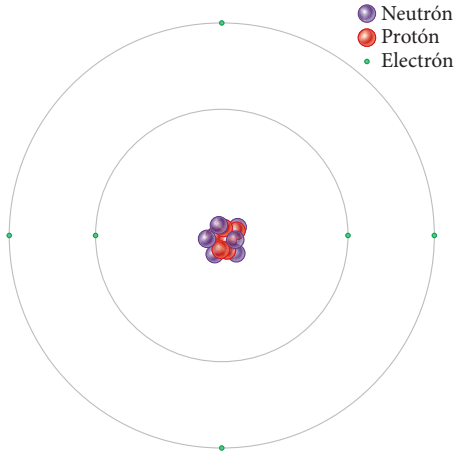
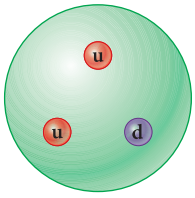


FIGURA 21.5 En un átomo de carbono, el núcleo contiene seis neutrones y seis protones. El núcleo está rodeado por seis electrones. Observe que este dibujo es esquemático y no está a escala.

Como ya se mencionó, un protón tiene carga positiva con una magnitud que es *exactamente* igual a la magnitud de la carga negativa de un electrón. En un átomo neutro, el número de electrones cargados negativamente es igual al número de protones cargados positivamente. La masa del electrón es mucho más pequeña que la masa del protón o del neutrón. En consecuencia, la mayor parte de la masa del átomo reside en el núcleo. Los electrones pueden removerse de los átomos con relativa facilidad. Es por esto que los electrones suelen ser los portadores típicos de carga eléctrica, en lugar de los protones o los núcleos atómicos.

El electrón es una partícula fundamental y carece de subestructura; se trata de una partícula puntual con radio cero (por lo menos, según lo último que se conoce). No así en el protón, en él se han usado sondas de alta energía para observar el interior del protón. Un protón está compuesto por partículas cargadas denominadas *quarks*, que se mantienen unidas por partículas no cargadas denominadas *gluones*. Los quarks tienen una carga de $\pm\frac{1}{3}$ o $\pm\frac{2}{3}$ veces la carga del electrón. Estas partículas con carga fraccionaria no pueden existir de manera independiente y nunca se han observado directamente, a pesar de numerosas y profundas investigaciones. Justo como la carga de un electrón, las cargas de los quarks son propiedades intrínsecas de estas partículas elementales.

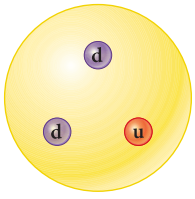
Un protón consta de dos *quarks arriba* (cada uno con carga $+\frac{2}{3}e$) y un *quark abajo* (con carga $-\frac{1}{3}e$), lo cual otorga al protón una carga de $q_p = (2)(+\frac{2}{3}e) + (1)(-\frac{1}{3}e) = +e$ como se ilustra en la



Protón

$q_p = +\frac{2}{3}e + \frac{2}{3}e - \frac{1}{3}e = +e$

a)



Neutrón

$q_n = +\frac{2}{3}e - \frac{1}{3}e - \frac{1}{3}e = 0$

b)

FIGURA 21.6 *a*) Un protón contiene dos quarks arriba (u) y un quark abajo (*d*). *b*) Un neutrón contiene un quark arriba (u) y dos quarks abajo (d).

figura 21.6*a*). El neutrón eléctricamente neutro (¡de ahí su nombre!) consta de un quark arriba y dos quarks abajo, como se muestra en la figura 21.6*b*), de modo que su carga es $q_n = (1)(+\frac{2}{3}e) + (2)(-\frac{1}{3}e) = 0$. En el capítulo 39 veremos que hay otros quarks mucho más masivos, denominados *extraño, encanto*, *cima* y *fondo* que tienen la misma carga que los quarks *arriba* y *abajo*. También hay partículas mucho más masivas semejantes al electrón denominadas *muon* y *tau*. Pero prevalece la cuestión básica de que toda la materia en la vida diaria está compuesta por electrones (con carga eléctrica $-e$), quarks arriba y abajo (con cargas eléctricas $+\frac{2}{3}e$ y $-\frac{1}{3}e$, respectivamente) y gluones (carga cero).

Es extraordinario que la suma de la carga de los quarks dentro de un protón sea *exactamente* de la misma magnitud que la carga del electrón. Este hecho sigue siendo un enigma, que indica algún tipo de simetría en la naturaleza que aún no se comprende cabalmente.

Debido a que todos los objetos macroscópicos están compuestos por átomos, que a su vez están compuestos por electrones y núcleos atómicos integrados por neutrones y protones, la carga, q, de cualquier objeto puede expresarse en términos de la suma del número de protones, N_p, menos la suma del número de electrones, N_e, que componen el objeto:

$$q = e \cdot (N_p - N_e). \tag{21.5}$$

21.1 Oportunidad de autoevaluación

Proporcione la carga de las siguientes partículas elementales o átomos en términos de la carga elemental $e = 1.602 \cdot 10^{-19}$ C.

a) protón

b) neutrón

c) átomo de helio (dos protones, dos neutrones y dos electrones)

d) átomo de hidrógeno (un protón y un electrón)

e) quark arriba

f) quark abajo

g) electrón

h) partícula alfa (dos protones y dos neutrones)

EJEMPLO 21.1 Carga neta

PROBLEMA

Si quisiéramos que un bloque de hierro de 3.25 kg de masa adquiriera una carga positiva de 0.100 C, ¿qué fracción de los electrones es necesario remover?

SOLUCIÓN

El hierro tiene un peso atómico de 56. En consecuencia, el número de átomos de hierro en el bloque de 3.25 kg es

$$N_{\text{átomo}} = \frac{(3.25\text{ kg})(6.022 \cdot 10^{23}\text{ átomos/mol})}{0.0560\text{ kg/mol}} = 3.495 \cdot 10^{25} = 3.50 \cdot 10^{25}\text{ átomos.}$$

Observe que hemos usado el número de Avogadro, $6.022 \cdot 10^{23}$, y la definición de mol, que especifica que la masa de 1 mol de una sustancia en gramos es justo el número de masa de la sustancia; en este caso, 56.

Debido a que el número atómico del hierro es 26, que es igual al número de protones o electrones en un átomo de hierro, el número total de electrones en el bloque de 3.25 kg es:

$$N_e = 26 N_{\text{átomo}} = (26)(3.495 \cdot 10^{25}) = 9.09 \cdot 10^{26}\text{ electrones.}$$

Para encontrar el número de electrones, $N_{\Delta e}$, que es necesario remover, se usa la ecuación 21.5. Debido a que el número de electrones es igual al número de protones en el objeto original sin carga, la diferencia en el número de protones y electrones es el número de electrones removidos, $N_{\Delta e}$:

$$q = e \cdot N_{\Delta e} \Rightarrow N_{\Delta e} = \frac{q}{e} = \frac{0.100\text{ C}}{1.602 \cdot 10^{-19}\text{ C}} = 6.24 \cdot 10^{17}.$$

Por último, se obtiene la fracción de electrones que deben removerse:

$$\frac{N_{\Delta e}}{N_e} = \frac{6.24 \cdot 10^{17}}{9.09 \cdot 10^{26}} = 6.87 \cdot 10^{-10}.$$

Es necesario remover menos de mil millones de electrones de un bloque de hierro a fin de colocar en él una carga positiva mensurable de 0.100 C.

21.3 Aislantes, conductores, semiconductores y superconductores

Los materiales que conducen electricidad se denominan **conductores**. Los materiales que no conducen electricidad se denominan **aislantes**. (Por supuesto, hay buenos y malos conductores y buenos y malos aislantes.)

La estructura electrónica de un material se refiere a la forma en la que los electrones están ligados al núcleo, como se analizará en capítulos posteriores. Por ahora estamos interesados en la propensión relativa de los átomos de un material a donar o adquirir electrones. Para los aislantes, no ocurre ningún movimiento libre de los electrones porque el material no tiene electrones ligados débilmente que puedan escapar de sus átomos y entonces moverse con libertad por todo el material. Incluso cuando una carga externa se coloca sobre un aislante, no puede moverse de manera apreciable. Algunos aislantes típicos son el vidrio, el plástico y la tela.

Por otra parte, los materiales conductores poseen una estructura electrónica que permite el movimiento libre de algunos electrones. Las cargas positivas de los átomos de un material conductor no se mueven, puesto que residen en los núcleos pesados. Algunos conductores sólidos típicos son los metales. El cobre, por ejemplo, es un muy buen conductor usado en cables eléctricos.

Los fluidos y el tejido orgánico también sirven como conductores. El agua pura destilada no es un muy buen conductor. Sin embargo, cuando se disuelve sal común (NaCl) en agua, la conductividad mejora en forma extraordinaria, ya que los iones de sodio con carga positiva (Na^+) y los iones de cloro con carga negativa (Cl^-) pueden moverse dentro del agua para conducir electricidad. En los líquidos, a diferencia de los sólidos, los portadores de carga positiva, así como negativa, son móviles. El tejido orgánico no es muy buen conductor, pero conduce electricidad lo suficientemente bien como para hacer que grandes corrientes sean peligrosas para los seres humanos. (En el capítulo 26 aprenderemos más sobre la corriente eléctrica, donde estos términos, que son de uso cotidiano, se definirán con precisión.)

Semiconductores

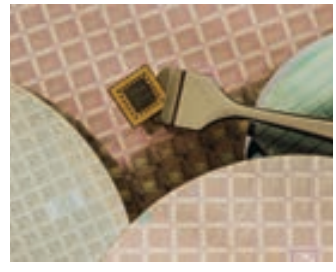
Una clase de materiales denominados **semiconductores** puede cambiar de aislante a conductor y de vuelta a aislante. Los semiconductores fueron descubiertos apenas hace poco más de 50 años, aunque constituyen la columna vertebral de todas las industrias de computadoras y aparatos electrónicos. El primer uso amplio de los semiconductores fue en los transistores (figura 21.7*a*); los chips de computadoras modernas (figura 21.7*b*) realizan las funciones de millones de transistores. Las computadoras y prácticamente todos los productos y dispositivos electrónicos (televisiones, cámaras, videojuegos, teléfonos celulares, etc.) no existirían sin semiconductores. Gordon Moore, cofundador de Intel, hizo la famosa declaración de que, debido a los avances tecnológicos, el poder de la CPU (unidad central de procesamiento) promedio de las computadoras se duplica cada 18 meses, lo cual es una media empírica durante las cinco últimas décadas. Este fenómeno de duplicado se denomina *ley de Moore*. Los físicos han sido, y sin duda seguirán siendo, el motor detrás de este proceso de descubrimiento, invención y mejoramiento científicos.

Hay dos tipos de semiconductores: intrínsecos y extrínsecos. Ejemplos de *semiconductores intrínsecos* son los cristales químicamente puros del arseniuro de galio, germanio o, en especial, silicio. Los ingenieros producen *semiconductores extrínsecos* por *dopaje*, que es la adición de cantidades minúsculas (por lo general, 1 parte en 10^6) de otros materiales que pueden actuar como donantes o receptores de electrones. Los semiconductores dopados con donantes de electrones se denominan *tipo n* (la *n* significa "carga negativa"). Si la sustancia dopante actúa como un receptor de electrones, el hueco que deja un electrón que se fija a un receptor también puede desplazarse a través del semiconductor y actuar como un portador eficaz de carga positiva. En consecuencia, estos semiconductores se denominan *tipo p* (la *p* significa "carga positiva"). Así, a diferencia de los conductores sólidos normales en los que sólo se mueve la carga negativa, los semiconductores tienen movimiento de cargas negativas o positivas (que realmente son huecos de electrones; es decir, electrones faltantes).

Superconductores

Los **superconductores** son materiales que tienen resistencia cero a la conducción de electricidad, a diferencia de los conductores normales, que conducen electricidad bien, pero con algunas pérdidas. Un superconductor típico es una aleación de niobio-titanio que debe mantenerse casi a la temperatura del helio líquido (4.2 K) para retener sus propiedades de superconducción. Durante los últimos 20 años se han desarrollado nuevos materiales denominados *superconductores de alta* T_c (la T_c significa "temperatura crítica", que es la temperatura máxima que permite la superconductividad). Estos materiales son superconductores a temperatura del nitrógeno líquido (77.3 K). Todavía no se han encontrado materiales que sean superconductores a temperatura ambiente (300 K), aunque serían extremadamente útiles. Actualmente se realiza investigación dirigida al desarrollo de tales materiales y a la explicación teórica de los fenómenos físicos que originan la superconducción de alta T_c.

a)



b)

FIGURA 21.7 *a*) Réplica del primer transistor, inventado en 1947 por John Bardeen, Walter H. Brattain y William B. Shockley. *b*) Los chips de una computadora moderna hechos a partir de laminillas de silicio contienen muchas decenas de millones de transistores.

Los temas de conductividad, superconductividad y semiconductores se analizarán con más detalle cuantitativo en los capítulos siguientes.

21.4 Carga electrostática

FIGURA 21.8 Electroscopio típico usado en demostraciones de lecturas.

El hecho de proporcionar una carga estática a un objeto es un proceso denominado **carga electrostática**, que puede entenderse a través de una serie de experimentos simples. Una fuente de energía sirve como una fuente disponible de carga positiva y negativa. La batería de un automóvil es una fuente de energía de este tipo; usa reacciones químicas para crear una separación entre carga positiva y negativa. Varias paletas aislantes pueden cargarse con carga positiva o negativa desde la fuente de energía. Además, se realiza una conexión eléctrica con la Tierra. La Tierra es casi un reservorio infinito de carga, capaz de neutralizar eficazmente objetos con carga eléctrica que estén en contacto con ésta. Este apropiamiento de carga se denomina **conexión a tierra**, y una conexión eléctrica con la Tierra se denomina **poner o conectar a tierra**.

Un **electroscopio** es un dispositivo que proporciona una respuesta observable cuando está cargado. Usted puede elaborar un electroscopio relativamente sencillo con dos cintas de hoja metálica muy delgada unidas por un extremo y que se dejan suspendidas una junto a la otra en un marco aislante. El papel aluminio para cocina no es apropiado porque es demasiado grueso, pero en tiendas de juguetes o curiosidades es posible encontrar hojas metálicas más delgadas. Para el marco aislante puede usar un vaso de espuma de poliestireno con los lados doblados, por ejemplo.

El electroscopio de demostración de lectura, que se muestra en la figura 21.8, tiene dos conductores que en su posición neutra están en contacto y orientados en dirección vertical. Uno de los conductores está articulado en su punto medio, de modo que se aleja del conductor fijo si en el electroscopio aparece una carga. Estos dos conductores están en contacto con una bola conductora en la parte superior del electroscopio, que permite la fácil aplicación o eliminación de carga.

La figura 21.9*a*) muestra un electroscopio sin cargar. La fuente de energía se usa para proporcionar una carga negativa a una de las paletas aislantes. Cuando la paleta se acerca a la bola del electroscopio, como muestra la figura 21.9*b*), los electrones en la bola conductora del electroscopio son repelidos, lo cual produce una carga negativa neta sobre los conductores del electroscopio. Esta carga negativa hace que el conductor móvil gire debido a que el conductor estacionario también tiene carga negativa y la repele. Dado que la paleta no toca la bola, la carga sobre los conductores móviles es **inducida**. Si la paleta cargada se aleja, como se ilustra en la figura 21.9*c*), la carga inducida se reduce a cero y el conductor móvil regresa a su posición original, ya que la carga total sobre el electroscopio no cambia en el proceso.

Si el mismo proceso se lleva a cabo con una paleta cargada positivamente, los electrones en los conductores son atraídos hacia la paleta y fluyen hacia la bola conductora. Esto deja una carga neta positiva sobre los conductores, provocando que el brazo conductor móvil gire de nuevo. Observe que la carga neta del electroscopio es cero en ambos casos y que el movimiento del conductor sólo indica que la paleta está cargada. Cuando se retira la paleta cargada positivamente,

21.2 Ejercicio en clase

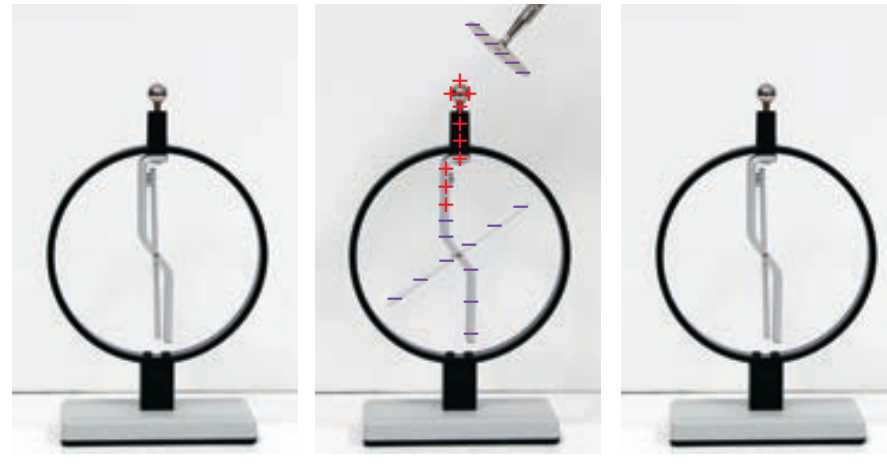
El conductor articulado se aleja del conductor fijo si al electroscopio se le aplica una carga, ya que

a) cargas iguales se repelen.

b) cargas iguales se atraen.

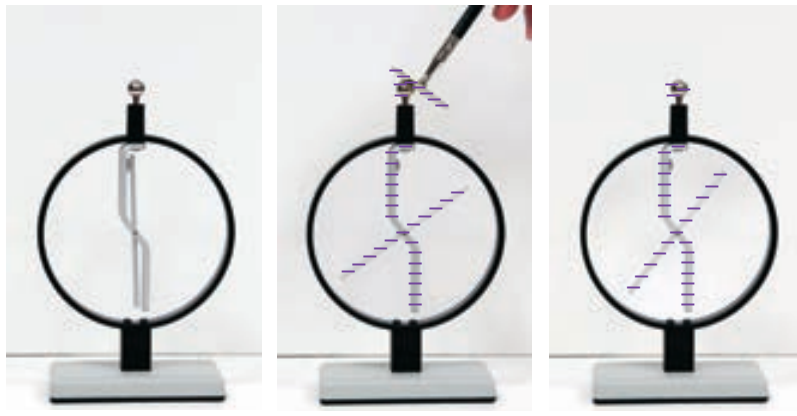
c) cargas diferentes se atraen.

d) cargas diferentes se repelen.



a) *b*) *c*)

FIGURA 21.9 Inducción de una carga: *a*) Electroscopio sin carga. *b*) Una paleta negativamente cargada se acerca al electroscopio. *c*) La paleta negativamente cargada se aleja.



a) *b*) *c*)

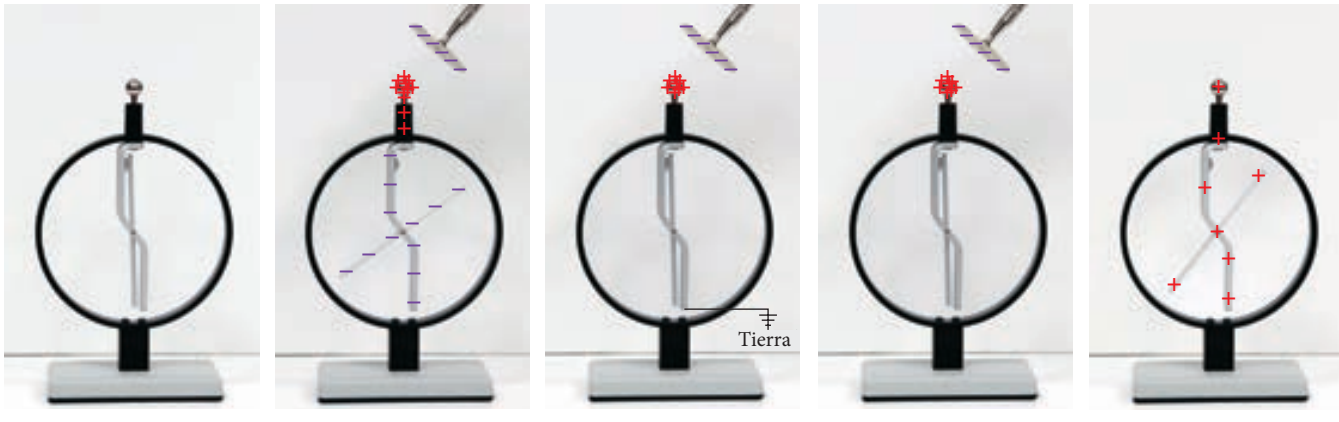
FIGURA 21.10 Carga por contacto: *a*) Un electroscopio sin carga. *b*) Una paleta negativamente cargada toca el electroscopio. *c*) La paleta negativamente cargada se remueve.

el conductor móvil regresa de nuevo a su posición original. Es importante observar que ¡no es posible que determinemos el signo de esta carga!

Por otra parte, si una paleta aislante cargada negativamente *toca* la bola del electroscopio, como muestra la figura 21.10*b*), los electrones fluyen de la paleta al conductor, produciendo una carga neta negativa. Cuando se retira la paleta, la carga permanece y el brazo móvil permanece rotado, como indica la figura 21.10*c*). De forma semejante, si una paleta aislante cargada positivamente toca la bola del electroscopio, éste transfiere electrones a la paleta cargada positivamente y se carga positivamente. De nuevo, la paleta cargada positivamente y la cargada negativamente tienen el mismo efecto sobre el electroscopio y no tenemos manera alguna de determinar si las paletas están cargadas positiva o negativamente. Este proceso se denomina **carga por contacto**.

Es posible demostrar ambos tipos de carga al tocar primero una paleta cargada negativamente con el electroscopio, lo que provoca una rotación en el brazo móvil, como muestra la figura 21.10. Si luego una paleta cargada positivamente entra en contacto con el electroscopio, el brazo móvil regresa a la posición sin carga. La carga es neutralizada (en el supuesto de que ambas paletas tienen originalmente el mismo valor absoluto de carga). Así, hay dos tipos de carga. No obstante, debido a que las cargas son manifestaciones de electrones móviles, una carga negativa es un exceso de electrones y una carga positiva un déficit de éstos.

Es posible cargar el electroscopio sin tocarlo con la paleta cargada, como muestra la figura 21.11. El electroscopio sin carga se presenta en la figura 21.11*a*). Una paleta cargada negativamente se acerca a la bola del espectroscopio pero no la toca, como indica la figura 21.11*b*). En la figura 21.11*c*), el electroscopio se conecta a tierra. Luego, mientras la paleta cargada está próxima



a) *b*) *c*) *d*) *e*)

FIGURA 21.11 Carga por inducción: *a*) Un electroscopio sin carga. *b*) Una paleta negativamente cargada se acerca al electroscopio. *c*) El electroscopio se conecta a tierra. *d*) La conexión a tierra se retira. *e*) La paleta negativamente cargada se remueve, dejando el electroscopio cargado positivamente.

a la bola del electroscopio pero no la toca, se retira la conexión en la figura 21.11*d*). Así, una vez que la paleta se aleja del electroscopio en la figura 21.11*e*), el espectroscopio sigue estando cargado positivamente (pero con una desviación menor que en la figura 21.11*b*). El mismo proceso también funciona con una paleta con carga positiva. Este proceso se denomina **carga por inducción** y genera una carga en el electroscopio con signo opuesto a la carga en la paleta.

21.5 Fuerza electrostática: ley de Coulomb

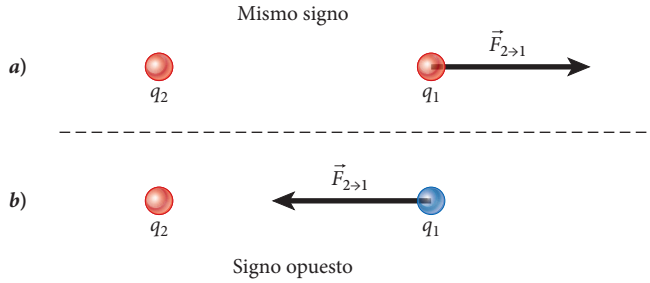


FIGURA 21.12 La fuerza ejercida por la carga 2 sobre la carga 1: *a*) dos cargas con el mismo signo; *b*) dos cargas con signos opuestos.

La ley de la carga eléctrica es evidencia de una fuerza entre dos cargas cualesquiera en reposo. Experimentos han demostrado que para la fuerza electrostática ejercida por una carga q_2 sobre una carga q_1 $\vec{F}_{2\to1}$, la fuerza sobre q_1 apunta hacia q_2 si las cargas tienen signos opuestos y se aleja de q_2 si las cargas tienen signos iguales (figura 21.12). Esta fuerza sobre una carga debida a otra carga siempre está sobre una recta entre las dos cargas. La **ley de Coulomb** proporciona la magnitud de esta fuerza como

$$F = k\frac{|q_1 q_2|}{r^2}, \tag{21.6}$$

donde q_1 y q_2 son cargas eléctricas, $r = |\vec{r}_1 - \vec{r}_2|$ es la distancia entre éstas y

$$k = 8.99 \cdot 10^9 \ \frac{\text{N m}^2}{\text{C}^2} \tag{21.7}$$

es la **constante de Coulomb**. Puede ver que un coulomb es una carga *muy* grande. Si dos cargas de 1 C estuviesen separadas por una distancia de 1 m, la magnitud de la fuerza que ejercerían una sobre la otra sería de 8.99 miles de millones de newtons. Por comparación, ¡esta fuerza es igual al peso de 450 transbordadores espaciales completamente cargados!

La relación entre la constante de Coulomb y otra constante, ϵ_0, denominada **permitividad eléctrica del espacio libre**, es

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}. \tag{21.8}$$

En consecuencia, el valor de ϵ_0 es

$$\epsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12} \ \frac{\text{C}^2}{\text{N m}^2}. \tag{21.9}$$

Entonces, una forma alternativa para escribir la ecuación 21.6 es

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{|q_1 q_2|}{r^2}. \tag{21.10}$$

Como verá en los siguientes capítulos, algunas ecuaciones en electrostática son más convenientes de escribir con k, mientras otras se escriben más fácilmente en términos de $1/(4\pi\epsilon_0)$.

Observe que las cargas en las ecuaciones 21.6 y 21.10 pueden ser positivas o negativas, de modo que el producto de las cargas también puede ser positivo o negativo. Puesto que cargas opuestas se atraen y cargas iguales se repelen, un valor negativo del producto $q_1 q_2$ significa atracción, y uno positivo, repulsión.

Por último, la ley de Coulomb para la fuerza debida a la carga 2 sobre la carga 1 puede escribirse en forma vectorial como:

$$\vec{F}_{2\to1} = -k\frac{q_1 q_2}{r^3}(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) = -k\frac{q_1 q_2}{r^2}\hat{r}_{21}. \tag{21.11}$$

En esta ecuación, $\hat{r}_{21}$ es un vector unitario que apunta de q_1 a q_2 (vea la figura 21.13). El signo negativo indica que la fuerza apunta en sentido contrario al vector $\hat{r}_{21}$. En ese caso, $\vec{F}_{2\to1}$ se aleja de la carga 2, como muestra la figura 21.13*a*). Por otra parte, si una de las cargas es positiva y la otra es negativa, entonces $\vec{F}_{2\to1}$ apunta hacia la carga 2, como indica la figura 21.13*b*).

21.3 Ejercicio en clase

Coloque dos cargas separadas entre sí por una distancia r. Luego, cada carga se duplica y la distancia entre las cargas también se duplica. ¿Cómo cambia la fuerza entre las dos cargas?

a) La nueva fuerza es el doble de grande.

b) La nueva fuerza es la mitad de grande.

c) La nueva fuerza es cuatro veces más grande.

d) La nueva fuerza es cuatro veces más pequeña.

e) La nueva fuerza es la misma.

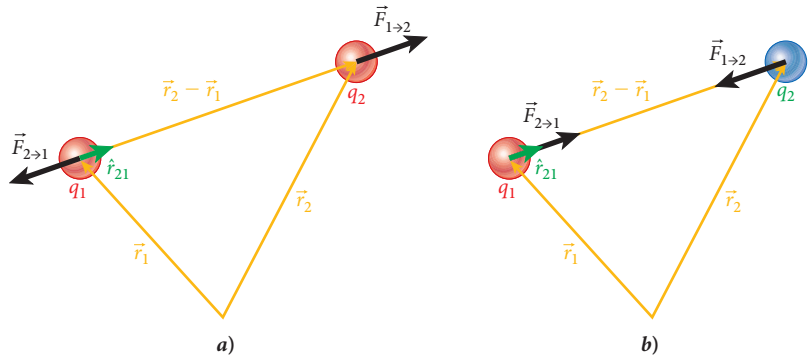


FIGURA 21.13 Vectores de fuerza electrostática entre dos cargas que interactúan entre sí: *a*) dos cargas con el mismo signo; *b*) dos cargas con signos opuestos.

Si la carga 2 ejerce la fuerza $\vec{F}_{2\to1}$ sobre la carga 1, entonces la fuerza $\vec{F}_{1\to2}$ que la carga 1 ejerce sobre la carga 2 se obtiene simplemente a partir de la tercera ley de Newton (vea el capítulo 4): $\vec{F}_{1\to2} = -\vec{F}_{2\to1}$.

Principio de superposición

Hasta ahora en este capítulo se han tratado dos cargas. Ahora se considerarán tres cargas puntuales, q_1, q_2 y q_3, en las posiciones x_1, x_2 y x_3, respectivamente, que se muestran en la figura 21.14. La fuerza ejercida por la carga 1 sobre la carga 3, $\vec{F}_{1\to3}$, está dada por

$$\vec{F}_{1\to3} = -\frac{kq_1q_3}{(x_3 - x_1)^2}\hat{x}.$$

La fuerza ejercida por la carga 2 sobre la carga 3 es

$$\vec{F}_{2\to3} = -\frac{kq_2q_3}{(x_3 - x_2)^2}\hat{x}.$$

La fuerza que la carga 1 ejerce sobre la carga 3 no se ve afectada por la presencia de la carga 2. La fuerza que la carga 2 ejerce sobre la carga 3 no se ve afectada por la presencia de la carga 1. Además, las fuerzas ejercidas por la carga 1 y la carga 2 sobre la carga 3 se suman vectorialmente para producir una fuerza neta sobre la carga 3.

$$\vec{F}_{\text{neta}\to3} = \vec{F}_{1\to3} + \vec{F}_{2\to3}.$$

Esta superposición de fuerzas es completamente análoga a la descrita en el capítulo 4 para fuerzas como gravedad y fricción.

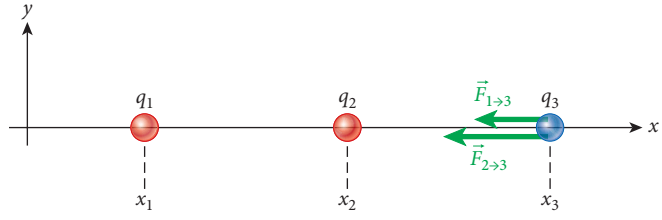


FIGURA 21.14 Fuerzas ejercidas sobre la carga 3 por la carga 1 y la carga 2.

21.4 Ejercicio en clase

¿Qué indican las fuerzas que actúan sobre la carga q_3 en la figura 21.14 sobre los signos de las tres cargas?

a) Las tres cargas deben ser positivas.

b) Las tres cargas deben ser negativas.

c) La carga q_3 debe ser cero.

d) Las cargas q_1 y q_2 deben tener signos opuestos.

e) Las cargas q_1 y q_2 deben tener el mismo signo, y q_3 debe tener signo opuesto.

21.5 Ejercicio en clase

Suponga que las longitudes de los vectores en la figura 21.14 son proporcionales a las magnitudes de las fuerzas que representan. ¿Qué indican sobre las magnitudes de las cargas q_1 y q_2? (*Sugerencia*: La distancia entre x_1 y x_2 es la misma que la distancia entre x_2 y x_3.)

a) $|q_1| < |q_2|$

b) $|q_1| = |q_2|$

c) $|q_1| > |q_2|$

d) No es posible determinar la respuesta a partir de la información proporcionada en la figura.

EJEMPLO 21.2 Fuerza electrostática dentro del átomo

PROBLEMA 1

¿Cuál es la magnitud de la fuerza electrostática que los dos protones dentro del núcleo de un átomo de helio ejercen entre sí?

SOLUCIÓN 1

Los dos protones y los dos neutrones en el núcleo del átomo de helio se mantienen juntos debido a la interacción fuerte; la fuerza electrostática separa los protones. La carga de cada protón

(*continúa*)

(*continuación*)

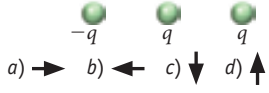
es $q_p = +e$. La distancia aproximada entre los dos protones es $r = 2 \cdot 10^{-15}$ m. Al usar la Ley de Coulomb es posible encontrar la fuerza:

$$F = k\frac{|q_p q_p|}{r^2} = \left(8.99 \cdot 10^9 \ \frac{\text{N m}^2}{\text{C}^2}\right)\frac{\left(+1.6 \cdot 10^{-19}\ \text{C}\right)\left(+1.6 \cdot 10^{-19}\ \text{C}\right)}{\left(2 \cdot 10^{-15}\ \text{m}\right)^2} = 58\ \text{N}.$$

En consecuencia, los dos protones en el núcleo de un átomo de helio están siendo separados por una fuerza de 58 N (aproximadamente el peso de un perro pequeño). Al considerar el tamaño del núcleo, esta fuerza es extraordinariamente grande. ¿Por qué no explotan los núcleos atómicos? La respuesta es que incluso una fuerza más grande, la idóneamente denominada interacción fuerte, los mantiene juntos.

21.6 Ejercicio en clase

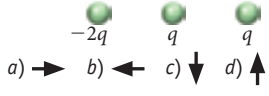
Tres cargas están dispuestas sobre una recta como muestra la figura. ¿Cuál es la dirección de la fuerza electrostática sobre la carga de *en medio*?



e) no hay ninguna fuerza

21.7 Ejercicio en clase

Tres cargas están dispuestas sobre una recta como muestra la figura. ¿Cuál es la dirección de la fuerza electrostática sobre la carga de la *derecha*? (Observe que la carga izquierda es el doble de lo que era en el ejercicio en clase 21.6.)



e) no hay ninguna fuerza

PROBLEMA 2

¿Cuál es la magnitud de la fuerza electrostática entre un núcleo de oro y un electrón del átomo de oro en una órbita de radio $4.88 \cdot 10^{-12}$ m?

SOLUCIÓN 2

El electrón con carga negativa y el átomo de oro con carga positiva se atraen entre sí con una fuerza cuya magnitud es

$$F = k\frac{|q_e q_N|}{r^2},$$

donde la carga del electrón es $q_e = -e$ y la carga del átomo de oro es $q_N = +79e$. Entonces, la fuerza entre el electrón y el núcleo es

$$F = k\frac{|q_e q_N|}{r^2} = \left(8.99 \cdot 10^9 \ \frac{\text{N m}^2}{\text{C}^2}\right)\frac{\left(1.60 \cdot 10^{-19}\ \text{C}\right)\left[(79)\left(1.60 \cdot 10^{-19}\ \text{C}\right)\right]}{\left(4.88 \cdot 10^{-12}\ \text{m}\right)^2} = 7.63 \cdot 10^{-4}\ \text{N}.$$

Por lo tanto, la magnitud de la fuerza electrostática ejercida sobre un electrón en un átomo de oro por el núcleo es alrededor de 100 000 veces menor que entre los protones dentro de un núcleo.

Nota: El núcleo de oro tiene una masa que es aproximadamente 400 000 veces la del electrón. Pero la fuerza que el núcleo de oro ejerce sobre el electrón tiene exactamente la misma magnitud que la fuerza que el electrón ejerce sobre el núcleo de oro. Quizás usted afirme que esto resulta evidente a partir de la tercera ley de Newton (vea el capítulo 4), lo cual es cierto. Sin embargo, merece la pena recalcar que esta ley fundamental también se cumple para fuerzas electrostáticas.

EJEMPLO 21.3 Posición de equilibrio

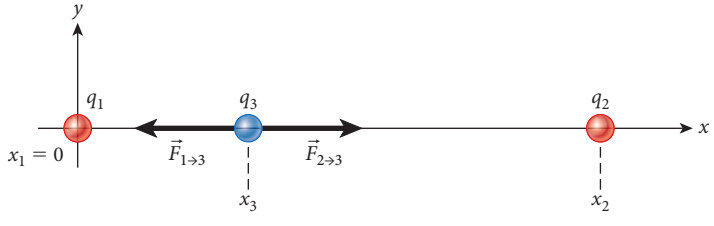


FIGURA 21.15 Colocación de tres partículas cargadas para el ejemplo 21.3. La tercera partícula se muestra con carga negativa.

PROBLEMA

Dos partículas cargadas están colocadas como se muestra en la figura 21.15; $q_1 = 0.15\ \mu\text{C}$ está ubicada en el origen y $q_2 = 0.35\ \mu\text{C}$ está sobre el eje x positivo en $x_2 = 0.40$ m. ¿Dónde debe colocarse una tercera partícula cargada, q_3, para que sea un punto de equilibrio (donde la suma de las fuerzas es cero)?

SOLUCIÓN

Primero se determinará dónde no poner la tercera carga. Si ésta se coloca en cualquier parte fuera del eje x, siempre habrá una componente de la fuerza apuntando hacia o alejándose del eje x.

Por lo tanto, es posible encontrar un punto de equilibrio (un punto en el que la suma de fuerzas es cero) sólo *sobre* el eje x. El eje x puede dividirse en tres segmentos: $x \leq x_1 = 0$, $x_1 < x < x_2$ y $x_2 \leq x$. Para $x \leq x_1 = 0$, los vectores de fuerza provenientes tanto de q_1 como de q_2 que actúan sobre q_3 apuntan en la dirección positiva si la carga es negativa y en la dirección negativa si la carga es positiva. Debido a que se está buscando una ubicación en la que las dos fuerzas se cancelen, es posible excluir el segmento $x \leq x_1 = 0$. Con un razonamiento semejante se excluye $x \geq x_2$.

En el segmento restante del eje x, $x_1 < x < x_2$, las fuerzas tanto de q_1 y q_2 sobre q_3 apuntan en direcciones opuestas. Buscamos la ubicación x_3 donde las magnitudes absolutas de ambas fuerzas sean iguales y entonces la suma de éstas sea cero. La igualdad de las dos fuerzas la expresamos como

$$\left|\vec{F}_{1\to 3}\right| = \left|\vec{F}_{2\to 3}\right|,$$

que es posible volver a escribir como

$$k\frac{|q_1 q_3|}{(x_3 - x_1)^2} = k\frac{|q_3 q_2|}{(x_2 - x_3)^2}.$$

Ahora podemos ver que la magnitud y el signo de la tercera carga no importan porque esta carga se cancela, así como la constante k, con lo cual se obtiene

$$\frac{q_1}{(x_3 - x_1)^2} = \frac{q_2}{(x_2 - x_3)^2}$$

o bien,

$$q_1(x_2 - x_3)^2 = q_2(x_3 - x_1)^2. \qquad \text{(i)}$$

Al tomar la raíz cuadrada de ambos miembros y despejar x_3 se encuentra

$$\sqrt{q_1}(x_2 - x_3) = \sqrt{q_2}(x_3 - x_1),$$

o bien,

$$x_3 = \frac{\sqrt{q_1}x_2 + \sqrt{q_2}x_1}{\sqrt{q_1} + \sqrt{q_2}}.$$

Podemos tomar la raíz cuadrada de ambos miembros de la ecuación (i) porque $x_1 < x_3 < x_2$, y así se asegura que ambas raíces, $x_2 - x_3$ y $x_3 - x_1$, son positivas.

Al insertar los números dados en el planteamiento del problema se obtiene

$$x_3 = \frac{\sqrt{q_1}x_2 + \sqrt{q_2}x_1}{\sqrt{q_1} + \sqrt{q_2}} = \frac{\sqrt{0.15\ \mu\text{C}}(0.4\ \text{m})}{\sqrt{0.15\ \mu\text{C}} + \sqrt{0.35\ \mu\text{C}}} = 0.16\ \text{m}.$$

Este resultado tiene sentido porque esperamos que el punto de equilibrio esté más cerca de la carga más pequeña.

PROBLEMA RESUELTO 21.1 Esferas cargadas

PROBLEMA

Dos esferas con carga idéntica cuelgan del techo suspendidas por cuerdas aislantes de la misma longitud, $\ell = 1.50$ m (figura 21.16). A cada esfera se le proporciona una carga $q = 25.0\ \mu$C. Luego las dos esferas cuelgan en reposo, y cada cuerda forma un ángulo de 25.0° con respecto a la vertical (figura 21.16*a*). ¿Cuál es la masa de cada esfera?

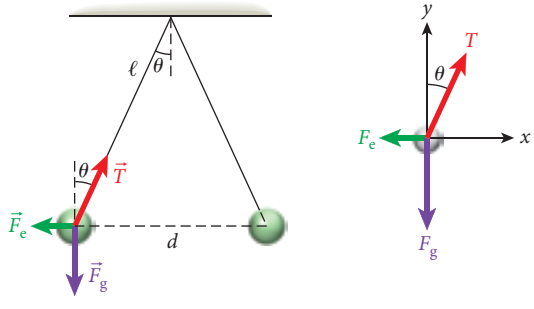


FIGURA 21.16 *a*) Dos esferas cargadas suspendidas del techo en su posición de equilibrio. *b*) Diagrama de cuerpo libre para la esfera cargada de la izquierda.

SOLUCIÓN

PIENSE

Sobre cada esfera cargada actúan tres fuerzas: la fuerza de gravedad, la fuerza electrostática de repulsión y la tensión en la cuerda de la cual está suspendida. Al usar la primera condición de equilibrio estático del capítulo 11,

(*continúa*)

(*continuación*)

sabemos que la suma de todas las fuerzas sobre cada esfera debe ser cero. Es posible resolver las componentes de las tres fuerzas e igualarlas a cero, permitiendo despejar la masa de las esferas cargadas.

ESBOCE

En la figura 21.16*b*) se muestra un diagrama de cuerpo libre de la esfera izquierda.

INVESTIGUE

La condición de equilibrio estático establece que la suma de las componentes x de las tres fuerzas que actúan sobre una esfera debe ser igual a cero y que la suma de las componentes y de estas fuerzas debe ser igual a cero. La suma de las componentes x de las fuerzas es

$$T \operatorname{sen}\theta - F_e = 0, \tag{i}$$

donde T es la magnitud de la tensión en la cuerda, θ es el ángulo de la cuerda con respecto a la vertical y F_e es la magnitud de la fuerza electrostática. La suma de las componentes y de las fuerzas es

$$T\cos\theta - F_g = 0. \tag{ii}$$

La fuerza de gravedad, F_g, es justo el peso de la esfera cargada:

$$F_g = mg, \tag{iii}$$

donde m es la masa de la esfera cargada. La fuerza electrostática que las dos esferas ejercen entre sí está dada por

$$F_e = k\frac{q^2}{d^2}, \tag{iv}$$

donde d es la distancia entre las dos esferas. Es posible expresar la distancia entre las esferas en términos de la longitud de la cuerda, ℓ, al observar la figura 21.16*a*). Vemos que

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{d/2}{\ell}.$$

Entonces, podemos expresar la fuerza electrostática en términos del ángulo con respecto a la vertical, θ, y la longitud de la cuerda, ℓ:

$$F_e = k\frac{q^2}{(2\ell\operatorname{sen}\theta)^2} = k\frac{q^2}{4\ell^2\operatorname{sen}^2\theta}. \tag{v}$$

SIMPLIFIQUE

Dividimos la ecuación (i) entre la ecuación (ii):

$$\frac{T\operatorname{sen}\theta}{T\cos\theta} = \frac{F_e}{F_g},$$

eliminando la tensión de la cuerda (desconocida) y obteniendo

$$\tan\theta = \frac{F_e}{F_g}.$$

Al sustituir en las ecuaciones (iii) y (v) la fuerza de gravedad y la fuerza electrostática, obtenemos

$$\tan\theta = \frac{k\dfrac{q^2}{4\ell^2\operatorname{sen}^2\theta}}{mg} = \frac{kq^2}{4mg\ell^2\operatorname{sen}^2\theta}.$$

Al despejar la masa de la esfera, llegamos a

$$m = \frac{kq^2}{4g\ell^2\operatorname{sen}^2\theta\tan\theta}.$$

CALCULE

Al insertar los valores numéricos, obtenemos

$$m = \frac{\left(8.99\cdot10^{9}\ \text{N m}^2/\text{C}^2\right)\left(25.0\ \mu\text{C}\right)^2}{4\left(9.81\ \text{m/s}^2\right)\left(1.50\ \text{m}\right)^2\left(\text{sen}^2\,25.0°\right)\left(\tan 25.0°\right)} = 0.764116\ \text{kg}.$$

REDONDEE

Mostramos nuestro resultado con tres cifras:

$$m = 0.764\ \text{kg}.$$

VUELVA A REVISAR

Para corroborar, hacemos las aproximaciones de ángulo pequeño donde $\text{sen}\,\theta \approx \tan\theta \approx \theta$ y $\cos\theta \approx 1$. Así, la tensión en la cuerda tiende a mg y podemos expresar las componentes x de las fuerzas como

$$T\,\text{sen}\,\theta \approx mg\theta = F_e = k\frac{q^2}{d^2} \approx k\frac{q^2}{(2\ell\theta)^2}.$$

Al despejar la masa de la bola cargada, obtenemos

$$m = \frac{kq^2}{4g\ell^2\theta^3} = \frac{\left(8.99\cdot10^{9}\ \text{N m}^2/\text{C}^2\right)\left(25.0\ \mu\text{C}\right)^2}{4\left(9.81\ \text{m/s}^2\right)\left(1.50\ \text{m}\right)^2\left(0.436\ \text{rad}\right)^3} = 0.768\ \text{kg},$$

que está cerca de nuestra respuesta.

Precipitador electrostático

Una aplicación de la carga electrostática y de las fuerzas electrostáticas se encuentra en la limpieza de emisiones de plantas que queman carbón. Un dispositivo denominado **precipitador electrostático** (PES) se usa para remover cenizas y otras partículas que resultan de quemar carbón para generar electricidad. Su operación se ilustra en la figura 21.17.

El PES consta de cables y placas, donde los cables mantienen un alto voltaje negativo con respecto a una serie de placas que se mantienen a voltaje positivo. (Aquí el término *voltaje* se usa coloquialmente; en el capítulo 23 este concepto se define en términos de diferencia de potencial eléctrico.) En la figura 21.17, los gases de escape del proceso de quema de carbón entran al PES por la izquierda. Las partículas que pasan cerca de los cables adquieren una carga negativa. Luego, estas partículas son atraídas hacia una de las placas positivas y ahí se adhieren. El gas continúa su curso a través del PES, dejando atrás la ceniza y otras partículas. Luego, el material acumulado se sacude de las placas hacia un cesto que está abajo. Este desecho puede usarse para muchas cosas, incluida la elaboración de materiales para construcción o fertilizantes. La figura 21.18 muestra un ejemplo de planta que quema carbón que cuenta con un PES.

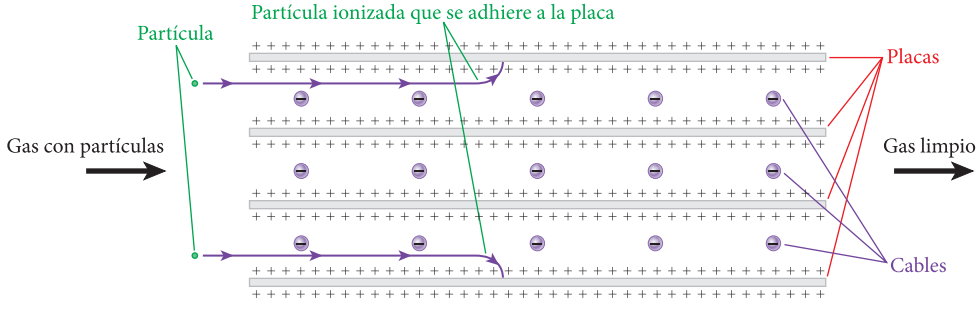
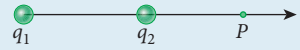


FIGURA 21.17 Operación de un precipitador electrostático utilizado para limpiar los gases emitidos por una planta que quema carbón. La vista es desde la parte superior del dispositivo.

21.2 Oportunidad de autoevaluación

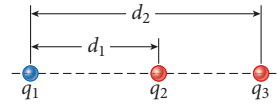
Una carga puntual positiva $+q$ se coloca en el punto P, a la derecha de dos cargas q_1 y q_2, como se muestra en la figura. Se establece que la fuerza electrostática neta sobre la carga positiva $+q$ es cero. Califique cada una de las siguientes declaraciones como falsa o verdadera.



a) La carga q_2 debe tener signo opuesto a q_1 y su magnitud debe ser menor.
b) La magnitud de la carga q_1 debe ser menor que la magnitud de la carga q_2.
c) Las cargas q_1 y q_2 deben tener el mismo signo.
d) Si q_1 es negativa, entonces q_2 debe ser positiva.
e) Una de las dos, q_1 o q_2, debe ser positiva.

21.8 Ejercicio en clase

Considere tres cargas colocadas a lo largo del eje x, como muestra la figura.



Los valores de las cargas son $q_1 = -8.10\ \mu\text{C}$, $q_2 = 2.16\ \mu\text{C}$ y $q_3 = 2.16\ \text{pC}$. La distancia entre q_1 y q_2 es $d_1 = 1.71$ m. La distancia entre q_1 y q_3 es $d_2 = 2.62$ m. ¿Cuál es la magnitud de la fuerza electrostática total ejercida sobre q_3 por q_1 y q_2?

a) $2.77\cdot10^{-8}$ N
b) $7.92\cdot10^{-6}$ N
c) $1.44\cdot10^{-5}$ N
d) $2.22\cdot10^{-4}$ N
e) $6.71\cdot10^{-2}$ N

FIGURA 21.18 Planta que quema carbón en la Universidad Estatal de Michigan e incorpora un precipitador electrostático para eliminar partículas de sus emisiones.

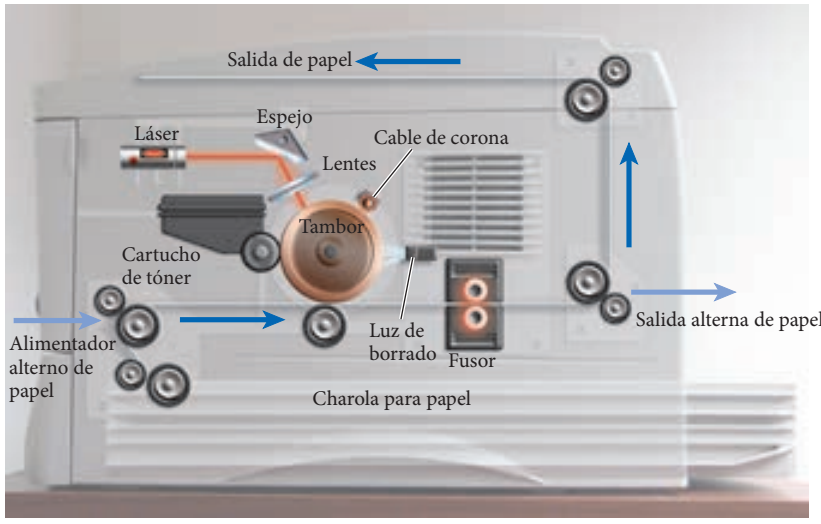


FIGURA 21.19 Operación de una impresora láser típica.

Impresora láser

Otro ejemplo de dispositivo que aplica fuerzas electrostáticas es la impresora láser. La operación de esta impresora se ilustra en la figura 21.19. La trayectoria del papel sigue las flechas azules. El papel se toma de la charola o se alimenta manualmente a través de la forma alterna de alimentación de papel. El papel pasa sobre un tambor en el que el tóner se coloca sobre el papel y luego éste pasa por un fusor que funde el tóner y lo fija de manera permanente al papel.

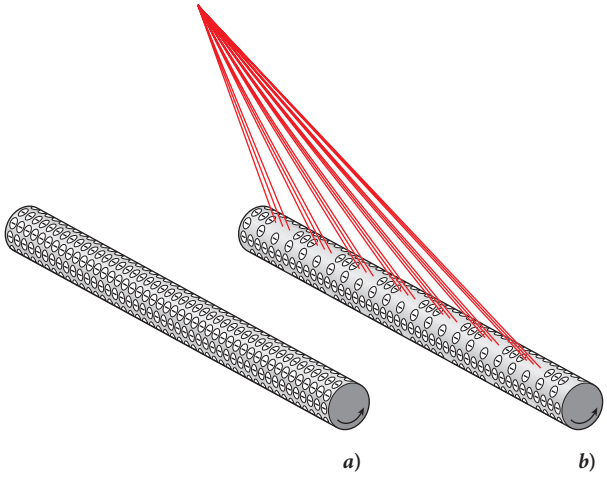


FIGURE 21.20 *a*) El tambor completamente cargado de una impresora láser. Este tambor produce una página en blanco. *b*) Un tambor cuya línea de información está siendo registrada por un láser. Cada vez que el láser incide contra el tambor cargado, la carga negativa se neutraliza y la zona descargada atrae el tóner que produce una imagen sobre el papel.

El tambor consta de un cilindro metálico recubierto con un material fotosensible especial; originalmente se usaba selenio amorfo, pero se ha sustituido por material orgánico. La superficie fotosensible es un aislante que retiene carga en ausencia de luz, pero se descarga rápidamente si incide luz sobre la superficie. El tambor gira de modo que su velocidad superficial es igual a la velocidad del papel en movimiento. El principio de operación básico del tambor se ilustra en la figura 21.20.

El tambor está cargado negativamente con electrones que provienen de un cable mantenido a alto voltaje. Luego, se dirige luz láser hacia la superficie del tambor. Cada vez que la luz láser incide contra la superficie del tambor, la superficie en ese punto se descarga. Se usa un láser porque su haz es estrecho y permanece enfocado. Una línea de la imagen que está por imprimirse se representa con un pixel (elemento o punto de imagen) a la vez, usando un haz láser dirigido por un espejo móvil y una lente. Una impresora láser por lo general imprime 300 pixeles por pulgada, aunque muchas impresoras pueden imprimir 600 o 1 200 pixeles por pulgada. Luego, la superficie del tambor pasa por un rodillo que recoge tóner del cartucho. El tóner consta de pequeñas partículas negras aislantes compuestas de un material semejante al plástico. El rodillo de tóner se carga al mismo voltaje negativo que el tambor. En consecuencia, cada vez que la superficie del tambor se descarga, fuerzas electrostáticas depositan tóner sobre su superficie. Cualquier porción de la superficie del tambor no expuesta al láser no recibe tóner.

A medida que gira el tambor, entra en contacto con el papel. Luego, el tóner se traspasa de la superficie del tambor al papel. Algunas impresoras cargan el papel positivamente a fin de ayudar a atraer el tóner cargado negativamente. A medida que gira el tambor, todo el tóner restante es rascado y la superficie se neutraliza con una luz de borrado o un tambor de raspado giratorio en preparación de la impresión de la siguiente imagen. Luego, el papel continúa su ruta hacia el fusor, que funde el tóner, produciendo una imagen permanente sobre el papel. Por último, el papel sale de la impresora.

21.6 Ley de Coulomb y ley de gravitación de Newton

La ley de Coulomb que describe la fuerza electrostática entre dos cargas eléctricas, F_e, tiene una forma semejante a la ley de Newton que describe la fuerza gravitacional entre dos masas, F_g:

$$F_g = G\frac{m_1 m_2}{r^2} \quad \text{y} \quad F_e = k\frac{|q_1 q_2|}{r^2},$$

donde m_1 y m_2 son las dos masas, q_1 y q_2 son las dos cargas eléctricas y r es la distancia de separación. Ambas fuerzas varían con el inverso del cuadrado de la distancia. La fuerza eléctrica puede ser de atracción o repulsión porque las cargas pueden tener signos positivos o negativos. (Vea la figura 21.13*a*) y *b*). La fuerza gravitacional siempre es de atracción porque sólo hay un tipo de masa. (Para la fuerza gravitacional, sólo es posible el caso que muestra la figura 21.13*b*). Las intensidades relativas están dadas por las constantes de proporcionalidad k y G.

EJEMPLO 21.4 Fuerzas entre electrones

Evaluemos las intensidades relativas de las dos interacciones al calcular la razón de la fuerza electrostática y la fuerza gravitacional que los dos electrones ejercen entre sí. Esta razón está dada por

$$\frac{F_e}{F_g} = \frac{kq_e^2}{Gm_e^2}.$$

Debido a que la dependencia con respecto a la distancia es la misma en ambas fuerzas, no hay dependencia con respecto a la distancia en la razón de las dos fuerzas, ya que se cancela. La masa de un electrón es $m_e = 9.109 \cdot 10^{-31}$ kg, y su carga es $q_e = -1.602 \cdot 10^{-19}$ C. Al usar el valor de la constante de Coulomb proporcionada en la ecuación 21.7, $k = 8.99 \cdot 10^9$ N m^2/C^2, y el valor de la constante universal de gravitación $G = 6.67 \cdot 10^{-11}$ N m^2/kg^2, encontramos numéricamente

$$\frac{F_e}{F_g} = \frac{(8.99 \cdot 10^9 \text{ N m}^2/\text{C}^2)(1.602 \cdot 10^{-19} \text{ C})^2}{(6.67 \cdot 10^{-11} \text{ N m}^2/\text{kg}^2)(9.109 \cdot 10^{-31} \text{ kg})^2} = 4.2 \cdot 10^{42}.$$

En consecuencia, la fuerza electrostática entre electrones es más intensa que la fuerza gravitacional entre éstos por más de 42 órdenes de magnitud.

A pesar de la debilidad relativa de la fuerza gravitacional, a escala astronómica, la gravedad es la única fuerza que importa. La razón de este dominio es que todas las estrellas, planetas y otros objetos de relevancia astronómica no portan carga neta. Por lo tanto, no hay interacción electrostática entre ellos, por lo que domina la gravedad.

La ley de Coulomb de electrostática es válida desde sistemas macroscópicos hasta el átomo, aunque efectos sutiles en sistemas atómicos y subatómicos requieren el uso de un método más sofisticado llamado *electrodinámica cuántica*. La ley de gravitación de Newton fracasa en los sistemas subatómicos y también debe modificarse para los sistemas astronómicos, como el movimiento de precesión de Mercurio alrededor del Sol. Estos detalles finos de la atracción gravitacional son regidos por la teoría de la relatividad general de Einstein.

Las semejanzas entre las interacciones gravitacional y electrostática se cubrirán con mayor detalle en los dos capítulos siguientes, en los que se abordan los campos eléctricos y el potencial eléctrico.

LO QUE HEMOS APRENDIDO | GUÍA DE ESTUDIO PARA EXAMEN

- Hay dos tipos de carga eléctrica: positiva y negativa. Cargas iguales se repelen y cargas diferentes se atraen.
- El cuanto (cantidad elemental) de carga eléctrica es $e = 1.602 \cdot 10^{-19}$ C.
- La carga del electrón es $q_e = -e$ y el protón tiene carga $q_p = +e$. El neutrón tiene carga cero.
- La carga neta de un objeto está dada por e veces el número de protones, N_p, menos e veces el número de electrones, N_e, que componen el objeto: $q = e \cdot (N_p - N_e)$.

- La carga total en un sistema aislado siempre se conserva.
- Los objetos pueden cargarse directamente por contacto o indirectamente por inducción.
- La ley de Coulomb describe la fuerza que dos cargas estacionarias ejercen entre sí: $F = k\dfrac{|q_1 q_2|}{r^2} = \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\dfrac{|q_1 q_2|}{r^2}$.
- La constante en la ley de Coulomb es: $k = \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0} = 8.99 \cdot 10^9 \ \dfrac{\text{N m}^2}{\text{C}^2}$.
- La permitividad eléctrica del espacio libre es $\epsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12} \ \dfrac{\text{C}^2}{\text{N m}^2}$.

TÉRMINOS CLAVE

electrostática, p. 685
carga, p. 685
electrones, p. 685
carga positiva, p. 685
carga negativa, p. 685
ley de las cargas eléctricas, p. 686
coulomb, p. 686
protón, p. 686
ley de conservación de la carga, p. 686
cuantizada, p. 687
conductores, p. 688
aislantes, p. 688
semiconductores, p. 689
superconductores, p. 689
carga electrostática, p. 690
conexión a tierra, p. 690
tierra, p. 690
electroscopio, p. 690
inducido, p. 690
carga por contacto, p. 691
carga por inducción, p. 692
ley de Coulomb, p. 692
constante de Coulomb, 692
permitividad eléctrica del espacio libre, 692
precipitador electrostático, 697

NUEVOS SÍMBOLOS

q, carga eléctrica

ϵ_0, permitividad eléctrica del espacio libre

k, constante de Coulomb

e, el cuanto de carga elemental

RESPUESTAS A LAS OPORTUNIDADES DE AUTOEVALUACIÓN

21.1 *a*) +1 *b*) 0 *c*) 0 *d*) 0 *e*) $+\frac{2}{3}$ *f*) $-\frac{1}{3}$ *g*) −1 *h*) +2

22.2 *a*) verdadero *b*) falso *c*) falso *d*) verdadero *e*) verdadero

PRÁCTICA PARA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Lineamientos para resolución de problemas

1. Cuando resuelva problemas que impliquen la ley de Coulomb, a menudo es útil trazar un diagrama de cuerpo libre que muestre los vectores de la fuerza electrostática que actúan sobre una partícula cargada. En un diagrama de cuerpo libre, la fuerza puede ser negativa y provenir de la repulsión de cargas del mismo signo; o ser negativa y provenir de la atracción de cargas de diferente signo. Asegúrese de que las direcciones de las fuerzas en el diagrama coincidan con los signos de las fuerzas en los cálculos.

2. Use simetría para simplificar su trabajo. No obstante, tenga cuidado en tomar en cuenta las magnitudes y signos de las cargas, así como las distancias. Dos cargas a distancias iguales de una tercera carga no ejercen fuerzas iguales sobre esa carga si sus magnitudes o signos son diferentes.

3. En electrostática, a menudo las unidades tienen prefijos que indican potencias de 10: las distancias pueden darse en cm o mm; las cargas en μC, nC o pC; y las masas en kg o g. Otras unidades también son comunes. La mejor manera de proceder es convertir todas las cantidades a unidades SI, a fin de que sean compatibles con el valor de k o $1/4\pi\epsilon_0$.

PROBLEMA RESUELTO 21.2 Cuenta metálica en un alambre

PROBLEMA

Una cuenta metálica con carga $q_1 = +1.28$ μC está fija sobre un cable aislante que forma un ángulo de $\theta = 42.3°$ con respecto a la horizontal (figura 21.21*a*). Una segunda cuenta metálica con carga $q_2 = -5.06$ μC se desliza sin fricción sobre el alambre. A una distancia $d = 0.380$ m entre las dos cuentas metálicas, la fuerza neta sobre la segunda cuenta metálica es cero. ¿Cuál es la masa, m_2, de la segunda cuenta?

SOLUCIÓN

PIENSE

La fuerza de gravedad que atrae a la cuenta metálica de masa m_2 hacia abajo del alambre es compensada por la fuerza electrostática de atracción entre la carga positiva sobre la primera cuenta y la carga negativa sobre la segunda. Puede pensarse que la segunda cuenta metálica se desliza sobre un plano inclinado.

ESBOCE

La figura 21.21*b*) muestra un diagrama de cuerpo libre de las fuerzas que actúan sobre la segunda cuenta metálica. Hemos definido un sistema de coordenadas en el que la dirección x positiva es la que corre a lo largo del alambre. La fuerza ejercida sobre m_2 por el alambre puede omitirse porque esta fuerza sólo tiene una componente y, y podemos resolver el problema analizando justo las componentes x de las fuerzas.

INVESTIGUE

La fuerza electrostática de atracción entre las dos cuentas metálicas equilibra la componente de la fuerza de gravedad que actúa sobre la segunda cuenta a lo largo del alambre. La fuerza electrostática actúa en la dirección x negativa y su magnitud está dada por

$$F_e = k\frac{|q_1 q_2|}{d^2}. \tag{i}$$

La componente x de la fuerza de gravedad que actúa sobre la segunda cuenta metálica corresponde a la componente del peso de la segunda cuenta que es paralela al alambre. La figura 21.21*b*) indica que la componente del peso de la segunda cuenta metálica a lo largo del alambre está dada por

$$F_g = m_2 g \text{ sen } \theta. \tag{ii}$$

SIMPLIFIQUE

Por equilibrio, la fuerza electrostática y la fuerza gravitacional son iguales; $F_e = F_g$. Al sustituir las expresiones para estas fuerzas de las ecuaciones (i) y (ii) se obtiene

$$k\frac{|q_1 q_2|}{d^2} = m_2 g \text{ sen } \theta.$$

Al despejar de esta ecuación la masa de la segunda cuenta metálica, obtenemos

$$m_2 = \frac{k|q_1 q_2|}{d^2 g \text{ sen } \theta}.$$

CALCULE

Escribimos los valores numéricos para obtener

$$m_2 = \frac{kq_1 q_2}{d^2 g \text{ sen } \theta} = \frac{\left(8.99\cdot 10^9 \text{ N m}^2/\text{C}^2\right)(1.28\ \mu\text{C})(5.06\ \mu\text{C})}{(0.380\text{ m})^2\left(9.81\text{ m/s}^2\right)(\text{sen } 42.3°)} = 0.0610746\text{ kg}.$$

REDONDEE

Mostramos nuestro resultado con tres cifras:

$$m_2 = 0.0611\text{ kg} = 61.1\text{ g}.$$

VUELVA A REVISAR

Para corroborar, calculamos la masa de la segunda cuenta metálica en el supuesto de que el alambre es vertical; es decir, $\theta = 90°$. Luego es posible igualar el peso de la segunda cuenta metálica a la fuerza electrostática entre las dos cuentas metálicas:

$$k\frac{|q_1 q_2|}{d^2} = m_2 g.$$

(*continúa*)

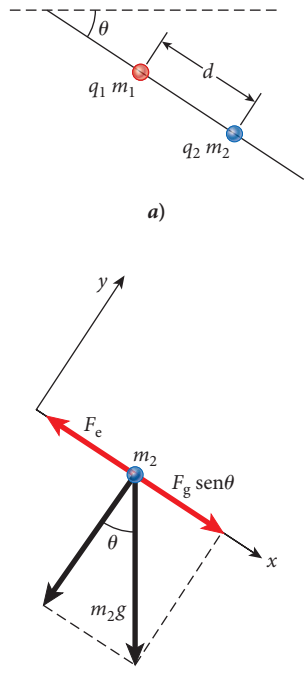
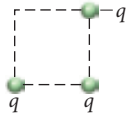


FIGURA 21.21 *a*) Dos cuentas cargadas sobre un alambre. *b*) Diagrama de cuerpo libre de las fuerzas que actúan sobre la segunda cuenta.

21.9 Ejercicio en clase

Tres cargas están colocadas en los vértices de un cuadrado, como muestra la figura. ¿Cuál es la dirección de la fuerza electrostática sobre la carga en el *vértice inferior derecho*?

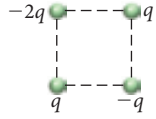


a) ↙ *b*) ↖ *c*) ↗ *d*) ↘

e) no hay ninguna fuerza

21.10 Ejercicio en clase

Cuatro cargas están colocadas en los vértices de un cuadrado, como muestra la figura. ¿Cuál es la dirección de la fuerza electrostática sobre la carga en el *vértice inferior derecho*?



a) ↙ *b*) ↖ *c*) ↗ *d*) ↘

e) no hay ninguna fuerza

(*continuación*)

Al despejar la masa de la segunda cuenta, obtenemos

$$m_2 = \frac{kq_1q_2}{d^2g} = \frac{\left(8.99\cdot10^9\ \text{N m}^2/\text{C}^2\right)(1.28\ \mu\text{C})(5.06\ \mu\text{C})}{(0.380\ \text{m})^2\left(9.81\ \text{m/s}^2\right)} = 0.0411\ \text{kg}.$$

A medida que decrece el ángulo del alambre con respecto a la horizontal, la masa calculada de la segunda cuenta metálica aumenta. El resultado de 0.0611 kg es algo mayor que la masa que es posible sostener con un alambre vertical, de modo que parece razonable.

PROBLEMA RESUELTO 21.3 Cuatro objetos cargados

Considere cuatro cargas colocadas en los vértices de un cuadrado de 1.25 m por lado, como muestra la figura 21.22*a*).

PROBLEMA

¿Cuáles son la magnitud y dirección de la fuerza electrostática sobre q_4 resultante de las otras tres cargas?

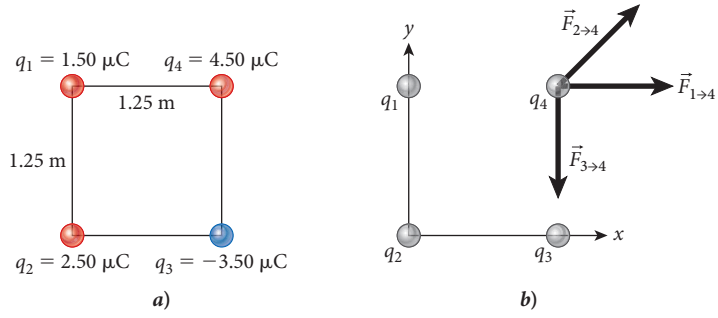


FIGURA 21.22 *a*) Cuatro cargas colocadas en los vértices de un cuadrado. *b*) Fuerzas ejercidas sobre q_4 por las otras tres cargas.

SOLUCIÓN

PIENSE

La fuerza electrostática sobre q_4 es la suma vectorial de las fuerzas resultantes de sus interacciones con las otras tres cargas. Por lo tanto, es importante evitar sumar simplemente algebraicamente las magnitudes de las fuerzas individuales. En lugar de eso es necesario determinar las componentes de las fuerzas individuales en cada dirección espacial y sumarlas para encontrar las componentes de la fuerza neta de este vector.

ESBOCE

La figura 21.22*b*) muestra las cuatro cargas en un sistema de coordenadas *xy*, con el origen ubicado en q_2.

INVESTIGUE

La fuerza neta sobre q_4 es la suma vectorial de las fuerzas $\vec{F}_{1\to4}$, $\vec{F}_{2\to4}$ y $\vec{F}_{3\to4}$. La componente *x* de la suma de las fuerzas es

$$F_x = k\frac{|q_1q_4|}{d^2} + k\frac{|q_2q_4|}{\left(\sqrt{2}d\right)^2}\cos45° = \frac{kq_4}{d^2}\left(q_1 + \frac{q_2}{2}\cos45°\right), \qquad \text{(i)}$$

donde *d* es la longitud de uno de los lados del cuadrado y, como indica la figura 21.22*b*), la componente *x* de $\vec{F}_{3\to4}$ es cero. La componente *y* de la suma de las fuerzas es

$$F_y = k\frac{|q_2q_4|}{\left(\sqrt{2}d\right)^2}\,\text{sen}\,45° - k\frac{|q_3q_4|}{d^2} = \frac{kq_4}{d^2}\left(\frac{q_2}{2}\,\text{sen}\,45° + q_3\right), \qquad \text{(ii)}$$

donde, como indica la figura 21.22*b*), la componente *y* de $\vec{F}_{1\to 4}$ es cero.

La magnitud de la fuerza neta está dada por

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2}, \tag{iii}$$

y el ángulo de la fuerza neta está dado por

$$\tan\theta = \frac{F_y}{F_x}.$$

SIMPLIFIQUE

Sustituimos las expresiones para F_x y F_y de las ecuaciones (i) y (ii) en la ecuación (iii):

$$F = \sqrt{\left[\frac{kq_4}{d^2}\left(q_1 + \frac{q_2}{2}\cos 45°\right)\right]^2 + \left[\frac{kq_4}{d^2}\left(\frac{q_2}{2}\operatorname{sen} 45° + q_3\right)\right]^2}.$$

Podemos volver a escribir esto como

$$F = \frac{kq_4}{d^2}\sqrt{\left(q_1 + \frac{q_2}{2}\cos 45°\right)^2 + \left(\frac{q_2}{2}\operatorname{sen} 45° + q_3\right)^2}.$$

Para el ángulo de la fuerza obtenemos

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{F_y}{F_x}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{\dfrac{kq_4}{d^2}\left(\dfrac{q_2}{2}\operatorname{sen} 45° + q_3\right)}{\dfrac{kq_4}{d^2}\left(q_1 + \dfrac{q_2}{2}\cos 45°\right)}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{\left(\dfrac{q_2}{2}\operatorname{sen} 45° + q_3\right)}{\left(q_1 + \dfrac{q_2}{2}\cos 45°\right)}\right).$$

CALCULE

Al escribir los valores numéricos, obtenemos

$$\frac{q_2}{2}\operatorname{sen} 45° = \frac{q_2}{2}\cos 45° = \frac{2.50\ \mu\text{C}}{2\sqrt{2}} = 0.883883\ \mu\text{C}.$$

Entonces, la magnitud de la fuerza es

$$F = \frac{\left(8.99\cdot 10^9\ \text{N m}^2/\text{C}^2\right)\left(4.50\ \mu\text{C}\right)}{\left(1.25\ \text{m}\right)^2}\sqrt{\left(1.50\ \mu\text{C} + 0.883883\ \mu\text{C}\right)^2 + \left(0.883883\ \mu\text{C} - 3.50\ \mu\text{C}\right)^2}$$
$$= 0.0916379\ \text{N}.$$

Para la dirección de la fuerza obtenemos

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{\left(\dfrac{q_2}{2}\operatorname{sen} 45° + q_3\right)}{\left(q_1 + \dfrac{q_2}{2}\cos 45°\right)}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{\left(0.883883\ \mu\text{C} - 3.50\ \mu\text{C}\right)}{\left(1.50\ \mu\text{C} + 0.883883\ \mu\text{C}\right)}\right) = -47.6593°.$$

REDONDEE

Mostramos nuestro resultado con tres cifras:

$$F = 0.0916\ \text{N}$$

y

$$\theta = -47.7°.$$

(*continúa*)

(*continuación*)

VUELVA A REVISAR

Para corroborar nuestro resultado, calculamos la magnitud de las tres fuerzas que actúan sobre q_4. Para $\vec{F}_{1\to4}$, obtenemos

$$F_{1\to4} = k\frac{|q_1 q_4|}{r_{14}^2} = \frac{\left(8.99\cdot10^9\ \text{N m}^2/\text{C}^2\right)(1.50\ \mu\text{C})(4.50\ \mu\text{C})}{(1.25\ \text{m})^2} = 0.0388\ \text{N}.$$

Para $\vec{F}_{2\to4}$, obtenemos

$$F_{2\to4} = k\frac{|q_2 q_4|}{r_{24}^2} = \frac{\left(8.99\cdot10^9\ \text{N m}^2/\text{C}^2\right)(2.50\ \mu\text{C})(4.50\ \mu\text{C})}{\left[\sqrt{2}(1.25\ \text{m})\right]^2} = 0.0324\ \text{N}.$$

Para $F_{3\to4}$, obtenemos

$$F_{3\to4} = k\frac{|q_3 q_4|}{r_{34}^2} = \frac{\left(8.99\cdot10^9\ \text{N m}^2/\text{C}^2\right)(3.50\ \mu\text{C})(4.50\ \mu\text{C})}{(1.25\ \text{m})^2} = 0.0906\ \text{N}.$$

Las tres magnitudes de las fuerzas individuales son del mismo orden que nuestro resultado para la fuerza neta. Esto nos garantiza que nuestro resultado no difiere por un factor grande.

La dirección que obtuvimos también parece razonable, ya que orienta la fuerza resultante hacia abajo y a la derecha, como podría esperarse al observar la figura 21.22*b*).

PREGUNTAS DE OPCIÓN MÚLTIPLE

21.1 Cuando a una placa metálica se le proporciona una carga positiva, ¿cuál de los siguientes hechos ocurre?

a) Protones (cargas positivas) se transfieren a la placa desde otro objeto.

b) Electrones (cargas negativas) se transfieren desde la placa a otro objeto.

c) Electrones (cargas negativas) se transfieren a la placa desde otro objeto, y protones (cargas positivas) también se transfieren a la placa desde otro objeto.

d) Depende de si el objeto que transporta la carga es conductor o aislante.

21.2 La fuerza entre una carga de 25 μC y una carga de –10 μC es 8.0 N. ¿Cuál es la separación entre las dos cargas?

a) 0.28 m *c*) 0.45 m

b) 0.53 m *d*) 0.15 m

21.3 Una carga Q_1 está ubicada sobre el eje x en $x = a$. ¿Dónde debe colocarse una carga $Q_2 = -4Q_1$ para producir una fuerza electrostática neta igual a cero sobre una tercera carga, $Q_3 = Q_1$, situada en el origen?

a) En el origen *c*) En $x = -2a$

b) En $x = 2a$ *d*) En $x = -a$

21.4 ¿Cuál de los siguientes sistemas tiene la carga más negativa?

a) 2 electrones

b) 3 electrones y un protón

c) 5 electrones y 5 protones

d) N electrones y $N - 3$ protones

e) 1 electrón

21.5 Dos cargas puntuales están fijas en el eje x: q_1 = 6.0 μC está en el origen, O, con x_1 = 0.0 cm, y q_2 = –3.0 μC está situada en el punto A, con x_2 = 8.0 cm. ¿Dónde debería colocarse una tercera carga, q_3, sobre el eje x, de modo que la fuerza electrostática total que actúa sobre ésta sea cero?

a) 19 cm *c*) 0.0 cm *e*) –19 cm

b) 27 cm *d*) 8.0 cm

21.6 ¿Cuál de las siguientes situaciones produce la mayor fuerza neta sobre la carga Q?

a) La carga Q = 1 C está a 1 m de una carga de –2 C.

b) La carga Q = 1 C está a 0.5 m de una carga de –1 C.

c) La carga Q = 1 C está a la mitad del camino entre una carga de –1 C y una carga de 1 C separadas 2 m entre sí.

d) La carga Q = 1 C está a la mitad del camino entre dos cargas de –2 C separadas 2 m entre sí.

e) La carga Q = 1 C está a una distancia de 2 m de una carga de –4 C.

21.7 Dos protones próximos entre sí, pero sin ningún otro objeto cerca

a) Se aceleran alejándose entre sí.

b) Permanecen inmóviles.

c) Se aceleran aproximándose entre sí.

d) Se atraen mutuamente a velocidad constante.

e) Se alejan uno de otro a velocidad constante.

21.8 Dos esferas de metal ligero están suspendidas de hilos aislantes, próximas entre sí. Una esfera tiene una carga neta; la otra no. Las esferas

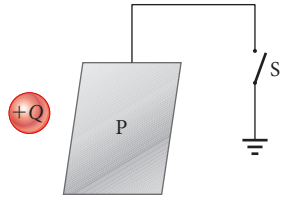
a) Se atraen entre sí.

b) No ejercen ninguna fuerza electrostática entre sí.

c) Se repelen mutuamente.

d) Hacen cualquiera de las cosas anteriores dependiendo del signo de la carga sobre una de las esferas.

21.9 Una placa metálica está conectada por un conductor a tierra por medio de un interruptor. El interruptor está inicialmente cerrado. Una carga $+Q$ se acerca a la placa sin tocarla y luego se abre el interruptor. Una vez que éste se abre se retira la carga $+Q$. ¿Cuál es entonces la carga en la placa?



a) La placa está sin carga.

b) La placa está cargada positivamente.

c) La placa está cargada negativamente.

d) La placa puede estar cargada positiva o negativamente, dependiendo de la carga que tenga antes que se acerque $+Q$.

21.10 Usted acerca una barra de caucho cargada negativamente a un conductor conectado a tierra sin tocarlo. Luego desconecta la tierra. ¿Cuál es el signo de la carga sobre el conductor una vez que retira la barra cargada?

a) Negativa.

b) Positiva.

c) Sin carga.

d) No es posible determinarlo a partir de la información proporcionada.

PREGUNTAS

21.11 Si dos partículas cargadas (la carga de cada una es Q) están separadas por una distancia d, hay una fuerza F entre ellas. ¿Cuál es la fuerza si la magnitud de cada carga se duplica y la distancia entre ellas cambia a $2d$?

21.12 Suponga que al Sol y a la Tierra se suministra una cantidad igual de carga del mismo signo, justo la suficiente para cancelar su atracción gravitacional. ¿Cuántas veces la carga de un electrón sería esa carga? ¿Es esta cantidad una gran fracción del número de cargas de cualquier signo en la Tierra?

21.13 Resulta evidente que la fuerza electrostática es *extremadamente* intensa, en comparación con la gravedad. De hecho, la fuerza electrostática es la fuerza fundamental que rige los fenómenos de la vida diaria: la tensión en una cuerda, las fuerzas normales entre superficies, la fricción, las reacciones químicas, etc., excepto el peso. ¿Por qué entonces los científicos tardaron tanto en comprender esta fuerza? Newton hizo pública su ley gravitacional mucho antes de que la electricidad pudiera comprenderse.

21.14 Algunas veces, a las personas que adquieren carga estática al frotar sus pies contra una alfombra se les eriza el pelo. ¿Por qué ocurre esto?

21.15 Dos cargas positivas, cada una igual a Q, se colocan a una distancia $2d$ de separación entre ambas. Una tercera carga, $-0.2Q$, se coloca exactamente a la mitad del camino entre las dos cargas positivas y se desplaza una distancia $x \ll d$, perpendicular a la recta que une las cargas positivas. ¿Cuál es la fuerza sobre esta carga? Para $x \ll d$, ¿cómo es posible aproximar el movimiento de la carga negativa?

21.16 ¿Por qué una prenda de vestir que se saca de una secadora de ropa algunas veces se adhiere al cuerpo a la hora de ponérsela?

21.17 Dos esferas cargadas están inicialmente separadas por una distancia d. La magnitud de la fuerza sobre cada esfera es F. Se acercan de modo que la magnitud de la fuerza entre sí sea $9F$. ¿Por qué factor ha cambiado la distancia entre las dos esferas?

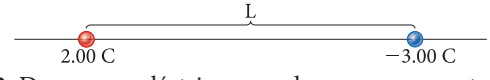
21.18 ¿Cómo es posible que un átomo eléctricamente neutro ejerza una fuerza electrostática sobre otro átomo eléctricamente neutro?

21.19 Los científicos que contribuyeron primero a la comprensión de la fuerza electrostática en el siglo XVIII estaban muy bien enterados de la ley de gravitación de Newton. ¿Cómo podían deducir que la fuerza que estaban estudiando *no era* una variante o alguna manifestación de la fuerza gravitacional?

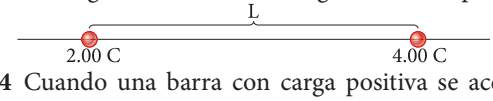
21.20 Dos partículas cargadas se mueven sólo bajo el efecto de las fuerzas electrostáticas entre ellas. ¿Qué formas pueden tener sus trayectorias?

21.21 Frotar un globo hace que éste se cargue negativamente. Luego, el globo tiende a adherirse a la pared de una habitación. Para que esto ocurra, ¿la pared debe estar cargada positivamente?

21.22 Dos cargas eléctricas se colocan en una recta, como muestra la figura. ¿Es posible colocar una partícula cargada (que tenga libertad de movimiento) en cualquier parte de la recta entre las dos cargas sin que tenga que moverse?



21.23 Dos cargas eléctricas se colocan en una recta, como se muestra en la figura. ¿En qué parte de la recta es posible colocar una tercera carga de modo que la fuerza sobre ésta sea cero? ¿El signo o la magnitud de la tercera carga afecta la respuesta?



21.24 Cuando una barra con carga positiva se acerca a un conductor neutro sin tocarlo, ¿la barra experimenta una fuerza de atracción, de repulsión o no experimenta ninguna fuerza? Explique.

21.25 Cuando sale de su automóvil y la humedad es baja, a menudo experimenta una descarga eléctrica debido a la electricidad estática creada al deslizarse por el asiento. ¿Cómo puede usted descargarse sin experimentar una descarga dolorosa? ¿Por qué es peligroso entrar al automóvil cuando se le está cargando combustible?

PROBLEMAS

Uno • y dos •• indican un nivel creciente de la dificultad.

Sección 21.2

21.26 ¿Cuántos electrones se requieren para producir una carga total de 1.00 C?

21.27 El *faraday* es una unidad de carga que se encuentra a menudo en aplicaciones electroquímicas y se denomina así en honor del físico y químico Michael Faraday. Consta de 1.000 mol de cargas elementales. Calcule el número de coulombs que hay en un faraday.

21.28 Otra unidad de carga es la *unidad electrostática* (ues), que se define así: dos cargas puntuales, cada una de 1 ues y separadas por 1 cm, ejercen una fuerza de exactamente 1 dina entre sí: 1 dina = 1 g cm/s^2 = $1 \cdot 10^{-5}$ N.

a) Determine la relación entre la ues y el coulomb.

b) Determine la relación entre la ues y la carga elemental.

21.29 Una corriente de 5.00 mA es suficiente para contraer sus músculos. Calcule cuántos electrones fluyen por su piel cuando se expone a esta corriente durante 10.0 s.

•**21.30** ¿Cuántos electrones contiene 1.00 kg de agua?

•**21.31** La Tierra experimenta un bombardeo constante de rayos cósmicos compuestos principalmente de protones. Estos protones inciden sobre la atmósfera terrestre desde todas las direcciones a razón de 1 245.0 protones por metro cuadrado por segundo. En el supuesto de que el grosor de la atmósfera de la Tierra mide 120 km, ¿cuál es la carga total incidente en la atmósfera en 5.00 minutos? Suponga que el radio de la superficie de la Tierra mide 6 378 km.

•**21.32** Al realizar un experimento semejante al de la gota de aceite de Millikan, un estudiante midió las siguientes magnitudes de carga:

$3.26 \cdot 10^{-19}$ C $5.09 \cdot 10^{-19}$ C $1.53 \cdot 10^{-19}$ C

$6.39 \cdot 10^{-19}$ C $4.66 \cdot 10^{-19}$ C

Use estas mediciones para encontrar la carga sobre el electrón.

Sección 21.3

•**21.33** Una muestra de silicio se dopa con fósforo en una parte en $1.00 \cdot 10^6$. El fósforo actúa como un donante de electrones, en el supuesto de que hay un electrón libre por átomo. La densidad del silicio es 2.33g/cm^3 y su masa atómica es 28.09 g/mol.

a) Calcule el número de electrones libres (de conducción) por volumen unitario del silicio dopado.

b) Compare el resultado del inciso *a*) con el número de electrones de conducción por volumen unitario de alambre de cobre [suponga que cada átomo de cobre produce un electrón libre (de conducción)]. La densidad del cobre es 8.96 g/cm^3 y su masa atómica es 63.54 g/mol.

Sección 21.5

21.34 Dos esferas cargadas están separadas por 8 cm. Se aproximan una a la otra lo suficiente para que la fuerza sobre cada una aumente cuatro veces. ¿A qué distancia están ahora?

21.35 Dos partículas cargadas idénticas, separadas por una distancia de 1.00 m, se repelen entre sí con una fuerza de 1.00 N. ¿Cuál es la magnitud de las cargas?

21.36 ¿Cuán lejos deben colocarse dos electrones sobre la superficie de la Tierra de modo que la fuerza electrostática entre ambos sea igual al peso de uno de ellos?

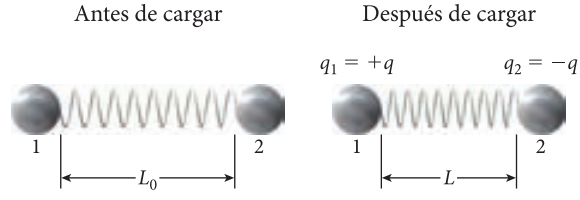
21.37 En cloruro de sodio sólido (sal de mesa), los iones del cloro tienen un electrón más que su número de protones, y los iones de sodio tienen un protón más que su número de electrones. La separación entre estos iones es de aproximadamente 0.28 nm. Calcule la fuerza electrostática entre un ion de sodio y un ion de cloro.

21.38 En cloruro de sodio gaseoso (sal de mesa), los iones del cloro tienen un electrón más que su número de protones, y los iones de sodio tienen un protón más que su número de electrones. La separación entre estos iones es de aproximadamente 0.24 nm. Suponga que un electrón está a 0.48 nm por arriba del punto medio de la molécula de cloruro de sodio. ¿Cuáles son la magnitud y dirección de la fuerza electrostática que la molécula ejerce sobre el electrón?

21.39 Calcule la magnitud de la fuerza electrostática que los dos quarks arriba, dentro de un protón, ejercen entre sí cuando la distancia entre ellos es de 0.900 fm.

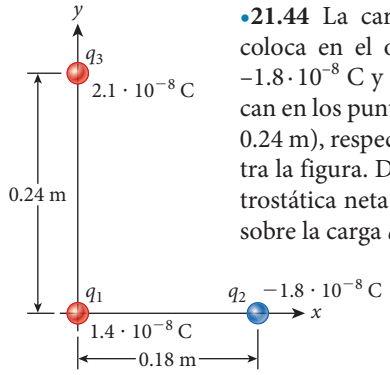
21.40 Una carga de –4.0 μC está 20.0 cm a la derecha de una carga de 2.0 μC sobre el eje *x*. ¿Cuál es la fuerza sobre la carga de 2.0 μC?

•**21.41** Dos esferas metálicas idénticas que inicialmente no tienen carga, 1 y 2, están conectadas por un resorte aislante (longitud sin estirar L_0 = 1.00 m, la constante del resorte es k = 25.0 N/m), como muestra la figura. Luego, las esferas se cargan con $+q$ y $-q$ y el resorte se contrae hasta una longitud L = 0.635 m. Recuerde que la fuerza ejercida por un resorte es $F_s = k\Delta x$, donde Δx es el cambio de longitud del resorte a partir de su posición de equilibrio. Determine la carga q. Si el resorte se recubre con metal para hacerlo conductor, ¿cuál es la nueva longitud del resorte?



•**21.42** Una carga puntual de $+3q$ está situada en el origen, y una carga puntual de $-q$ está localizada sobre el eje x en D = 0.500 m. ¿En qué sitio, sobre el eje x, una tercera carga, q_0, no experimenta fuerza neta de ninguna de las otras dos cargas?

•**21.43** En cada uno de los vértices de un rectángulo que mide 2.0 m por 3.0 m se colocan cargas puntuales idénticas Q. Si Q = 32 μC, ¿cuál es la magnitud de la fuerza electrostática sobre cualquiera de las cargas?

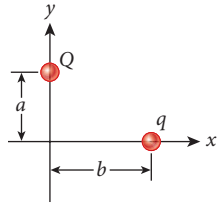


•**21.44** La carga $q_1 = 1.4 \cdot 10^{-8}$ C se coloca en el origen. Las cargas $q_2 = -1.8 \cdot 10^{-8}$ C y $q_3 = 2.1 \cdot 10^{-8}$ C se colocan en los puntos (0.18 m, 0 m) y (0 m, 0.24 m), respectivamente, como muestra la figura. Determine la fuerza electrostática neta (magnitud y dirección) sobre la carga q_3.

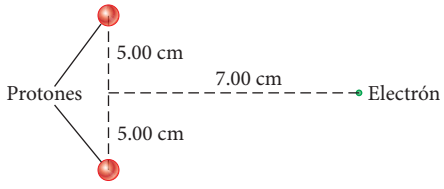
•**21.45** Una carga positiva Q está sobre el eje y a una distancia a del origen, y otra carga positiva q está sobre el eje x a una distancia b del origen.

a) ¿Para qué valor(es) de b la componente x de la fuerza sobre q es mínima?

b) ¿Para qué valor(es) de b la componente x de la fuerza sobre q es máxima?



•**21.46** Encuentre la magnitud y dirección de la fuerza electrostática sobre el electrón en la figura.



•**21.47** En una región del espacio bidimensional hay tres cargas fijas: +1.00 mC en (0, 0), –2.00 mC en (17.0 mm, –5.00 mm) y +3.00 mC en (–2.00 mm, 11.0 mm). ¿Cuál es la fuerza neta sobre la carga de –2.00 mC?

•**21.48** Dos cuentas de vidrio cilíndricas, cada una de masa m = 10.0 mg se colocan sobre sus extremos planos sobre una superficie aislante horizontal, separadas por una distancia d = 2.00 cm. El coeficiente de fricción estática entre las cuentas y la superficie es μ_s = 0.2.00. Luego, a las cuentas se les proporcionan cargas idénticas (magnitud y signo). ¿Cuál es la carga mínima necesaria para que las cuentas empiecen a moverse?

•**21.49** Una bola pequeña con una masa de 30.0 g y carga de –0.200 μC está suspendida del techo por una cuerda. La bola cuelga a una distancia de 5.00 cm por arriba de un piso aislante. Si una segunda bola pequeña con masa 50.0 g y carga de 0.400 μC rueda directamente debajo de la primera bola, ¿la segunda bola abandona el piso? ¿Cuál es la tensión en la cuerda cuando la segunda bola está directamente abajo de la primera bola?

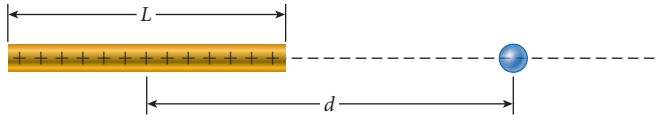
•**21.50** Una carga de +3.00 mC y una carga de –4.00 mC están fijas y la distancia entre ellas es de 5.00 m.

a) ¿Dónde puede colocarse una carga de +7.00 mC de modo que la fuerza neta sobre ella sea cero?

b) ¿Dónde puede colocarse una carga de –7.00 mC de modo que la fuerza neta sobre ella sea cero?

•**21.51** En cada uno de los vértices de un cuadrado de 10.0 micras por lado hay una carga, q. Un electrón está suspendido por arriba de un punto en el que su peso está equilibrado por una fuerza electrostática debida a los cuatro electrones, a una distancia de 15 nm por encima del centro del cuadrado. ¿Cuál es la magnitud de las cargas fijas? Exprese su respuesta tanto en coulombs como en un múltiplo de la carga del electrón.

••**21.52** La figura muestra una barra delgada de longitud L, cargada uniformemente con una carga total Q. Encuentre una expresión para la magnitud de la fuerza electrostática que actúa sobre un electrón ubicado sobre el eje de la barra a una distancia d del punto medio de la barra.



••**21.53** Una carga negativa, $-q$, está fija en la coordenada (0, 0). La carga ejerce una fuerza de atracción sobre una carga positiva, $+q$, que inicialmente está en la coordenada (x, 0). Como resultado, la carga positiva acelera hacia la carga negativa. Use el desarrollo del binomio $(1+x)^n \approx 1 + nx$, para $x \ll 1$, a fin de demostrar que cuando la carga positiva se mueve una distancia $\delta \ll x$ más cerca a la carga negativa, la fuerza que la carga negativa ejerce sobre ésta aumenta por $\Delta F = 2kq^2\delta/x^3$.

••**21.54** Dos cargas negativas de la misma magnitud ($-q$ y $-q$) están fijas en las coordenadas ($-d$, 0) y (d, 0). Una carga positiva de la misma magnitud, q, y de masa m, está colocada en la coordenada (0, 0), a la mitad del camino entre las dos cargas negativas. Si la carga positiva se mueve una distancia $\delta \ll d$ en la dirección y positiva y luego se suelta, el movimiento resultante es el de un oscilador armónico simple: la carga positiva oscila entre las coordenadas (0, δ) y (0, $-\delta$). Encuentre la fuerza neta que actúa sobre la carga positiva cuando se mueve (0, δ) y use el desarrollo del binomio $(1 + x)^n \approx 1 + nx$, para $x \ll 1$, a fin de encontrar una expresión para la frecuencia de la oscilación resultante. (*Sugerencia*: Mantenga sólo términos que sean lineales en δ.)

Sección 21.6

21.55 Suponga que la Tierra y la Luna portan cargas positivas de la misma magnitud. ¿Cuán grande debe ser la carga necesaria para producir una repulsión electrostática igual a 1.00% de la atracción gravitacional entre los dos cuerpos?

21.56 La semejanza de la forma de la ley de la gravitación y la ley de Coulomb originó que algunos especularan que la fuerza de gravedad está relacionada con la fuerza electrostática. Suponga que la gravitación es completamente eléctrica en la naturaleza; que un exceso de carga Q sobre la Tierra y un exceso igual y opuesto de carga $-Q$ sobre la Luna son responsables de la fuerza de gravitación que provoca el movimiento orbital observado de la Luna con respecto a la Tierra. ¿Cuál es el tamaño requerido de Q para reproducir la magnitud observada de la fuerza de gravitación?

•**21.57** En el modelo de Bohr del átomo de hidrógeno, el electrón se mueve alrededor del núcleo con un protón en órbitas circulares de radios bien determinados, dados por $r_n = n^2 a_B$, donde n = 1, 2, 3, … es un entero que define la órbita y $a_B = 5.29 \cdot 10^{-11}$m

es el radio de la primera (mínima) órbita, denominado *radio de Bohr*. Calcule la fuerza de la interacción electrostática entre el electrón y el protón en el átomo de hidrógeno para cuatro órbitas. Compare la intensidad de esta interacción con la interacción gravitacional entre el protón y el electrón.

•**21.58** Algunos de los primeros modelos atómicos sostenían que la velocidad orbital de un electrón en un átomo podría correlacionarse con el radio del átomo. Si el radio del átomo de hidrógeno es 5.9×10^{-11} m y la fuerza electrostática es responsable del movimiento circular del electrón, ¿cuál es la velocidad orbital del electrón?

21.59 Para el átomo descrito en el problema 21.58, ¿cuál es la razón de la fuerza gravitacional entre el electrón y el protón a la fuerza electrostática? ¿Cómo esta razón cambia si el radio del átomo se duplica?

•**21.60** En general, los objetos astronómicos no son eléctricamente neutros. Suponga que la Tierra y la Luna poseen, cada una, una carga de $-1.00 \cdot 10^6$ C (esto es aproximadamente correcto; en el capítulo 22 se identifica un valor más preciso).

a) Compare la repulsión electrostática resultante con la fuerza de atracción entre la Tierra y la Luna. Consulte cualquier dato que considere necesario.

b) ¿Qué efectos tiene esta fuerza electrostática sobre el tamaño, forma y estabilidad de la órbita de la Luna alrededor de la Tierra?

Problemas adicionales

21.61 Ocho cargas de 1.00 μC están dispuestas a lo largo del eje y cada 2.00 cm, empezando en $y = 0$ hasta $y = 14.0$ cm. Encuentre la fuerza sobre la carga que está en $y = 4.00$ cm.

21.62 En un modelo de Bohr simplificado del átomo de hidrógeno, se supone que un electrón se desplaza en una órbita circular de radio aproximado de $5.2 \cdot 10^{-11}$ m alrededor de un protón. Calcule la velocidad del electrón en esa órbita.

21.63 El núcleo de un átomo de carbono 14 (masa = 14 uma tiene un diámetro de 3.01 fm. Tiene 6 protones y una carga de $+6e$.

a) ¿Cuál es la fuerza sobre un protón ubicado a 3 fm de la superficie de este núcleo? Suponga que el núcleo es una carga puntual.

b) ¿Cuál es la aceleración del protón?

21.64 Dos objetos cargados experimentan una fuerza de repulsión mutua de 0.10 N. Si la carga de uno de los objetos se reduce a la mitad y la distancia que separa a los objetos se duplica, ¿cuál es la nueva fuerza?

21.65 Una partícula (carga = +19.0 μC) está situada sobre el eje x en $x = -10.0$ cm y una segunda partícula (carga = −57.0 μC) está ubicada sobre el eje x en $x = +20.0$ cm, ¿cuál es la magnitud de la fuerza electrostática total sobre una tercera partícula (carga = −3.80 μC) colocada en el origen ($x = 0$)?

21.66 Tres cargas puntuales están colocadas sobre el eje x: +64.0 μC en $x = 0.00$ cm, +80.0 μC en $x = 25.0$ cm, y −160.0 μC en $x = 50.0$ cm. ¿Cuál es la magnitud de la fuerza electrostática que actúa sobre la carga de +64.0 μC?

21.67 Como resultado de colisiones con rayos cósmicos y del viento solar, la Tierra tiene una carga eléctrica neta aproximada de $-6.8 \cdot 10^5$ C. Encuentre la carga que debe proporcionarse a un objeto de 1.0 g para que levite electrostáticamente cerca de la superficie terrestre.

21.68 Su hermana desea participar en la feria anual de ciencia en su escuela preparatoria y le pide que le sugiera algún proyecto emocionante. Le aconseja que experimente con el extractor de electrones que usted acaba de crear para suspender su gato en el aire. Le dice que compre una placa de cobre y la atornille al techo de su cuarto y luego use el extractor de electrones para transferir electrones de la placa al gato. Si el gato pesa 7.00 kg y está suspendido a 2.00 m debajo del techo, ¿cuántos electrones se han extraído del gato? Suponga que el gato y la placa de metal son cargas puntuales.

•**21.69** Una masa de 10.0 g está suspendida 5.00 cm por arriba de una placa plana no conductora, directamente por arriba de una carga incorporada de q (en coulombs). Si la masa tiene la misma carga, q, ¿de cuánto debe ser q para que la masa levite (que apenas flote, sin subir ni caer)? Si la carga q se produce al añadir electrones a la masa, ¿por cuánto cambia la masa?

•**21.70** Cuatro cargas puntuales están colocadas en las siguientes coordenadas xy:

$Q_1 = -1$ mC, en (−3 cm, 0 cm)

$Q_2 = -1$ mC, en (+3 cm, 0 cm)

$Q_3 = +1.024$ mC, en (0 cm, 0 cm)

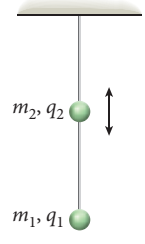
$Q_4 = +2$ mC, en (0 cm, −4 cm)

Calcule la fuerza neta sobre la carga Q_4 debida a las cargas Q_1, Q_2 y Q_3.

•**21.71** Tres bolas de espuma de poliestireno de 5.00 g con un radio de 2.00 cm se recubren con carbono negro para hacerlas conductoras y luego se atan a hilos de 1.00 m de longitud y se dejan suspendidas libremente desde un punto común. A cada bola se proporciona la misma carga, q. En equilibrio, las bolas forman un triángulo equilátero de 25.00 cm por lado en el plano horizontal. Determine q.

•**21.72** Dos cargas puntuales están sobre el eje x. Si una carga puntual es de 6.0 μC y está en el origen, y la otra es de −2.0 μC y está a 20.0 cm, ¿en qué sitio debe colocarse una tercera carga para que esté en equilibrio?

•**21.73** Dos cuentas con cargas $q_1 = q_2 = +2.67$ μC están sobre una cuerda aislante que cuelga en forma recta del techo, como muestra la figura. La cuenta inferior está ubicada en el extremo de la cuerda y su masa es $m_1 = 0.280$ kg. La segunda cuenta se desliza sin fricción sobre la cuerda. A una distancia $d = 0.360$ m entre los centros de las cuentas, la fuerza de gravedad de la Tierra sobre m_2 es equilibrada por la fuerza electrostática entre las dos cuentas. ¿Cuál es la masa, m_2, de la segunda cuenta? (*Sugerencia*: Puede ignorar la interacción gravitacional entre las dos cuentas.)

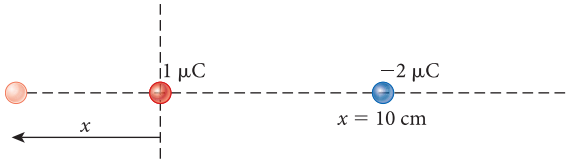


•**21.74** Encuentre la fuerza neta sobre una carga de 2.0 C en el origen de un sistema de coordenadas si en (3 m, 0) hay una carga de +5.0 C y en (0, 4 m) hay una carga de −3.0 C.

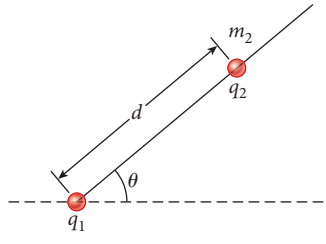
•**21.75** Dos esferas, cada una de masa M = 2.33 g, están sujetas por piezas de cuerda de longitud L = 45 cm a un punto común. Inicialmente, las cuerdas cuelgan verticalmente, con las esferas apenas tocándose. Una cantidad igual de carga, q, se proporciona a cada esfera. Las fuerzas resultantes sobre las esferas originan que cada cuerda cuelgue a un ángulo de θ = 10.0° con respecto a la vertical. Determine q, la cantidad de una carga sobre cada esfera.

•**21.76** Una carga puntual q_1 = 100. nC está en el origen de un sistema de coordenadas xy, una carga puntual q_2 = –80.0 nC está en el eje x en x = 2.00 m y una carga puntual q_3 = –60.0 nC está en el eje y en y = –2.00 m. Determine la fuerza neta (magnitud y dirección) sobre q_1.

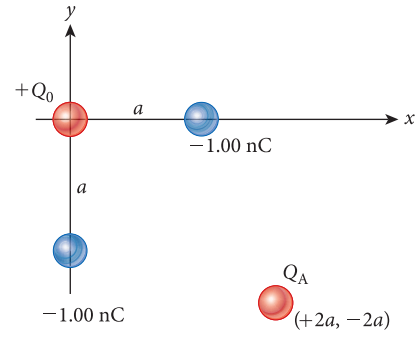
•**21.77** Una carga positiva q_1 = 1.00 μC está fija en el origen y una segunda carga q_2 = –2.00 μC está fija en x = 10.0 cm, ¿dónde debe colocarse una tercera carga a lo largo del eje x de modo que no experimente ninguna fuerza?



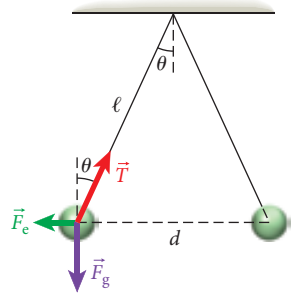
•**21.78** Una cuenta con carga q_1 = 1.27 μC está fija en su sitio al final de un alambre que forma un ángulo de θ = 51.3° con la horizontal. Una segunda cuenta con masa m_2 = 3.77 g y carga de 6.79 μC se desliza sin fricción por el alambre. ¿Cuál es la distancia d a la que la fuerza de gravedad de la Tierra es equilibrada por la fuerza electrostática entre las dos cuentas? Ignore la interacción gravitacional entre las dos cuentas.



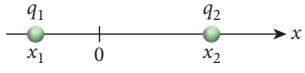
•**21.79** En la figura, la fuerza electrostática neta sobre la carga Q_A es cero. Si Q_A = +1.00 nC, determine la magnitud de Q_0.



21.80 Dos bolas tienen la misma masa de 0.681 kg y cargas idénticas de 18.0 μC. Cuelgan del techo sobre cuerdas de la misma longitud, como muestra la figura. Si el ángulo de las cuerdas con respecto a la vertical es 20.0°, ¿cuál es la longitud de las cuerdas?



•**21.81** Como muestra la figura, la carga 1 es de 3.94 μC y está en x_1 = –4.7 m, y la carga 2 es de 6.14 μC y está en x_2 = 12.2 m. ¿Cuál es la coordenada x del punto en el que la fuerza neta sobre una carga puntual de 0.300 μC es cero?



22 Campos eléctricos y ley de Gauss

LO QUE APRENDEREMOS 711

22.1 Definición de campo eléctrico 711
22.2 Líneas de campo 712
Carga puntual 713
Dos cargas puntuales de signo opuesto 713
Dos cargas puntuales con el mismo signo 713
Observaciones generales 714
22.3 Campo eléctrico debido a cargas puntuales 714
Ejemplo 22.1 Tres cargas 714
22.4 Campo eléctrico debido a un dipolo 716
Ejemplo 22.2 Molécula de agua 717
22.5 Distribuciones continuas de carga 717
Ejemplo 22.3 Línea de carga finita 718
Problema resuelto 22.1 Anillo de carga 719
22.6 Fuerza debida a un campo eléctrico 721
Ejemplo 22.4 Cámara de proyección del tiempo 721
Dipolo en un campo eléctrico 722
Problema resuelto 22.2 Dipolo eléctrico en un campo eléctrico 723
22.7 Flujo eléctrico 725
Ejemplo 22.5 Flujo eléctrico a través de un cubo 726
22.8 Ley de Gauss 726
Ley de Gauss y ley de Coulomb 727
Blindaje 728
22.9 Simetrías especiales 729
Simetría cilíndrica 729
Simetría plana 730
Simetría esférica 731
Problema resuelto 22.3 Distribución de carga esférica no uniforme 732
Puntas agudas y pararrayos 734

LO QUE HEMOS APRENDIDO/ GUÍA DE ESTUDIO PARA EXAMEN 735

Práctica para resolver problemas 736
Problema resuelto 22.4 Electrón que se mueve sobre una placa cargada 737
Preguntas de opción múltiple 738
Preguntas 739
Problemas 740

FIGURA 22.1 Un gran tiburón blanco puede detectar pequeños campos eléctricos generados por su presa.

LO QUE APRENDEREMOS

- Un campo eléctrico representa la fuerza eléctrica por unidad de carga en diferentes puntos en el espacio.
- Las líneas de campo eléctrico representan vectores de fuerza ejercidos sobre una carga eléctrica positiva unitaria. Se originan en cargas positivas y terminan en cargas negativas.
- El campo eléctrico de una carga puntual es radial, proporcional a la carga e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia a la carga.
- Un dipolo eléctrico consta de una carga positiva y una carga negativa de la misma magnitud.
- El flujo eléctrico es la componente del campo eléctrico normal a un área multiplicada por el área.
- La ley de Gauss establece que el flujo eléctrico que pasa por una superficie cerrada es proporcional a la carga eléctrica neta encerrada por esa superficie.
- El campo eléctrico dentro de un conductor es cero.
- La magnitud del campo eléctrico debido a un alambre infinito uniformemente cargado varía con el inverso de la distancia perpendicular al alambre.
- El campo eléctrico debido a un plano infinito de carga no depende de la distancia al plano.
- El campo eléctrico fuera de una distribución esférica de carga es el mismo que el campo de una carga puntual situada en el centro de la distribución con la misma carga total.

El gran tiburón blanco es uno de los depredadores más feroces en la Tierra (figura 22.1). Posee varios sentidos que han evolucionado para cazar a su presa; por ejemplo, puede oler cantidades minúsculas de sangre a distancias tan lejanas como 5 km (3 mi). Tal vez sea más sorprendente el hecho de que ha desarrollado órganos especiales (denominados *ampullae de Lorenzini*) capaces de detectar los pequeños campos eléctricos generados por el movimiento de los músculos de un organismo, ya sea un pez, una foca o un humano. Sin embargo, ¿qué son exactamente los campos eléctricos? Además, ¿cómo están relacionados con las cargas eléctricas?

El concepto de campos vectoriales constituye una de las ideas más útiles y productivas en toda la física. Este capítulo explica lo que es un campo eléctrico y cómo está relacionado con las cargas y fuerzas electrostáticas, y luego analiza cómo determinar el campo eléctrico debido a alguna distribución de carga dada. Este estudio nos conduce a una de las leyes más importantes de la electricidad: la ley de Gauss, que proporciona una relación entre los campos eléctricos y la carga electrostática. No obstante, la ley de Gauss sólo tiene aplicaciones prácticas cuando la distribución de cargas cuenta con suficiente simetría geométrica para simplificar los cálculos y, aun así, se requieren algunos otros conceptos relacionados con campos eléctricos para poder aplicar las ecuaciones. En los capítulos 27 a 29 analizaremos otro tipo de campos: los campos magnéticos. Luego, el capítulo 31 mostrará cómo la ley de Gauss encaja en una descripción unificada de campos eléctricos y magnéticos, lo cual constituye uno de los logros más extraordinarios de la física, desde los puntos de vista práctico y estético.

22.1 Definición de campo eléctrico

En el capítulo 21 analizamos la fuerza entre dos o más partículas puntuales. Cuando se determina la fuerza neta ejercida por otras cargas sobre una carga particular en algún punto en el espacio, obtenemos diferentes direcciones para esta fuerza, dependiendo del signo de la carga que es el punto de referencia. Además, la fuerza neta también es proporcional a la magnitud de la carga de referencia. Las técnicas usadas en el capítulo 21 requieren que volvamos a hacer el cálculo para la fuerza neta cada vez que consideremos una carga diferente.

Abordar esta situación requiere el concepto de **campo**, que puede usarse para describir ciertas fuerzas. Un **campo eléctrico**, $E(r)$, se define en cualquier punto del espacio $\vec{r}$, como la fuerza eléctrica neta sobre una carga, dividida entre esa carga:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\vec{F}(\vec{r})}{q}. \qquad (22.1)$$

Las unidades del campo eléctrico son newtons por coulomb (N/C). Esta simple definición elimina la engorrosa dependencia de la fuerza eléctrica sobre una carga en particular, que se usa para medir la fuerza. Podemos determinar rápidamente la fuerza neta sobre cualquier carga al usar $\vec{F}(\vec{r}) = q\vec{E}(\vec{r})$, que es un reordenamiento trivial de la ecuación 22.1.

La fuerza eléctrica sobre una carga en un punto es paralela (o antiparalela, dependiendo del signo de la carga en cuestión) al campo eléctrico en ese punto y proporcional a la carga. La magnitud de la fuerza está dada por $F = |q|E$. La dirección de la fuerza sobre una carga positiva es a lo largo de $\vec{E}(\vec{r})$; la dirección de la fuerza sobre una carga negativa es en dirección opuesta a $\vec{E}(\vec{r})$.

Si varias fuentes de campos eléctricos están presentes al mismo tiempo, como varias cargas puntuales, el campo eléctrico en cualquier punto dado está determinado por la superposición de los campos eléctricos provenientes de todas las fuentes. Esta superposición se concluye directamente de la superposición de fuerzas presentado en nuestro estudio de mecánica, analizado en el capítulo 21 para fuerzas electrostáticas. El **principio de superposición** para el campo eléctrico total, $\vec{E}_t$, en cualquier punto del espacio con coordenada $\vec{r}$, debido a n fuentes de campo eléctrico, puede plantearse como

$$\vec{E}_t(\vec{r}) = \vec{E}_1(\vec{r}) + \vec{E}_2(\vec{r}) + \cdots + \vec{E}_n(\vec{r}). \tag{22.2}$$

22.2 Líneas de campo

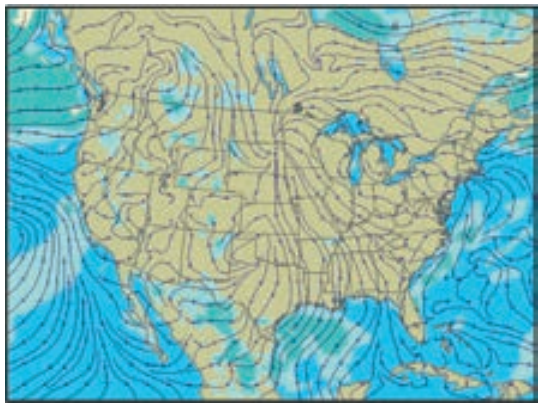


FIGURA 22.2 Líneas de corriente de las direcciones del viento sobre la superficie de Estados Unidos el 23 de marzo de 2008, del National Weather Service.

Un campo eléctrico puede (y así ocurre en la mayor parte de las aplicaciones) cambiar como una función de la coordenada espacial. La dirección e intensidad cambiantes del campo eléctrico pueden visualizarse por medio de **líneas de campo eléctrico**, que representan gráficamente la fuerza ejercida sobre una carga de prueba positiva unitaria. La representación es válida por separado para cada punto en el espacio en el que pudiera ubicarse la carga de prueba. La dirección de la línea de campo en cada punto es la misma que la dirección de la fuerza en ese punto, y la densidad de las líneas de campo es proporcional a la magnitud de la fuerza.

Las líneas de campo eléctrico pueden compararse con las líneas de corriente de las direcciones del viento, mostradas en la figura 22.2. Estas líneas de corriente representan la fuerza del viento sobre objetos en ubicaciones dadas, justo como las líneas de campo eléctrico representan la fuerza eléctrica en puntos específicos. Un globo de aire caliente puede usarse como partícula de prueba para estas líneas de corriente. Por ejemplo, un globo de aire caliente lanzado en Dallas, Texas, flotaría de norte a sur en la situación descrita en la figura 22.2. En los sitios en los que las líneas de corriente están próximas entre sí, la velocidad del viento es más alta, de modo que el globo se mueve más rápido.

Para trazar una línea de campo eléctrico, imagine que se coloca una pequeña carga positiva en cada punto del campo eléctrico. Esta carga es lo suficientemente pequeña para no afectar el campo circundante. Algunas veces una pequeña carga como ésta se denomina **carga de prueba**. Calculamos la fuerza resultante sobre la carga, y la dirección de la fuerza proporciona la dirección del campo. Por ejemplo, la figura 22.3*a*) muestra un punto en un campo eléctrico. En la figura 22.3*b*) se coloca una carga $+q$ en un punto P, sobre una línea de campo eléctrico. La fuerza sobre la carga está en la misma dirección que el campo eléctrico. En la figura 22.3*c*), una carga $-q$ se coloca en el punto P, y la fuerza resultante está en dirección opuesta al campo eléctrico. En la figura 22.3*d*), en el punto P se coloca una carga $+2q$, y la fuerza resultante está en dirección del campo eléctrico, con el doble de la magnitud de la fuerza sobre la carga $+q$. Seguiremos la convención de representar una carga positiva con rojo y una negativa con azul.

En un campo eléctrico no uniforme, la fuerza eléctrica en un punto dado es tangente a las líneas de campo eléctrico en ese punto, como se ilustra en la figura 22.4. La fuerza sobre una carga positiva está en la dirección del campo eléctrico, y la fuerza sobre una carga negativa está en dirección opuesta al campo eléctrico.

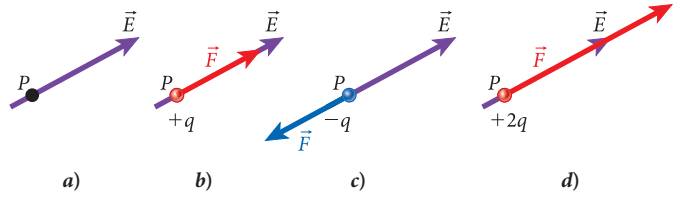


FIGURA 22.3 La fuerza resultante al colocar una carga en un campo. *a*) Un punto P sobre una línea de campo eléctrico. *b*) Una carga positiva $+q$ colocada en el punto P. *c*) Una carga negativa $-q$ colocada en el punto P. *d*) Una carga positiva $+2q$ colocada en el punto P.

Las líneas de campo eléctrico se alejan de fuentes de carga positiva y apuntan hacia fuentes de carga negativa. Cada línea de campo empieza en una carga y termina en otra. Las líneas de campo eléctrico siempre se originan en cargas positivas y terminan en cargas negativas.

Los campos eléctricos siempre existen en tres dimensiones (figura 22.5); no obstante, para simplificar las cosas, este capítulo suele presentar descripciones bidimensionales de campos eléctricos.

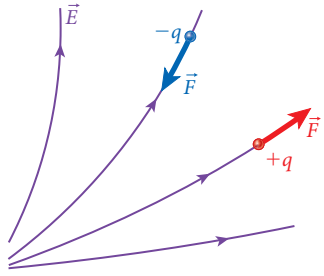


FIGURA 22.4 Campo eléctrico no uniforme. Una carga positiva $+q$ y una carga negativa $-q$ colocadas en el campo experimentan fuerzas, como se muestra. Cada fuerza es tangente a la línea de campo eléctrico.

Carga puntual

La figura 22.6 muestra las líneas de campo eléctrico que surgen de una carga puntual aislada. Las líneas de campo emanan en direcciones radiales desde la carga puntual. Si la carga puntual es positiva, las líneas de campo apuntan hacia fuera, alejándose de la carga (figura 22.6*a*); si la carga puntual es negativa, las líneas de campo apuntan hacia dentro, hacia la carga (figura 22.6*b*). Para una carga puntual positiva aislada, las líneas de campo eléctrico se originan en la carga y terminan en cargas negativas en el infinito, y para una carga puntual negativa, las líneas de campo eléctrico se originan en cargas positivas en el infinito y terminan en la carga. Observe que las líneas de campo eléctrico están próximas entre sí, cerca de la carga puntual y se alejan separándose de la carga puntual, lo cual indica que el campo eléctrico se vuelve más débil al aumentar la distancia a la carga. En la sección 22.3 examinaremos cualitativamente la magnitud del campo.

Dos cargas puntuales de signo opuesto

Podemos usar el principio de superposición para determinar el campo eléctrico creado por dos cargas puntuales. La figura 22.7 muestra las líneas de campo eléctrico para dos cargas puntuales con cargas opuestas de la misma magnitud. En cada punto en el plano, el campo eléctrico de la carga positiva y el campo eléctrico de la carga negativa se suman como vectores para determinar la magnitud y dirección del campo eléctrico resultante. (La figura 22.5 muestra las mismas líneas de campo en tres dimensiones.)

Como ya se observó, las líneas de campo eléctrico se originan sobre la carga positiva y terminan sobre la carga negativa. En un punto muy próximo a cualquier carga, las líneas de campo son semejantes a las de una sola carga puntual, puesto que el efecto de la carga más alejada es pequeño. Cerca de las cargas, las líneas de campo eléctrico están más próximas entre sí, lo cual indica que el campo es más intenso en estas regiones. El hecho de que las líneas de campo entre las dos cargas estén unidas indica que entre las dos cargas existe una fuerza de atracción.

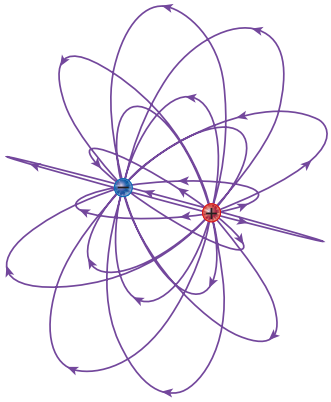


FIGURA 22.5 Representación tridimensional de líneas de campo eléctrico creado por dos cargas puntuales con signos opuestos.

Dos cargas puntuales con el mismo signo

También podemos aplicar el principio de superposición a dos cargas puntuales con el mismo signo. La figura 22.8 muestra las líneas de campo eléctrico para dos cargas puntuales con el mismo signo y la misma magnitud. Si ambas cargas son positivas (como en la figura 22.8), las líneas de campo eléctrico se originan en las cargas y terminan en el infinito. Si ambas cargas son negativas, las líneas de campo eléctrico se originan en el infinito y terminan en las cargas. Para dos cargas del mismo signo, las líneas de campo no unen las dos cargas. En lugar de eso, las líneas de campo terminan sobre cargas opuestas en el infinito. El hecho de que las líneas de campo nunca terminan sobre la otra carga significa que las cargas se repelen mutuamente.

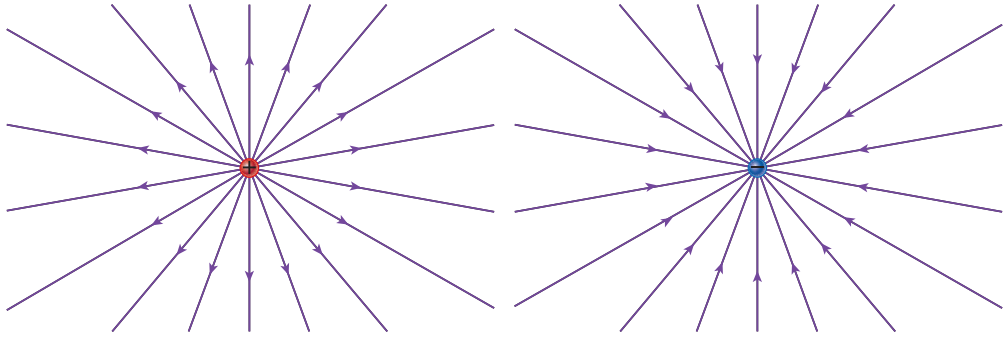


FIGURA 22.6 Líneas de campo eléctrico *a*) desde una carga puntual positiva y *b*) hacia una sola carga puntual negativa.

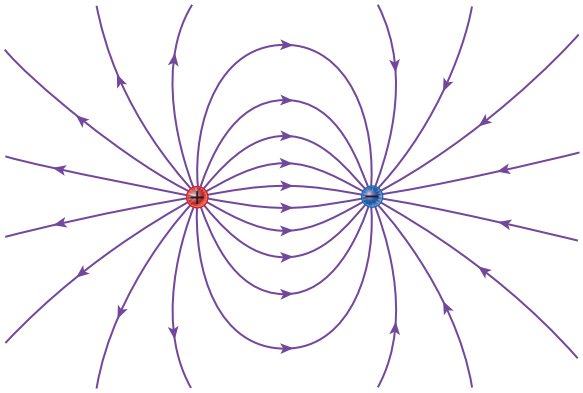


FIGURA 22.7 Líneas de campo eléctrico creado por dos cargas puntuales con cargas opuestas. Cada carga tiene la misma magnitud.

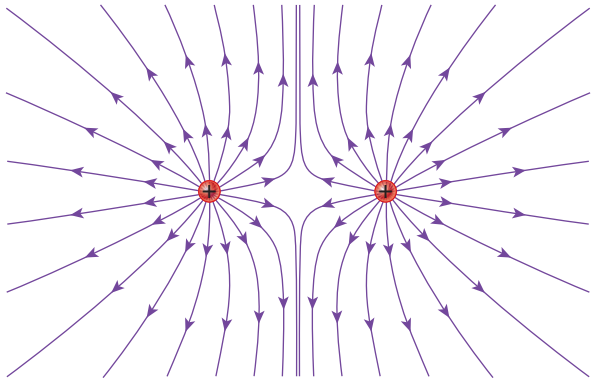


FIGURA 22.8 Líneas de campo eléctrico creado por dos cargas puntuales positivas con la misma magnitud.

Observaciones generales

Los tres casos posibles más simples que acaban de analizarse conducen a dos reglas generales válidas para todas las líneas de campo de todas las configuraciones de carga:

1. *Las líneas de campo se originan en cargas positivas y terminan en cargas negativas.*
2. *Las líneas de campo nunca se cortan.* Este resultado es una consecuencia del hecho de que las líneas representan el campo eléctrico, que a su vez es proporcional a la fuerza neta que actúa sobre una carga colocada en un punto particular. Que se corten las líneas de campo implicaría que la fuerza neta apunta en dos direcciones diferentes en el mismo punto, lo cual es imposible.

22.3 Campo eléctrico debido a cargas puntuales

La magnitud de la fuerza eléctrica sobre una carga puntual q_0 debida a otra carga puntual, q, está dada por

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{|qq_0|}{r^2}. \tag{22.3}$$

Al considerar que q_0 es una pequeña carga de prueba, podemos expresar la magnitud del campo eléctrico producido por una carga puntual q en el punto donde está q_0, como:

$$E = \left|\frac{F}{q_0}\right| = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{|q|}{r^2}, \tag{22.4}$$

donde r es la distancia de la carga de prueba a la carga puntual. La dirección de este campo eléctrico es radial. El campo apunta hacia fuera para una carga positiva y hacia dentro para una carga negativa.

Un campo eléctrico es una cantidad vectorial y así las componentes del campo deben sumarse por separado. El ejemplo 22.1 muestra la adición de campos eléctricos creados por tres cargas puntuales.

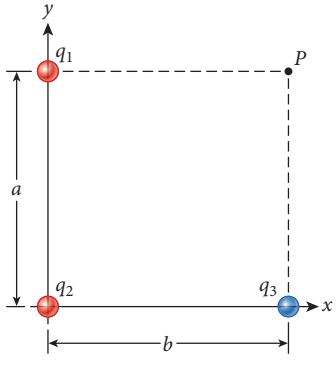


FIGURA 22.9 Ubicación de tres cargas puntuales.

EJEMPLO 22.1 Tres cargas

La figura 22.9 muestra tres cargas puntuales fijas: $q_1 = +1.50\ \mu C$, $q_2 = +2.50\ \mu C$ y $q_3 = -3.50\ \mu C$. La carga q_1 está situada en $(0, a)$, q_2 está ubicada en $(0, 0)$ y q_3 está localizada en $(b, 0)$, donde $a = 8.00$ m y $b = 6.00$ m.

PROBLEMA

¿Qué campo eléctrico, $\vec{E}$, producen estas tres cargas en el punto $P = (b, a)$?

SOLUCIÓN

Debemos sumar los campos eléctricos provenientes de las tres cargas usando la ecuación 22.2. Procedemos sumando componente a componente, empezando con el campo debido a q_1:

$$\vec{E}_1 = E_{1,x}\hat{x} + E_{1,y}\hat{y}.$$

El campo debido a q_1 sólo actúa en la dirección x en el punto (b, a) porque q_1 tiene la misma coordenada y en P. Por lo tanto, $\vec{E}_1 = E_{1,x}\hat{x}$. Podemos determinar $E_{1,x}$ usando la ecuación (22.4):

$$E_{1,x} = \frac{kq_1}{b^2}.$$

Observe que el signo de $E_{1,x}$ es el mismo que el signo de q_1. En forma semejante, el campo debido a q_3 sólo actúa en la dirección y en el punto (b, a). Así, $\vec{E}_3 = E_{3,y}\hat{y}$, donde

$$E_{3,y} = \frac{kq_3}{a^2}.$$

Como se muestra en la figura 22.10, el campo eléctrico debido a q_2 en P está dado por

$$\vec{E}_2 = E_{2,x}\hat{x} + E_{2,y}\hat{y}.$$

Observe que $\vec{E}_2$, el campo eléctrico debido a q_2 en el punto P, apunta directamente alejándose de q_2, ya que $q_2 > 0$. (Si la carga fuera negativa, apuntaría directamente hacia q_2.) La magnitud de este campo eléctrico está dada por

$$E_2 = \frac{k|q_2|}{a^2 + b^2}.$$

La componente $E_{2,x}$ está dada por $E_2 \cos\theta$, donde $\theta = \tan^{-1}(a/b)$, y la componente $E_{2,y}$ está dada por E_2 sen θ.

Al sumar las componentes, el campo eléctrico total en el punto P es

$$\begin{aligned}\vec{E} &= \left(E_{1,x} + E_{2,x}\right)\hat{x} + \left(E_{2,y} + E_{3,y}\right)\hat{y} \\ &= \underbrace{\left(\frac{kq_1}{b^2} + \frac{kq_2\cos\theta}{a^2+b^2}\right)}_{E_x}\hat{x} + \underbrace{\left(\frac{kq_2\,\text{sen}\,\theta}{a^2+b^2} + \frac{kq_3}{a^2}\right)}_{E_y}\hat{y}.\end{aligned}$$

Con los valores dados para a y b, encontramos $\theta = \tan^{-1}(8/6) = 53.1°$, y $a^2 + b^2 = (8.00\text{ m})^2 + (6.00\text{ m})^2 = 100\text{ m}^2$. Luego podemos calcular la componente x del campo eléctrico total como

$$E_x = \left(8.99\cdot10^9\ \text{N m}^2/\text{C}^2\right)\left(\frac{1.50\cdot10^{-6}\ \text{C}}{(6.00\text{ m})^2} + \frac{\left(2.50\cdot10^{-6}\ \text{C}\right)(\cos 53.1°)}{100\text{ m}^2}\right) = 509\text{ N/C}.$$

La componente y es

$$E_y = \left(8.99\cdot10^9\ \text{N m}^2/\text{C}^2\right)\left(\frac{\left(2.50\cdot10^{-6}\ \text{C}\right)(\text{sen}\,53.1°)}{100\text{ m}^2} + \frac{-3.50\cdot10^{-6}\ \text{C}}{(8.00\text{ m})^2}\right) = -312\text{ N/C}.$$

La magnitud del campo es

$$E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2} = \sqrt{(509\text{ N/C})^2 + (-312\text{ N/C})^2} = 597\text{ N/C}.$$

La dirección del campo en el punto P es

$$\varphi = \tan^{-1}\left(\frac{E_y}{E_x}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{-312\text{ N/C}}{509\text{ N/C}}\right) = -31.5°,$$

lo cual significa que el campo eléctrico apunta a la derecha y hacia abajo.

Observe que, aunque las cargas en este ejemplo se proporcionan en microcoulombs y las distancias están en metros, los campos eléctricos siguen siendo grandes, lo que muestra que un microcoulomb es una gran cantidad de carga.

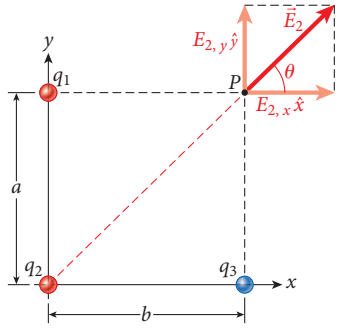


FIGURA 22.10 Campo eléctrico debido a q_2 y sus componentes x y y en el punto P.

22.4 Campo eléctrico debido a un dipolo

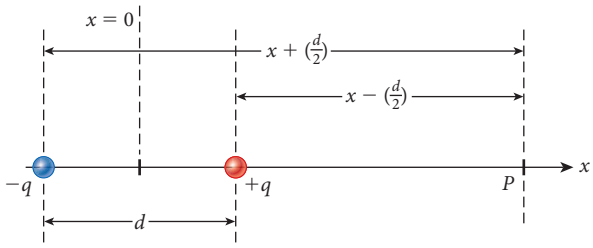


FIGURA 22.11 Cálculo del campo eléctrico proveniente de un dipolo eléctrico.

Un sistema de dos partículas puntuales con cargas opuestas se denomina **dipolo eléctrico**. El campo eléctrico de un dipolo eléctrico está dado por la suma vectorial de los campos eléctricos provenientes de las dos cargas. La figura 22.7 muestra las líneas de campo eléctrico en dos dimensiones para un dipolo eléctrico.

El principio de superposición nos permite determinar el campo eléctrico debido a dos cargas puntuales por medio de la suma vectorial de los campos eléctricos de las dos cargas. Consideremos el caso especial del campo eléctrico debido a un dipolo a lo largo del eje del dipolo, que se define como la recta que une las cargas. Se supone que este eje principal de simetría está orientado a lo largo del eje x (figura 22.11).

El campo eléctrico, $\vec{E}$, en el punto P del dipolo es la suma del campo debido a $+q$, denotado como $\vec{E}_+$, y el campo debido a $-q$, denotado como $\vec{E}_-$:

$$\vec{E} = \vec{E}_+ + \vec{E}_- .$$

Al usar la ecuación 22.4, podemos expresar la magnitud del campo del dipolo eléctrico a lo largo del eje x, para $x > d/2$, como

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r_+^2} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{-q}{r_-^2},$$

donde r_+ es la distancia entre P y $+q$ y r_- es la distancia entre P y $-q$. En esta ecuación no se requieren las barras de valor absoluto porque el primer término en el miembro derecho es positivo y es mayor que el segundo término (negativo). El campo eléctrico en todos los puntos sobre el eje x (excepto en $x = \pm d/2$, donde se encuentran las dos cargas) está dado por

$$\vec{E} = E_x\hat{x} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q(x-d/2)}{r_+^3}\hat{x} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{-q(x+d/2)}{r_-^3}\hat{x}. \qquad (22.5)$$

A continuación examinamos la magnitud de $\vec{E}$ y restringimos el valor de x a $x > d/2$, donde $E = E_x > 0$. Así, tenemos

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{\left(x-\frac{1}{2}d\right)^2} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{\left(x+\frac{1}{2}d\right)^2}.$$

Tras reordenar y teniendo presente que queremos obtener una expresión que tenga la misma forma que el campo eléctrico desde una carga puntual, escribimos la ecuación precedente como

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 x^2}\left[\left(1-\frac{d}{2x}\right)^{-2} - \left(1+\frac{d}{2x}\right)^{-2}\right].$$

Para encontrar una expresión para el campo eléctrico a una gran distancia del dipolo, podemos hacer la aproximación $x \gg d$ y usar el desarrollo del binomio. (Puesto que $x \gg d$, podemos eliminar los términos que contienen el cuadrado de d/x y potencias superiores.) Obtenemos

$$E \approx \frac{q}{4\pi\epsilon_0 x^2}\left[\left(1+\frac{d}{x}-\cdots\right) - \left(1-\frac{d}{x}+\cdots\right)\right] = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 x^2}\left(\frac{2d}{x}\right),$$

que puede volver a escribirse como

$$E \approx \frac{qd}{2\pi\epsilon_0 x^3}. \qquad (22.6)$$

La ecuación 22.6 puede simplificarse al definir una cantidad vectorial denominada **momento dipolar eléctrico**, $\vec{p}$. La dirección de este momento dipolar va de la carga negativa a la positiva, que es opuesta a la dirección de las líneas de campo eléctrico. La magnitud, p, del momento dipolar eléctrico está dada por

$$p = qd, \qquad (22.7)$$

donde q es la magnitud de una de las cargas y d es la distancia de separación entre las dos cargas. Con esta definición, la expresión para la magnitud del campo eléctrico debido al dipolo a lo largo del eje x positivo a una distancia comparada con la separación entre las dos cargas es

$$E = \frac{p}{2\pi\epsilon_0 |x|^3}. \tag{22.8}$$

Aunque no se muestra de manera explícita aquí, la ecuación 22.8 también es válida para $x = \ll -d$. Además, el análisis de la ecuación 22.5 para $\vec{E}$ muestra que $E_x > 0$ en el otro lado del dipolo. En contraste con el campo debido a una carga puntual, que es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia, el campo debido a un dipolo es inversamente proporcional al cubo de la distancia, según la ecuación 22.8.

EJEMPLO 22.2 Molécula de agua

La molécula de agua, H_2O, es probablemente la más importante para la vida. Su momento dipolar es distinto de cero, lo cual es la razón fundamental de por qué muchas moléculas orgánicas son capaces de unirse al agua. El momento dipolar también permite que el agua sea un solvente excelente para muchos compuestos orgánicos e inorgánicos.

Cada molécula de agua consta de dos átomos de hidrógeno y uno de oxígeno, como muestra la figura 22.12*a*). La distribución de carga de cada átomo individual es más o menos esférica. El átomo de oxígeno tiende a atraer los electrones cargados negativamente, otorgando a los átomos de hidrógeno una carga un tanto positiva. Los tres átomos están dispuestos de modo que las líneas que unen los centros de los átomos de hidrógeno con el centro del átomo de oxígeno forman un ángulo de 105° entre ellos (vea la figura 22.12*a*).

PROBLEMA

Suponga que una molécula de agua se aproxima por dos cargas positivas en las ubicaciones de los dos núcleos de hidrógeno (protones) y dos cargas negativas en la ubicación del núcleo de oxígeno, con todas las cargas de la misma magnitud. ¿Cuál es el momento dipolar eléctrico resultante del agua?

SOLUCIÓN

El centro de carga de las dos cargas positivas, análogo al centro de masa de dos masas, está ubicado exactamente a medio camino entre los centros de los átomos de hidrógeno, como muestra la figura 22.12*b*). Con la distancia hidrógeno-oxígeno de $\Delta r = 10^{-10}$ m, como se indica en la figura, la distancia entre los centros de las cargas positivas y las cargas negativas es

$$d = \Delta r \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = \left(10^{-10}\ \text{m}\right)\left(\cos 52.5°\right) = 0.6 \cdot 10^{-10}\ \text{m}.$$

Esta distancia multiplicada por la carga transferida, $q = 2e$, es la magnitud del momento dipolar del agua:

$$p = 2ed = \left(3.2 \cdot 10^{-19}\ \text{C}\right)\left(0.6 \cdot 10^{-10}\ \text{m}\right) = 2 \cdot 10^{-29}\ \text{C m}.$$

Este resultado de un cálculo sobresimplificado en realidad se aproxima, a menos de un factor de 3, del valor medido de $6.2 \cdot 10^{-30}$ C m. El hecho de que el momento dipolar real del agua sea menor que este resultado calculado es una señal de que los dos electrones de los átomos de hidrógeno no son atraídos siempre hacia el oxígeno, sino sólo una tercera parte en promedio.

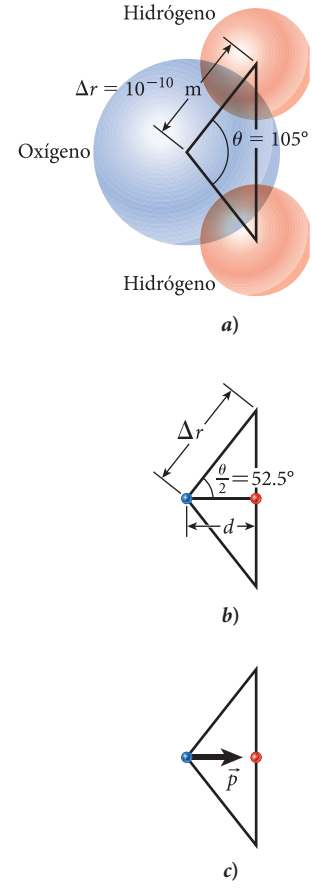


FIGURA 22.12 *a*) Esquema que muestra la geometría de una molécula de agua, H_2O, con los átomos como esferas. *b*) Diagrama que muestra los centros de carga efectivos positivo (punto rojo a la derecha) y negativo (punto azul a la izquierda). *c*) Momento dipolar asumiendo cargas semejantes a las puntuales.

22.5 Distribuciones continuas de carga

Hemos determinado los campos eléctricos de una sola carga puntual y de dos cargas puntuales (un dipolo eléctrico). A continuación consideraremos el campo eléctrico debido a una distribución continua de carga. Para lograrlo, dividimos la carga en elementos diferenciales de carga, dq, y encontramos el campo eléctrico resultante de cada elemento diferencial de carga como si fuese una carga

puntual. Si la carga está distribuida a lo largo de un objeto unidimensional (una recta), la carga diferencial puede expresarse en términos de una carga por longitud unitaria multiplicada por una longitud diferencial, $\lambda\,dx$. Si la carga está distribuida sobre una superficie (un objeto bidimensional), dq se expresa en términos de una carga por área unitaria multiplicada por un área diferencial σdA. Y por último, si la carga está distribuida sobre un volumen tridimensional, entonces dq se escribe como el producto de una carga por volumen unitario multiplicado por el diferencial de volumen, ρdV. Es decir,

$$\left.\begin{aligned} dq &= \lambda dx \\ dq &= \sigma dA \\ dq &= \rho dV \end{aligned}\right\} \text{ para una distribución de carga } \begin{cases} \text{a lo largo de una recta;} \\ \text{sobre una superficie;} \\ \text{en todo un volumen.} \end{cases} \tag{22.9}$$

Luego, la magnitud del campo eléctrico resultante de la distribución de carga se obtiene a partir de la carga diferencial:

$$dE = k\frac{dq}{r^2}. \tag{22.10}$$

En el siguiente ejemplo encontramos el campo eléctrico debido a una línea de carga finita.

EJEMPLO 22.3 Línea de carga finita

Para encontrar el campo eléctrico a lo largo de una recta mediatriz de un segmento de alambre finito de longitud finita cargado con densidad de carga lineal λ, integramos las contribuciones al campo eléctrico provenientes de toda la carga en el alambre. Suponemos que el alambre se encuentra a lo largo del eje x (figura 22.13).

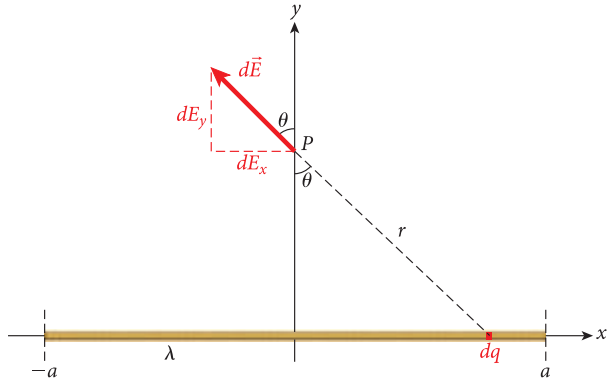


FIGURA 22.13 Cálculo del campo eléctrico debido a toda la carga en un alambre largo al integrar las contribuciones al campo eléctrico sobre la longitud del alambre.

También supondremos que el alambre está colocado con su punto medio en $x = 0$, un extremo en $x = a$ y el otro extremo en $x = -a$. Así, la simetría de la situación nos permite concluir que no puede haber ninguna fuerza eléctrica paralela al alambre (en la dirección x) a lo largo de la recta bisectriz del alambre. A lo largo de esta línea, el campo eléctrico sólo puede estar en la dirección y. Luego podemos calcular el campo eléctrico debido a toda la carga para $x \geq 0$ y multiplicar el resultado por 2 para obtener el campo eléctrico para todo el alambre.

Consideramos una carga diferencial, dq, sobre el eje x, como muestra la figura 22.13. La magnitud del campo eléctrico, dE, en un punto $(0, y)$ debida a esta carga está dada por la ecuación 22.10,

$$dE = k\frac{dq}{r^2},$$

donde $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ es la distancia de dq al punto P. Así, la componente del campo eléctrico perpendicular al alambre (en la dirección y) está dada por

$$dE_y = k\frac{dq}{r^2}\cos\theta,$$

donde θ es el ángulo entre el campo eléctrico producido por dq y el eje y (vea la figura 22.13). El ángulo θ está relacionado con r y y porque $\cos\theta = y/r$.

Podemos relacionar la carga diferencial con la distancia diferencial a lo largo del eje x por medio de la densidad de carga lineal, λ: $dq = \lambda\, dx$. Entonces, el campo eléctrico a una distancia y del alambre largo es

$$E_y = 2\int_0^a dE_y = 2\int_0^a k\frac{dq}{r^2}\cos\theta = 2k\int_0^a \frac{\lambda dx}{r^2}\frac{y}{r} = 2k\lambda y\int_0^a \frac{dx}{\left(x^2+y^2\right)^{3/2}}.$$

Al evaluar el miembro derecho (con ayuda de la tabla de integrales o de un paquete de software como Mathematica o Maple) obtenemos

$$\int_0^a \frac{dx}{\left(x^2+y^2\right)^{3/2}} = \left[\frac{1}{y^2}\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right]_0^a = \frac{1}{y^2}\frac{a}{\sqrt{y^2+a^2}}.$$

Así, el campo eléctrico a una distancia y a lo largo de una recta bisectriz está dado por

$$E_y = 2k\lambda y\frac{1}{y^2}\frac{a}{\sqrt{y^2+a^2}} = \frac{2k\lambda}{y}\frac{a}{\sqrt{y^2+a^2}}.$$

Por último, cuando $a \to \infty$, es decir, el alambre se vuelve infinitamente largo, $a/\sqrt{y^2+a^2} \to 1$, tenemos

$$E_y = \frac{2k\lambda}{y}.$$

En otras palabras, el campo eléctrico decrece en proporción inversa a la distancia al alambre.

A continuación abordaremos un problema cuya geometría es ligeramente más complicada: encontrar el campo eléctrico debido a un anillo de carga a lo largo del eje del anillo.

PROBLEMA RESUELTO 22.1 Anillo de carga

PROBLEMA

Considere un anillo cargado con radio $R = 0.250$ m (figura 22.14). El anillo tiene una densidad de carga lineal uniforme y la carga total sobre el anillo es $Q = +5.00$ μC. ¿Cuál es el campo eléctrico a una distancia $d = 0.500$ m a lo largo del eje del anillo?

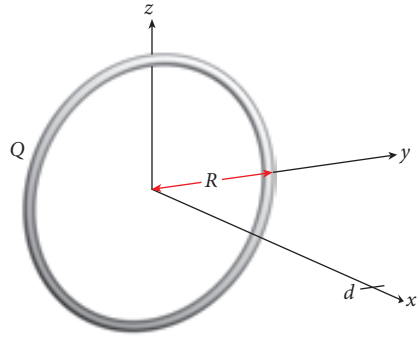


FIGURA 22.14 Anillo cargado con radio R y carga total Q.

SOLUCIÓN

PIENSE

La carga está distribuida uniformemente alrededor del anillo. El campo eléctrico en la posición $x = d$ puede calcularse al integrar el diferencial de campo eléctrico debido a un diferencial de carga eléctrica. Por simetría, las componentes del campo eléctrico perpendicular al eje del anillo se integran a cero, ya que los campos eléctricos de los elementos de carga sobre los lados opuestos del eje se cancelan entre sí. El campo eléctrico resultante es paralelo al eje del círculo.

ESBOCE

La figura 22.15 muestra la geometría para el campo eléctrico a lo largo del eje del anillo de carga.

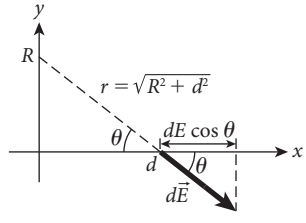


FIGURA 22.15 La geometría para el campo eléctrico a lo largo del eje de un anillo con carga.

PLANTEE

El diferencial de campo eléctrico, dE, en $x = d$ se debe a la carga diferencial ubicada en $y = R$ (vea la figura 22.15). La distancia del punto $(x = d, y = 0)$ al punto $(x = 0, y = R)$ es

$$r = \sqrt{R^2 + d^2}.$$

(*continúa*)

(*continuación*)

De nuevo, la magnitud de $d\vec{E}$ está dada por la ecuación 22.10:

$$dE = k\frac{dq}{r^2}.$$

La magnitud de la componente de $d\vec{E}$ paralela al eje x está dada por

$$dE_x = dE\cos\theta = dE\frac{d}{r}.$$

SIMPLIFIQUE

Podemos encontrar el campo eléctrico total al integrar sus componentes x a toda la carga sobre el anillo:

$$E_x = \int_{\text{anillo}} dE_x = \int_{\text{anillo}} \frac{d}{r}k\frac{dq}{r^2}.$$

Necesitamos integrar alrededor de la circunferencia del anillo de carga. Podemos relacionar el diferencial de carga con el diferencial de longitud de arco, ds, como sigue:

$$dq = \frac{Q}{2\pi R}ds.$$

Luego, podemos expresar la integral sobre todo el anillo de carga como una integral alrededor de la longitud de arco de un círculo:

$$E_x = \int_0^{2\pi R} k\left(\frac{Q}{2\pi R}\,ds\right)\frac{d}{r^3} = \left(\frac{kQd}{2\pi R r^3}\right)\int_0^{2\pi R} ds = kQ\frac{d}{r^3} = \frac{kQd}{\left(R^2+d^2\right)^{3/2}}.$$

CALCULE

Al escribir los valores numéricos, obtenemos

$$E_x = \frac{kQd}{\left(R^2+d^2\right)^{3/2}} = \frac{\left(8.99\cdot10^9\ \text{N m}^2/\text{C}^2\right)\left(5.00\cdot10^{-6}\ \text{C}\right)\left(0.500\ \text{m}\right)}{\left[\left(0.250\ \text{m}\right)^2+\left(0.500\ \text{m}\right)^2\right]^{3/2}} = 128\,654\ \text{N/C}.$$

REDONDEE

Mostramos nuestro resultado con tres cifras:

$$E_x = 1.29\cdot10^5\ \text{N/C}.$$

VUELVA A REVISAR

Podemos comprobar la validez de la fórmula que obtuvimos para el campo eléctrico al calcularlo para un punto a una gran distancia del anillo de carga, de modo que $d \gg R$. En este caso,

$$E_x = \frac{kQd}{\left(R^2+d^2\right)^{3/2}} \overset{d\gg R}{\Rightarrow} E_x = \frac{kQd}{d^3} = k\frac{Q}{d^2},$$

que es la expresión para el campo eléctrico debido a una carga puntual Q a una distancia d. También podemos verificar la fórmula con $d = 0$:

$$E_x = \frac{kQd}{\left(R^2+d^2\right)^{3/2}} \overset{d=0}{\Rightarrow} E_x = 0,$$

que es lo que esperaríamos en el centro del anillo de carga. Así, nuestro resultado parece razonable.

22.6 Fuerza debida a un campo eléctrico

La fuerza $\vec{F}$ ejercida por un campo eléctrico $\vec{E}$ sobre una carga puntual q está dada por $\vec{F} = q\vec{E}$, lo cual es un simple replanteamiento de la definición de campo eléctrico en la ecuación 22.1. Así, la fuerza ejercida por el campo eléctrico sobre una carga positiva actúa en la misma dirección que el campo eléctrico. El vector de fuerza siempre es tangente a las líneas de campo eléctrico y apunta en la dirección del campo eléctrico si $q > 0$.

22.2 Ejercicio en clase

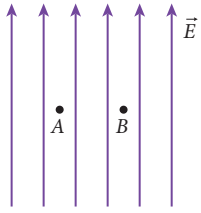
Un pequeño objeto cargado positivamente puede colocarse en un campo eléctrico uniforme en la ubicación *A* o en la posición *B*. ¿Cómo se comparan las fuerzas eléctricas sobre el objeto en las dos ubicaciones?

a) La magnitud de la fuerza eléctrica sobre el objeto es mayor en el punto *A*.

b) La magnitud de la fuerza eléctrica sobre el objeto es mayor en el punto *B*.

c) No hay fuerza eléctrica sobre el objeto en la posición *A* o en la posición *B*.

d) La fuerza eléctrica sobre el objeto en el punto *A* tiene la misma magnitud que la fuerza sobre el objeto en el punto *B* pero en dirección opuesta.



e) La fuerza eléctrica sobre el objeto en el punto *A* es la misma fuerza eléctrica diferente de cero que hay sobre el objeto en el punto *B*.

La fuerza en varias ubicaciones sobre una carga positiva debida al campo eléctrico en tres dimensiones se muestra en la figura 22.16, para el caso de dos partículas con cargas opuestas. (Éste es el mismo campo que el de la figura 22.5, pero con algunos vectores de fuerza representativos agregados.) Puede ver que la fuerza sobre una carga positiva siempre es tangente a las líneas de campo y que apunta en la misma dirección que el campo eléctrico. La fuerza sobre una carga negativa apuntaría en dirección opuesta.

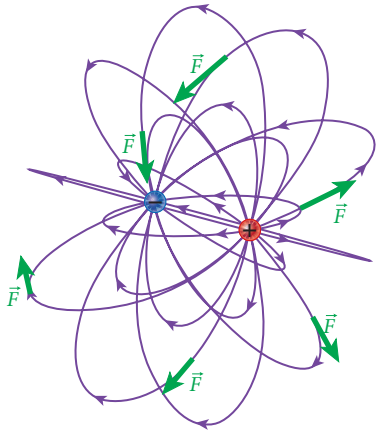


FIGURA 22.16 Dirección de la fuerza que ejerce un campo eléctrico producido por dos cargas puntuales opuestas, sobre una carga positiva, en varios puntos del espacio.

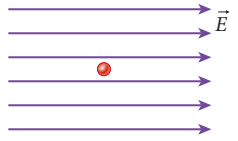
EJEMPLO 22.4 Cámara de proyección del tiempo

Los físicos nucleares estudian nuevas formas de la materia al hacer chocar núcleos de oro a energías muy altas. En física de partículas, nuevas partículas elementales se crean y estudian al hacer chocar protones y antiprotones a las energías más altas. Estas colisiones crean muchas partículas que se alejan del punto de interacción a gran velocidad. Un simple detector de partículas no es suficiente para identificarlas. Un dispositivo que ayuda a los físicos a

(*continúa*)

22.1 Ejercicio en clase

Un pequeño objeto cargado positivamente se coloca en reposo en un campo eléctrico uniforme, como muestra la figura. Cuando el objeto se suelta,



a) no se mueve;

b) empieza a moverse con velocidad constante;

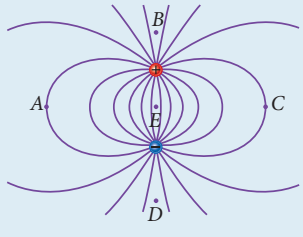
c) empieza a moverse con aceleración constante;

d) empieza a moverse con aceleración creciente;

e) se mueve de un lado a otro en movimiento armónico simple.

22.1 Oportunidad de autoevaluación

La figura muestra una vista bidimensional de líneas de campo eléctrico debidas a dos cargas opuestas. ¿Cuál es la dirección del campo eléctrico en los cinco puntos *A*, *B*, *C*, *D* y *E*? ¿En cuál de los cinco puntos es mayor la magnitud del campo eléctrico?



22.3 Ejercicio en clase

Indique si cada una de las siguientes afirmaciones sobre campos eléctricos es falsa o verdadera.

a) Las líneas de campo eléctrico apuntan hacia dentro en dirección de las cargas negativas.

b) Las líneas de campo eléctrico forman círculos alrededor de las cargas positivas.

c) Las líneas de campo eléctrico pueden cruzarse.

d) Las líneas de campo eléctrico apuntan hacia fuera desde las cargas positivas.

e) Una carga puntual positiva liberada desde el reposo acelera inicialmente a lo largo de la tangente a la línea de campo eléctrico en ese punto.

(*continuación*)

estudiar estas colisiones es la cámara de proyección del tiempo (TPC, por sus siglas en inglés), encontrada en la mayor parte de los detectores de partículas.

Un ejemplo de un TPC es el STAR con TPC de la Relativistic Heavy Collider at Brookheaven Nacional Laboratory en Long Island, Nueva York. El STAR con TPC consiste en un largo cilindro lleno con un gas (90% argón, 10% metano), lo cual permite que los electrones libres se muevan sin recombinarse.

En la figura 22.17 se muestran los resultados de una colisión de dos núcleos de oro que ocurrió en el STAR con TPC. En esta colisión se crean miles de partículas cargadas que pasan a través del gas en el interior del TPC. A medida que estas partículas cargadas pasan por el gas, ionizan los átomos de éste, liberando electrones libres. Un campo eléctrico constante de 13 500 N/C de magnitud se aplica entre el centro del TPC y los extremos de las tapas en los extremos del cilindro, y el campo ejerce una fuerza eléctrica sobre los electrones liberados. Puesto que los electrones tienen carga negativa, el campo eléctrico ejerce una fuerza en la dirección opuesta al campo eléctrico. Los electrones intentan acelerar en la dirección de la fuerza eléctrica, pero interactúan con los electrones de las moléculas del gas y empiezan a derivar hacia las tapas con una velocidad constante de 5 cm/μs = $5 \cdot 10^4$ m/s ≈ 100 000 mph.

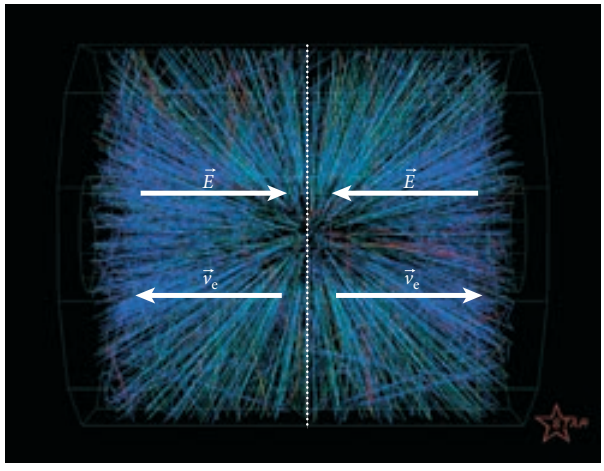


FIGURA 22.17 Un acontecimiento en el STAR con TPC, en el que dos núcleos de oro han colisionado a energías muy altas en el punto del centro de la imagen. Cada línea a color representa el rastro dejado por una partícula subatómica producida en la colisión.

Cada extremo del cilindro tiene 68 304 detectores que pueden medir la carga como una función del tiempo de deriva de los electrones a partir del punto en el que se liberan. Cada detector tiene una posición (x, y) específica. Con base en mediciones del tiempo de llegada de la carga y la velocidad de deriva conocida de los electrones, es posible calcular la componente z de su posición. Así, el STAR con TPC puede producir una representación tridimensional completa del rastro de ionización de cada partícula cargada. Estos rastros se muestran en la figura 22.17, en la que los colores representan la cantidad de ionización producida por cada rastro.

Dipolo en un campo eléctrico

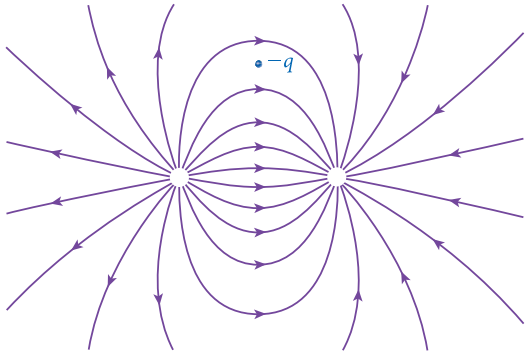
Una carga eléctrica en un campo eléctrico experimenta una fuerza, dada por la ecuación 22.1. La fuerza eléctrica siempre es tangente a la línea de campo eléctrico que pasa por el punto. El efecto de un campo eléctrico sobre un dipolo puede describirse en términos del vector del campo eléctrico, $\vec{E}$, y el vector del momento dipolar eléctrico, $\vec{p}$, sin conocimiento detallado de las cargas que integran el dipolo eléctrico.

Para analizar el comportamiento de un dipolo eléctrico, consideremos dos cargas, $+q$ y $-q$, separadas por una distancia d en un campo eléctrico uniforme constante, $\vec{E}$ (figura 22.18). (Observe que ahora estamos considerando las fuerzas que actúan sobre un dipolo colocado en un campo externo, en oposición a considerar el campo originado por el dipolo, lo cual hicimos en la sección 22.4, y también suponemos que el campo del dipolo es pequeño en comparación con $\vec{E}$ de modo que su efecto sobre el campo uniforme puede ignorarse.) El campo eléctrico ejerce una fuerza hacia arriba sobre la carga positiva y una fuerza hacia abajo sobre la carga negativa. La magnitud

22.4 Ejercicio en clase

Una carga negativa $-q$ se coloca en un campo eléctrico no uniforme, como muestra la figura. ¿Cuál es la dirección de la fuerza eléctrica sobre esta carga negativa?

a) →
b) ↑
c) ←
d) ↓
e) La fuerza es cero.



de ambas fuerzas es qE. En el capítulo 10 vimos que esta situación origina un momento de torsión, $\vec{\tau}$, dado por $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$, donde $\vec{r}$ es el brazo de momento y $\vec{F}$ es la fuerza. La magnitud del momento de torsión es $\tau = rF \operatorname{sen} \theta$.

Como siempre, es posible calcular el momento de torsión alrededor de cualquier punto pivote, de modo que podemos escoger la ubicación de la carga negativa. Luego, sólo la fuerza sobre la carga positiva contribuye al momento de torsión, y la longitud del vector de posición es $r = d$; es decir, la longitud del dipolo. Puesto que, como ya se mencionó, $F = qE$, la expresión para el momento de torsión sobre un dipolo eléctrico en un campo eléctrico externo puede escribirse como

$$\tau = qEd \operatorname{sen} \theta.$$

Al recordar que el momento dipolar eléctrico se define como $p = qd$, obtenemos la magnitud del momento de torsión:

$$\tau = pE \operatorname{sen} \theta. \tag{22.11}$$

Debido a que el momento de torsión es un vector y debe ser perpendicular tanto al momento dipolar eléctrico como al campo eléctrico, la relación en la ecuación 22.11 puede escribirse como un producto vectorial:

$$\vec{\tau} = \vec{p} \times \vec{E}. \tag{22.12}$$

Así como ocurre con todos los productos vectoriales, la dirección de la torsión está dada por la regla de la mano derecha. Como muestra la figura 22.19, el pulgar indica la dirección del primer término del producto vectorial, en este caso $\vec{p}$, y el índice indica la dirección del segundo término, $\vec{E}$. Así, el resultado del producto vectorial, $\vec{\tau}$, está dirigido a lo largo del dedo medio y es perpendicular a cada uno de los dos términos.

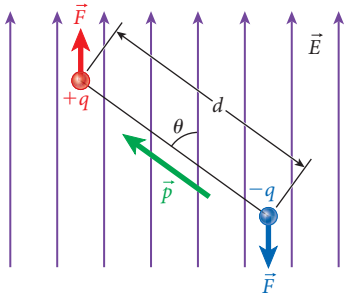


FIGURA 22.18 Dipolo eléctrico en un campo eléctrico.

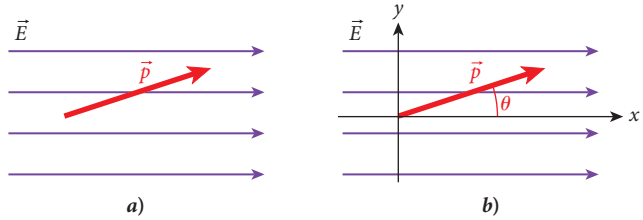
22.2 Oportunidad de autoevaluación

Use el centro de masa del dipolo como el punto pivote y demuestre que de nuevo se obtiene la expresión $\tau = qEd \operatorname{sen} \theta$ para el momento de torsión.

PROBLEMA RESUELTO 22.2 Dipolo eléctrico en un campo eléctrico

PROBLEMA

Un dipolo eléctrico con momento dipolar de magnitud $p = 1.40 \cdot 10^{-12}$ C m se coloca en un campo eléctrico uniforme de magnitud $E = 498$ N/C (figura 22.20*a*).



a) *b*)

FIGURA 22.20 *a*) Un dipolo eléctrico en un campo eléctrico uniforme. *b*) El campo eléctrico orientado en la dirección x y el dipolo en el plano xy.

(*continúa*)

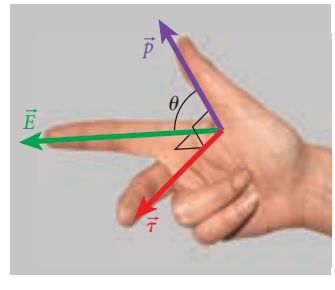


FIGURA 22.19 Regla de la mano derecha para el producto vectorial del momento dipolar eléctrico y el campo eléctrico, produciendo el vector del momento de torsión.

(*continuación*)

En algún instante (en el tiempo), el ángulo entre el dipolo eléctrico y el campo eléctrico es $\theta = 14.5°$. ¿Cuáles son las componentes cartesianas del momento de torsión sobre el dipolo?

SOLUCIÓN

PIENSE

El momento de torsión sobre el dipolo es igual al producto vectorial de la intensidad del campo eléctrico y el momento dipolar eléctrico.

ESBOCE

Suponemos que las líneas de campo eléctrico apuntan en la dirección x y que el momento dipolar eléctrico está en el plano xy (figura 22.20*b*). La dirección z es perpendicular al plano de la página.

INVESTIGUE

El momento de torsión del dipolo eléctrico debido al campo eléctrico está dado por

$$\vec{\tau} = \vec{p} \times \vec{E}.$$

Puesto que el dipolo está ubicado en el plano xy, las componentes cartesianas del momento dipolar eléctrico son

$$\vec{p} = \left(p_x, p_y, 0\right).$$

Ya que el campo eléctrico actúa en la dirección x, sus componentes cartesianas son

$$\vec{E} = \left(E_x, 0, 0\right) = \left(E, 0, 0\right).$$

SIMPLIFIQUE

A partir de la definición de producto vectorial, expresamos las componentes cartesianas del momento de torsión como

$$\vec{\tau} = \left(p_y E_z - p_z E_y\right)\hat{x} + \left(p_z E_x - p_x E_z\right)\hat{y} + \left(p_x E_y - p_y E_x\right)\hat{z}.$$

En este caso particular, con E_y, E_z, y p_z iguales a cero, tenemos

$$\vec{\tau} = -\, p_y E_x \hat{z}.$$

La componente y del momento dipolar eléctrico es $p_y = p \operatorname{sen}\theta$, y la componente x del campo eléctrico es simplemente $E_x = E$. Entonces, la magnitud del momento de torsión es

$$\tau = (p \operatorname{sen}\theta)E = pE \operatorname{sen}\theta,$$

y la dirección del momento de torsión es en la dirección z negativa.

CALCULE

Insertamos los datos numéricos proporcionados y obtenemos

$$\tau = pE \operatorname{sen}\theta = \left(1.40 \cdot 10^{-12}\ \text{C m}\right)\left(498\ \text{N/C}\right)\left(\operatorname{sen} 14.5°\right) = 1.74565 \cdot 10^{-10}\ \text{N m}.$$

REDONDEE

Mostramos nuestro resultado con tres cifras:

$$\tau = 1.75 \cdot 10^{-10}\ \text{N m}.$$

VUELVA A REVISAR

A partir de la ecuación 22.11 sabemos que la magnitud del momento de torsión es

$$\tau = pE \operatorname{sen}\theta,$$

que es el resultado que obtuvimos al usar el producto vectorial explícito. Al aplicar la regla de la mano derecha, ilustrada en la figura 22.19, podemos determinar la dirección del momento de torsión: si el pulgar representa el momento dipolar eléctrico y el índice representa el campo eléctrico, el dedo medio apunta hacia la página, lo cual coincide con el resultado que encontramos por medio del producto vectorial. Así, nuestro resultado es correcto.

En el ejemplo 22.2 se consideró el momento dipolar de moléculas de agua. Si las moléculas de agua se exponen a un campo eléctrico externo, experimentan un momento de torsión, de modo que empiezan a rotar. Si la dirección del campo eléctrico externo cambia muy rápido, las moléculas de agua realizan oscilaciones rotativas, lo cual crea calor. Éste es el principio de operación de un horno de microondas (figura 22.21). Estos hornos usan una frecuencia de 2.45 GHz para el campo eléctrico oscilatorio. (La forma en la que se hace oscilar un campo eléctrico con el tiempo se abordará en el capítulo 31 sobre ondas electromagnéticas.)

FIGURA 22.21 Horno de microondas que se usa en la mayoría de las cocinas.

Los campos eléctricos también desempeñan un rol crucial en la fisiología humana, pero estos campos eléctricos varían con el tiempo y no son estáticos, como los que se estudiaron en este capítulo. (Estos campos se abordarán en capítulos posteriores.) La evolución con el tiempo de los campos eléctricos en el corazón humano se mide por medio de un electrocardiograma (ECG) (que se analizará junto con el funcionamiento de un marcapasos en el capítulo 26 sobre circuitos). A través de la actividad de las neuronas, el cerebro humano también genera campos eléctricos que varían de manera continua. Estos campos pueden medirse en forma invasiva al insertar electrodos en el cráneo y el cerebro o mediante la colocación de electrodos sobre la superficie del cerebro expuesto, casi siempre durante intervenciones quirúrgicas. Ese método se denomina electrocorticografía (ECoG). Un área intensa de investigación actual se centra en la medición e imagenología no invasivas de campos eléctricos cerebrales colocando electrodos en la parte externa del cráneo. No obstante, puesto que el cráneo en sí amortigua los campos eléctricos, estas técnicas requieren de una gran sensibilidad instrumental y aún son incipientes. Quizá los desarrollos de investigación más emocionantes (o atemorizantes, dependiendo de su punto de vista) se encuentran en las interfaces cerebro-computadora. En este campo emergente, la actividad eléctrica del cerebro se usa directamente para controlar computadoras, y se usan estímulos externos para crear campos eléctricos dentro del cerebro. Los investigadores en esta área son motivados por el objetivo de ayudar a las personas a superar discapacidades físicas como ceguera o parálisis.

22.7 Flujo eléctrico

Los cálculos relacionados con campos eléctricos, como los del ejemplo 22.3, pueden requerir bastante trabajo. No obstante, en muchas situaciones comunes, particularmente en las que hay algo de simetría geométrica, es posible usar una técnica poderosa para determinar campos eléctricos sin tener que calcular integrales. Esta técnica, denominada *ley de Gauss*, es una de las relaciones fundamentales de los campos eléctricos. Sin embargo, para usar esta ley se requiere comprender el concepto de *flujo eléctrico*.

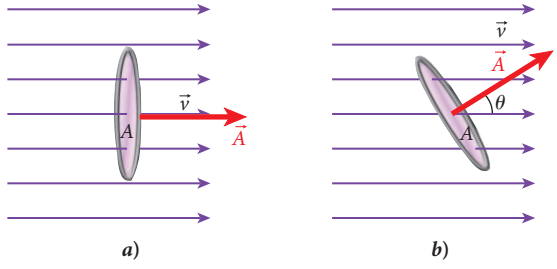


FIGURA 22.22 Agua que fluye con velocidad de magnitud v a través del área A del anillo. *a*) El vector de área es paralelo a la velocidad de flujo. *b*) El vector de área forma un ángulo θ con la velocidad de flujo.

Imagine que usted sostiene un anillo con área A en una corriente de agua que fluye con velocidad $\vec{v}$, como muestra la figura 22.22. El vector de área, $\vec{A}$, del anillo se define como un vector con magnitud A que apunta en dirección perpendicular al plano del anillo. En la figura 22.22*a*), el vector de área del anillo es paralelo a la velocidad del flujo, que es perpendicular al plano del anillo. El producto Av proporciona la cantidad de agua que pasa por el anillo por unidad de tiempo (vea el capítulo 13), donde v es la magnitud de la velocidad de agua. Si el plano del anillo se inclina con respecto a la dirección del agua que fluye (figura 22.22*b*), la cantidad de agua que fluye por el anillo está dada por $Av\cos\theta$, donde θ es el ángulo entre el vector de área del anillo y la dirección de la velocidad del agua que fluye. La cantidad de agua que fluye por el anillo se denomina *flujo*, $\Phi = Av\cos\theta = \vec{A}\cdot\vec{v}$. Puesto que el flujo es una medida de volumen por unidad de tiempo, sus unidades son metros cúbicos por segundo (m^3/s).

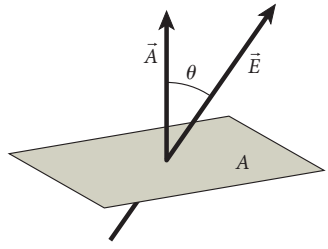


FIGURA 22.23 Campo eléctrico uniforme $\vec{E}$ que pasa por un área $\vec{A}$.

Un campo eléctrico es análogo al agua que fluye. Considere un campo eléctrico uniforme de magnitud E que pasa por un área dada A (figura 22.23). De nuevo, el vector de área es $\vec{A}$, con una dirección normal a la superficie del área y una magnitud A. El ángulo θ es el ángulo entre el vector del campo eléctrico y el vector de área, como se muestra en la figura 22.23. El campo eléctrico que pasa por un área dada A se denomina **flujo eléctrico** y está dado por

$$\Phi = EA\cos\theta. \tag{22.13}$$

En términos simples, el flujo eléctrico es proporcional al número de líneas de campo eléctrico que pasan por el área. Supondremos que el campo eléctrico está dado por $\vec{E}(\vec{r})$ y que el área es una superficie cerrada, en lugar de la superficie abierta de un simple anillo en agua que fluye. En

este caso de superficie cerrada, el flujo eléctrico total, o neto, está dado por una integral del campo eléctrico sobre la superficie cerrada:

$$\Phi = \oiint \vec{E} \cdot d\vec{A}, \tag{22.14}$$

donde $\vec{E}$ es el campo eléctrico en cada elemento diferencial de área $d\vec{A}$ de la superficie cerrada. La dirección de $d\vec{A}$ es hacia fuera desde la superficie cerrada. En la ecuación 22.14, el círculo de la integral significa que la integración es sobre una superficie cerrada, y los dos signos de integral significan una integración sobre dos variables. (*Nota*: algunos libros usan notación diferente para la integral sobre una superficie cerrada, $\iint_S dA$ o sólo $\int_S dA$, pero éstas se refieren al mismo procedimiento de integración como se representa en la ecuación 22.14.) El elemento diferencial de área $d\vec{A}$ debe describirse por dos variables espaciales, como x y y en coordenadas cartesianas o θ y ϕ en coordenadas esféricas.

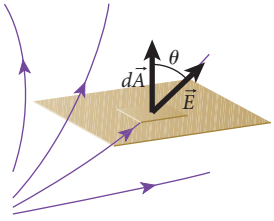


FIGURA 22.24 Campo eléctrico no uniforme $\vec{E}$ que pasa por un elemento de área diferencial $d\vec{A}$.

La figura 22.24 muestra un campo eléctrico no uniforme, $\vec{E}$, que pasa por un elemento de área diferencial, $d\vec{A}$. También se muestra una porción de la superficie cerrada. El ángulo entre el campo eléctrico y el elemento de área diferencial es θ.

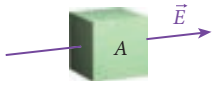


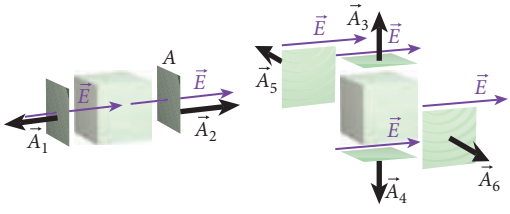
FIGURA 22.25 Cubo (eléctrico) con caras de área A en un campo eléctrico uniforme $\vec{E}$.

EJEMPLO 22.5 Flujo eléctrico a través de un cubo

La figura 22.25 muestra un cubo con caras de área A en un campo eléctrico no uniforme, $\vec{E}$, que es perpendicular al plano de una cara del cubo.

PROBLEMA

¿Cuál es el flujo neto que pasa por el cubo?



a) *b*)

FIGURA 22.26 *a*) Las dos caras del cubo que son perpendiculares al campo eléctrico. Los vectores de área son paralelos y antiparalelos al campo eléctrico. *b*) Las cuatro caras del cubo que son paralelas al campo eléctrico. Los vectores de área son perpendiculares al campo eléctrico.

SOLUCIÓN

El campo eléctrico en la figura 22.25 es perpendicular al plano de una de las seis caras del cubo, y en consecuencia también es perpendicular a la cara opuesta. Los vectores de área de estas dos caras, $\vec{A}_1$ y $\vec{A}_2$, se muestran en la figura 22.26*a*). El flujo eléctrico neto que pasa por estas dos caras es

$$\Phi_{12} = \Phi_1 + \Phi_2 = \vec{E} \cdot \vec{A}_1 + \vec{E} \cdot \vec{A}_2 = -EA_1 + EA_2 = 0.$$

El signo negativo surge debido al flujo que pasa por la cara 1 porque el campo eléctrico y el vector de área, $\vec{A}_1$, tienen direcciones opuestas. Los vectores de área de las cuatro caras restantes son perpendiculares al campo eléctrico, como se muestra en la figura 22.26*b*). El flujo eléctrico neto que pasa por estas cuatro caras es

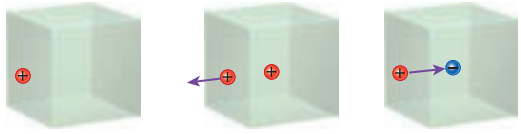
$$\Phi_{3\,456} = \Phi_3 + \Phi_4 + \Phi_5 + \Phi_6 = \vec{E} \cdot \vec{A}_3 + \vec{E} \cdot \vec{A}_4 + \vec{E} \cdot \vec{A}_5 + \vec{E} \cdot \vec{A}_6 = 0.$$

Todos los productos escalares son cero porque los vectores de área de estas cuatro caras son perpendiculares al campo eléctrico. Así, el flujo eléctrico neto que pasa por el cubo es

$$\Phi = \Phi_{12} + \Phi_{3\,456} = 0.$$

22.8 Ley de Gauss

Para iniciar nuestro análisis de la ley de Gauss, imaginemos una caja con forma de cubo (figura 22.27*a*) que se elabora con un material que no afecta los campos eléctricos. Una carga de prueba positiva que se acerque a cualquiera de las caras de la caja no experimenta ninguna fuerza. Ahora suponga que una carga positiva está dentro de la caja y que la carga de prueba positiva se acerca a la superficie de la caja (figura 22.27*b*). La carga de prueba positiva experimenta una fuerza hacia fuera debido a la carga en el interior de la caja. Si la carga de prueba está próxima a cualquier superficie de la caja, experimenta la fuerza hacia fuera. Si es el doble la carga positiva en el interior de la caja, una carga de prueba positiva cerca de cualquier superficie de la caja experimenta el doble de la fuerza hacia fuera.



a) *b*) *c*)

FIGURA 22.27 Tres cajas imaginarias elaboradas con material que no afecta los campos eléctricos. Una carga de prueba positiva se acerca a la caja desde la izquierda hacia: *a*) una caja vacía; *b*) una caja con una carga positiva dentro; *c*) una caja con una carga negativa dentro.

Ahora suponga que hay una carga negativa dentro de la caja (figura 22.27*c*). Cuando la carga de prueba positiva se acerca a una de las caras de la caja, experimenta una fuerza hacia dentro. Si la carga de prueba positiva está cerca de cualquier superficie de la caja, experimenta una fuerza hacia dentro. Al duplicar la carga negativa dentro de la caja, se duplica la fuerza hacia dentro sobre la carga de prueba próxima a cualquier superficie de la caja.

Por analogía con agua que fluye, las líneas de campo eléctrico parecen fluir hacia fuera de la caja que contiene la carga positiva y hacia la caja que contiene la carga negativa.

Ahora imaginemos una caja vacía en un campo eléctrico uniforme (figura 22.28). Si una carga de prueba positiva se acerca al lado 1, experimenta una fuerza hacia dentro. Si la carga está cerca del lado 2, experimenta una fuerza hacia fuera. El campo eléctrico es paralelo a los otros cuatro lados, de modo que la carga de prueba positiva no experimenta ninguna fuerza hacia dentro o hacia fuera cuando se aproxima a estos lados. Así, por analogía con agua que fluye, la cantidad neta de campo eléctrico que parece fluir hacia dentro y hacia fuera de la caja es cero.

Siempre que una carga se encuentra dentro de la caja, las líneas de campo eléctrico parecen fluir hacia dentro o hacia fuera de ella. Cuando no hay carga en la caja, el flujo neto de líneas de campo eléctrico hacia dentro o hacia fuera es cero. Estas observaciones y la definición del flujo eléctrico, que cuantifican el concepto del flujo de las líneas de campo eléctrico, conducen a la **ley de Gauss**:

$$\Phi = \frac{q}{\epsilon_0}. \tag{22.15}$$

Aquí q es la carga neta dentro de una superficie cerrada, denominada **superficie gaussiana**. La superficie cerrada puede ser una caja como la que hemos estado analizando, o cualquier otra superficie cerrada. Por lo general, la forma de la superficie gaussiana se escoge de modo que refleja simetrías de la situación del problema.

Un planteamiento alternativo de la ley de Gauss incorpora la definición de flujo eléctrico (ecuación 22.14):

$$\oiint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q}{\epsilon_0}. \tag{22.16}$$

Según la ecuación 22.16, la ley de Gauss establece que la integral de superficie de las componentes de campo eléctrico perpendiculares al área multiplicada por el área es proporcional a la carga neta dentro de la superficie cerrada. Esta expresión podría parecer desalentadora en este momento, pero se simplifica considerablemente en muchos casos y nos permite efectuar cálculos muy rápido que de otra forma serían bastante complicados.

Ley de Gauss y ley de Coulomb

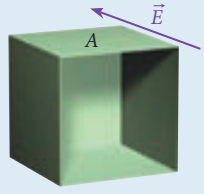
Podemos deducir la ley de Gauss a partir de la ley de Coulomb. Para ello, empezamos con una carga puntual positiva, q. El campo eléctrico debido a esta carga es radial y apunta hacia fuera, como vimos en la sección 22.3. Según la ley de Coulomb (sección 21.5), la magnitud del campo eléctrico proveniente de esta carga es

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r^2}.$$

Ahora encontramos el flujo eléctrico que pasa por una superficie cerrada que resulta de esta carga puntual. Para la superficie gaussiana escogemos una superficie esférica con radio r, con la carga en el centro de la esfera, como se muestra en la figura 22.29. El campo eléctrico debido a la carga puntual positiva corta perpendicularmente cada elemento diferencial de la superficie de la esfera gaussiana. En consecuencia, en cada punto de esta superficie gaussiana, el vector de campo eléctrico, $\vec{E}$, y el vector diferencial de área superficial, $d\vec{A}$, son paralelos. El vector de área superficial siempre apunta hacia fuera desde la superficie gaussiana esférica, pero el vector de campo eléctrico puede

22.3 Oportunidad de autoevaluación

En la figura se muestra un cubo con caras de área A al que le falta una cara. El objeto cúbico con cinco caras está en un campo eléctrico uniforme, $\vec{E}$, perpendicular a una cara. ¿Cuál es el flujo eléctrico neto que pasa por el objeto?



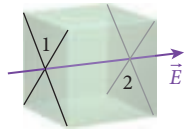


FIGURA 22.28 Caja imaginaria en un campo eléctrico uniforme.

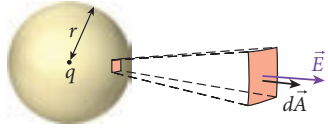


FIGURA 22.29 Superficie gaussiana esférica de radio r que rodea una carga q. Se muestra un acercamiento de un elemento diferencial de superficie de área dA.

apuntar hacia dentro o hacia fuera, dependiendo del signo de la carga. Para una carga positiva, el producto escalar del campo eléctrico y el elemento de superfice es $\vec{E}\cdot d\vec{A} = E\,dA\cos 0° = E\,dA$. El flujo eléctrico es, en este caso, según la ecuación 22.14,

$$\Phi = \oiint \vec{E}\cdot d\vec{A} = \oiint E\,dA.$$

Debido a que el campo eléctrico tiene la misma magnitud en todas partes en el espacio a una distancia r de la carga puntual q, es posible sacar E de la integral:

$$\Phi = \oiint E\,dA = E \oiint dA.$$

Ahora lo que queda por hacer es evaluar esta integral del diferencial de área sobre una superficie esférica, que está dada por $\oiint dA = 4\pi r^2$. En consecuencia, hemos encontrado la ley de Coulomb para el caso de una carga puntual:

$$\Phi = (E)\left(\oiint dA\right) = \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r^2}\right)\left(4\pi r^2\right) = \frac{q}{\epsilon_0},$$

que es lo mismo que la expresión para la ley de Gauss en la ecuación 22.15. Hemos demostrado que la ley de Gauss puede obtenerse a partir de la ley de Coulomb para una carga puntual positiva, aunque también es posible demostrar que la ley de Gauss se cumple para cualquier distribución de carga dentro de una superficie cerrada.

22.4 Oportunidad de autoevaluación

¿Qué cambia en la deducción precedente de la ley de Gauss si se usa una carga puntual negativa?

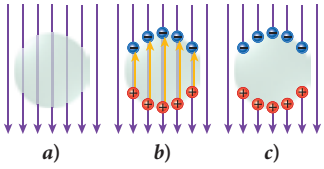


FIGURA 22.30 Blindaje de un campo eléctrico externo (flechas moradas verticales) provenientes del interior de un conductor.

Blindaje

Dos consecuencias importantes de la ley de Gauss son evidentes:

1. El campo electrostático dentro de cualquier conductor aislado siempre es cero.
2. Las cavidades dentro de los conductores están blindadas contra campos eléctricos.

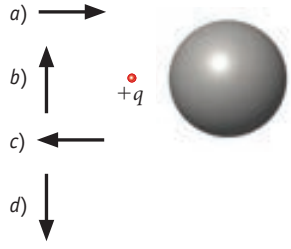
Para analizar estas consecuencias, supongamos que un campo eléctrico neto existe en algún momento en algún punto dentro de un conductor aislado; vea la figura 22.30*a*). Pero todo conductor tiene electrones libres en su interior (círculos azules en la figura 22.30*b*) que pueden moverse rápidamente en respuesta a cualquier campo eléctrico externo neto, dejando tras de sí iones cargados positivamente (círculos rojos en la figura 22.30*b*). Las cargas se moverán hacia la superficie externa del conductor, sin dejar ninguna acumulación de carga neta dentro del volumen del conductor. A su vez, estas cargas crean un campo eléctrico dentro del conductor (flechas amarillas en la figura 22.30*b*) y se mueven de un lado a otro hasta que el campo eléctrico que producen cancela el campo eléctrico externo. Así, el campo eléctrico neto se vuelve cero en todas partes dentro del conductor (figura 22.30*c*).

Si en el interior de un cuerpo conductor se hace una cavidad, la carga neta y, por lo tanto, el campo eléctrico dentro de la cavidad siempre son cero, sin importar cuán intensamente esté cargado el conductor o cuán fuerte actúa un campo eléctrico externo sobre éste. Para demostrar este hecho, suponemos que una superficie gaussiana cerrada rodea la cavidad, completamente dentro del conductor. Con base en el análisis precedente (vea la figura 22.30), sabemos que en cada punto de esta superficie el campo es cero. En consecuencia, el flujo neto sobre esta superficie también es cero. Por la ley de Gauss, entonces se concluye que esta superficie encierra una carga neta cero. Si en la superficie de la cavidad hubiera cantidades iguales de carga positiva y carga negativa (y, por lo tanto, ninguna carga neta), entonces la carga no sería estacionaria, ya que las cargas positivas y negativas se atraerían entre sí y tendrían libertad de movimiento alrededor de la superficie de la cavidad para cancelarse mutuamente. En consecuencia, cualquier cavidad dentro de un conductor está completamente blindada contra cualquier campo eléctrico externo. Algunas veces este efecto se denomina **blindaje electrostático**.

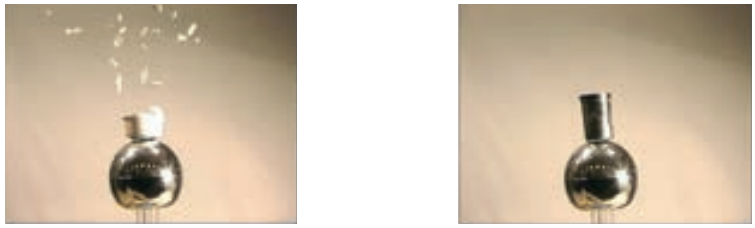
Una demostración convincente de este blindaje se proporciona al colocar un contenedor de plástico lleno de cacahuates de poliestireno en la parte superior de un generador Van de Graaff, que sirve como una fuente de campo eléctrico intenso (figura 22.31*a*). Al cargar el generador se obtiene una gran acumulación de carga neta en el domo, produciendo un intenso campo eléctrico en la vecindad. Debido a este campo, las cargas en los cacahuates de poliestireno se separan ligeramente y los cacahuates adquieren pequeños momentos dipolares. Si el campo fuera uniforme, sobre estos dipolos no habría carga. No obstante, el campo eléctrico no uniforme ejerce una fuerza, incluso cuando los cacahuates sean eléctricamente neutros. Así, los cacahuates vuelan fuera del contenedor. Si los mismos cacahuates de poliestireno se colocaran dentro de una lata

22.5 Ejercicio en clase

Inicialmente, a una esfera hueca conductora se proporciona una carga negativa distribuida uniformemente. Una carga positiva $+q$ se acerca a la esfera y se coloca en reposo como se muestra en la figura. ¿Cuál es la dirección del campo eléctrico dentro de la esfera hueca?



e) El campo es cero.



a) *b*)

FIGURA 22.31 Cacahuates de poliestireno se ponen dentro de un contenedor que está colocado en la parte superior de un generador Van de Graaff, que luego se carga. *a*) Los cacahuates vuelan fuera de un contenedor de plástico no conductor. *b*) Los cacahuates permanecen dentro de la lata metálica.

metálica abierta, no volarían cuando se cargara el generador (figura 22.31*b*). El campo eléctrico penetra fácilmente las paredes del contenedor de plástico y alcanza los cacahuates de poliestireno mientras que, según la ley de Gauss, el metal conductor puede proporcionar blindaje en el interior y evitar que los cacahuates de poliestireno adquieran momentos dipolares.

El conductor que rodea la cavidad no requiere ser una pieza metálica sólida; incluso una malla de alambre es suficiente para proporcionar el blindaje. Este hecho puede demostrarse de manera muy impresionante con una persona sentada dentro de una jaula y luego generar en la jaula una descarga eléctrica semejante a un rayo (figura 22.32). La persona dentro de la jaula permanece ilesa, incluso si toca el metal de la jaula *desde el interior*. (Es importante darse cuenta de que puede haber varias lesiones corporales si alguna parte del cuerpo se adhiere a la jaula; por ejemplo, si las manos se aferran a los barrotes de la jaula.) Ésta es la jaula de Faraday, en honor del científico inglés Michael Faraday (1791-1867), quien la inventó.

Una jaula de Faraday tiene consecuencias importantes, de las cuales quizá la más relevante sea el hecho de que un automóvil protege a los pasajeros contra los rayos durante una tormenta, a menos que el automóvil sea convertible. La lámina y el armazón metálicos que rodean el compartimiento del pasajero proporcionan el blindaje necesario. (Pero en la medida en la que la fibra de vidrio, el plástico y la fibra de carbono comienzan a sustituir las partes metálicas en los armazones de los automóviles, este blindaje ya no se garantiza.)

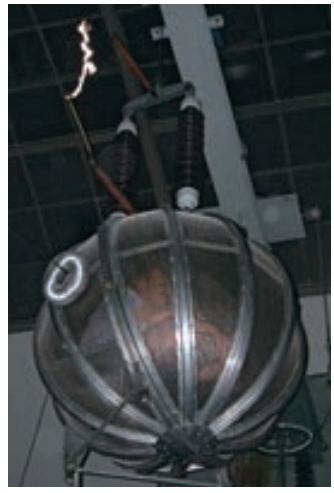


FIGURA 22.32 Una persona dentro de una jaula de Faraday permanece ilesa a pesar de un gran voltaje aplicado fuera de la jaula, que produce una gran chispa. Esta demostración se realiza varias veces al día en el Deutches Museum en Munich, Alemania.

22.6 Ejercicio en clase

Inicialmente, una esfera hueca no está cargada. Una carga positiva, $+q_1$, se coloca dentro de la esfera, como muestra la figura. Luego, una segunda carga positiva, $+q_2$, se coloca cerca de la esfera pero fuera de ésta. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones describe la fuerza eléctrica neta sobre cada carga?

a) Hay una fuerza eléctrica neta sobre $+q_2$, pero no sobre $+q_1$.

b) Hay una fuerza eléctrica neta sobre $+q_1$, pero no sobre $+q_2$.

c) Sobre ambas cargas actúa una fuerza eléctrica neta de la misma magnitud y en la misma dirección.

d) Sobre ambas cargas actúa una fuerza eléctrica neta de la misma magnitud pero en direcciones opuestas.

e) No hay fuerza eléctrica neta sobre ninguna de las cargas.

22.9 Simetrías especiales

En esta sección determinaremos el campo eléctrico debido a objetos cargados que tienen formas distintas. En la sección 22.5 se definieron las distribuciones de carga para geometrías diferentes; vea la ecuación 22.9. En la tabla 22.1 se enumeran los símbolos para estas distribuciones de carga y sus unidades.

Tabla 22.1 Símbolos para las distribuciones de carga

Símbolo	Nombre	Unidad
λ	Carga por unidad de longitud	C/m
σ	Carga por unidad de área	C/m^2
ρ	Carga por unidad de volumen	C/m^3

Simetría cilíndrica

Con el uso de la ley de Gauss podemos calcular la magnitud del campo eléctrico debido a un largo alambre conductor con carga uniforme por longitud unitaria $\lambda > 0$. Primero suponemos una superficie gaussiana en forma de cilindro recto con radio r y longitud L que rodea al alambre, de modo que éste está a lo largo del eje del cilindro (figura 22.33). Podemos aplicar la ley de Gauss a esta superficie gaussiana. Por simetría, sabemos que

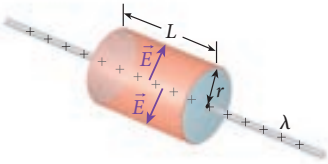


FIGURA 22.33 Alambre largo con carga por unidad de longitud λ rodeado por una superficie gaussiana en forma de cilindro recto con radio *r* y longitud *L*. Dentro del cilindro se muestran vectores de campo eléctrico representativos.

22.7 Ejercicio en clase

Un total de $1.45 \cdot 10^6$ electrones en exceso están en un alambre de longitud 1.13 m, que en un inicio es eléctricamente neutro. ¿Cuál es la magnitud del campo eléctrico en un punto a una distancia perpendicular de 0.401 m del centro del alambre? (*Sugerencia*: Suponga que 1.13 m es suficientemente grande frente a 0.410 m como para poder considerar al alambre como "infinitamente largo").

a) $9.21 \cdot 10^{-3}$ N/C

b) $2.92 \cdot 10^{-1}$ N/C

c) $6.77 \cdot 10^{1}$ N/C

d) $8.12 \cdot 10^{2}$ N/C

e) $3.31 \cdot 10^{3}$ N/C

22.5 Oportunidad de autoevaluación

¿Por cuánto cambia la respuesta del ejercicio en clase 22.7 si no se hace la hipótesis de que el alambre puede considerarse como infinitamente largo? (*Sugerencia*: Vea el ejemplo 22.3.)

el campo eléctrico producido por el alambre debe ser radial y perpendicular al alambre. Lo que significa simetría amerita más explicaciones debido a que tales razonamientos son muy comunes.

Primero, imaginamos que el alambre rota alrededor de un eje a lo largo de su longitud. Esta rotación incluye todas las cargas sobre el alambre y sus campos eléctricos. No obstante, el alambre sigue pareciendo igual después de haber rotado a lo largo de cualquier ángulo. En consecuencia, el campo eléctrico creado por la carga sobre el alambre también debe ser el mismo. Con base en este razonamiento, concluimos que el campo eléctrico no puede depender del ángulo de rotación alrededor del alambre. Esta conclusión es general: si un objeto posee *simetría rotacional*, su campo eléctrico no puede depender del ángulo de rotación.

Segundo, si el alambre es muy largo, sigue viéndose igual sin importar desde qué punto de su longitud se observe. Si el alambre no cambia, el campo eléctrico también permanece sin modificación. Esta observación significa que no hay dependencia de coordenada a lo largo del alambre. Esta simetría se denomina *simetría de traslación*. Puesto que en el espacio no hay ninguna dirección preferida a lo largo del alambre, no puede haber componente alguna del campo eléctrico paralela al alambre.

Volviendo a la superficie gaussiana, podemos ver que la contribución a la integral en la ley de Gauss (ecuación 22.16) desde los extremos del cilindro es cero porque el campo eléctrico es paralelo a estas superficies y, por lo tanto, perpendicular a los vectores normales provenientes de la superficie. El campo eléctrico es perpendicular a la pared del cilindro en todas partes, por lo que tenemos

$$\oiint \vec{E} \cdot d\vec{A} = EA = E(2\pi rL) = \frac{q}{\epsilon_0} = \frac{\lambda L}{\epsilon_0},$$

donde $2\pi rL$ es el área de la pared del cilindro. Al resolver esta ecuación, encontramos la magnitud del campo eléctrico debido a un largo alambre recto uniformemente cargado:

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} = \frac{2k\lambda}{r}, \tag{22.17}$$

donde *r* es la distancia perpendicular al alambre. Para $\lambda < 0$, la ecuación 22.17 sigue siendo válida, pero el campo eléctrico apunta hacia dentro, en lugar de hacia fuera. Observe que este resultado es el mismo que obtuvimos en el ejemplo 22.3 para el campo eléctrico debido a un alambre de longitud infinita, ¡aunque aquí se obtuvo de manera mucho más sencilla!

Usted ya empieza a percatarse del gran poder computacional de la ley de Gauss, que puede usarse para calcular el campo eléctrico resultante de todos los tipos de distribuciones de carga, tanto discretas como continuas. Sin embargo, usar la ley de Gauss resulta práctico en situaciones en las que es posible aprovechar la simetría; en caso contrario, se vuelve bastante difícil calcular el flujo.

Es instructivo comparar la dependencia del campo eléctrico con respecto a la distancia a una carga puntual y a un largo alambre recto. Para la carga puntual, el campo eléctrico disminuye con el cuadrado de la distancia, mucho más rápido que el campo eléctrico debido al alambre largo, que decrece en proporción inversa a la distancia.

Simetría plana

Suponga una lámina no conductora, plana, delgada, infinita, de carga positiva (figura 22.34), con carga uniforme por unidad de área de $\sigma > 0$. Encontremos el campo eléctrico a una distancia *r* de la superficie de este plano de carga infinito.

Para hacer lo anterior, escogemos una superficie gaussiana en forma de cilindro recto cerrado, con sección transversal *A* y longitud 2*r*, que corta el plano en forma perpendicular, como muestra la figura 22.34. Debido a que el plano es infinito y la carga es positiva, el campo eléctrico debe ser perpendicular a los extremos del cilindro y paralelo a la pared del cilindro. Al usar la ley de Gauss obtenemos

$$\oiint \vec{E} \cdot d\vec{A} = (EA + EA) = \frac{q}{\epsilon_0} = \frac{\sigma A}{\epsilon_0},$$

donde σA es la carga encerrada en el cilindro. Así, la magnitud del campo eléctrico debido a un plano infinito de carga es

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}. \tag{22.18}$$

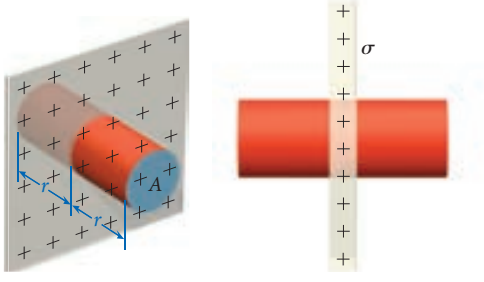


FIGURA 22.34 Lámina no conductora, plana, infinita, con densidad de carga σ. El corte perpendicular al plano es una superficie gaussiana en forma de un cilindro recto con un área de sección transversal *A* paralela al plano, y altura *r* por arriba y abajo del plano.

Si $\sigma < 0$, entonces la ecuación 22.18 sigue siendo válida, pero el campo eléctrico apunta hacia el plano, en lugar de alejarse de él.

Para una lámina conductora infinita con densidad de carga $\sigma > 0$ sobre cada superficie, podemos encontrar el campo eléctrico al escoger una superficie gaussiana en forma de cilindro recto. No obstante, para este caso, un extremo del cilindro está incrustado dentro del conductor (figura 22.35). El campo eléctrico dentro del conductor es cero; en consecuencia, no hay flujo a través del extremo del cilindro encerrado en el conductor. El campo eléctrico fuera del conductor debe ser perpendicular a la superficie y, en consecuencia, paralelo a la pared del cilindro y perpendicular al extremo del cilindro que está fuera del conductor. Así, el flujo a través de la superficie gaussiana es EA. La carga encerrada está dada por σA, de modo que la ley de Gauss se vuelve

$$\oiint \vec{E} \cdot d\vec{A} = EA = \frac{\sigma A}{\epsilon_0}.$$

Así, la magnitud del campo eléctrico justo fuera de la superficie de un conductor plano cargado es

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}. \tag{22.19}$$

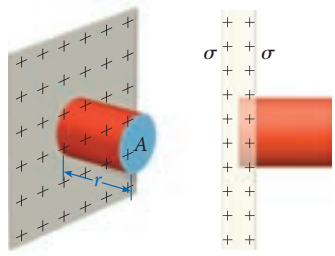


FIGURA 22.35 Conductor plano infinito, con densidad de carga σ sobre cada superficie y una superficie gaussiana en forma de cilindro recto incrustado en un lado.

Simetría esférica

Para encontrar el campo eléctrico debido a una distribución de carga simétricamente esférica, consideramos una corteza esférica delgada con carga $q > 0$ y radio r_s (figura 22.36).

Aquí usamos una superficie gaussiana esférica con $r_2 > r_s$ que es concéntrica con la esfera cargada. Al aplicar la ley de Gauss obtenemos

$$\oiint \vec{E} \cdot d\vec{A} = E\left(4\pi r_2^2\right) = \frac{q}{\epsilon_0}.$$

Podemos despejar la magnitud del campo eléctrico, E, que es

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r_2^2}.$$

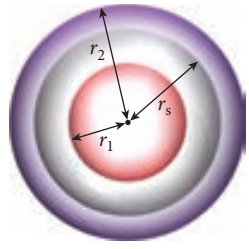


FIGURA 22.36 Corteza esférica de carga con radio r_s, con superficie gaussiana de radio $r_2 > r_s$ y una segunda superficie gaussiana con $r_1 < r_s$.

Si $q < 0$, el campo apunta radialmente hacia dentro, en lugar de radialmente hacia fuera, a partir de las superficies esféricas. Para otra superficie gaussiana esférica, con $r_1 < r_s$, que también es concéntrica con la corteza esférica cargada, obtenemos

$$\oiint \vec{E} \cdot d\vec{A} = E\left(4\pi r_1^2\right) = 0.$$

Así, el campo eléctrico fuera de una corteza esférica cargada se comporta como si la carga fuese una carga puntual ubicada en el centro de la esfera, mientras que el campo eléctrico es cero dentro de la corteza esférica cargada.

A continuación encontremos el campo eléctrico debido a una carga que está distribuida igualmente en todo un volumen esférico, con densidad de carga uniforme $\rho > 0$ (figura 22.37). El radio de la esfera es r. Usamos una superficie gaussiana en forma de esfera con radio $r_1 < r$. A partir de la simetría de la distribución de carga, sabemos que el campo eléctrico resultante de la carga es perpendicular a la superficie gaussiana. Así, podemos escribir

$$\oiint \vec{E} \cdot d\vec{A} = E\left(4\pi r_1^2\right) = \frac{q}{\epsilon_0} = \frac{\rho}{\epsilon_0}\left(\frac{4}{3}\pi r_1^3\right),$$

donde $4\pi r_1^2$ es el área de la superficie gaussiana esférica y $\frac{4}{3}\pi r_1^3$ es el volumen encerrado por la superficie gaussiana. A partir de la ecuación precedente, obtenemos el campo eléctrico a un radio r_1 dentro de una distribución de carga uniforme:

$$E = \frac{\rho r_1}{3\epsilon_0}. \tag{22.20}$$

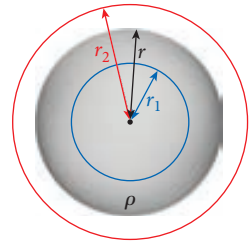


FIGURA 22.37 Distribución esférica de carga con carga uniforme por unidad de volumen ρ y radio r. También se muestran dos superficies gaussianas, una con radio $r_1 < r$ y otra con radio $r_2 > r$.

La carga total sobre la esfera puede llamarse q_t y es igual al volumen total de la distribución de carga esférica multiplicada por la densidad de carga:

$$q_t = \rho\frac{4}{3}\pi r^3.$$

Entonces, la carga encerrada por la superficie gaussiana es

$$q = \frac{\text{volumen interior } r_1}{\text{volumen de la distribución de carga}} q_t = \frac{\frac{4}{3}\pi r_1^3}{\frac{4}{3}\pi r^3} q_t = \frac{r_1^3}{r^3} q_t .$$

Con esta expresión para la carga encerrada, podemos volver a escribir la ley de Gauss para este caso como

$$\oiint \vec{E} \cdot d\vec{A} = E\left(4\pi r_1^2\right) = \frac{q_t}{\epsilon_0}\frac{r_1^3}{r^3},$$

con lo que obtenemos

$$E = \frac{q_t r_1}{4\pi\epsilon_0 r^3} = \frac{k q_t r_1}{r^3}. \tag{22.21}$$

22.6 Oportunidad de autoevaluación

Considere una esfera de radio R con una carga q distribuida uniformemente en todo el volumen de la esfera. ¿Cuál es la magnitud del campo eléctrico en un punto situado a $2R$ del centro de la esfera?

Si consideramos una superficie gaussiana con un radio más grande que el radio de la distribución de carga, $r_2 > r$, podemos aplicar la ley de Gauss como sigue:

$$\oiint \vec{E} \cdot d\vec{A} = E\left(4\pi r_2^2\right) = \frac{q_t}{\epsilon_0},$$

o bien,

$$E = \frac{q_t}{4\pi\epsilon_0 r_2^2} = \frac{k q_t}{r_2^2}. \tag{22.22}$$

Así, el campo eléctrico fuera de una distribución de carga esférica uniforme es el mismo que el campo debido a una carga puntual de la misma magnitud ubicada en el centro de la esfera.

PROBLEMA RESUELTO 22.3 Distribución de carga esférica no uniforme

Una distribución de carga esféricamente simétrica pero no uniforme está dada por

$$\rho(r) = \begin{cases} \rho_0\left(1 - \dfrac{r}{R}\right) & \text{para } r \le R \\ 0 & \text{para } r > R \end{cases}$$

donde $\rho_0 = 10.0\ \mu\text{C/m}^3$ y $R = 0.250$ m.

PROBLEMA

¿Cuál es el campo eléctrico producido por esta distribución de carga en $r = 0.125$ m y en $r = 0.500$ m?

SOLUCIÓN

PIENSE

Podemos usar la ley de Gauss para determinar el campo eléctrico como una función del radio si usamos una superficie gaussiana esférica. El radio $r = 0.125$ m está ubicado dentro de la distribución de carga. La carga encerrada dentro de la superficie esférica en $r = r_1$ está dada por una integral de la densidad de carga desde $r = 0$ hasta $r = r_1$. Fuera de la distribución de carga esférica, el campo eléctrico es el mismo que el de una carga puntual cuya magnitud es igual a la carga total de la distribución esférica.

ESBOCE

La densidad de carga, ρ, como una función del radio, r, se muestra en la figura 22.38.

INVESTIGUE

La ley de Gauss (ecuación 22.16) nos indica que $\oiint \vec{E} \cdot d\vec{A} = q/\epsilon_0$. Dentro de la distribución de carga esférica no uniforme a un radio $r_1 < R$, la ley de Gauss se vuelve

$$\epsilon_0 E\left(4\pi r_1^2\right) = \int_0^{V_1} \rho(r)\, dV = \int_0^{r_1} \rho_0\left(1 - \frac{r}{R}\right)\left(4\pi r^2\right) dr. \tag{i}$$

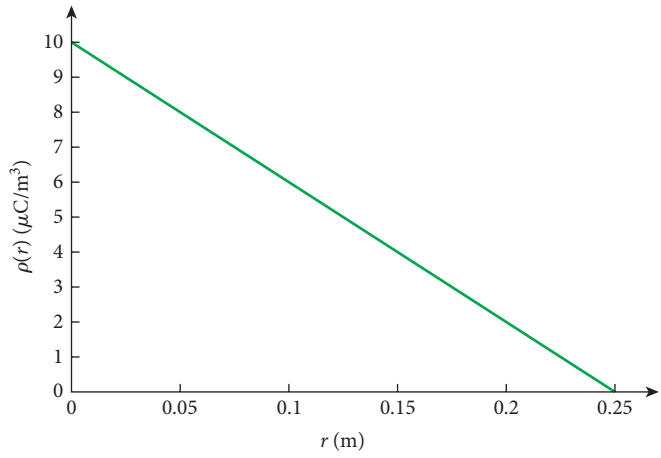


FIGURA 22.38 Densidad de carga esférica como una función del radio para una distribución de carga esférica no uniforme.

Al calcular la integral en el lado derecho de la ecuación (i), obtenemos

$$\int_0^{r_1} \rho_0\left(1-\frac{r}{R}\right)\left(4\pi r^2\right)dr = 4\pi\rho_0\int_0^{r_1}\left(r^2-\frac{r^3}{R}\right)dr = 4\pi\rho_0\left(\frac{r_1^3}{3}-\frac{r_1^4}{4R}\right). \tag{ii}$$

SIMPLIFIQUE

Entonces, el campo eléctrico debido a la carga dentro de $r_1 \le R$ está dado por

$$E = \frac{4\pi\rho_0\left(\dfrac{r_1^3}{3}-\dfrac{r_1^4}{4R}\right)}{\epsilon_0\left(4\pi r_1^2\right)} = \frac{\rho_0}{\epsilon_0}\left(\frac{r_1}{3}-\frac{r_1^2}{4R}\right). \tag{iii}$$

Para calcular el campo eléctrico debido a la carga dentro de $r_1 > R$, necesitamos la carga total contenida en la distribución de carga esférica. Podemos obtener la carga total usando la ecuación (ii) con $r_1 = R$:

$$q_t = 4\pi\rho_0\left(\frac{R^3}{3}-\frac{R^4}{4R}\right) = 4\pi\rho_0\left(\frac{R^3}{3}-\frac{R^3}{4}\right) = 4\pi\rho_0\frac{R^3}{12} = \frac{\pi\rho_0 R^3}{3}.$$

Entonces, el campo eléctrico fuera de la distribución de carga esférica ($r_1 > R$) es

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_t}{r_1^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\frac{1}{3}\pi\rho_0 R^3}{r_1^2} = \frac{\rho_0 R^3}{12\epsilon_0 r_1^2}. \tag{iv}$$

CALCULE

El campo eléctrico en $r_1 = 0.125$ m es

$$E = \frac{\rho_0}{\epsilon_0}\left(\frac{r_1}{3}-\frac{r_1^2}{4R}\right) = \frac{10.0\ \mu\text{C/m}^3}{8.85\cdot10^{-12}\,\text{C}^2/\text{N m}^2}\left(\frac{0.125\ \text{m}}{3}-\frac{(0.125\ \text{m})^2}{4(0.250\ \text{m})}\right) = 29\,425.6\ \text{N/C}.$$

El campo eléctrico en $r_1 = 0.500$ m es

$$E = \frac{\rho_0 R^3}{12\epsilon_0 r_1^2} = \frac{(10.0\ \mu\text{C/m}^3)(0.250\ \text{m})^3}{12\left(8.85\cdot10^{-12}\,\text{C}^2/\text{N m}^2\right)(0.500\ \text{m})^2} = 5\,885.12\ \text{N/C}.$$

REDONDEE

Mostramos nuestro resultado con tres cifras. El campo eléctrico en $r_1 = 0.125$ m es

$$E = 2.94\cdot10^4\ \text{N/C}.$$

El campo eléctrico en $r_1 = 0.500$ m es

$$E = 5.89\cdot10^3\ \text{N/C}.$$

(*continúa*)

(*continuación*)

VUELVA A REVISAR

El campo eléctrico en $r_1 = R$ puede calcularse con el uso de la ecuación (iii):

$$E = \frac{\rho_0}{\epsilon_0}\left(\frac{R}{3} - \frac{R^2}{4R}\right) = \frac{\rho_0 R}{12\epsilon_0} = \frac{\left(10.0\ \mu\text{C/m}^3\right)\left(0.250\ \text{m}\right)}{12\left(8.85\cdot 10^{-12}\ \text{C}^2/\text{N m}^2\right)} = 2.35\cdot 10^4\ \text{N/C}.$$

También podemos usar la ecuación (iv) para encontrar el campo eléctrico fuera de la distribución de carga esférica, pero muy cerca de la superficie, donde $r_1 \approx R$:

$$E = \frac{\rho_0 R^3}{12\epsilon_0 R^2} = \frac{\rho_0 R}{12\epsilon_0},$$

que es el mismo resultado que obtuvimos usando nuestro resultado para $r_1 \leq R$. El campo eléctrico calculado en la superficie de la distribución de carga es menor que en $r_1 = 0.125$ m, lo cual parece contradecir la intuición. Una idea de la dependencia de la magnitud de E con respecto a r_1 se proporciona en la figura 22.39, que se obtuvo usando las ecuaciones (iii) y (iv).

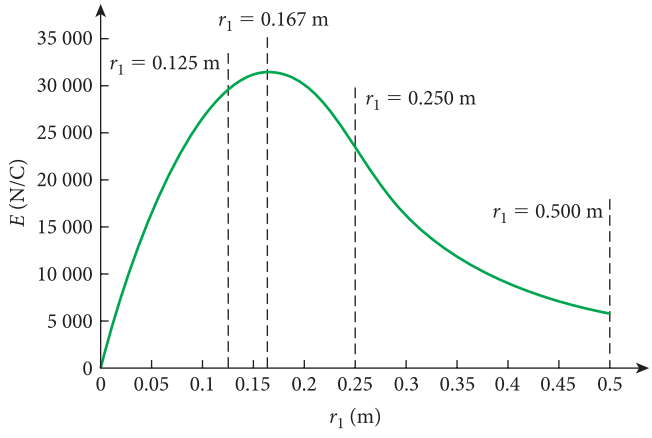


FIGURA 22.39 El campo eléctrico debido a una distribución de carga esférica no uniforme como una función de la distancia desde el centro de la esfera.

Puede ver que en el campo eléctrico ocurre un máximo y que nuestro resultado para $r_1 = 0.125$ m es menor que este valor máximo. Podemos calcular el radio al que ocurre el máximo al diferenciar la ecuación (iii) con respecto a r_1, igualando a cero el resultado y despejando r_1:

$$\frac{dE}{dr_1} = \frac{\rho_0}{\epsilon_0}\left(\frac{1}{3} - \frac{r_1}{2R}\right) = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{1}{3} = \frac{r_1}{2R} \Rightarrow r_1 = \frac{2}{3}R.$$

Así, esperamos un máximo en el campo eléctrico en $r_1 = \frac{2}{3}R = 0.167$ m. La gráfica en la figura 22.39 muestra, en efecto, un máximo en ese radio. También muestra que el valor de E en $r = 0.250$ es menor que en $r = 0.125$, como encontramos en nuestro cálculo. Por lo tanto, nuestras respuestas parecen razonables.

22.8 Ejercicio en clase

Imagine que una bola de acero sin carga, por ejemplo, una de las bolas de acero que se usan en una máquina de juegos de *pinball*, está en reposo sobre un aislante perfecto. Una pequeña cantidad de carga negativa (por ejemplo, unos cientos de electrones) se coloca en el polo norte de la bola. Si usted pudiera comprobar la distribución de la carga al cabo de unos cuantos segundos, ¿qué detectaría?

a) Toda la carga agregada desaparece y la bola es eléctricamente neutra de nuevo.

b) Toda la carga agregada se mueve hacia el centro de la bola.

c) Toda la carga agregada se distribuye uniformemente sobre la superficie de la bola.

d) La carga agregada sigue en o muy cerca del polo norte de la bola.

e) La carga agregada efectúa una oscilación armónica simple sobre una recta entre los polos sur y norte de la bola.

Puntas agudas y pararrayos

Ya hemos visto que el campo eléctrico es perpendicular a la superficie de un conductor. (Para repetir, si hubiera una componente de campo paralela al conductor, entonces las cargas dentro del conductor se moverían hasta llegar al equilibrio, lo cual significa que no hay ninguna fuerza

22.9 Ejercicio en clase

Suponga que una esfera hueca sin carga, por ejemplo, una pelota de ping-pong, está en reposo sobre un aislante perfecto. Una pequeña cantidad de carga negativa (por ejemplo, unos cientos de electrones) se coloca en el polo norte de la esfera. Si usted pudiera comprobar la distribución de la carga al cabo de unos cuantos segundos, ¿qué detectaría?

a) Toda la carga agregada desaparece y la esfera es eléctricamente neutra de nuevo.

b) Toda la carga agregada se mueve hacia el centro de la esfera.

c) Toda la carga agregada se distribuye uniformemente sobre la superficie de la esfera.

d) La carga agregada sigue en o muy cerca del polo norte de la esfera.

e) La carga agregada efectúa una oscilación armónica simple sobre una recta entre los polos sur y norte de la esfera.

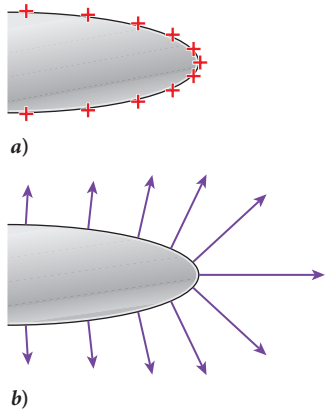


FIGURA 22.40 Un extremo agudo de un conductor (con curvatura grande): *a*) distribución de cargas; *b*) campo eléctrico en la superficie del conductor.

ni componente de campo en la dirección de movimiento; es decir, a lo largo de la superficie del conductor.) La figura 22.40*a*) muestra la distribución de cargas sobre la superficie del extremo de un conductor puntiagudo. Observe que las cargas están más próximas entre sí en la punta aguda, donde la curvatura es mayor. Cerca de la punta aguda sobre el extremo del conductor, parece que el campo eléctrico es más parecido al campo eléctrico debido a una carga puntual, con las líneas de campo distribuidas radialmente (figura 22.40*b*). Puesto que las líneas de campo están más próximas entre sí cerca de una punta aguda sobre un conductor, el campo es más intenso cerca de la punta aguda que sobre la parte plana del conductor.

Benjamín Franklin propuso barras metálicas puntiagudas como pararrayos (figura 22.41). Consideraba que las puntas agudas disiparían la carga eléctrica acumulada durante una tormenta, evitando la descarga del relámpago. Cuando Franklin instaló estos pararrayos, recibieron el impacto del rayo, en lugar de hacerlo los edificios en los que estaban colocados. No obstante, descubrimientos recientes indican que los pararrayos usados para proteger estructuras de los rayos deben tener puntas redondas. Cuando un pararrayos con punta aguda se carga durante condiciones de tormenta, crea un campo eléctrico intenso que ioniza localmente el aire, produciendo una condición que en realidad ocasiona el rayo. De manera contraria, los pararrayos con punta redonda son eficaces en la protección de estructuras contra los rayos y no incrementan los impactos de éstos. Cualquier pararrayos puede conectarse a tierra con cuidado para alejar la carga proveniente del impacto de un rayo de la estructura donde está montado el pararrayos.

FIGURA 22.41 Pararrayos con una punta aguda instalado en la parte superior de un edificio.

LO QUE HEMOS APRENDIDO | GUÍA DE ESTUDIO PARA EXAMEN

- La fuerza eléctrica, $\vec{F}(\vec{r})$, sobre una carga, q, debida a un campo eléctrico, $\vec{E}(\vec{r})$, está dada por $\vec{F}(\vec{r}) = q\vec{E}(\vec{r})$.
- El campo eléctrico en cualquier punto es igual a la suma de los campos eléctricos provenientes de todas las fuentes: $\vec{E}_t(\vec{r}) = \vec{E}_1(\vec{r}) + \vec{E}_2(\vec{r}) + \cdots + \vec{E}_n(\vec{r})$.
- La magnitud del campo eléctrico debida a una carga puntual q a una distancia r está dada por $E(r) = \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\dfrac{|q|}{r^2} = \dfrac{k|q|}{r^2}$.
  El campo eléctrico apunta radialmente alejándose de una carga puntual positiva y radialmente hacia una carga negativa.
- Un sistema de dos partículas puntuales iguales (en magnitud) con cargas opuestas es un dipolo eléctrico. La magnitud, p, del momento dipolar eléctrico está dada por $p = qd$, donde q es la magnitud de cualquiera de las cargas y d es la distancia que las separa. El momento dipolar eléctrico es un vector que apunta de la carga negativa a la carga positiva. Sobre el eje del dipolo, el dipolo produce un campo eléctrico de magnitud $E = \dfrac{p}{2\pi\epsilon_0|x|^3}$, donde $|x| \gg d$.
- La ley de Gauss establece que el flujo eléctrico sobre una superficie cerrada completa es igual a la carga encerrada dividida entre ϵ_0: $\oiint \vec{E}\cdot d\vec{A} = \dfrac{q}{\epsilon_0}$.
- El diferencial de campo eléctrico está dado por $dE = \dfrac{k\,dq}{r^2}$, y el diferencial de carga es

$$\left.\begin{aligned} dq &= \lambda\,dx \\ dq &= \sigma\,dA \\ dq &= \rho\,dV \end{aligned}\right\} \text{para una distribución de carga} \begin{cases} \text{a lo largo de una recta,} \\ \text{sobre una superficie,} \\ \text{en todo un volumen.} \end{cases}$$

- La magnitud del campo eléctrico a una distancia r de un largo alambre recto con densidad de carga lineal uniforme $\lambda > 0$ está dada por $E = \dfrac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} = \dfrac{2k\lambda}{r}$.

- La magnitud del campo eléctrico producido por un plano infinito no conductor que tiene una densidad de carga uniforme $\sigma > 0$ es $E = \frac{1}{2}\sigma/\epsilon_0$.
- La magnitud del campo eléctrico producido por un plano infinito conductor que tiene una densidad de carga uniforme $\sigma > 0$ en cada lado es $E = \sigma/\epsilon_0$.
- El campo eléctrico dentro de un conductor cerrado es cero.
- El campo eléctrico fuera de un conductor esférico cargado es el mismo que el campo eléctrico debido a una carga puntual de la misma magnitud ubicada en el centro de la esfera.

TÉRMINOS CLAVE

campo, p. 711
campo eléctrico, p. 711
principio de superposición, p. 712
líneas de campo eléctrico, p. 712
carga de prueba, p. 712
dipolo eléctrico, p. 716
momento dipolar eléctrico, p. 716
flujo eléctrico, p. 725
ley de Gauss, p. 727
superficie gaussiana, p. 727
blindaje electrostático, p. 728

NUEVOS SÍMBOLOS Y ECUACIONES

$\vec{E}$, campo eléctrico

$p = qd$, momento dipolar eléctrico

$\oiint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q}{\epsilon_0}$, ley de Gauss

ϕ, flujo eléctrico

λ, carga por longitud unitaria

σ, carga por área unitaria

ρ, carga por volumen unitario

RESPUESTAS A LAS OPORTUNIDADES DE AUTOEVALUACIÓN

22.1 La dirección del campo eléctrico es hacia abajo en los puntos *A*, *C* y *E*, y hacia arriba en los puntos *B* y *D*. (En el punto *E* hay un campo eléctrico, aunque ahí no se ha trazado ninguna línea; las líneas de campo sólo son simples representaciones del campo eléctrico, que también existe entre las líneas de campo.) El campo es máximo en magnitud en el punto *E*, lo cual puede inferirse a partir del hecho de que está ubicado donde las líneas de campo tienen la intensidad más alta.

22.2 Las dos fuerzas que actúan sobre las dos cargas en el campo eléctrico crean un momento de torsión sobre el dipolo eléctrico alrededor de su centro de masa, dado por

$$\tau = (\text{fuerza}_+)(\text{brazo de momento}_+)(\operatorname{sen}\theta) + (\text{fuerza}_-)(\text{brazo de momento}_-)(\operatorname{sen}\theta).$$

La longitud del brazo de momento en ambos casos es $\frac{1}{2}d$, y la magnitud de la fuerza es $F = qE$ para ambas cargas. Así, el momento de torsión sobre el dipolo eléctrico es

$$\tau = qE\left(\frac{d}{2}\operatorname{sen}\theta\right) + qE\left(\frac{d}{2}\operatorname{sen}\theta\right) = qEd\operatorname{sen}\theta.$$

22.3 El flujo eléctrico neto que pasa por el objeto es EA. Recuerde que el objeto no tiene ninguna superficie cerrada; en caso contrario, el resultado sería 0.

22.4 El signo del producto escalar cambia, ya que el campo eléctrico apunta radialmente hacia dentro: $\vec{E} \cdot d\vec{A} = E\,dA\cos 180° = -E\,dA$. Pero la magnitud del campo eléctrico debido a la carga negativa es $E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{-q}{r^2}$. Los dos signos menos se cancelan, proporcionando el mismo resultado para la ley de Coulomb y la ley de Gauss para una carga puntual, independiente del signo de la carga.

22.5 Para un alambre de longitud infinita, $E_y = \frac{2k\lambda}{y}$; para un alambre de longitud finita, $E_y = \frac{2k\lambda}{y}\frac{a}{\sqrt{y^2 + a^2}}$. Con los valores dados en el ejercicio en clase, $\frac{a}{\sqrt{y^2 + a^2}} = \frac{0.565}{\sqrt{0.401^2 + 0.565^2}} =$ $= 0.815$. Así, la aproximación "infinitamente largo" está mal por ≈18%.

22.6 La esfera cargada actúa como una carga puntual, de modo que el campo eléctrico es

$$E = k\frac{q}{(2R)^2} = k\frac{q}{4R^2}.$$

PRÁCTICA PARA RESOLVER PROBLEMAS

Lineamientos para resolución de problemas

1. Asegúrese de distinguir entre el punto donde se genera un campo eléctrico y el punto donde se determina el campo eléctrico.

2. Algunos de los mismos lineamientos para tratar cargas y fuerzas electrostáticas también son válidas para campos eléctricos: use simetría para simplificar sus cálculos; recuerde que el campo está compuesto de vectores y, por lo tanto, debe usar

operaciones vectoriales en lugar de suma, multiplicación, etc., simples; por consistencia con los valores dados de las constantes, convierta las unidades a metros y coulombs.

3. Recuerde usar la forma correcta de la densidad de carga para cálculos de campos: λ para densidad de carga lineal, σ para densidad de carga superficial y ρ para densidad de carga volumétrica.

4. La clave para usar la ley de Gauss consiste en escoger la forma idónea de la superficie gaussiana para la simetría de la situación del problema. Las superficies gaussianas cúbicas, cilíndricas y esféricas suelen ser de utilidad.

5. A menudo, puede descomponer una superficie gaussiana en elementos de superficie que sean perpendiculares o paralelos a las líneas de campo eléctrico. Si las líneas de campo son perpendiculares a la superficie, el flujo eléctrico es simplemente la intensidad de campo por el área, EA, o $-EA$ si el campo apunta hacia dentro, en lugar de hacerlo hacia fuera. Si las líneas de campo son paralelas a la superficie, el flujo a través de la superficie es cero. El flujo total es la suma del flujo a través de cada elemento de superficie de la superficie gaussiana. Recuerde que flujo cero a través de una superficie gaussiana no significa necesariamente que el campo eléctrico sea cero.

PROBLEMA RESUELTO 22.4 Electrón que se mueve sobre una placa cargada

PROBLEMA

Un electrón con energía cinética de 2 000.0 eV (1 eV = $1.602 \cdot 10^{-19}$ J) se dispara a través de una placa conductora cargada orientada horizontalmente con densidad de carga superficial $+4.00 \cdot 10^{-6}$ C/m^2. Al tomar la dirección positiva hacia arriba (alejándose de la placa), ¿cuál es la desviación vertical del electrón después de que ha recorrido una distancia horizontal de 4.00 cm?

SOLUCIÓN

PIENSE

La velocidad inicial del electrón es horizontal. Durante este movimiento, el electrón experimenta una fuerza de atracción constante desde la placa con carga positiva, lo que provoca una aceleración constante hacia abajo. Podemos calcular el tiempo necesario para que el electrón recorra 4.00 cm en la dirección horizontal y usar este dato para calcular la desviación vertical del electrón.

ESBOCE

La figura 22.42 muestra el electrón con velocidad inicial $\vec{v}_0$ en la dirección horizontal. La posición inicial del electrón se toma en $x_0 = 0$ y $y = y_0$.

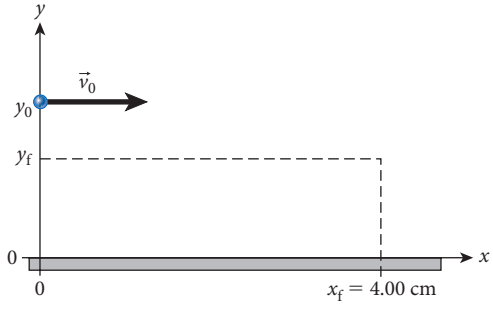


FIGURA 22.42 Un electrón que se mueve hacia la derecha con velocidad inicial $\vec{v}_0$ sobre una placa conductora cargada.

INVESTIGUE

El tiempo necesario para que el electrón recorra la distancia dada es

$$t = x_f / v_0, \tag{i}$$

donde x_f es la posición horizontal final y v_0 es la velocidad inicial del electrón. Mientras el electrón está en movimiento, experimenta una fuerza desde la placa conductora cargada. Esta fuerza está dirigida hacia abajo (hacia la placa) y tiene una magnitud dada por

$$F = qE = e\frac{\sigma}{\epsilon_0}, \tag{ii}$$

donde σ es la densidad de carga sobre la placa conductora y e es la carga de un electrón. Esta fuerza origina una aceleración constante en la dirección hacia abajo cuya magnitud está dada por $a = F/m$, donde m es la masa del electrón. Al usar la expresión para la fuerza de la ecuación (ii), podemos expresar la magnitud de la aceleración como

$$a = \frac{F}{m} = \frac{e\sigma}{m\epsilon_0}. \tag{iii}$$

Observe que esta aceleración es constante. Así, la posición vertical del electrón como una función del tiempo está dada por

$$y_f = y_0 - \tfrac{1}{2}at^2 \Rightarrow y_f - y_0 = -\tfrac{1}{2}at^2. \tag{iv}$$

Por último, podemos relacionar la energía cinética inicial del electrón con la velocidad inicial del electrón por medio de

$$K = \tfrac{1}{2}mv_0^2 \Rightarrow v_0^2 = \frac{2K}{m}. \tag{v}$$

(*continúa*)

(*continuación*)

SIMPLIFIQUE

Sustituimos las expresiones para el tiempo y la aceleración de las ecuaciones (i) y (iii) en la ecuación (iv) y obtenemos

$$y_f - y_0 = -\frac{1}{2}at^2 = -\frac{1}{2}\left(\frac{e\sigma}{m\epsilon_0}\right)\left(\frac{x_f}{v_0}\right)^2 = -\frac{e\sigma x_f^2}{2m\epsilon_0 v_0^2}. \quad \text{(vi)}$$

Luego, al sustituir la expresión para el cuadrado de la velocidad inicial de la ecuación (v) en la expresión en el lado derecho de la ecuación (vi), obtenemos

$$y_f - y_0 = -\frac{e\sigma x_f^2}{2m\epsilon_0\left(\frac{2K}{m}\right)} = -\frac{e\sigma x_f^2}{4\epsilon_0 K}. \quad \text{(vii)}$$

CALCULE

Primero convertimos la energía cinética del electrón de electrón volts a joules:

$$K = (2\,000.0\text{ eV})\frac{1.602\cdot10^{-19}\text{ J}}{1\text{ eV}} = 3.204\cdot10^{-16}\text{ J}.$$

Al poner los valores numéricos en la ecuación (vii), obtenemos

$$y_f - y_0 = -\frac{e\sigma x_f^2}{4\epsilon_0 K} = -\frac{(1.602\cdot10^{-19}\text{ C})(4.00\cdot10^{-6}\text{ C/m}^2)(0.0400\text{ m})^2}{4(8.85\cdot10^{-12}\text{ C}^2/(\text{N m}^2))(3.204\cdot10^{-16}\text{ J})} = -0.0903955\text{ m}.$$

REDONDEE

Mostramos nuestro resultado con tres cifras:

$$y_f - y_0 = -0.0904\text{ m} = -9.04\text{ cm}.$$

VUELVA A REVISAR

La desviación vertical que calculamos es alrededor del doble de la distancia que el electrón recorre en la dirección x, lo cual parece razonable, por lo menos en el sentido de ser del mismo orden de magnitud. También, la ecuación (vii) para la desviación tiene varias características que deben estar presentes. Primero, la trayectoria es parabólica, que es de esperar para una fuerza constante y una aceleración constante (vea el capítulo 3). Segundo, para densidad de carga superficial cero obtenemos desviación cero. Tercero, para una energía cinética muy alta hay una desviación despreciable, lo que también es de esperar intuitivamente.

PREGUNTAS DE OPCIÓN MÚLTIPLE

22.1 Para poder calcular el campo eléctrico creado por una distribución de carga conocida usando la ley de Gauss, ¿cuál de las siguientes afirmaciones *debe* ser verdadera?

a) La distribución de carga debe estar en un medio no conductor.

b) La distribución de carga debe estar en un medio conductor.

c) La distribución de carga debe tener simetría esférica o cilíndrica.

d) La distribución de carga debe ser uniforme.

e) La distribución de carga debe tener un alto grado de simetría que permita establecer hipótesis sobre la simetría de su campo eléctrico.

22.2 Un dipolo eléctrico consta de dos cargas iguales y opuestas colocadas a muy poca distancia entre sí. Cuando el dipolo se coloca en un campo eléctrico uniforme, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?

a) El dipolo no experimenta ninguna fuerza neta desde el campo eléctrico; puesto que las cargas son iguales y tienen signos opuestos, los efectos individuales se cancelan.

b) No hay ninguna fuerza neta ni ningún momento de torsión que actúen sobre el dipolo.

c) Sobre el dipolo actúa una fuerza neta, pero ningún momento de torsión.

d) No hay ninguna fuerza neta, aunque (en general) hay un momento de torsión neto que actúa sobre el dipolo.

22.3 Una carga puntual, $+Q$, se coloca sobre el eje x en $x = a$, y una segunda carga puntual, $-Q$, se coloca en el eje x en $x = -a$. Una superficie gaussiana con radio $r = 2a$ está centrada en el origen. El flujo a través de la superficie es

a) Cero.

b) Mayor que cero.

c) Menor que cero.

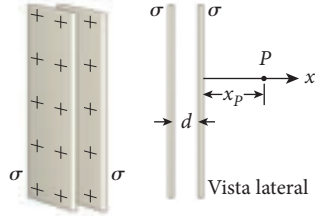
d) Ninguna de las anteriores.

22.4 Una carga de $+2q$ se coloca en el centro de una corteza conductora sin carga. ¿Cuáles serán las cargas sobre las superficies interior y exterior de la corteza, respectivamente?

a) $-2q, +2q$
b) $-q, +q$
c) $-2q, -2q$
d) $-2q, +4q$

22.5 Dos placas no conductoras infinitas son paralelas entre sí, con una distancia $d = 10.0$ cm entre ellas, como muestra la figura. Cada placa transporta una distribución de carga uniforme de $\sigma = 4.5\ \mu C/m^2$. ¿Cuál es el campo eléctrico, $\vec{E}$, en el punto P (con $x_P = 20.0$ cm)?

a) 0 N/C
b) $2.54\hat{x}$ N/C
c) $(-5.08 \cdot 10^5)\hat{x}$ N/C
d) $(5.08 \cdot 10^5)\hat{x}$ N/C
e) $(-1.02 \cdot 10^6)\hat{x}$ N/C
f) $(1.02 \cdot 10^6)\hat{x}$ N/C



22.6 ¿En cuál de las siguientes ubicaciones el campo eléctrico es más intenso?

a) Un punto a 1 m de una carga puntual de 1 C.

b) Un punto a 1 m (distancia perpendicular) del centro de un alambre de 1 m de largo con una carga de 1 C distribuida en él.

c) Un punto a 1 m (distancia perpendicular) del centro de una placa de carga de 1 m^2 con una carga de 1 C distribuida en ella.

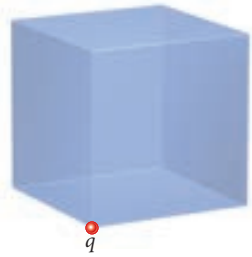
d) Un punto a 1 m de la superficie de una corteza esférica con una carga de 1 C con un radio de 1 m.

e) Un punto a 1 m de la superficie de una corteza esférica con una carga de 1 C con un radio de 0.5 m.

22.7 El flujo eléctrico a través de una superficie gaussiana esférica de radio R con centro en una carga Q es 1 200 N/(C m^2). ¿Cuál es el flujo eléctrico a través de una superficie gaussiana cúbica de lado R con centro en la misma carga Q?

a) Menor que 1 200 N/(C m^2)
b) Mayor que 1 200 N/(C m^2)
c) Igual a 1 200 N/(C m^2)
d) No es posible determinarlo a partir de la información proporcionada.

22.8 Una sola carga puntal positiva, q, está en un vértice de un cubo cuyas aristas miden L de longitud, como muestra la figura. El flujo eléctrico neto a través de tres caras adyacentes es cero. El flujo eléctrico neto a través de *cada una* de las otras tres caras es



a) $q/3\epsilon_0$.
b) $q/6\epsilon_0$.
c) $q/24\epsilon_0$.
d) $q/8\epsilon_0$.

22.9 Tres cargas puntuales de –9 mC están ubicadas en (0, 0), (3 m, 3 m) y (3 m, –3 m). ¿Cuál es la magnitud del campo eléctrico en (3 m, 0)?

a) $0.9 \cdot 10^7$ N/C
b) $1.2 \cdot 10^7$ N/C
c) $1.8 \cdot 10^7$ N/C
d) $2.4 \cdot 10^7$ N/C
e) $3.6 \cdot 10^7$ N/C
f) $5.4 \cdot 10^7$ N/C
g) $10.8 \cdot 10^7$ N/C

22.10 ¿Cuál o cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas?

a) *No* hay ningún cambio en la carga dentro de la superficie interna de una esfera conductora hueca si en la superficie externa se coloca más carga.

b) Hay algún cambio en la carga sobre la superficie interna de una esfera conductora hueca si en la superficie externa se coloca más carga.

c) *No* hay ningún cambio en la carga sobre la superficie interna de una esfera conductora hueca si en el centro de la esfera se coloca más carga.

d) Hay algún cambio en la carga sobre la superficie interna de una esfera conductora hueca si en el centro de la esfera se coloca más carga.

PREGUNTAS

22.11 Muchas personas se encontraban en el interior de un automóvil cuando éste fue impactado por un rayo. ¿Por qué pudieron sobrevivir a esta experiencia?

22.12 ¿Por qué es una mala idea pararse bajo un árbol durante una tormenta? ¿Qué debe hacerse en lugar de lo anterior a fin de evitar ser impactado por un rayo?

22.13 ¿Por qué las líneas de campo eléctrico no se cortan nunca?

22.14 ¿Cómo es posible que el flujo eléctrico a través de una superficie cerrada no dependa del sitio dentro de la superficie en la que está colocada la carga (es decir, que la carga puede moverse dentro de la superficie sin afectar en absoluto el flujo)? Según la ley de Gauss, si la carga se mueve justo desde el interior hacia el exterior de la superficie, el flujo cambia en forma discontinua a cero. ¿Esto ocurre realmente? Explique.

22.15 Una esfera conductora sólida de radio r_1 tiene una carga total de $+3Q$. Está colocada dentro de (y es concéntrica con) una corteza conductora con radio interior r_2 y radio exterior r_3. Encuentre el campo eléctrico en estas regiones: $r < r_1$, $r_1 < r < r_2$, $r_2 < r < r_3$ y $r > r_3$.

22.16 Una barra delgada tiene sus extremos en $x = \pm 100$ cm. A lo largo de la barra hay una carga Q distribuida uniformemente.

a) ¿Cuál es el campo eléctrico que está muy cerca del punto medio de la barra?

b) ¿Cuál es el campo eléctrico que está a unos cuantos centímetros (perpendicularmente) del punto medio de la barra?

c) ¿Cuál es el campo eléctrico que está muy lejos (perpendicularmente) del punto medio de la barra?

22.17 Un dipolo está completamente rodeado por una superficie esférica. Describa cómo el flujo eléctrico total a través de esta superficie varía con la intensidad del dipolo.

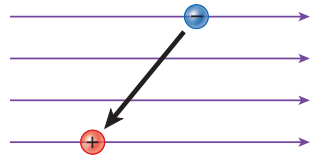
22.18 Repita el ejemplo 22.3, en el supuesto de que la distribución de carga es $-\lambda$ para $-a < x < 0$ y $+\lambda$ para $0 < x < a$.

22.19 Una carga negativa está colocada sobre un esferoide prolato sólido conductor (mostrado en la sección transversal en la figura). Trace la distribución de la carga sobre el conductor y las líneas de campo debidas a la carga.

22.20 El *fuego de San Telmo* es un brillo espeluznante que aparece en las puntas de los mástiles y penoles de barcos de vela cuando hay tormenta y en los bordes de las ventanillas de aeronaves en vuelo. El fuego de San Telmo es un fenómeno eléctrico. Explíquelo de manera concisa.

22.21 Una carga colocada sobre un conductor de cualquier forma crea una capa sobre la superficie exterior del conductor. La repulsión mutua de los elementos de carga individuales origina una presión hacia fuera sobre esta capa, denominada *esfuerzo electrostático*. Considere estos elementos de carga, infinitesimales como azulejos de un mosaico, y calcule la magnitud de este esfuerzo electrostático en términos de la densidad de carga, σ. Observe que σ no necesita ser uniforme sobre la superficie.

22.22 Un dipolo eléctrico se coloca en un campo eléctrico uniforme como se muestra en la figura. ¿Qué movimiento tendrá el dipolo en el campo eléctrico? ¿Cómo se moverá? ¿Cómo rotará?



PROBLEMAS

Una • y dos •• indican un nivel creciente de la dificultad.

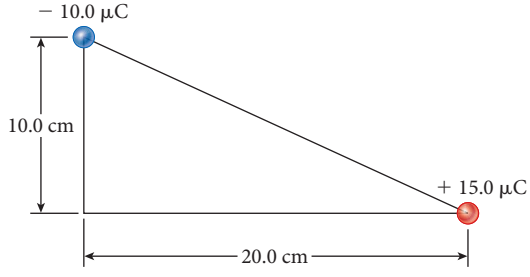
Sección 22.3

22.23 Una carga puntual, $q = 4.00 \cdot 10^{-9}$ C, está colocada sobre el eje x en el origen. ¿Cuál es el campo eléctrico producido en $x = 25.0$ cm?

22.24 Una carga puntual de +1.6 nC está colocada en un vértice de un cuadrado (que mide 1.0 m por lado), y una carga de −2.4 nC está colocada en el vértice diagonalmente opuesto del mismo cuadrado. ¿Cuál es la magnitud del campo eléctrico en cualquiera de los otros dos vértices?

22.25 Una carga puntual de +48.00 nC está colocada sobre el eje x en $x = 4.000$ m, y una carga puntual de −24.00 nC está colocada en el eje y en $y = -6.000$ m. ¿Cuál es la dirección del campo eléctrico en el origen?

•**22.26** Dos cargas puntuales se colocan en dos de los vértices de un triángulo, como muestra la figura. Encuentre la magnitud y dirección del campo eléctrico en el tercer vértice del triángulo.

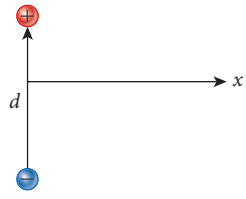


•**22.27** Una carga de +5.0 C está colocada en el origen. Una carga de −3.0 C está colocada en $x = 1.0$ m. ¿A qué distancia(s) a lo largo del eje x el campo eléctrico es igual a cero?

•**22.28** Tres cargas están colocadas a lo largo del eje y. Dos de las cargas, cada una $-q$, están ubicadas en $y = \pm d$, y la tercera carga, $+2q$, está colocada en $y = 0$. Obtenga una expresión para el campo eléctrico en el punto P sobre el eje x.

Sección 22.4

22.29 Para el dipolo eléctrico que se muestra en la figura, exprese la magnitud del campo eléctrico resultante como una función de la distancia perpendicular x al centro del eje del dipolo. Comente sobre la magnitud del campo eléctrico cuando $x \gg d$.

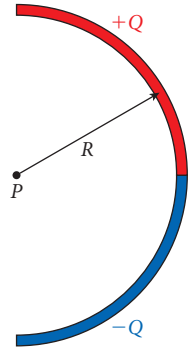


•**22.30** Considere un dipolo eléctrico sobre el eje x y centrado en el origen. A una distancia h a lo largo del eje x positivo, la magnitud del campo eléctrico debido al dipolo eléctrico está dada por $k(2qd)/h^3$. Encuentre una distancia perpendicular al eje x medida desde el origen en el que la magnitud del campo eléctrico sea la misma.

Sección 22.5

•**22.31** Una pequeña bola metálica con una masa de 4.0 g y una carga de 5.0 mC está colocada a una distancia de 0.70 m por arriba del nivel del suelo en un campo eléctrico de 12 N/C dirigido hacia el este. Luego, la bola se suelta a partir del reposo. ¿Cuál es la velocidad de la bola después de que ha recorrido una distancia vertical de 0.30 m?

•**22.32** Una carga por unidad de longitud $+\lambda$ está distribuida uniformemente a lo largo del eje y positivo desde $y = 0$ hasta $y = +a$. Una carga por unidad de longitud $-\lambda$ está distribuida uniformemente a lo largo del eje y negativo desde $y = 0$ hasta $y = -a$. Escriba una expresión para el campo eléctrico (magnitud y dirección) en un punto sobre el eje x a una distancia x del origen.



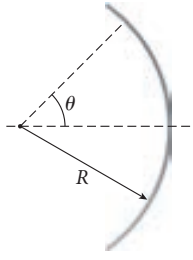
•**22.33** Una varilla delgada de vidrio se dobla en forma de semicírculo de radio R. Una carga $+Q$ está distribuida uniformemente a lo largo de la mitad superior, y una carga $-Q$ está distribuida uniforme-

mente a lo largo de la mitad inferior como muestra la figura. Encuentre la magnitud y dirección del campo eléctrico $\vec{E}$ (en forma de componentes) en el punto P, el centro del semicírculo.

•**22.34** Dos barras aislantes cargadas uniformemente se doblan en forma semicircular con radio $r = 10.0$ cm. Si se colocan de modo que formen un círculo, pero sin tocarse, y tengan cargas opuestas de +1.00 μC y –1.00 μC, encuentre la magnitud y dirección del campo eléctrico en el centro de la configuración circular compuesta de cargas.

•**22.35** Una barra de longitud L cargada uniformemente con carga total Q se encuentra a lo largo del eje y, desde $y = 0$ hasta $y = L$. Encuentre una expresión para el campo eléctrico en el punto $(d, 0)$ (es decir, el punto en $x = d$ sobre el eje x).

••**22.36** Una carga Q está distribuida uniformemente sobre un alambre doblado en forma de arco de radio R, como muestra la figura. ¿Cuál es el campo eléctrico en el centro del arco como una función del ángulo θ? Esboce una gráfica del campo eléctrico como una función de θ para $0 < \theta < 180°$.



••**22.37** Una rondana delgada y plana es un disco con diámetro exterior de 10.0 cm y un hueco en el centro con diámetro de 4.00 cm, y tiene una distribución de carga uniforme y una carga total de 7.00 nC. ¿Cuál es el campo eléctrico sobre el eje de la rondana a una distancia de 30.0 cm desde su centro?

Sección 22.6

22.38 Alguna investigación sugiere que los campos eléctricos en algunas nubes de tormenta pueden ser del orden de 10.0 kN/C. Calcule la magnitud de la fuerza eléctrica que actúa sobre una partícula con dos electrones en exceso en presencia de un campo de 10.0 kN/C.

22.39 Un dipolo eléctrico tiene dos cargas opuestas de $5.00 \cdot 10^{-15}$ C separadas por una distancia de 0.400 mm. Está orientado a 60.0° con respecto a un campo eléctrico uniforme de magnitud $2.00 \cdot 10^{3}$ N/C. Determine la magnitud del momento de torsión ejercido sobre el dipolo por el campo eléctrico.

22.40 Los momentos dipolares eléctricos de las moléculas a menudo se miden en debyes (D), donde $1\ \text{D} = 3.34 \cdot 10^{-30}$ C m. Por ejemplo, el momento dipolar de las moléculas del gas cloruro de hidrógeno es 1.05 D. Calcule el momento de torsión máximo que una molécula así puede experimentar en presencia de un campo eléctrico de magnitud 160.0 N/C.

22.41 Se observa un electrón que se desplaza a una velocidad de $27.5 \cdot 10^{6}$ m/s paralelo a un campo eléctrico de magnitud 11 400 N/C. ¿Qué distancia recorre el electrón antes de detenerse?

22.42 Dos cargas, $+e$ y $-e$, están separadas por una distancia de 0.68 nm en un campo eléctrico, E, cuya magnitud es 4.4 kN/C y está dirigido a un ángulo de 45° con respecto al eje del dipolo. Calcule el momento dipolar y, así, el momento de torsión sobre el dipolo en el campo eléctrico.

•**22.43** Un cuerpo de masa M, que conduce una carga Q, se suelta a partir del reposo desde una altura h (por arriba del nivel del suelo) cerca de la superficie terrestre, donde la aceleración gravitacional es g y hay un campo eléctrico con una componente constante E en la dirección vertical.

a) Encuentre una expresión para la velocidad, v, del cuerpo cuando llega al suelo, en términos de M, Q, h, g y E.

b) La expresión del inciso *a*) carece de sentido para algunos valores de M, g, Q y E. Explique qué ocurre en tales casos.

•**22.44** Una molécula de agua, que es eléctricamente neutra pero tiene un momento dipolar de magnitud $p = 6.20 \cdot 10^{-30}$ C m, is 1.00 cm está a 1.00 cm de una carga puntual $q = +1.00$ μC. El dipolo se alinea con el campo eléctrico debido a la carga. También experimenta una fuerza neta, ya que el campo no es uniforme.

a) Calcule la magnitud de la fuerza neta. (*Sugerencia*: No es necesario conocer el tamaño preciso de la molécula; sólo que es mucho menor que 1 cm.)

b) ¿La molécula es atraída o repelida por la carga puntual? Explique.

•**22.45** Un total de $3.05 \cdot 10^{6}$ electrones se colocan sobre un alambre inicialmente cargado de longitud 1.33 m.

a) ¿Cuál es la magnitud del campo eléctrico a una distancia perpendicular de 0.401 m lejos del punto medio del alambre?

b) ¿Cuál es la magnitud de la aceleración de un protón colocado en ese punto del espacio?

c) ¿En qué dirección apunta el campo eléctrico en este caso?

Secciones 22.7 y 22.8

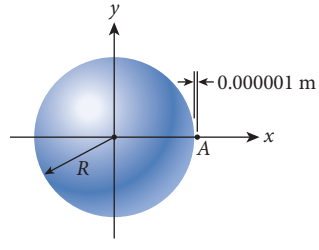
22.46 Cuatro cargas se colocan en un espacio tridimensional. Las cargas tienen magnitudes $+3q$, $-q$, $+2q$ y $-7q$. Si una superficie gaussiana contiene todas las cargas, ¿cuál es el flujo eléctrico a través de la superficie?

22.47 Cada una de las seis caras de una caja cúbica mide 20.0 cm por 20.0 cm, y las caras están numeradas de modo que las caras 1 y 6 son opuestas entre sí, así como lo son las caras 2 y 5 y las caras 3 y 4. El flujo a través de cada cara es:

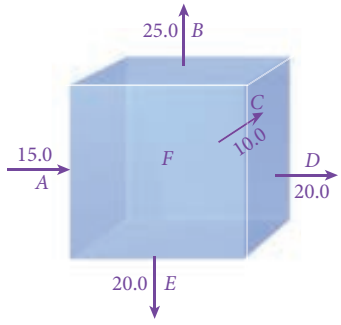
Cara	Flujo (N m^2/C)
1	–70.0
2	–300.0
3	–300.0
4	+300.0
5	–400.0
6	–500.0

Encuentre la carga neta dentro del cubo.

22.48 En la figura se muestra una esfera sólida conductora ($R = 0.15$ m, $q = 6.1 \cdot 10^{-6}$ C). Use la ley de Gauss y dos superficies gaussianas distintas para determinar el campo eléctrico (magnitud y dirección) en el punto A, que está a 0.000001 m fuera de la esfera conductora. (*Sugerencia*: Una superficie gaussiana es una esfera, y la otra es un pequeño cilindro recto.)



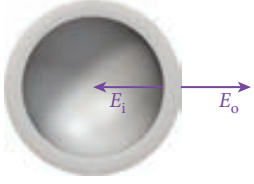
22.49 Campos eléctricos de magnitudes variables están dirigidos hacia dentro o hacia fuera en ángulos rectos sobre las caras de un cubo, como muestra la figura. ¿Cuáles son la magnitud y dirección del campo sobre la cara *F*?



22.50 Considere un conductor esférico hueco con una carga total +5*e*. Los radios interior y exterior son *a* y *b*, respectivamente. *a*) Calcule la carga sobre las superficies interna y externa si una carga de –3*e* se coloca en el centro de la esfera. *b*) ¿Cuál es la carga total neta de la esfera?

•**22.51** Un globo aluminizado de tereftalato de polietileno (Mylar) conduce una carga eléctrica *Q* sobre su superficie. Se mide el campo eléctrico a una distancia *R* del centro del globo. Éste se infla lentamente y su radio tiende a *R* pero nunca lo alcanza. ¿Qué ocurre con el campo eléctrico que usted mide cuando el globo aumenta de radio? Explique.

•**22.52** Una corteza esférica conductora hueca tiene un radio interno de 8.00 cm y un radio externo de 10.0 cm. El campo eléctrico en la superficie interna de la corteza, E_i, tiene una magnitud de 80.0 N/C y apunta hacia el centro de la esfera, y el campo eléctrico en la superficie externa, E_o, tiene una magnitud de 80.0 N/C y se aleja del centro de la esfera (vea la figura). Determine la magnitud de la carga sobre la superficie interna y la superficie externa de la corteza esférica.



•**22.53** Una carga puntual de –6.00 nC está colocada en el centro de una corteza esférica conductora. La corteza tiene un radio interno de 2.00 m, un radio externo de 4.00 m y una carga de +7.00 nC.

a) ¿Cuál es el campo eléctrico en $r = 1.00$ m?

b) ¿Cuál es el campo eléctrico en $r = 3.00$ m?

c) ¿Cuál es el campo eléctrico en $r = 5.00$ m?

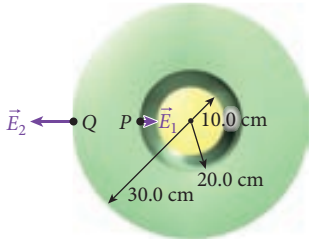
d) ¿Cuál es la distribución de carga superficial, σ, sobre la superficie externa de la corteza?

Sección 22.9

22.54 Una esfera sólida no conductora de radio *a* tiene una carga total *Q* y una distribución de carga uniforme. Use la ley de Gauss para determinar el campo eléctrico (como un vector) en las regiones $r < a$ y $r > a$ en términos de *Q*.

22.55 Hay un campo eléctrico de magnitud 150 N/C, dirigido hacia abajo, cerca de la superficie de la Tierra. ¿Cuál es la carga eléctrica neta sobre la Tierra? Puede considerar la Tierra como un conductor esférico de radio 6 371 km.

22.56 Una esfera metálica hueca tiene radios interior y exterior de 20.0 cm y 30.0 cm, respectivamente. Como se muestra en la figura, una esfera metálica sólida de radio 10.0 cm está colocada en el centro de la esfera hueca. Se encuentra que el campo eléctrico en un punto *P* a una distancia de 15.0 cm del centro es $E_1 = 1.00 \cdot 10^4$ N/C, dirigido radialmente hacia dentro. En el punto *Q*, a una distancia de 35.0 cm del centro, se encuentra que el campo eléctrico es $E_2 = 1.00 \cdot 10^4$ N/C, dirigido radialmente hacia fuera. Determine la carga total sobre *a*) la superficie de la esfera interna, *b*) la superficie interna de la esfera hueca y *c*) la superficie externa de la esfera hueca.



22.57 Dos placas paralelas infinitas no conductoras están separadas por una distancia de 10.0 cm y tienen distribuciones de carga de +1.00 μC/m^2 y –1.00 μC/m^2. ¿Cuál es la fuerza sobre un electrón en el espacio entre las placas? ¿Cuál es la fuerza sobre un electrón ubicado fuera de las dos placas pero cerca de la superficie de una de ellas?

22.58 Un alambre conductor infinito produce un campo eléctrico de magnitud $1.23 \cdot 10^3$ N/C a una distancia de 50.0 cm perpendicular al alambre. La dirección del campo eléctrico es hacia el alambre.

a) ¿Cuál es la distribución de carga?

b) ¿Cuántos electrones por unidad de longitud hay en el alambre?

•**22.59** Una esfera sólida de radio *R* tiene una distribución de carga no uniforme $\rho = Ar^2$, donde *A* es una constante. Determine la carga total, *Q*, dentro del volumen de la esfera.

•**22.60** Dos alambres paralelos infinitamente largos, cargados uniformemente, conducen cargas opuestas con una densidad de carga lineal $\lambda = 1.00$ μC/m y están separados por una distancia de 6.00 cm. ¿Cuál es la magnitud y dirección del campo eléctrico en un punto a la mitad de la distancia entre los alambres y a 40.0 cm por arriba del plano que contiene ambos alambres?

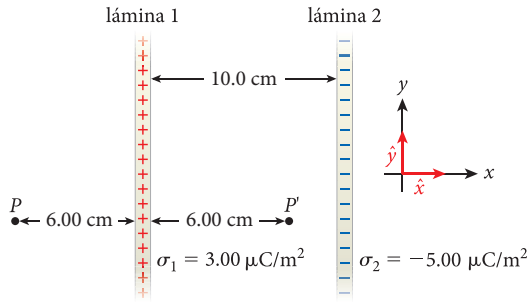
•**22.61** Una esfera centrada en el origen tiene una distribución de carga volumétrica de 120 nC/cm^3 y un radio de 12 cm. La esfera está centrada dentro de una corteza esférica conductora con radio interno de 30.0 cm y radio externo de 50.0 cm. La carga sobre la corteza esférica es –2.0 mC. ¿Cuál es la magnitud y dirección del campo eléctrico en cada una de las siguientes distancias del origen?

a) En $r = 10.0$ cm
b) En $r = 20.0$ cm
c) En $r = 40.0$ cm
d) En $r = 80.0$ cm

•**22.62** Un cilindro metálico hueco delgado de radio *R* tiene una distribución de carga superficial σ. Un largo alambre delgado con una densidad de carga lineal $\lambda/2$ está colocado a lo largo del centro del cilindro. Encuentre una expresión para los campos eléctricos y la dirección del campo en cada una de las siguientes ubicaciones:

a) $r \leq R$
b) $r \geq R$

•**22.63** Dos láminas de carga infinitas están separadas por una distancia de 10.0 cm, como muestra la figura. La lámina 1 tiene una distribución de carga superficial de $\sigma_1 = 3.00$ μC/m^2 y



la lámina 2 tiene una distribución de carga superficial de $\sigma_2 = -5.00\ \mu C/m^2$. Encuentre el campo eléctrico total (magnitud y dirección) en cada una de las siguientes ubicaciones:

a) En el punto *P*, a 6.00 cm a la izquierda de la lámina 1.

b) En el punto *P*', a 6.00 cm a la derecha de la lámina 1.

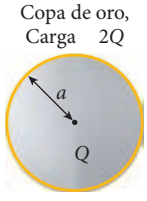
•22.64 Una esfera sólida conductora de radio 20.0 cm está ubicada con su centro en el origen de un sistema tridimensional de coordenadas. Sobre la esfera se coloca una carga de 0.271 nC.

a) ¿Cuál es la magnitud del campo eléctrico en el punto $(x, y, z) = (23.1\text{ cm}, 1.1\text{ cm}, 0\text{ cm})$?

b) ¿Cuál es el ángulo de este campo eléctrico con el eje *x* en este punto?

c) ¿Cuál es la magnitud del campo eléctrico en el punto $(x, y, z) = (4.1\text{ cm}, 1.1\text{ cm}, 0\text{ cm})$?

••22.65 Una esfera sólida no conductora de radio *a* tiene una carga total +*Q* distribuida uniformemente en todo su volumen. La superficie de la esfera está recubierta con una capa conductora muy delgada (grosor despreciable) de oro. Sobre esta capa conductora se coloca una carga total de –2*Q*. Use la ley de Gauss para obtener lo siguiente:



a) Encuentre el campo eléctrico $E(r)$ para $r < a$ (dentro de la esfera, arriba de y excluyendo la capa de oro).

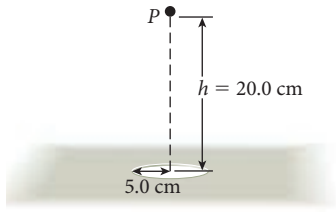
b) Encuentre el campo eléctrico $E(r)$ para $r > a$ (fuera de la esfera recubierta, más allá de ésta y la capa de oro).

c) Esboce la gráfica de $E(r)$ contra *r*. Comente sobre la continuidad o discontinuidad del campo eléctrico, y relacione este hecho con la distribución de carga superficial sobre la capa de oro.

••22.66 Una esfera sólida no conductora tiene una distribución de carga volumétrica dada por $\rho(r) = (\beta/r)\ \text{sen}(\pi r/2R)$. Encuentre la carga total contenida en el volumen esférico y el campo eléctrico en las regiones $r < R$ y $r > R$. Demuestre que las dos expresiones para el campo eléctrico son iguales en $r = R$.

••22.67 A una barra cilíndrica muy larga de material no conductor de radio 3.00 cm se le proporciona una carga positiva uniformemente distribuida de 6.00 nC por centímetro de su longitud. Luego se perfora una cavidad cilíndrica a través de toda la barra, de radio 1 cm, cuyo eje está ubicado a 1.50 cm del eje de la barra. Es decir, si, en alguna sección transversal de la barra, los ejes *x* y *y* se colocan de modo que el centro de la barra esté en $(x, y) = (0, 0)$, entonces el centro de la cavidad cilíndrica está en $(x, y) = (0, 1.50)$, La creación de la cavidad no perturba la carga sobre el resto de la barra que no se ha perforado; simplemente remueve la carga en la región de la cavidad. Encuentre el campo eléctrico en el punto $(x, y) = (2.00, 1.00)$.

••22.68 ¿Cuál es el campo eléctrico en un punto *P*, a una distancia $h = 20.0$ cm por arriba de una lámina infinita de carga, con una distribución de carga de 1.3 C/m^2 y un hueco de radio 5.0 cm con *P* directamente por arriba del centro del hueco, como muestra la figura? Esboce el campo eléctrico como una función de *h* en unidades de $\sigma/(2\epsilon_0)$.



Problemas adicionales

22.69 La arista de un cubo mide 1.00 m. Un campo eléctrico que actúa sobre el cubo desde el exterior tiene una magnitud constante de 150 N/C y su dirección también es constante pero no está especificada (no necesariamente a lo largo de las aristas del cubo). ¿Cuál es la carga total dentro del cubo?

22.70 Considere un largo alambre conductor orientado horizontalmente con $\lambda = 4.81 \cdot 10^{-12}$ C/m. Un protón (masa = $1.67 \cdot 10^{-27}$ kg) se coloca a 0.620 m por arriba del alambre y se suelta. ¿Cuál es la magnitud de la aceleración inicial del protón?

22.71 Un cilindro sólido infinitamente largo de radio $R = 9.00$ cm, con una carga uniforme por unidad de volumen de $\rho = 6.40 \cdot 10^{-8}\ C/m^3$, está centrado alrededor del eje *y*. Encuentre la magnitud del campo eléctrico a un radio $r = 4.00$ cm del centro de este cilindro.

22.72 El momento dipolar del monóxido de carbono (CO) es de aproximadamente $8.0 \cdot 10^{-30}$ C m. Si los dos átomos están separados por una distancia de $1.2 \cdot 10^{-10}$ m, encuentre la carga neta sobre cada átomo y la cantidad máxima de momento de torsión que la molécula experimentaría en un campo eléctrico de 500.0 N/C.

22.73 Una esfera de metal sólido de radio 8.00 cm, con una carga total de 10.0 μC, está rodeada por una corteza metálica cuyo radio mide 15.0 cm y conduce una carga de –500 μC. La esfera y la corteza están dentro de una corteza metálica más grande de radio interno 20.0 cm y radio externo 24.0 cm. La esfera y ambas cortezas son concéntricas.

a) ¿Cuál es la carga más grande sobre la pared interior de la corteza?

b) Si el campo eléctrico más grande fuera de la corteza es cero, ¿cuál es la carga sobre la pared exterior de la corteza?

22.74 Encuentre los campos eléctricos vectoriales necesarios para contrarrestar el peso de *a*) un electrón y *b*) un protón sobre la superficie de la Tierra.

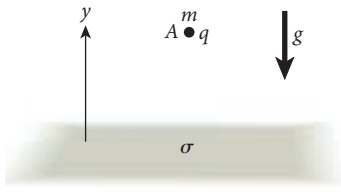
22.75 Cerca de la superficie terrestre hay un campo eléctrico de magnitud 150 N/C, dirigido verticalmente hacia abajo. Encuentre la aceleración (magnitud y dirección) de un electrón que se libera cerca de la superficie de la Tierra.

22.76 Dos superficies infinitas cargadas de manera uniforme son mutuamente perpendiculares. Una de las superficies tiene una distribución de carga de +30.0 pC/m^2, y la otra, una de –40.0 pC/m^2. ¿Cuál es la magnitud del campo eléctrico en cualquier punto que no esté sobre ninguna de las superficies?

22.77 Una barra de 30.0 cm de longitud uniformemente cargada está sellada en un contenedor. El flujo eléctrico total que sale del contenedor es $1.46 \cdot 10^6$ N m^2/C. Determine la distribución de carga lineal sobre la barra.

22.78 Suponga que usted tiene un gran globo esférico y que puede medir la componente E_n del campo eléctrico normal a su superficie. Si suma $E_n\, dA$ sobre toda el área superficial del globo y obtiene una magnitud de 10 N m^2/C, ¿cuál es la carga eléctrica encerrada por el globo?

•**22.79** Un objeto de masa m = 1.0 g y carga q se coloca en el punto A, que está a 0.05 m por arriba de una lámina infinitamente grande, no conductora y cargada de manera uniforme ($\sigma = -3.5 \cdot 10^{-5}$ C/m^2), como muestra la figura. La fuerza de gravedad actúa hacia abajo (g = 9.81 m/s^2). Determine el número, N, de electrones que es necesario agregar o retirar del objeto para que éste permanezca inmóvil por arriba del plano cargado.



•**22.80** Un largo alambre conductor con distribución de carga λ y radio r produce un campo eléctrico de 2.73 N/C justo fuera de la superficie del alambre. ¿Cuál es la magnitud del campo eléctrico exactamente fuera de la superficie de otro alambre con distribución de carga 0.81λ y radio $6.5r$?

•**22.81** A lo largo de un alambre delgado de longitud L = 6.00 cm, hay una distribución de carga uniforme de $\lambda = 8.00 \cdot 10^{-8}$ C/m. Luego, el alambre se curva en forma de semicírculo centrado en el origen, de modo que el radio del semicírculo es $R = L/\pi$. Encuentre la magnitud del campo eléctrico en el centro del semicírculo.

•**22.82** Un protón entra en el espacio entre un par de placas metálicas (un separador electrostático) que produce un campo eléctrico uniforme vertical entre las placas. Ignore el efecto de la gravedad sobre el protón.

a) Suponga que la longitud de las placas es 15.0 cm y que el protón se aproxima a las placas a una velocidad de 15.0 km/s. ¿Cómo deben diseñarse las placas para que proporcionen un campo eléctrico tal que el protón se desvíe verticalmente por $1.50 \cdot 10^{-3}$ rad?

b) ¿Cuál es la velocidad del protón después de salir del campo eléctrico?

c) Suponga que el protón es uno en un haz de protones que ha sido contaminado con partículas positivamente cargadas denominadas kaones, cuya masa es 494 MeV/c^2 ($8.81 \cdot 10^{-28}$ kg), en comparación con la masa del protón, que es 938 MeV/c^2 ($1.67 \cdot 10^{-27}$ kg). Los kaones tienen una carga $+1e$, justo como los protones. Si el separador electrostático se diseña para que los protones se desvíen $1.20 \cdot 10^{-3}$ rad, ¿qué desviación experimentan los kaones cuya cantidad de movimiento es la misma que la de los protones?

•**22.83** Considere una esfera uniforme no conductora con una densidad de carga $\rho = 3.57 \cdot 10^{-6}$ C/m^3 y radio R = 1.72 m. ¿Cuál es la magnitud del campo eléctrico a 0.530 m del centro de la esfera?

••**22.84** Una esfera uniforme tiene radio R y carga total $+Q$ distribuida uniformemente en todo su volumen. Está rodeada por una corteza esférica gruesa cuyo radio externo es $2R$ y que conduce una carga total $-Q$, también distribuida de manera uniforme. ¿Cuál es el campo eléctrico como una función de R?

••**22.85** Si una carga se mantiene por encima de una gran plancha plana conductora, como un piso, experimenta una fuerza hacia abajo dirigida al piso. De hecho, el campo eléctrico en la habitación por encima del suelo es exactamente el mismo que el producido por la carga original más una carga que es la "imagen especular" de aquélla, de la misma magnitud y signo opuesto, tan por abajo del piso como el producido por la carga original por arriba de éste. Por supuesto, por abajo del piso no hay ninguna carga; el efecto es producido por la distribución de carga superficial inducida sobre el piso por la carga original.

a) Describa o trace las líneas de campo eléctrico en la habitación por arriba del piso.

b) Si la carga original es 1.00 μC a una distancia de 50.0 cm por arriba del piso, calcule la fuerza hacia abajo sobre esta carga.

c) Encuentre el campo eléctrico en el (justo arriba del) piso, como una función de la distancia horizontal d al punto sobre el piso directamente bajo la carga original. Suponga que la carga original es una carga puntual, $+q$, a una distancia a por arriba del piso. Ignore todos los efectos del piso o del techo.

d) Encuentre la distribución de carga superficial $\sigma(\rho)$ inducida sobre el piso.

e) Calcule la carga superficial total inducida sobre el piso.

23 Potencial eléctrico

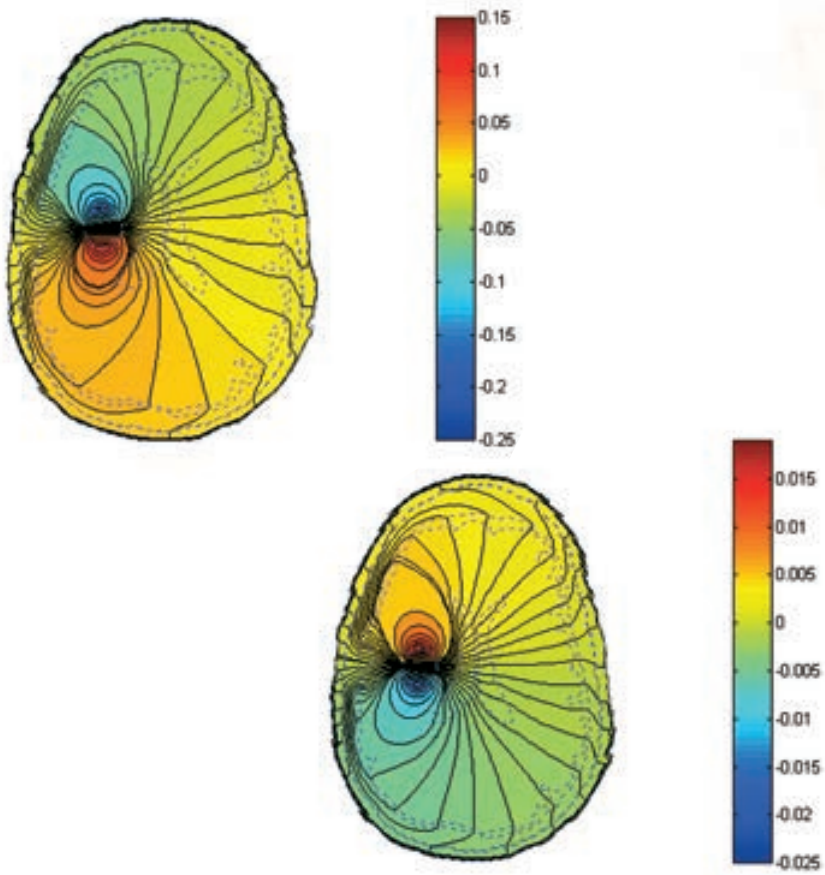


FIGURA 23.1 Mapas eléctricos del cerebro. Las líneas delgadas representan potencial eléctrico constante.

LO QUE APRENDEREMOS 746

23.1 Energía potencial eléctrica 746
Caso especial: campo eléctrico constante 747
23.2 Definición de potencial eléctrico 747
Ejemplo 23.1 Ganancia de energía de un protón 748
Baterías 749
Ejemplo 23.2 Automóviles accionados por batería 750
Generador Van de Graaff 751
Ejemplo 23.3 Acelerador tándem Van de Graaff 751
23.3 Superficies y líneas equipotenciales 752
Campo eléctrico constante 753
Carga puntual única 753
Dos cargas puntuales con cargas opuestas 754
Dos cargas puntuales idénticas 754
23.4 Potencial eléctrico de varias distribuciones de carga 755
Carga puntual 755
Problema resuelto 23.1 Cargas positivas fijas y móviles 756
Sistema de cargas puntuales 757
Ejemplo 23.4 Superposición de potenciales eléctricos 758
Distribución de carga continua 758
Ejemplo 23.5 Línea de carga finita 758
23.5 Determinación del campo eléctrico a partir del potencial eléctrico 759
Ejemplo 23.6 Obtención gráfica del campo eléctrico 760
23.6 Energía potencial eléctrica de un sistema de cargas puntuales 761
Ejemplo 23.7 Cuatro cargas puntuales 762

LO QUE HEMOS APRENDIDO/ GUÍA DE ESTUDIO PARA EXAMEN 763

Práctica para resolución de problemas 764
Problema resuelto 23.2 Haces de iones de oxígeno 764
Problema resuelto 23.3 Potencial mínimo 765
Preguntas de opción múltiple 766
Preguntas 767
Problemas 768

LO QUE APRENDEREMOS

- La energía potencial eléctrica es análoga a la energía potencial gravitatoria.
- El cambio en energía potencial eléctrica es proporcional al trabajo realizado por el campo eléctrico sobre una carga.
- El potencial eléctrico en un punto dado en el espacio es un escalar.
- El potencial eléctrico, V, de una carga puntual, q, es inversamente proporcional a la distancia a esa carga puntual.
- El potencial eléctrico puede deducirse a partir del campo eléctrico al integrar el campo eléctrico sobre un desplazamiento.
- El potencial eléctrico en un punto dado en el espacio debido a una distribución de cargas puntuales es igual a la suma algebraica de los potenciales eléctricos debidos a cargas individuales.
- El campo eléctrico puede deducirse a partir del potencial eléctrico al diferenciar el potencial eléctrico con respecto al desplazamiento.

El funcionamiento del sistema nervioso humano depende de la electricidad. Pequeñas corrientes se desplazan a lo largo de células nerviosas para señalar, por ejemplo, que los músculos se contraigan o que se secreten los fluidos digestivos o que las células blancas ataquen un invasor. El cerebro es un centro de actividad eléctrica; en la medida en la que las señales provienen de órganos detectores y del resto del cuerpo, éstas son procesadas y estimulan nueva actividad, como el pensamiento o las emociones. Las imágenes que se muestran en la figura 23.1 son mapas eléctricos del cerebro, producidos en la preparación de cirugía cerebral exploratoria. Las líneas delgadas indican potencial eléctrico constante, un tema que se aborda en este capítulo.

Así como la intensidad del campo eléctrico es fuerza por unidad de carga, el potencial eléctrico es energía potencial por unidad de carga. El potencial eléctrico es una propiedad del campo eléctrico, no del objeto cargado que produce el campo. Esta distinción es importante porque hace del potencial eléctrico algo muy útil para trabajar con campos y circuitos eléctricos. Sin embargo, es necesario tener cuidado en no confundir la energía potencial eléctrica con el potencial eléctrico.

23.1 Energía potencial eléctrica

Un campo eléctrico posee muchas semejanzas con un campo gravitacional, incluyendo su planteamiento matemático. En el capítulo 12 vimos que la magnitud de la fuerza gravitacional está dada por

$$F_g = G\frac{m_1 m_2}{r^2},$$

donde G es la constante de gravitación universal, m_1 y m_2 son dos masas y r es la distancia entre las dos masas. En el capítulo 21 vimos que la magnitud de la fuerza electrostática es

$$F_e = k\frac{|q_1 q_2|}{r^2}. \tag{23.1}$$

donde k es la constante de Coulomb, q_1 y q_2 son dos cargas eléctricas y r es la distancia entre las dos cargas. Las fuerzas gravitacional y electrostática dependen sólo del cuadrado inverso de la distancia entre los objetos, y es posible demostrar que todas estas fuerzas son conservativas. En consecuencia, la energía potencial eléctrica, U, puede definirse en forma análoga a la energía potencial gravitacional.

En el capítulo 6 vimos que para cualquier fuerza conservativa el cambio en energía potencial, debido a algún reordenamiento espacial de un sistema, es igual al negativo del trabajo realizado por la fuerza conservativa durante este reordenamiento espacial. Para un sistema de dos o más partículas, el trabajo realizado por una fuerza, W_e, cuando cambia la configuración del sistema de un estado inicial a un estado final, está dado en términos del cambio en **energía potencial eléctrica**, ΔU:

$$\Delta U = U_f - U_i = -W_e, \tag{23.2}$$

donde U_i es la energía potencial eléctrica inicial y U_f es la energía potencial eléctrica final. Observe que no importa *cómo* el sistema llega del estado inicial al estado final. El trabajo siempre es el mismo, independientemente de la ruta que se tome. En el capítulo 6 se observó que esta independencia con respecto a la ruta del trabajo realizado por una fuerza es una característica general de las fuerzas conservativas.

Así como en el caso para la energía potencial gravitacional (vea el capítulo 12), siempre es necesario especificar un punto de referencia para la energía potencial eléctrica. Las ecuaciones y los cálculos se simplifican si se supone que el punto cero de la energía potencial eléctrica es la configuración en la que una distancia infinitamente larga separa todas las cargas, que es exactamente la misma convención que se usa para la energía potencial gravitacional. Esta hipótesis permite que la ecuación 23.2 para el cambio en energía potencial eléctrica pueda volver a escribirse como $\Delta U = U_f - 0 = U$, o bien,

$$U = -W_{e,\infty}. \tag{23.3}$$

Aunque la convención de energía potencial cero en el infinito es muy útil y aceptada universalmente para una colección de cargas puntuales, en algunas situaciones físicas hay motivos para escoger una energía potencial específica en algún punto en el espacio, que no lleve a un valor de cero energía potencial a una separación infinita. Recuerde que todas las energías potenciales de las fuerzas conservativas están fijas sólo en una constante aditiva arbitraria. Así, es necesario prestar atención a la forma en la que se escoge esta constante en una situación particular. Una situación en la que la energía potencial en el infinito no se iguala a cero es la que implica un campo eléctrico constante.

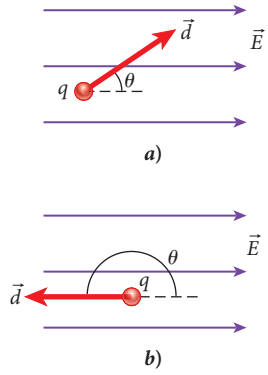


FIGURA 23.2 Trabajo realizado por un campo eléctrico, $\vec{E}$, sobre una carga móvil, q; *a*) caso general, *b*) caso en el que el desplazamiento es opuesto a la dirección del campo eléctrico.

Caso especial: campo eléctrico constante

Consideremos una carga puntual, q, que realiza un desplazamiento, $\vec{d}$, en un campo eléctrico constante, $\vec{E}$ (figura 23.2). El trabajo realizado por una fuerza constante $\vec{F}$ es $W = \vec{F} \cdot \vec{d}$. Para este caso, la fuerza constante es creada por un campo eléctrico constante, $\vec{F} = q\vec{E}$. De esta manera, el trabajo realizado por el campo sobre la carga está dado por

$$W = q\vec{E} \cdot \vec{d} = qEd\cos\theta, \tag{23.4}$$

donde θ es el ángulo entre la fuerza eléctrica y el desplazamiento. Cuando el desplazamiento es paralelo al campo eléctrico ($\theta = 0°$), el trabajo realizado por el campo sobre la carga es $W = qEd$. Cuando el desplazamiento es antiparalelo al campo eléctrico ($\theta = 180°$), el trabajo realizado por el campo es $W = -qEd$. Debido a que el cambio en energía potencial eléctrica está relacionado con el trabajo realizado sobre la carga $\Delta U = -W$, si $q > 0$, la carga pierde energía potencial cuando el desplazamiento es en la misma dirección que el campo eléctrico y gana energía potencial cuando el desplazamiento es en la dirección opuesta al campo eléctrico.

La figura 23.3*a*) muestra una masa, m, cerca de la superficie de la Tierra, donde puede considerarse que se encuentra en un campo gravitacional constante que apunta hacia fuera. Por el capítulo 6 sabemos que cuando la masa se mueve hacia la superficie de la Tierra una distancia h, el cambio en la energía potencial gravitacional de la masa es

$$\Delta U = -W = -\vec{F}_g \cdot \vec{d} = -mgh.$$

Resulta intuitivo que la masa tiene menos energía potencial si está cerca de la superficie de la Tierra. La figura 23.3*b*) muestra una carga positiva, q, en un campo eléctrico constante. Si la carga se mueve una distancia, d, en la misma dirección que el campo eléctrico, el cambio en la energía potencial eléctrica es

$$\Delta U = -W = -q\vec{E} \cdot \vec{d} = -qEd. \tag{23.5}$$

Por lo tanto, la energía potencial eléctrica de una carga en un campo eléctrico es análoga a la energía potencial gravitacional de una masa en el campo gravitacional de la Tierra cerca de la superficie terrestre. (Pero, por supuesto, la diferencia importante entre las dos interacciones es que las masas sólo se presentan en una variedad y ejercen atracción gravitacional entre sí, mientras que las cargas se atraen o repelen mutuamente. Así, ΔU puede cambiar de signo, dependiendo de los signos de las cargas.)

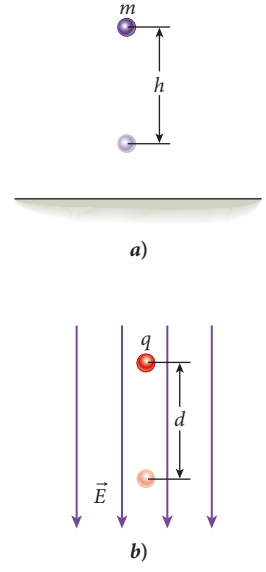


FIGURA 23.3 La analogía entre energía potencial gravitacional y energía potencial eléctrica. *a*) Una masa cae en un campo gravitacional. *b*) Una carga positiva se mueve en la misma dirección que un campo eléctrico.

23.2 Definición de potencial eléctrico

La energía potencial de una partícula cargada, q, en un campo eléctrico depende de la magnitud de la carga y de la magnitud del campo eléctrico. Una cantidad que es independiente de la carga sobre la partícula es el **potencial eléctrico**, V, definido en términos de la energía potencial eléctrica como

$$V = \frac{U}{q}. \tag{23.6}$$

Debido a que U es proporcional a q, V es independiente de q, lo que la hace una variable útil. El potencial eléctrico, V, caracteriza una propiedad eléctrica de un punto en el espacio, incluso cuando en ese punto no se coloque ninguna carga q. En contraste con el campo eléctrico, que es un vector, el potencial eléctrico es un escalar. Tiene un valor en todas partes del espacio, pero carece de dirección.

La diferencia en potencial eléctrico, ΔV, entre un punto inicial y un punto final, $V_f - V_i$, puede expresarse en términos de la energía potencial eléctrica en cada punto:

$$\Delta V = V_f - V_i = \frac{U_f}{q} - \frac{U_i}{q} = \frac{\Delta U}{q}. \tag{23.7}$$

Al combinar las ecuaciones 23.2 y 23.7 se obtiene una relación entre el cambio en potencial eléctrico y el trabajo realizado por un campo eléctrico sobre una carga:

$$\Delta V = -\frac{W_e}{q}. \tag{23.8}$$

Al tomar la energía potencial eléctrica como igual a cero en el infinito, como en la ecuación 23.3, se obtiene el potencial eléctrico en ese punto como

$$V = -\frac{W_{e,\infty}}{q}, \tag{23.9}$$

donde $W_{e,\infty}$ es el trabajo realizado por el campo eléctrico sobre la carga cuando se acerca al punto desde el infinito. Un potencial eléctrico puede tener un valor positivo, negativo o cero, pero no tiene dirección.

Las unidades SI para el potencial eléctrico son joules/coulomb (J/C). Esta combinación se denomina **voltio** (V) en honor del físico italiano Alessandro Volta (1745-1827) (observe el uso del número romano V para denotar esta unidad, mientras la V itálica se usa para la cantidad física de potencial eléctrico):

$$1\ \text{V} \equiv \frac{1\ \text{J}}{1\ \text{C}}.$$

Con esta definición del voltio, las unidades para la magnitud del campo eléctrico son

$$[E] = \frac{[F]}{[q]} = \frac{1\ \text{N}}{1\ \text{C}} = \left(\frac{1\ \text{N}}{1\ \text{C}}\right)\frac{1\ \text{V}}{\left(\frac{1\ \text{J}}{1\ \text{C}}\right)}\left(\frac{1\ \text{J}}{(1\ \text{N})(1\ \text{m})}\right) = \frac{1\ \text{V}}{1\ \text{m}}.$$

Para lo que resta de este libro, la magnitud de un campo eléctrico tendrá unidades de V/m, que es la convención estándar, en lugar de N/C. Observe que una diferencia de potencial eléctrico a menudo es denominado como "voltaje", particularmente en análisis de circuitos, ya que se mide en voltios.

EJEMPLO 23.1 Ganancia de energía de un protón

Un protón se coloca entre dos placas conductoras paralelas en el vacío (figura 23.4). La diferencia en potencial eléctrico entre las dos placas es 450 V. El protón se libera desde el reposo cerca de la placa positiva.

PROBLEMA

¿Cuál es la energía cinética del protón cuando llega a la placa negativa?

SOLUCIÓN

La diferencia en potencial eléctrico, ΔV, entre las dos placas es 450 V. Podemos relacionar esta diferencia de potencial a través de las dos placas con el cambio en energía potencial eléctrica, ΔU, del protón usando la ecuación 23.7:

$$\Delta V = \frac{\Delta U}{q}.$$

Debido a la conservación de la energía total, toda la energía potencial eléctrica perdida por el protón al cruzar entre las dos placas se convierte en energía cinética debida al movimiento del

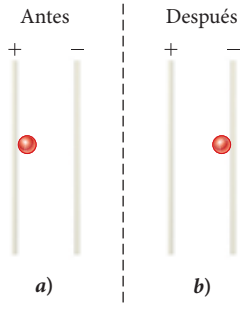


FIGURA 23.4 Un protón entre dos placas conductoras paralelas cargadas en un vacío. *a*) El protón se libera desde el reposo. *b*) El protón se ha movido desde la placa positiva hacia la placa negativa, ganando energía cinética.

protón. Aplicamos la ley de conservación de la energía, $\Delta K + \Delta U = 0$, donde ΔU es el cambio en la energía potencial eléctrica del protón:

$$\Delta K = -\Delta U = -q\Delta V.$$

Debido a que el protón partió del reposo, podemos expresar su energía cinética final como $K = -q\Delta V$. En consecuencia, la energía cinética del protón después de cruzar el espacio entre las dos placas es

$$K = -\left(1.602 \cdot 10^{-19}\ \text{C}\right)\left(-450\ \text{V}\right) = 7.21 \cdot 10^{-17}\ \text{J}.$$

23.1 Ejercicio en clase

Un electrón se posiciona y luego se libera sobre el eje *x*, donde el potencial eléctrico tiene el valor –20 V. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones describe el movimiento subsecuente del electrón?

a) El electrón se mueve hacia la izquierda (dirección *x* negativa) porque está cargado negativamente.

b) El electrón se mueve hacia la derecha (dirección *x* positiva) porque está cargado negativamente.

c) El electrón se mueve hacia la izquierda (dirección *x* negativa) porque el potencial eléctrico es negativo.

d) El electrón se mueve hacia la derecha (dirección *x* positiva) porque el potencial eléctrico es negativo.

e) No se proporciona información suficiente para pronosticar el movimiento del electrón.

Debido a que la aceleración de partículas cargadas a través de una diferencia de potencial se usa a menudo en la medición de cantidades físicas, una unidad común para la energía cinética de una partícula simplemente cargada, como un protón o un electrón, es el **electronvoltio** (eV): 1 eV representa la energía ganada por un protón ($q = 1.602 \cdot 10^{-19}$ C) acelerado a través de una diferencia de potencial de 1 V. La conversión entre electrovoltios y joules es

$$1\ \text{eV} = 1.602 \cdot 10^{-19}\ \text{J}.$$

Entonces, la energía cinética del protón en el ejemplo 23.1 es 450 eV, o 0.450 keV, que hubiésemos podido obtener a partir de la definición del electronvoltio sin realizar ningún cálculo.

Baterías

Un medio común para crear potencial eléctrico es una batería. En los capítulos 24 y 25 veremos cómo una batería usa reacciones químicas para proporcionar una fuente de diferencia de potencial (casi) constante entre sus dos terminales. La figura 23.5 muestra varios tipos de baterías.

En su forma más simple, una batería consta de dos medias celdas, llenas de un electrolito conductor (originalmente un líquido, aunque actualmente casi siempre es sólido); vea la figura 23.6. El electrolito está separado en dos mitades por una barrera, que evita que el volumen del electrolito pase de una celda a la otra, aunque sí permite el paso de iones cargados. Los iones con carga negativa (aniones) se mueven hacia el ánodo, y los iones con carga positiva (cationes) se mueven hacia el cátodo. Esto crea una diferencia de potencial entre las dos terminales de la batería. Así, una batería es un dispositivo que convierte directamente energía química en energía eléctrica.

La investigación sobre tecnología de baterías es de importancia actual, porque muchas aplicaciones para aparatos móviles requieren mucha energía, desde teléfonos celulares hasta laptops, pasando por automóviles eléctricos y aparatos militares. El peso de las baterías debe ser lo más ligero posible, deben poderse recargar con rapidez para cientos de ciclos, deben ser capaces de entregar una diferencia de potencial lo más constante posible y deben poder adquirirse a precios razonables. Así, esta investigación plantea muchos desafíos científicos y de ingeniería.

Un ejemplo de tecnología en baterías relativamente reciente es la celda de ion de litio, que se usa a menudo en aplicaciones como baterías para laptops. Una de estas baterías tiene mucha mayor densidad de energía (contenido de energía por volumen unitario) que las baterías convencionales. Una celda típica de ion de litio, como la que muestra la figura 23.7, tiene una diferencia de potencial de 3.7 V. Además, estas baterías presentan otras ventajas sobre las baterías convencionales. Pueden recargarse cientos de veces. No tienen efecto de "memoria" y, por lo tanto, no es

a)

b)

FIGURA 23.5 *a*) Algunas baterías representativas (en el sentido del movimiento de las manecillas del reloj, a partir de la parte superior izquierda): baterías AA recargables de níquel-hidruro metálico (NiMH)) en su cargador, baterías AAA desechables de 1.5 V, una batería de linterna de 12 V, una batería tamaño D, una batería de ion de litio para laptop y una batería de reloj; *b*) batería de 330 V para un SUV híbrido de gas eléctrico, que llena todo el piso del maletero.

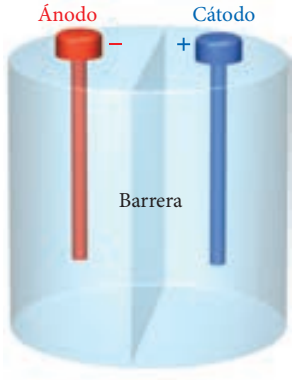


FIGURA 23.6 Esquema de una batería.

FIGURA 23.7 Imagen que muestra el paquete de la batería de ion de litio del automóvil deportivo eléctrico Tesla. También se muestra una de las celdas de ion de litio 6831 que integra el paquete de la batería.

necesario acondicionarlas para mantener su carga. Mantienen su carga en el armazón. Pero también presentan algunas desventajas. Por ejemplo, si una batería de ion de litio se descarga por completo, ya no es posible recargarla. La batería funciona mejor si no se carga a más de 80% de su capacidad y no se descarga a menos de 20% de su capacidad, y el calor las degrada. Si las baterías se descargan o se cargan muy rápido, sus partes constituyentes pueden incendiarse o explotar. Para tratar con estos problemas, la mayor parte de los paquetes comerciales con este tipo de batería contienen un pequeño circuito electrónico integrado que protege el paquete de baterías; el circuito no permite que se sobrecargue o se descargue demasiado; no permite que la carga escape de la batería tan rápido como para que ésta se sobrecaliente. Si la batería se calienta mucho, el circuito la desconecta.

Actualmente, las baterías de ion de litio se están usando en algunos automóviles eléctricos. El siguiente ejemplo compara la energía consumida por un automóvil accionado por batería y uno por gasolina.

EJEMPLO 23.2 Automóviles accionados por batería

FIGURA 23.8 El automóvil deportivo eléctrico Tesla.

Los automóviles accionados por batería no producen emisiones, por lo que constituyen una opción atractiva ante los automóviles a gasolina. Algunos de estos autos, como el deportivo Tesla que aparece en la figura 23.8, son accionados por baterías construidas de celdas de ion de litio.

El paquete de batería del automóvil deportivo Tesla (figura 23.7) tiene la capacidad de contener 53 kWh de energía. El paquete de batería suele cargarse a 80% de su capacidad y descargarse a 20% de su capacidad. Un automóvil a gasolina típico suele contener 50 L de gasolina, y el contenido energético de la gasolina es 34.8 MJ/L.

PROBLEMA

¿Cómo se compara la energía disponible en un paquete de batería de ion de litio de un automóvil eléctrico con la energía que contiene un automóvil a gasolina?

SOLUCIÓN

Debido a que en una batería de ion de litio no es posible extraer toda su energía sin dañarla, la energía total usable es

$$E_{\text{eléctrico}} = (80\% - 20\%)(53\ \text{kW h})\left(\frac{1\,000\ \text{W}}{1\ \text{kW}}\right)\left(\frac{3\,600\ \text{s}}{1\ \text{h}}\right) = 1.14 \cdot 10^8\ \text{J} = 114\ \text{MJ}.$$

Un automóvil a gasolina típico puede contener 50 L de gasolina, que tiene un contenido de energía de

$$E_{\text{gasolina}} = (50\ \text{L})(34.8\ \text{MJ/L}) = 1\,740\ \text{MJ}.$$

Por lo tanto, un automóvil a gasolina típico lleva 15 veces más energía que el automóvil deportivo eléctrico Tesla. No obstante, la eficiencia de un automóvil a gasolina es aproximadamente 20%, mientras que un automóvil eléctrico puede serlo alrededor de 90%. Por esto, la energía usable del automóvil eléctrico es

$$E_{\text{eléctrico, usable}} = 0.9(114\ \text{MJ}) = 103\ \text{MJ},$$

y la energía usable del automóvil a gasolina es

$$E_{\text{gasolina, usable}} = 0.2(1\,740\ \text{MJ}) = 348\ \text{MJ}.$$

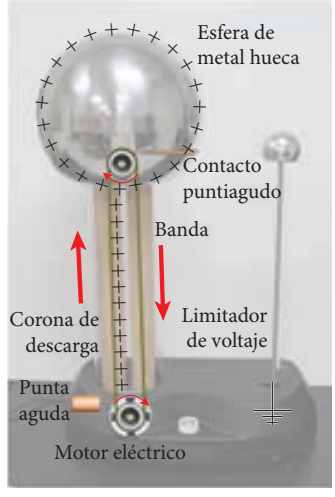
Puede observar que los automóviles eléctricos, aun con baterías de ion de litio, pueden llevar menos energía que los automóviles a gasolina.

Generador Van de Graaff

Una forma para crear grandes potenciales eléctricos es con el **generador Van de Graaff**, un dispositivo inventado por el físico estadounidense Robert J. Van de Graaff (1901-1967). Grandes generadores Van de Graaff pueden producir potenciales eléctricos de millones de voltios. Generadores Van de Graaff más modestos, como el que muestra la figura 23.9, pueden producir varios cientos de miles de voltios y a menudo se usan en el aula para clases de física.

Un generador Van de Graaff usa una corona de descarga para aplicar una carga positiva a una banda móvil no conductora. Colocar un alto voltaje positivo sobre un conductor con una punta aguda crea la descarga. El campo eléctrico sobre la punta aguda es mucho más intenso que sobre la superficie plana del conductor (vea el capítulo 22). El aire alrededor de la punta aguda está ionizado. Las moléculas del aire ionizado tienen una carga neta positiva, que hace que los iones sean repelidos de la punta aguda y depositados en la banda de caucho. La banda móvil, accionada por un motor eléctrico, lleva una carga hacia la esfera metálica hueca, donde la carga es tomada de la banda por un contacto puntiagudo conectado a la esfera de metal. La carga que se acumula en la esfera de metal se distribuye de manera uniforme alrededor del exterior de la esfera. En el generador Van de Graaff que muestra la figura 23.9 se usa un limitador de voltaje para evitar que el generador produzca chispas más grandes de lo deseado.

a)



b)

FIGURA 23.9 *a*) Generador Van de Graaff usado en aulas de física. *b*) El generador Van de Graaff puede producir potenciales eléctricos muy altos al llevar una carga desde una corona de descarga sobre una banda de caucho hasta una esfera de metal hueca, donde la carga se retira de la banda por medio de una pieza de metal puntiaguda conectada a la superficie interior de la esfera hueca.

EJEMPLO 23.3 Acelerador tándem Van de Graaff

Un acelerador Van de Graaff es un acelerador de partículas que usa los elevados potenciales eléctricos para estudiar procesos de física nuclear de importancia en astrofísica. La figura 23.10 muestra el diagrama de un acelerador tándem Van de Graaff con una diferencia de potencial terminal de 10.0 MV (10.0 millones de voltios). Esta diferencia de potencial terminal se crea en el centro del acelerador por una versión más grande y complicada del generador Van de Graaff para el aula. En la fuente de iones se generan iones negativos al conectar un electrón a los átomos por acelerar. Luego, los iones negativos aceleran hacia la terminal con carga positiva. Dentro de la terminal, los iones pasan por una delgada hoja de papel de aluminio que separa los electrones, produciendo iones con carga positiva que luego aceleran alejándose de la terminal y salen del acelerador tándem.

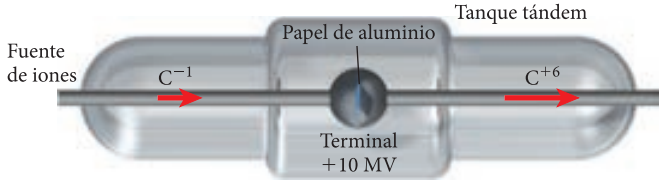


FIGURA 23.10 Acelerador tándem Van de Graaff.

PROBLEMA 1

¿Cuál es la máxima energía cinética que los núcleos de carbono pueden alcanzar en este acelerador tándem?

SOLUCIÓN 1

Un acelerador tándem Van de Graaff tiene dos etapas de aceleración. En la primera etapa, cada ion de carbono tiene una carga neta de $q_1 = -e$. Después del papel de aluminio, la carga máxima que puede tener cualquier ion de carbono es $q_2 = +6e$. La diferencia de potencial sobre la cual se aceleran los iones es $\Delta V = 10$ MV. La energía cinética adquirida por cada ion de carbono es

$$\Delta K = |\Delta U| = |q_1 \Delta V| + |q_2 \Delta V| = K,$$

o bien,

$$K = e\Delta V + 6e\Delta V = 7e\Delta V,$$

en el supuesto de que la velocidad inicial de los iones sea ≈ cero.

Al escribir los valores numéricos obtenemos

$$K = 7\left(1.602 \cdot 10^{-19}\ \text{C}\right)\left(10 \cdot 10^{6}\ \text{V}\right) = 1.12 \cdot 10^{-11}\ \text{J}.$$

(*continúa*)

23.2 Ejercicio en clase

Un tubo de rayos catódicos usa una diferencia de potencial de 5.0 kV para acelerar electrones y producir un haz de electrones que genera imágenes sobre una pantalla de fósforo. ¿Cuál es la velocidad de estos electrones como porcentaje de la velocidad de la luz?

a) 0.025% *d*) 4.5%

b) 0.22% *e*) 14%

c) 1.3%

(*continuación*)

Los físicos nucleares a menudo usan electronvoltios en lugar de joules para expresar la energía cinética de núcleos acelerados:

$$K = 7e\Delta V = 7e\left(10\cdot10^{6}\ \text{V}\right) = 7\cdot10^{7}\ \text{eV} = 70\ \text{MeV}.$$

PROBLEMA 2

¿Cuál es la velocidad máxima que los núcleos de carbono pueden alcanzar en este acelerador tándem?

SOLUCIÓN 2

Para determinar la velocidad, usamos la relación entre energía cinética y velocidad:

$$K = \tfrac{1}{2}mv^2,$$

donde $m = 1.99\cdot10^{-26}$ kg es la masa del núcleo de carbono. Al despejar la velocidad en esta ecuación obtenemos

$$v = \sqrt{\frac{2K}{m}} = \sqrt{\frac{2\left(1.12\cdot10^{-11}\ \text{J}\right)}{1.99\cdot10^{-26}\ \text{kg}}} = 3.36\cdot10^{7}\ \text{m/s},$$

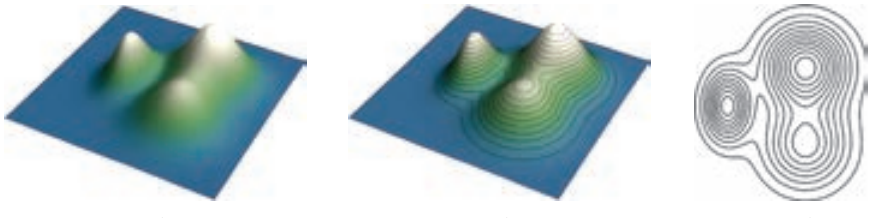
que es 11% de la velocidad de la luz.

23.3 Superficies y líneas equipotenciales

Imagine que tiene un mapa de una estación para esquiar con tres picos, como el que muestra la figura 23.11*a*). En la figura 23.11*b*), sobre los picos se han superpuesto líneas con la misma elevación. Usted puede recorrer cada una de estas líneas, sin necesidad de subir ni bajar, y se le garantiza que llegará al punto desde el que empezó su recorrido. Estas líneas son líneas de potencial gravitacional constante, ya que el potencial gravitacional es una función sólo de la elevación, y ésta permanece constante sobre cada una de estas líneas. En la figura 23.11*c*) se muestra una vista superior de las líneas de contorno con la misma elevación, que marcan las líneas equipotenciales para el potencial gravitacional. Si ha comprendido esta figura, debe resultarle fácil seguir el siguiente análisis sobre líneas y superficies de potencial eléctrico.

Cuando está presente un campo eléctrico, el potencial eléctrico tiene un valor en todos los puntos del espacio. Los puntos que tienen el mismo potencial eléctrico constituyen una **superficie equipotencial**. Las partículas cargadas pueden moverse a lo largo de una superficie equipotencial sin necesidad de que el campo eléctrico realice trabajo sobre ellas. Según los principios de la electrostática, la superficie de un conductor debe ser una superficie equipotencial; en caso contrario, los electrones libres sobre la superficie del conductor se acelerarían. El análisis en el capítulo 22 estableció que el campo eléctrico es cero en cualquier parte del interior del cuerpo de un conductor. Esto significa que todo el volumen del conductor debe estar al mismo potencial; es decir, todo el conductor es equipotencial.

Las superficies equipotenciales existen en tres dimensiones (figura 23.12); no obstante, las simetrías en el potencial eléctrico permiten representar superficies equipotenciales en dos dimensiones, como **líneas equipotenciales** en el plano en el que reside la carga. Antes de determinar la forma y ubicación de estas superficies equipotenciales, primero se considerarán algunas características cualitativas de algunos de los casos más simples (para los cuales se determinaron los campos eléctricos en el capítulo 22).



a) *b*) *c*)

FIGURA 23.11 *a*) Estación para esquiar con tres picos; *b*) los mismos picos con líneas de elevación superpuestas; *c*) las líneas de contorno de la misma elevación en una gráfica bidimensional.

Al trazar líneas equipotenciales, observamos que las cargas pueden moverse perpendicularmente con respecto a cualquier línea de campo eléctrico sin que el campo eléctrico realice trabajo sobre ellas, ya que, según la ecuación 23.4, el producto escalar del campo eléctrico y el desplazamiento es, entonces, cero. Si el trabajo realizado por el campo eléctrico es cero, entonces, por la ecuación 23.8, el potencial permanece igual. Así, *las líneas* y *los planos equipotenciales siempre son perpendiculares a la dirección del campo eléctrico*. (En la figura 23.11*b*), el mapa de elevación de la estación para esquiar, el equivalente de las líneas de campo eléctrico serían las líneas de pendiente más pronunciada, que son, por supuesto, siempre perpendiculares a las líneas de igual elevación.)

Antes de analizar las superficies equipotenciales particulares resultantes de configuraciones de campo eléctrico diferentes, veamos las dos observaciones generales más importantes de esta sección, que se cumplen para los casos siguientes:

1. La superficie de cualquier conductor forma una superficie equipotencial.
2. Las superficies equipotenciales siempre son perpendiculares a las líneas de campo eléctrico en cualquier punto en el espacio.

FIGURA 23.12 Superficie equipotencial en tres dimensiones, resultante de ocho cargas puntuales positivas colocadas en los vértices de un cubo.

Campo eléctrico constante

Un campo eléctrico constante tiene líneas de campo eléctrico rectas, equidistantes y paralelas. Entonces, un campo así produce superficies equipotenciales en forma de planos paralelos, debido a la condición de que las superficies equipotenciales o líneas equipotenciales deben ser perpendiculares a las líneas de campo. Estos planos están representados en dos dimensiones como líneas equipotenciales equidistantes (figura 23.13).

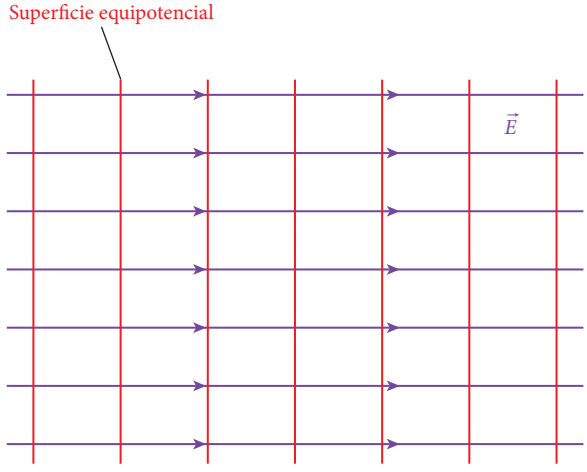


FIGURA 23.13 Superficies equipotenciales (líneas rojas) provenientes de un campo eléctrico constante. Las líneas moradas con las puntas de flecha representan el campo eléctrico.

Carga puntual única

La figura 23.14 muestra el campo eléctrico y las líneas equipotenciales correspondientes a una carga puntual única. Las líneas de campo se extienden radialmente a partir de una carga puntual positiva, como indica la figura 23.14*a*). En este caso, las líneas de campo se alejan de la carga positiva y terminan en el infinito. Para una carga negativa como la que aparece en la figura 23.14*b*), las líneas de campo se originan en el infinito y terminan en la carga negativa. Las líneas equipotenciales son esferas centradas sobre la carga puntual. (En las vistas bidimensionales mostradas en la figura, los círculos representan las líneas en las que el plano de la página corta esferas equipotenciales.) Los valores de la diferencia de potencial entre líneas equipotenciales vecinas son iguales, produciendo líneas equipotenciales más próximas entre sí cerca de la carga y más espaciadas lejos de la carga. Observe nuevamente que las líneas equipotenciales siempre son perpendiculares a las líneas de campo eléctrico. Las superficies equipotenciales no tienen flechas como las líneas de campo, porque el potencial es un escalar.

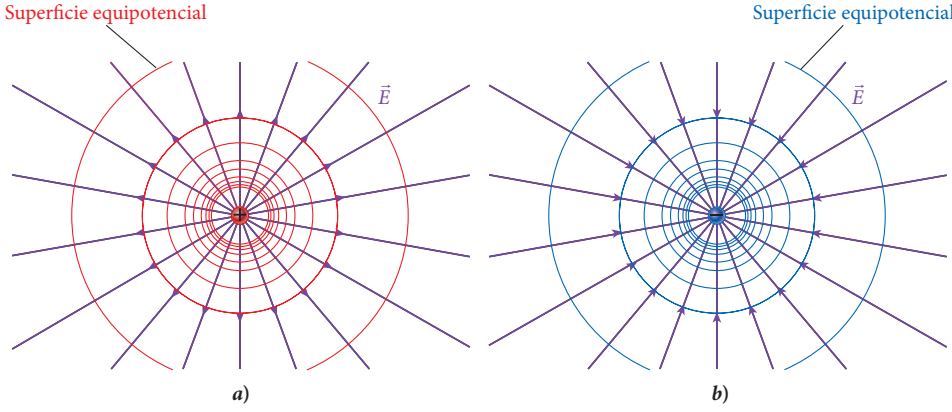


FIGURA 23.14 Superficies equipotenciales y líneas de campo eléctrico provenientes de *a*) una carga puntual positiva única y *b*) una carga puntual negativa única.

Dos cargas puntuales con cargas opuestas

La figura 23.15 muestra las líneas de campo eléctrico provenientes de dos cargas puntuales con cargas opuestas, junto a las superficies equipotenciales mostradas como líneas equipotenciales. Una fuerza electrostática haría que estas dos cargas puntuales se atrajesen entre sí, pero en este análisis se supone que las cargas están fijas en el espacio y no pueden moverse. Las líneas de campo eléctrico se originan en la carga positiva y terminan en la carga negativa. De nuevo, las líneas equipotenciales siempre son perpendiculares a las líneas de campo eléctrico. Las líneas rojas en esta figura representan superficies equipotenciales positivas, y las líneas azules, superficies equipotenciales negativas. Las cargas positivas producen potencial positivo, y las cargas negativas producen potencial negativo (con respecto al valor del potencial en el infinito). Cerca de cada carga, las líneas del campo eléctrico resultantes y las líneas equipotenciales resultantes semejan a las correspondientes a una carga puntual única. Lejos de la vecindad de cada carga, el campo eléctrico y el potencial eléctrico son las sumas de los campos y potenciales debidos a las dos cargas. Los campos eléctricos se suman como vectores, mientras que los potenciales eléctricos se suman como escalares. Así, el campo eléctrico está definido en todos los puntos del espacio en términos de una magnitud y una dirección, mientras que el potencial eléctrico está definido solamente por su valor en un punto dado en el espacio y no tiene ninguna dirección asociada.

23.1 Oportunidad de autoevaluación

Suponga que las cargas en la figura 23.15 están ubicadas en $(x, y) = (-10\text{ cm}, 0)$ y $(x, y) = (+10\text{ cm}, 0)$. ¿Cuál sería el potencial eléctrico a lo largo del eje y ($x = 0$)?

Dos cargas puntuales idénticas

La figura 23.16 muestra las líneas de campo eléctrico y las superficies equipotenciales resultantes de dos cargas puntuales positivas idénticas. Estas dos cargas experimentan una fuerza electrostá-

23.3 Ejercicio en clase

En la figura, las líneas representan líneas equipotenciales. Un objeto cargado se mueve del punto P al punto Q. ¿Cómo se compara la cantidad de trabajo realizado para estos tres casos?

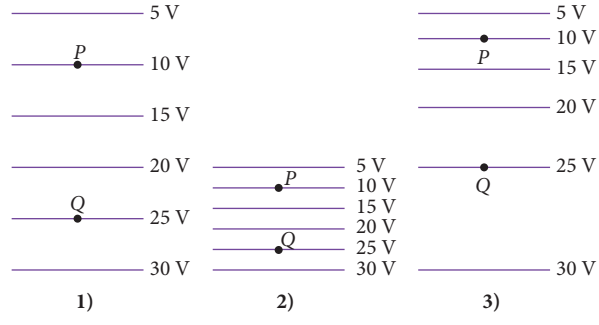
a) Los tres casos implican el mismo trabajo.

b) El mayor trabajo se realiza en el caso 1.

c) El mayor trabajo se realiza en el caso 2.

d) El mayor trabajo se realiza en el caso 3.

e) Los casos 1 y 3 implican la misma cantidad de trabajo, que es más que el trabajo implicado en el caso 2.



23.2 Oportunidad de autoevaluación

Suponga que las cargas en la figura 23.16 están ubicadas en $(x, y) = (-10\text{ cm}, 0)$ y $(x, y) = (+10\text{ cm}, 0)$ ¿$(x, y) = (0, 0)$ correspondería a un máximo, un mínimo o un punto de inflexión (silla) en el potencial eléctrico?

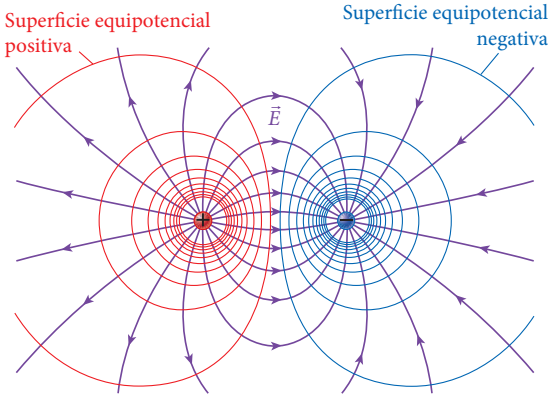


FIGURA 23.15 Superficies equipotenciales creadas por cargas puntuales de la misma magnitud pero signo opuesto. Las líneas rojas representan potencial positivo y las líneas azules, potencial negativo. Las líneas moradas con las puntas de flecha representan el campo eléctrico.

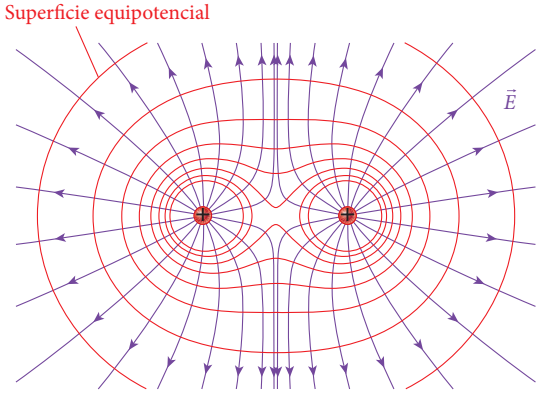


FIGURA 23.16 Superficies equipotenciales (líneas rojas) desde dos cargas puntuales positivas. Las líneas moradas con las puntas de flecha representan el campo eléctrico.

tica de repulsión. Debido a que ambas cargas son positivas, las superficies equipotenciales representan potenciales positivos. De nuevo, el campo eléctrico y el potencial eléctrico resultan de las sumas de los campos y potenciales, respectivamente, debido a las dos cargas.

23.4 Potencial eléctrico de varias distribuciones de carga

El potencial eléctrico se define como el trabajo necesario para colocar una carga en un punto, y el trabajo es una fuerza que actúa sobre una distancia. También, el campo eléctrico puede definirse como la fuerza que actúa sobre una unidad de carga en un punto. En consecuencia, parece que el potencial en un punto debe estar relacionado con la intensidad de campo en ese punto. De hecho, el potencial eléctrico y el campo eléctrico están relacionados directamente; podemos determinar cualquiera de ellos dada una expresión para el otro.

Para determinar el potencial eléctrico a partir del campo eléctrico, empezamos con la definición del trabajo realizado sobre una partícula con carga q por una fuerza $\vec{F}$, sobre un desplazamiento $d\vec{s}$:

$$dW = \vec{F} \bullet d\vec{s}$$

En este caso, la fuerza está dada por $\vec{F} = q\vec{E}$, de modo que

$$dW = q\vec{E} \bullet d\vec{s}. \tag{23.10}$$

Al integrar la ecuación 23.10 cuando la partícula se mueve en el campo eléctrico desde algún punto inicial hasta algún punto final, se obtiene

$$W = W_e = \int_i^f q\vec{E} \bullet d\vec{s} = q\int_i^f \vec{E} \bullet d\vec{s}.$$

Al usar la ecuación 23.8 para relacionar el trabajo realizado con el cambio en energía potencial, obtenemos

$$\Delta V = V_f - V_i = -\frac{W_e}{q} = -\int_i^f \vec{E} \bullet d\vec{s}.$$

Como ya se mencionó, la convención usual es igualar a cero el potencial eléctrico en el infinito. Así, podemos expresar el potencial en algún punto $\vec{r}$ en el espacio como

$$V(\vec{r}) - V(\infty) \equiv V(\vec{r}) = -\int_\infty^{\vec{r}} \vec{E} \bullet d\vec{s}. \tag{23.11}$$

Carga puntual

A continuación usaremos la ecuación 23.11 para determinar el potencial eléctrico debido a una carga puntual, q. El campo eléctrico debido a una carga puntual, q (por ahora se considerará que la carga es positiva), a una distancia r de la carga está dado por

$$E = \frac{kq}{r^2}.$$

La dirección del campo eléctrico es radial a partir de la carga puntual. Suponga que toda la integración se lleva a cabo a lo largo de una línea radial desde el infinito hasta un punto que está a una distancia R de la carga puntual, de modo que $\vec{E} \bullet d\vec{s} = E\,dr$. Luego podemos usar la ecuación 23.11 para obtener

$$V(R) = -\int_\infty^R \vec{E} \bullet d\vec{s} = -\int_\infty^R \frac{kq}{r^2} dr = \left[\frac{kq}{r}\right]_\infty^R = \frac{kq}{R}.$$

Por lo tanto, el potencial eléctrico debido a una carga puntual a una distancia r de la carga está dado por

$$V = \frac{kq}{r}. \tag{23.12}$$

La ecuación 23.12 también se cumple cuando $q < 0$. Una carga positiva produce un potencial positivo y una carga negativa produce un potencial negativo, como muestra la figura 23.17.

En la figura 23.17, el potencial eléctrico se calcula para todos los puntos en el plano xy. El eje vertical representa el valor del potencial en cada punto del plano, $V(x, y)$, que se encontró al usar $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. El potencial no se calculó cerca de $r = 0$ porque ahí se vuelve infinito. Usted puede ver a partir de la figura 23.17 cómo se originan las líneas equipotenciales mostradas en la figura 23.14.

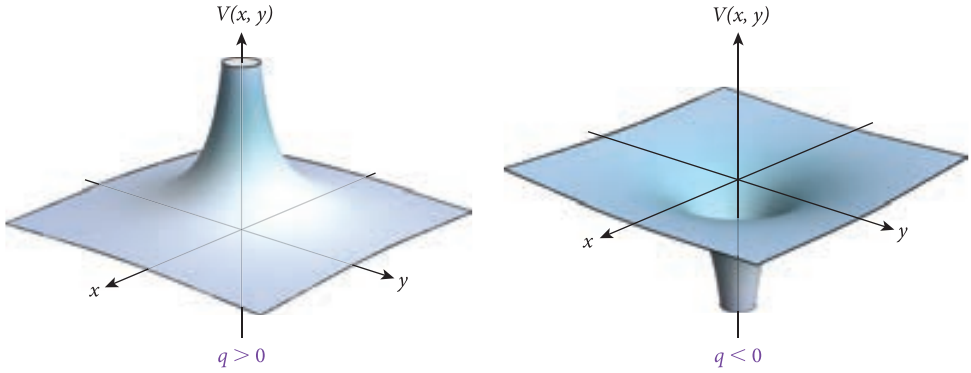
23.3 Oportunidad de autoevaluación

Obtener la ecuación 23.12 para el potencial eléctrico desde una carga puntual implicó integrar a lo largo de una línea radial desde el infinito hasta un punto situado a una distancia R de la carga puntual. ¿Cómo cambiaría el resultado si la integración se efectuara sobre una ruta diferente?

23.4 Ejercicio en clase

¿Cuál es el potencial eléctrico a 45.5 cm de una carga puntual de 12.5 pC?

a) 0.247 V
b) 1.45 V
c) 4.22 V
d) 10.2 V
e) 25.7 V



a) *b*)

FIGURA 23.17 Potencial eléctrico debido a: *a*) una carga puntual positiva y *b*) una carga puntual negativa.

PROBLEMA RESUELTO 23.1 Cargas positivas fijas y móviles

PROBLEMA

Una carga positiva de 4.50 μC está fija en su sitio. Una partícula de masa 6.00 g y carga +3.00 μC se dispara con una velocidad inicial de 66.0 m/s directamente hacia la carga fija desde una distancia de 4.20 cm de ésta. ¿Cuán cerca llega la carga móvil a la carga fija antes de detenerse y comenzar a alejarse de la carga fija?

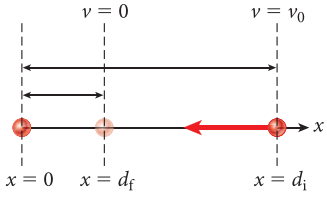


FIGURA 23.18 Dos cargas positivas. Una carga está fija en su sitio en $x = 0$ y la segunda carga se mueve con velocidad $\vec{v}_0$ en $x = d_i$ y tiene velocidad cero en $x = d_f$.

SOLUCIÓN

PIENSE

La carga móvil adquiere energía potencial eléctrica a medida que se aproxima a la carga fija. Lo negativo del cambio en energía potencial de la carga móvil es igual al cambio en energía cinética de la carga móvil porque $\Delta K + \Delta U = 0$.

ESBOCE

Establecemos la ubicación de la carga fija en $x = 0$, como muestra la figura 23.18. La carga móvil empieza en $x = d_i$, se mueve con velocidad inicial $v = v_0$ y llega al reposo en $x = d_f$.

INVESTIGUE

La carga móvil gana energía potencial eléctrica conforme se aproxima a la carga fija y pierde energía cinética hasta que se detiene. En ese punto, toda la energía cinética original de la carga móvil se ha convertido en energía potencial eléctrica. Al usar la conservación de la energía, podemos escribir esta relación como

$$\Delta K + \Delta U = 0 \Rightarrow \Delta K = -\Delta U \Rightarrow$$
$$0 - \tfrac{1}{2}mv_0^2 = -q_{\text{móvil}}\Delta V \Rightarrow$$
$$\tfrac{1}{2}mv_0^2 = q_{\text{móvil}}\Delta V. \qquad \text{(i)}$$

El potencial eléctrico experimentado por la carga móvil se debe a la carga fija, de modo que podemos escribir el cambio en potencial como

$$\Delta V = V_f - V_i = k\frac{q_{\text{fija}}}{d_f} - k\frac{q_{\text{fija}}}{d_i} = kq_{\text{fija}}\left(\frac{1}{d_f} - \frac{1}{d_i}\right). \qquad \text{(ii)}$$

SIMPLIFIQUE

Al sustituir la expresión para la diferencia de potencial de la ecuación (ii) en la ecuación (i), encontramos

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = q_{\text{móvil}}\Delta V = kq_{\text{móvil}}q_{\text{fija}}\left(\frac{1}{d_f} - \frac{1}{d_i}\right) \Rightarrow$$

$$\frac{1}{d_f}-\frac{1}{d_i}=\frac{mv_0^2}{2kq_{\text{móvil}}q_{\text{fija}}}\Rightarrow$$

$$\frac{1}{d_f}=\frac{1}{d_i}+\frac{mv_0^2}{2kq_{\text{móvil}}q_{\text{fija}}}.$$

CALCULE

Al escribir los valores numéricos, obtenemos

$$\frac{1}{d_f}=\frac{1}{0.0420\text{ m}}+\frac{(0.00600\text{ kg})(66.0\text{ m/s})^2}{2\left(8.99\cdot10^9\text{ N m}^2/\text{C}^2\right)\left(3.00\cdot10^{-6}\text{C}\right)\left(4.50\cdot10^{-6}\text{C}\right)}=131.485,$$

o bien,

$$d_f=0.00760545\text{ m}.$$

REDONDEE

Mostramos nuestro resultado con tres cifras:

$$d_f=0.00761\text{ m}=0.761\text{ cm}.$$

VUELVA A REVISAR

La distancia final de 0.761 cm es menor que la distancia inicial de 4.20 cm. A la distancia final, la energía potencial eléctrica de la carga móvil es

$$U=q_{\text{móvil}}V=q_{\text{móvil}}\left(k\frac{q_{\text{fija}}}{d_f}\right)=k\frac{q_{\text{móvil}}q_{\text{fija}}}{d_f}$$

$$=\left(8.99\cdot10^9\text{ N m}^2/\text{C}^2\right)\frac{\left(3.00\cdot10^{-6}\text{ C}\right)\left(4.50\cdot10^{-6}\text{ C}\right)}{0.00761\text{ m}}=16.0\text{ J}.$$

La energía potencial eléctrica a la distancia inicial es

$$U=q_{\text{móvil}}V=q_{\text{móvil}}\left(k\frac{q_{\text{fija}}}{d_i}\right)=k\frac{q_{\text{móvil}}q_{\text{fija}}}{d_i}$$

$$=\left(8.99\cdot10^9\text{ N m}^2/\text{C}^2\right)\frac{\left(3.00\cdot10^{-6}\text{ C}\right)\left(4.50\cdot10^{-6}\text{ C}\right)}{(0.0420\text{ m})}=2.9\text{ J}.$$

La energía cinética es

$$K=\frac{1}{2}mv^2=\frac{(0.00600\text{ kg})(66.0\text{ m/s})^2}{2}=13.1\text{ J}.$$

Podemos ver que la ecuación basada en conservación de la energía, a partir de la cual empezó el proceso de solución, se cumple:

$$\tfrac{1}{2}mv^2=\Delta U$$

$$13.1\text{ J}=16.0\text{ J}-2.9\text{ J}=13.1\text{ J}.$$

Este hecho nos da la confianza de que nuestro resultado para la distancia final es correcto.

Sistema de cargas puntuales

El potencial eléctrico, debido a un sistema de n cargas puntuales, se calcula al sumar los potenciales debidos a todas las cargas:

$$V=\sum_{i=1}^{n}V_i=\sum_{i=1}^{n}\frac{kq_i}{r_i}. \qquad (23.13)$$

La ecuación (23.13) puede demostrarse al insertar la expresión para el campo eléctrico total de n cargas $\left(\vec{E}_t = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \cdots + \vec{E}_n\right)$ en la ecuación 23.11 y al integrar término por término. La sumatoria en la ecuación 23.13 produce un potencial en cualquier punto en el espacio, que tiene un valor pero carece de dirección. Por eso, calcular el potencial debido a un grupo de cargas puntuales suele ser mucho más simple que calcular el campo eléctrico, que implica la adición de vectores.

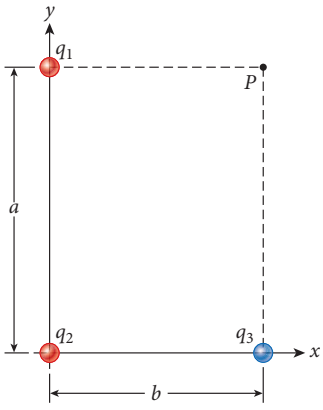


FIGURA 23.19 Potencial eléctrico en un punto debido a tres cargas puntuales.

EJEMPLO 23.4 Superposición de potenciales eléctricos

A continuación calcularemos el potencial eléctrico en un punto dado debido a un sistema de cargas puntuales. En la figura 23.19 se muestran tres cargas puntuales: $q_1 = +1.50\ \mu C$, $q_2 = +2.50\ \mu C$, y $q_3 = -3.50\ \mu C$. La carga q_1 está ubicada $(0, a)$, q_2 está ubicada en $(0, 0)$ y q_3 está ubicada en $(b, 0)$, donde $a = 8.00$ m y $b = 6.00$ m.

El potencial eléctrico en el punto P es la suma de los potenciales debidos a las tres cargas:

$$V = \sum_{i=1}^{3} \frac{kq_i}{r_i} = k\left(\frac{q_1}{r_1} + \frac{q_2}{r_2} + \frac{q_3}{r_3}\right) = k\left(\frac{q_1}{b} + \frac{q_2}{\sqrt{a^2 + b^2}} + \frac{q_3}{a}\right)$$

$$= \left(8.99 \cdot 10^9\ \text{N m}^2/\text{C}^2\right)\left(\frac{1.50 \cdot 10^{-6}\ \text{C}}{6.00\ \text{m}} + \frac{2.50 \cdot 10^{-6}\ \text{C}}{\sqrt{(8.00\ \text{m})^2 + (6.00\ \text{m})^2}} + \frac{-3.50 \cdot 10^{-6}\ \text{C}}{8.00\ \text{m}}\right)$$

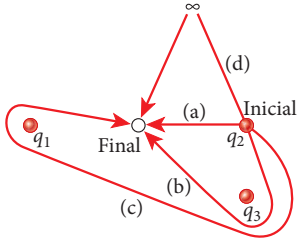
$$= 562\ \text{V}.$$

Note que el potencial debido a q_3 es negativo en el punto P, pero la suma de potenciales es positiva.

Este ejemplo es semejante al ejemplo 22.1, donde calculamos el campo eléctrico en el punto P debido a tres cargas. Note que este cálculo del potencial eléctrico debido a tres cargas es mucho más simple que aquel cálculo.

23.5 Ejercicio en clase

Tres cargas puntuales positivas idénticas están fijas en puntos del espacio. La carga q_2 se mueve desde su ubicación inicial hasta su ubicación final, como aparece en la figura. Se muestran cuatro rutas diferentes, indicadas de (a) a (d). La ruta (a) sigue la línea más corta; la ruta (b) rodea a q_3; la ruta (c) lleva a q_2 alrededor de q_3 y q_1; la ruta (d) lleva a q_2 al infinito y luego a su ubicación final. ¿Cuál ruta requiere el menor trabajo?



a) ruta (a)
b) ruta (b)
c) ruta (c)
d) ruta (d)
e) El trabajo es el mismo para todas las rutas.

Distribución de carga continua

También podemos determinar el potencial eléctrico debido a una distribución de carga continua. Para ello, dividimos la carga en elementos diferenciales de carga, dq, y encontramos el potencial eléctrico resultante de esa carga diferencial como si fuese una carga puntual. Ésta es la forma en que se trataron las distribuciones de carga al determinar campos eléctricos en el capítulo 22. La carga diferencial dq puede expresarse en términos de una carga por unidad de longitud multiplicada por una longitud diferencial $\lambda\, dx$; en términos de una carga por unidad de área multiplicada por un área diferencial $\sigma\, dA$; o en términos de una carga por unidad de volumen multiplicada por un volumen diferencial $\rho\, dV$. El potencial eléctrico resultante de la distribución de carga se obtiene al integrar sobre las contribuciones de las cargas diferenciales. Consideremos un ejemplo que implica el potencial eléctrico debido a una distribución de carga unidimensional.

EJEMPLO 23.5 Línea de carga finita

¿Cuál es el potencial eléctrico a una distancia d a lo largo de la bisectriz perpendicular de un alambre delgado con longitud $2a$ y distribución de carga λ (figura 23.20)?

El potencial eléctrico, dV, a lo largo de la bisectriz perpendicular del alambre debido a una carga diferencial, dq, está dado por

$$dV = k\frac{dq}{r}.$$

El potencial eléctrico debido a todo el alambre está dado por la integral sobre dV a lo largo de la longitud del alambre:

$$V = \int_{-a}^{a} dV = \int_{-a}^{a} k\frac{dq}{r}. \qquad \text{(i)}$$

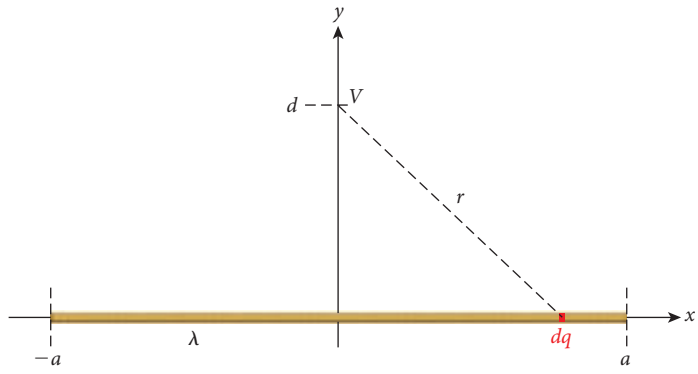


FIGURA 23.20 Cálculo del potencial eléctrico debido a una línea de carga.

Con $dq = \lambda\, dx$ y $r = \sqrt{x^2 + d^2}$, podemos volver a escribir la ecuación (i) como

$$V = \int_{-a}^{a} k \frac{\lambda\, dx}{\sqrt{x^2 + d^2}} = k\lambda \int_{-a}^{a} \frac{dx}{\sqrt{x^2 + d^2}}.$$

Al encontrar esta integral en una tabla de integrales o al evaluarla con algún software idóneo, se obtiene

$$\int_{-a}^{a} \frac{dx}{\sqrt{x^2 + d^2}} = \left[\ln\left(x + \sqrt{x^2 + d^2}\right)\right]_{-a}^{a} = \ln\left(\frac{\sqrt{a^2 + d^2} + a}{\sqrt{a^2 + d^2} - a}\right).$$

Así, el potencial eléctrico a una distancia d a lo largo de la bisectriz perpendicular de una línea finita de carga, se obtiene

$$V = k\lambda \ln\left(\frac{\sqrt{a^2 + d^2} + a}{\sqrt{a^2 + d^2} - a}\right).$$

23.5 Determinación del campo eléctrico a partir del potencial eléctrico

Como ya mencionamos, podemos determinar el campo eléctrico empezando con el potencial eléctrico. Este cálculo usa las ecuaciones 23.8 y 23.10:

$$-qdV = q\vec{E} \cdot d\vec{s},$$

donde $d\vec{s}$ es un vector desde un punto inicial hasta un punto final ubicado a una pequeña distancia (infinitesimal). La componente del campo eléctrico, E_s, a lo largo de $d\vec{s}$ está dada por la derivada parcial

$$E_s = -\frac{\partial V}{\partial s}. \tag{23.14}$$

(En el capítulo 15 sobre ondas se aplicaron derivadas parciales, que fueron tratadas como derivadas convencionales, que continuamos usando aquí.) Por lo tanto, podemos encontrar cualquier componente del campo eléctrico al tomar la derivada parcial del potencial a lo largo de la dirección de esa componente. Luego podemos escribir las componentes del campo eléctrico en términos de derivadas parciales del potencial:

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x}; \quad E_y = -\frac{\partial V}{\partial y}; \quad E_z = -\frac{\partial V}{\partial z}. \tag{23.15}$$

El planteamiento vectorial equivalente del cálculo es $\vec{E} = -\vec{\nabla} V \equiv -(\partial V/\partial x, \partial V/\partial y, \partial V/\partial z)$, donde el operador $\vec{\nabla}$ se denomina **gradiente**. Por eso, el campo eléctrico puede determinarse en forma gráfica, al medir el negativo de la carga del potencial por unidad de distancia perpendicular a una línea equipotencial o, en forma analítica, al usar la ecuación 23.15.

23.6 Ejercicio en clase

Suponga que el potencial eléctrico está descrito por $V(x, y, z) = -(5x^2 + y + z)$ en voltios. ¿Cuál de las siguientes expresiones describe el campo eléctrico asociado, en unidades de voltio por metro?

a) $\vec{E} = 5\hat{x} + 2\hat{y} + 2\hat{z}$

b) $\vec{E} = 10x\hat{x}$

c) $\vec{E} = 5x\hat{x} + 2\hat{y}$

d) $\vec{E} = 10x\hat{x} + \hat{y} + \hat{z}$

e) $\vec{E} = 0$

23.7 Ejercicio en clase

En la figura, las líneas representan líneas equipotenciales. ¿Cómo se compara la magnitud del campo eléctrico, E, en el punto P, para los tres casos?

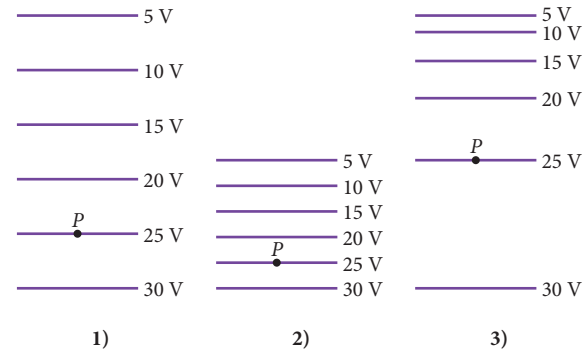
a) $E_1 = E_2 = E_3$

b) $E_1 > E_2 > E_3$

c) $E_1 < E_2 < E_3$

d) $E_3 > E_1 > E_2$

e) $E_3 < E_1 < E_2$



Para reforzar visualmente los conceptos de campos y potenciales eléctricos, el siguiente ejemplo muestra cómo puede usarse una técnica gráfica para encontrar el campo, dado el potencial.

EJEMPLO 23.6 Obtención gráfica del campo eléctrico

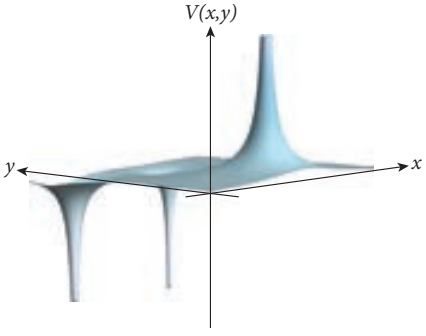


FIGURA 23.21 Potencial eléctrico debido a tres líneas de carga.

Consideremos un sistema de tres cargas puntuales con valores $q_1 = -6.00\ \mu C$, $q_2 = -3.00\ \mu C$ y $q_3 = +9.00\ \mu C$, ubicadas en los puntos $(x_1, y_1) = (1.5\text{ cm}, 9.0\text{ cm})$, $(x_2, y_2) = (6.0\text{ cm}, 8.0\text{ cm})$ y $(x_3, y_3) = (5.3\text{ cm}, 2.0\text{ cm})$. La figura 23.21 muestra el potencial eléctrico, $V(x, y)$, resultante de estas tres cargas, con líneas equipotenciales calculadas en valores de potencial desde $-5\,000$ V hasta $5\,000$ V en incrementos de $1\,000$ V, como indica la figura 23.22.

Podemos calcular la magnitud del campo eléctrico en el punto P usando la ecuación 23.14 y técnicas gráficas. Para realizar esta tarea, usamos la línea verde en la figura 23.22, que se traza desde el punto P perpendicular a la línea equipotencial porque el campo eléctrico siempre es perpendicular a las líneas equipotenciales, llegando de la línea equipotencial de 0 V a la línea de 2 000 V. Como puede ver a partir de la figura 23.22, la longitud de la línea verde es 1.5 cm. En consecuencia, la magnitud del campo eléctrico puede aproximarse como

$$|E_s| = \left|-\frac{\Delta V}{\Delta s}\right| = \left|\frac{(+2\,000\text{ V}) - (0\text{ V})}{1.5\text{ cm}}\right| = 1.3 \cdot 10^5\text{ V/m},$$

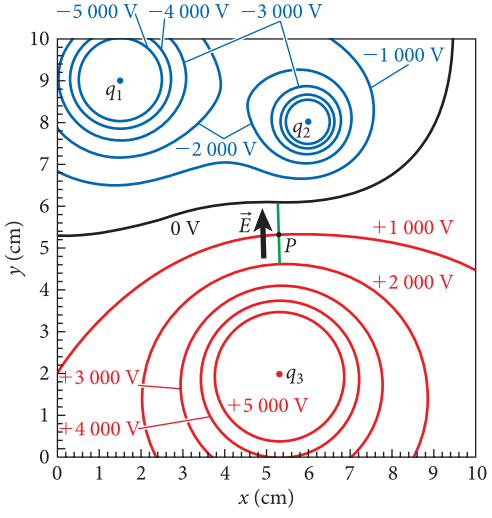


FIGURA 23.22 Líneas equipotenciales para el potencial eléctrico debido a tres líneas de carga puntuales.

donde Δs es la longitud de la línea que pasa por el punto P. El signo negativo en la ecuación 23.14 indica que la dirección del campo eléctrico entre líneas equipotenciales vecinas apunta de la línea equipotencial de 2 000 V a la línea de potencial cero.

En el capítulo 22 obtuvimos una expresión para el campo eléctrico a lo largo de la bisectriz perpendicular de una línea de carga finita:

$$E_y = \frac{2k\lambda}{y}\frac{a}{\sqrt{y^2+a^2}}.$$

En el ejemplo 23.5 encontramos una expresión para al potencial eléctrico a lo largo de la bisectriz perpendicular de una línea de carga finita:

$$V = k\lambda \ln\left(\frac{\sqrt{y^2+a^2}+a}{\sqrt{y^2+a^2}-a}\right), \tag{23.16}$$

donde la coordenada d usada en el ejemplo 23.5 se ha sustituido por la distancia en la dirección y. Podemos encontrar la componente y del campo eléctrico a partir del potencial usando la ecuación 23.15:

$$\begin{aligned} E_y &= -\frac{\partial V}{\partial y} \\ &= -\frac{\partial\left(k\lambda \ln\left(\frac{\sqrt{y^2+a^2}+a}{\sqrt{y^2+a^2}-a}\right)\right)}{\partial y} \\ &= -k\lambda\left(\frac{\partial\left(\ln\left(\sqrt{y^2+a^2}+a\right)\right)}{\partial y} - \frac{\partial\left(\ln\left(\sqrt{y^2+a^2}-a\right)\right)}{\partial y}\right). \end{aligned}$$

Al tomar la derivada parcial (recuerde que la derivada parcial puede tratarse como una derivada regular), obtenemos para el primer término

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\ln\left(\sqrt{y^2+a^2}+a\right)\right) = \underbrace{\left(\frac{1}{\sqrt{y^2+a^2}+a}\right)}_{\text{derivada de ln}}\underbrace{\left(\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{y^2+a^2}}\right)}_{\text{derivada de }\sqrt{y^2+a^2}}\underbrace{(2y)}_{\text{derivada de }y^2} = \frac{y}{y^2+a^2+a\sqrt{y^2+a^2}},$$

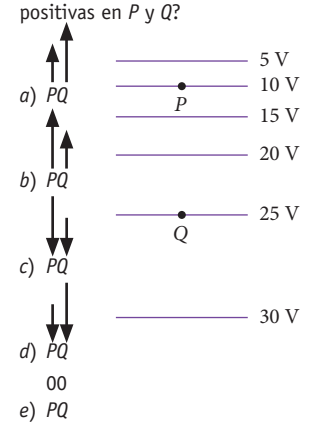
donde se han usado el hecho de que la derivada de la función logaritmo natural es $d(\ln x)/dx = 1/x$ y la regla de la cadena de diferenciación. (Las derivadas externa e interna se indican bajo los términos que generan.) Para el segundo término puede encontrarse expresión semejante. Al usar los valores de las derivadas, encontramos la componente del campo eléctrico:

$$E_y = -k\lambda\left(\frac{y}{y^2+a^2+a\sqrt{y^2+a^2}} - \frac{y}{y^2+a^2-a\sqrt{y^2+a^2}}\right) = \frac{2k\lambda}{y}\frac{a}{\sqrt{y^2+a^2}}.$$

Este resultado es el mismo que para el campo eléctrico en la dirección y que se obtuvo en el capítulo 22 al integrar sobre una línea de carga finita.

23.8 Ejercicio en clase

En la figura, las líneas representan líneas equipotenciales. Una carga positiva está colocada en el punto P, y otra carga positiva está colocada en el punto Q. ¿Qué conjunto de vectores representa mejor las magnitudes y direcciones relativas del campo eléctrico ejercido sobre las cargas positivas en P y Q?



23.9 Ejercicio en clase

En la figura, las líneas representan líneas equipotenciales. ¿Cuál es la dirección del campo eléctrico en el punto P?

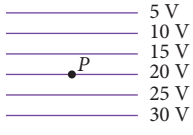
a) Hacia arriba.

b) Hacia abajo.

c) A la izquierda.

d) A la derecha.

e) El campo eléctrico es cero.



23.6 Energía potencial eléctrica de un sistema de cargas puntuales

En la sección 23.1 se analizó la energía potencial eléctrica de una carga puntual en un campo eléctrico externo dado, y en la sección 23.4 se describió cómo calcular el potencial eléctrico debido a un sistema de cargas. Esta sección combina estas dos piezas de información para encontrar la energía potencial eléctrica de un sistema de cargas. Considere un sistema de cargas cuya separación es infi-

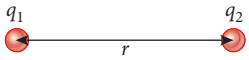


FIGURA 23.23 Dos cargas puntuales separadas por una distancia r.

nita. Para hacer que estas cargas estén próximas unas de otras, es necesario realizar trabajo sobre las cargas, lo cual modifica la energía potencial eléctrica del sistema. La energía potencial eléctrica de un sistema de cargas puntuales se define como el trabajo necesario para acercar las cargas entre sí desde una separación infinita.

Así como en el ejemplo, encontraremos la energía potencial eléctrica de un sistema de dos cargas puntuales (figura 23.23). Supongamos que las dos cargas empiezan a una separación infinita. Luego integramos la carga puntual q_1 al sistema. Debido a que el sistema sin cargas no tiene campo eléctrico ni fuerza eléctrica correspondiente, para llevar a cabo lo anterior no se requiere efectuar ningún trabajo sobre la carga. Al mantener estacionaria esta carga, llevamos la segunda carga, q_2, desde el infinito hasta una distancia r de q_1. Al usar la ecuación 23.6 podemos escribir la energía potencial eléctrica del sistema como

$$U = q_2 V, \tag{23.17}$$

donde

$$V = \frac{kq_1}{r}. \tag{23.18}$$

Así, la energía potencial eléctrica de este sistema de dos cargas puntuales es

$$U = \frac{kq_1 q_2}{r}. \tag{23.19}$$

Con base en el teorema trabajo-energía, el trabajo, W, que es necesario realizar sobre las partículas para aproximarlas entre sí y mantenerlas estacionarias, es igual a U. Si las dos cargas tienen el mismo signo, $W = U > 0$, para acercarlas entre sí desde el infinito y mantenerlas inmóviles, es necesario realizar trabajo positivo. Si las dos cargas tienen signos opuestos, para acercarlas entre sí desde el infinito y mantenerlas inmóviles, es necesario realizar trabajo negativo. Para determinar U para más de dos cargas puntuales, las reunimos una por una desde el infinito, en cualquier orden.

EJEMPLO 23.7 Cuatro cargas puntuales

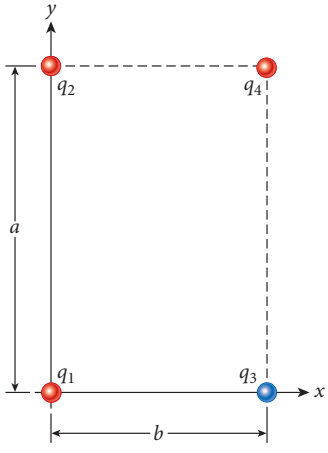


FIGURA 23.24 Cálculo de la energía potencial eléctrica de un sistema de cuatro cargas puntuales.

Calculemos la energía potencial eléctrica de un sistema de cuatro cargas puntuales, mostradas en la figura 23.24. Las cuatro cargas puntuales tienen los valores $q_1 = +1.0\ \mu C$, $q_2 = +2.0\ \mu C$, $q_3 = -3.0\ \mu C$ y $q_4 = +4.0\ \mu C$. Las cargas están colocadas en $a = 6.0$ m y $b = 4.0$ m.

PROBLEMA

¿Cuál es la energía potencial eléctrica de este sistema de cuatro cargas puntuales?

SOLUCIÓN

Empezamos el cálculo con las cuatro cargas separadas por el infinito y suponemos que la energía potencial eléctrica es cero en esa configuración. Colocamos la carga q_1 en su posición en (0, 0). Este hecho no modifica la energía potencial eléctrica del sistema. Luego colocamos q_2 en su sitio, $(0, a)$. Ahora la energía potencial eléctrica del sistema es

$$U = \frac{kq_1 q_2}{a}.$$

Llevar q_3 desde el infinito y colocarla en su sitio en $(b, 0)$ cambia la energía potencial eléctrica del sistema debido a la interacción de q_3 con q_1 y a la interacción de q_3 con q_2. La nueva energía potencial es

$$U = \frac{kq_1 q_2}{a} + \frac{kq_1 q_3}{b} + \frac{kq_2 q_3}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Por último, colocar q_4 en su sitio en (b, a) cambia la energía potencial eléctrica del sistema debido a las interacciones con q_1, q_2 y q_3, haciendo que la energía potencial eléctrica total del sistema sea

$$U = \frac{kq_1 q_2}{a} + \frac{kq_1 q_3}{b} + \frac{kq_2 q_3}{\sqrt{a^2 + b^2}} + \frac{kq_1 q_4}{\sqrt{a^2 + b^2}} + \frac{kq_2 q_4}{b} + \frac{kq_3 q_4}{a}.$$

Observe que el orden en el que las cargas se transportan desde el infinito no modifica este resultado. (Usted puede intentar otro orden para comprobar esta afirmación.) Al escribir los valores numéricos, obtenemos

$$U = \left(3.0\cdot10^{-3}\ \text{J}\right)+\left(-6.7\cdot10^{-3}\ \text{J}\right)+\left(-7.5\cdot10^{-3}\ \text{J}\right)+$$
$$\left(5.0\cdot10^{-3}\ \text{J}\right)+\left(1.8\cdot10^{-2}\ \text{J}\right)+\left(-1.8\cdot10^{-2}\ \text{J}\right)=-6.2\cdot10^{-3}\ \text{J}.$$

A partir de los cálculos en el ejemplo 23.7, extrapolamos el resultado para obtener una fórmula para la energía potencial eléctrica de una colección de cargas puntuales:

$$U = k\sum_{ij(pares)}\frac{q_i q_j}{r_{ij}}, \tag{23.20}$$

donde i y j identifican a cada par de cargas, la sumatoria es sobre cada par ij (para toda $i \neq j$), y r_{ij} es la distancia entre las cargas en cada par. Una forma alternativa de escribir esta suma doble es

$$U = \tfrac{1}{2}k\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1,i\neq j}^{n}\frac{q_i q_j}{\left|\vec{r}_i-\vec{r}_j\right|},$$

que es más explícita que el planteamiento equivalente de la ecuación 23.20.

LO QUE HEMOS APRENDIDO | GUÍA DE ESTUDIO PARA EXAMEN

- El cambio en energía potencial eléctrica, ΔU, de una carga que se mueve en un campo eléctrico es igual al negativo del trabajo realizado sobre la carga puntual por el campo eléctrico W_e: $\Delta U = U_f - U_i = -W_e$.
- El cambio en energía potencial eléctrica, ΔU, es igual a la carga, q, multiplicada por el cambio en potencial eléctrico, ΔV: $\Delta U = q\Delta V$.
- Las superficies equipotenciales y las líneas equipotenciales representan ubicaciones en el espacio que tienen el mismo potencial eléctrico. Las superficies equipotenciales siempre son perpendiculares a las líneas de campo eléctrico.
- La superficie de un conductor es una superficie equipotencial.
- El cambio en energía potencial puede determinarse a partir del campo eléctrico al integrar sobre el campo: $\Delta V = -\int_i^f \vec{E}\cdot d\vec{s}$. Al igualar a cero el potencial en el infinito, se obtiene $V = \int_i^{\infty}\vec{E}\cdot d\vec{s}$.
- El potencial eléctrico debido a una carga puntual, q, a una distancia r de la carga, está dado por $V = \frac{kq}{r}$.
- El potencial eléctrico debido a un sistema de n cargas puntuales puede expresarse como la suma algebraica de los potenciales individuales: $V = \sum_{i=1}^{n} V_i$.
- El campo eléctrico puede determinarse a partir de los gradientes del potencial eléctrico en cada dirección componente: $E_x = -\frac{\partial V}{\partial x}$, $E_y = -\frac{\partial V}{\partial y}$, $E_z = -\frac{\partial V}{\partial z}$.
- La energía potencial eléctrica de un sistema de dos cargas puntuales está dado por $U = \frac{kq_1q_2}{r}$.

TÉRMINOS CLAVE

energía potencial eléctrica, p. 746
potencial eléctrico, p. 747
voltio, p. 748
electronvoltio, p. 749
generador Van de Graaff, p. 751
superficie equipotencial, p. 752
líneas equipotenciales, p. 752
gradiente, p. 759

NUEVOS SÍMBOLOS

V, potencial eléctrico

ΔV, diferencia de potencial eléctrico

eV, abreviación de electronvoltio, una unidad de energía

RESPUESTAS A LAS OPORTUNIDADES DE AUTOEVALUACIÓN

23.1 El potencial eléctrico a lo largo del eje y es cero.

23.2 $(x, y) = (0, 0)$ corresponde a un punto de inflexión (silla).

23.3 Nada cambiaría. La fuerza electrostática es conservativa, y para una fuerza conservativa, el trabajo es independiente de la ruta.

PRÁCTICA PARA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Lineamientos para resolución de problemas

1. Una fuente de error común al realizar cálculos es confundir el campo eléctrico, $\vec{E}$, la energía potencial eléctrica, U, y el potencial eléctrico, V. Recuerde que un campo eléctrico es una cantidad vectorial producida por una distribución de carga; la energía potencial eléctrica es una propiedad de la distribución de carga; y el potencial eléctrico es una propiedad del campo. Asegúrese de saber lo que está calculando.

2. Asegúrese de identificar el punto con respecto al cual está calculando la energía potencial o el potencial eléctrico. Así como los cálculos que implican campos eléctricos, los cálculos que implican potenciales pueden usar una distribución de carga lineal (λ), una distribución de carga plana (σ) o una distribución de carga volumétrica (ρ).

3. Puesto que el potencial es un escalar, el potencial total debido a un sistema de cargas puntuales se calcula sumando simplemente los potenciales individuales debidos a todas las cargas. Para una distribución de carga continua, es necesario calcular el potencial al integrar sobre la carga diferencial. ¡Suponga que el potencial producido por la carga diferencial es el mismo que el potencial de una carga puntual!

PROBLEMA RESUELTO 23.2 Haces de iones de oxígeno

PROBLEMA

Los iones completamente segregados (donde se han retirado todos los electrones) de oxígeno (^{16}O) se aceleran desde el reposo en un acelerador de partículas usando una diferencia de potencial de 10.0 MV = $1.00 \cdot 10^7$ V. El núcleo del ^{16}O tiene 8 protones y 8 neutrones. El acelerador produce un haz de $3.13 \cdot 10^{12}$ iones por segundo. Este haz iónico se detiene por completo en un vertedero de haz óptico. ¿Cuál es la potencia total que debe absorber el vertedero?

SOLUCIÓN

PIENSE

La potencia es energía por unidad de tiempo. Podemos calcular la energía de cada ion y luego la energía total en el haz por unidad de tiempo para obtener la potencia disipada en el vertedero.

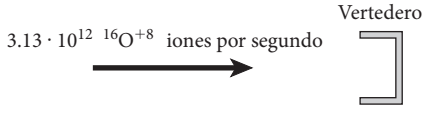


FIGURA 23.25 Un haz de iones de oxígeno completamente segregados se detiene en un vertedero.

ESBOCE

La figura 23.25 ilustra un haz de iones de oxígeno altamente segregados en un vertedero.

INVESTIGUE

La energía potencial eléctrica ganada por cada ion durante el proceso de aceleración es

$$U_{\text{ion}} = q\Delta V = ZeV,$$

donde $Z = 8$ es el número atómico del oxígeno, $e = 1.602 \cdot 10^{-19}$ C es la carga de un protón y $V = 1.00 \cdot 10^7$ V es el potencial eléctrico a través del cual son acelerados los iones.

SIMPLIFIQUE

La potencia del haz, que se disipa en el vertedero, es entonces

$$P = NU_{\text{ion}} = NZeV,$$

donde $N = 3.13 \cdot 10^{12}$ iones/s es el número de iones por segundo detenidos en el vertedero.

CALCULE

Al escribir los valores numéricos, obtenemos

$$P = NZeV = \left(3.13 \cdot 10^{12}\ \text{s}^{-1}\right)(8)\left(1.602 \cdot 10^{-19}\ \text{C}\right)\left(1.00 \cdot 10^{7}\ \text{V}\right)$$
$$= 40.1141\ \text{W}.$$

REDONDEE

Mostramos nuestro resultado con tres cifras:

$$P = 40.1\ \text{W}.$$

VUELVA A REVISAR

Podemos relacionar el cambio en energía cinética para cada ion con el cambio en energía potencial eléctrica en cada ion:

$$\Delta K = \Delta U = \tfrac{1}{2}mv^2 = U_{\text{ion}} = ZeV.$$

La masa de un núcleo de oxígeno es $2.66 \cdot 10^{-26}$ kg. Entonces, la velocidad de cada ion es

$$v = \sqrt{\frac{2ZeV}{m}} = \sqrt{\frac{2(8)\left(1.602 \cdot 10^{-19}\ \text{C}\right)\left(10^{7}\right)}{2.66 \cdot 10^{-26}\ \text{kg}}} = 3.10 \cdot 10^{7}\ \text{m/s},$$

que es alrededor de 10% de la velocidad de la luz, lo cual parece razonable para la velocidad de los iones. Así, nuestro resultado parece razonable.

PROBLEMA RESUELTO 23.3 Potencial mínimo

PROBLEMA

Una carga $q_1 = 0.829$ nC está colocada en $r_1 = 0$ sobre el eje x. Otra carga $q_2 = 0.275$ nC está colocada en $r_2 = 11.9$ cm sobre el eje x. ¿En qué punto, a lo largo del eje x entre las dos cargas, el potencial eléctrico resultante de ambas cargas tiene un mínimo?

SOLUCIÓN

PIENSE

Podemos expresar el potencial eléctrico debido a las dos cargas como la suma del potencial eléctrico de cada carga. Para obtener el potencial mínimo, tomamos la derivada del potencial y la igualamos a cero. Luego podemos despejar la distancia, donde la derivada es cero.

ESBOCE

La figura 23.26 muestra las ubicaciones de las dos cargas.

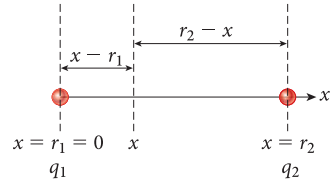


FIGURA 23.26 Dos cargas colocadas a lo largo del eje x.

INVESTIGUE

Podemos expresar el potencial eléctrico producido a lo largo del eje x por las dos cargas como

$$V = V_1 + V_2 = k\frac{q_1}{x - r_1} + k\frac{q_2}{r_2 - x} = k\frac{q_1}{x} + k\frac{q_2}{r_2 - x}.$$

Observe que las cantidades x y $r_2 - x$ siempre son positivas para $0 < x < r_2$. Para encontrar el mínimo, tomamos la derivada del potencial eléctrico:

$$\frac{dV}{dx} = -k\frac{q_1}{x^2} - k\frac{q_2}{(r_2 - x)^2}(-1) = k\frac{q_2}{(r_2 - x)^2} - k\frac{q_1}{x^2}.$$

(*continúa*)

(*continuación*)

SIMPLIFIQUE

Al igualar a cero la derivada del potencial eléctrico y reordenar, obtenemos

$$k\frac{q_2}{(r_2-x)^2}=k\frac{q_1}{x^2}.$$

Al dividir entre k y reordenar, obtenemos

$$\frac{x^2}{(r_2-x)^2}=\frac{q_1}{q_2}.$$

Ahora podemos tomar la raíz cuadrada y reordenar:

$$x=\pm(r_2-x)\sqrt{\frac{q_1}{q_2}}.$$

Debido a que $x>0$ y $(r_2-x)>0$, el signo debe ser positivo. Al despejar x, obtenemos

$$x=\frac{r_2\sqrt{\frac{q_1}{q_2}}}{1+\sqrt{\frac{q_1}{q_2}}}=\frac{r_2}{\sqrt{\frac{q_2}{q_1}}+1}.$$

CALCULE

Al escribir los valores numéricos, obtenemos

$$x=\frac{0.119\text{ m}}{1+\sqrt{\frac{0.275\text{ nC}}{0.829\text{ nC}}}}=0.0755097\text{ m}.$$

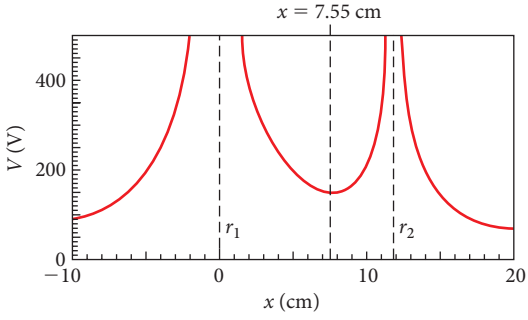


FIGURA 23.27 Gráfica del potencial eléctrico resultante de dos cargas.

REDONDEE

Mostramos nuestro resultado con tres cifras:

$$x=0.0755\text{ m}=7.55\text{ cm}.$$

VUELVA A REVISAR

Podemos volver a revisar nuestro resultado al graficar (por ejemplo, con una calculadora que cuente con la función de graficado) el potencial eléctrico resultante de las dos cargas y determinar gráficamente el mínimo (figura 23.27).

El mínimo del potencial eléctrico está localizado en $x = 7.55$ cm, lo cual confirma nuestro resultado calculado.

PREGUNTAS DE OPCIÓN MÚLTIPLE

23.1 Una carga positiva se libera y se mueve a lo largo de una línea de campo eléctrico. Esta carga se mueve hacia una posición de

a) Menor potencial y menor energía potencial.

b) Menor potencial y mayor energía potencial.

c) Mayor potencial y menor energía potencial.

d) Mayor potencial y mayor energía potencial.

23.2 Un protón se coloca a la mitad de la distancia entre los puntos *A* y *B*. El potencial en el punto *A* es –20 V, y el potencial en el punto *B* es +20 V. El potencial en el punto medio es 0 V. El protón

a) Permanece en reposo.

b) Se mueve hacia el punto *B* a velocidad constante.

c) Acelera hacia el punto *A*.

d) Acelera hacia el punto *B*.

e) Se mueve hacia el punto *A* a velocidad constante.

23.3 ¿Cuál sería la consecuencia de fijar el potencial a +100 V en el infinito, en lugar de tomarlo como cero ahí?

a) Ninguna; el campo y el potencial tendrían los mismos valores en cualquier punto finito.

b) El potencial eléctrico se volvería infinito en todo punto finito y no podría definirse el campo eléctrico.

c) El potencial eléctrico en todas partes sería 100 V mayor y el campo eléctrico sería el mismo.

d) Depende de la situación. Por ejemplo, el potencial debido a una carga puntual positiva disminuiría más lentamente con la distancia, de modo que la magnitud del campo eléctrico sería menor.

23.4 ¿En cuál de las siguientes situaciones el campo eléctrico es máximo?

a) En un punto a 1 m de la carga puntual de 1 C.

b) En un punto a 1 m del centro de una corteza esférica de radio 0.5 m con una carga total de 1 C.

c) En un punto a 1 m del centro de una barra uniformemente cargada de 1 m de longitud y una carga total de 1 C.

d) En un punto a 2 m de una carga puntual de 2 C.

e) En un punto a 0.5 m de una carga puntual de 0.5 C.

23.5 La cantidad de trabajo realizado para mover una carga puntual positiva q sobre una superficie equipotencial de 1 000 V con respecto a la de una superficie equipotencial de 10 V es

a) La misma.
b) Menor.
c) Mayor.
d) Dependiente de la distancia que se mueve la carga.

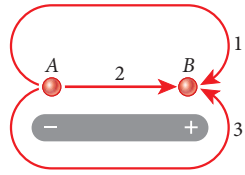
23.6 Una esfera sólida conductora de radio R está centrada en el origen de un sistema de coordenadas xyz. Una carga total Q está distribuida uniformemente sobre la superficie de la esfera. Suponiendo, como de costumbre, que el potencial eléctrico es cero a una distancia infinita, ¿cuál es el potencial eléctrico en el centro de la esfera conductora?

a) Cero.
b) $Q/\epsilon_0 R$
c) $Q/2\pi\epsilon_0 R$
d) $Q/4\pi\epsilon_0 R$

23.7 ¿Con cuál de los siguientes ángulos entre un momento dipolar eléctrico y un campo eléctrico aplicado se obtiene el estado más estable?

a) 0 rad.
b) $\pi/2$ rad
c) π rad
d) El momento dipolar eléctrico no es estable en ninguna circunstancia en un campo eléctrico aplicado.

23.8 Una carga puntual positiva debe moverse del punto A al punto B en la vecindad de un dipolo eléctrico. ¿Con cuál de las tres rutas mostradas en la figura se obtiene el mayor trabajo realizado por el campo del dipolo eléctrico sobre la carga puntual?



a) Ruta 1.
b) Ruta 2.
c) Ruta 3.
d) El trabajo es el mismo sobre las tres rutas.

23.9 Cada uno de los siguientes pares de cargas está separado por una distancia d. ¿Cuál par tiene la máxima energía potencial?

a) +5 C y +3 C
b) +5 C y –3 C
c) –5 C y –3 C
d) –5 C y +3 C
e) Todos los pares tienen la misma energía

23.10 Una partícula con carga negativa gira en dirección de las manecillas del reloj alrededor de una esfera con carga positiva. El trabajo realizado sobre la partícula con carga negativa por el campo eléctrico de la esfera es

a) Positivo.
b) Negativo.
c) Cero.

PREGUNTAS

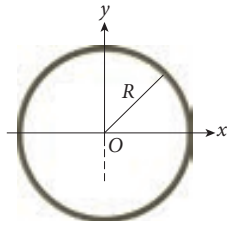
23.11 Para transportar la electricidad a través de un país se usan cables de alta tensión. Estos cables son de los sitios preferidos de los pájaros para descansar. ¿Por qué los pájaros no mueren al tocar los cables?

23.12 Usted ha escuchado que es peligroso permanecer bajo los árboles durante una tormenta eléctrica. ¿Por qué?

23.13 ¿Pueden dos líneas equipotenciales cruzarse? ¿Por qué sí o por qué no?

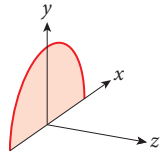
23.14 ¿Por qué es importante, al soldar conectores sobre una pieza de algún circuito electrónico, no dejar ninguna protuberancia en las juntas soldadas?

23.15 Use la ley de Gauss y la relación entre potencial eléctrico y campo eléctrico para demostrar que el potencial fuera de una esfera uniformemente cargada es idéntico al potencial de una carga puntual colocada en el centro de la esfera e igual a la carga total de la esfera. ¿Cuál es el potencial en la superficie de la esfera? ¿Cómo cambia el potencial si la distribución de cargas no es uniforme, sino que tiene simetría esférica (radial)?



23.16 Un anillo metálico tiene una carga total q y radio R, como muestra la figura. Sin realizar ningún cálculo, pronostique el valor del potencial eléctrico y el campo eléctrico en el centro del círculo.

23.17 Encuentre una expresión entera para el potencial eléctrico en un punto sobre el eje z a una distancia H del semidisco de radio R (vea la figura). El semidisco tiene una carga uniformemente distribuida sobre su superficie, con una distribución de carga σ.



23.18 Un electrón se aleja de un protón. Describa cómo cambia el potencial que encuentra. Describa cómo cambia su energía potencial.

23.19 La energía potencial eléctrica de una distribución de carga continua puede encontrarse en forma semejante a la que se aplicó a sistemas de cargas puntuales en la sección 23.6, al descomponer la distribución en piezas convenientes. Encuentre la energía potencial eléctrica de una distribución de carga *arbitraria* de simétrica esférica, $\rho(r)$. ***No*** suponga que $\rho(r)$ representa una carga puntual, que es constante, que es constante por partes, o que termina o no termina en algún radio infinito, r. Su expresión debe cubrir todas las posibilidades, y puede incluir una integral o varias integrales que no es posible evaluar sin conocer la forma específica de $\rho(r)$. (*Sugerencia*: Una perla esférica está compuesta por capas delgadas de nácar que se agregan una por una.)

PROBLEMAS

Una • y dos •• indican un nivel creciente de dificultad.

Sección 23.1

23.20 En moléculas de cloruro de sodio gaseoso, el ion cloro tiene más de un electrón que un protón, y el ion sodio tiene un protón más que un electrón. La distancia aproximada entre estos iones es 0.24 nm. ¿Cuánto trabajo se requiere para incrementar la distancia entre estos iones hasta 1.0 cm?

•**23.21** Una bola de metal de masa $3.00 \cdot 10^{-6}$ kg y carga + 5.00 mC tiene una energía cinética de $6.00 \cdot 10^{8}$ J. Se desplaza directamente en un plano infinito de carga con distribución de carga de +4.00 C/m^2. Si ahora se encuentra a 1.00 m del plano de carga, ¿cuán cerca llegará del plano antes de detenerse?

Sección 23.2

23.22 Un electrón acelera desde el reposo hasta una diferencia de potencial de 370 V. ¿Cuál es su velocidad final?

23.23 ¿Cuánto trabajo debe realizar un campo eléctrico para mover un protón desde un punto con potencial de +180. V hasta un punto con potencial de –60.0 V?

23.24 ¿Qué diferencia de potencial se requiere para proporcionar 200 keV de energía cinética a una partícula alfa (compuesta por 2 protones y 2 neutrones)?

23.25 Un protón, inicialmente en reposo, es acelerado a través de una diferencia de potencial de 500. V. ¿Cuál es su velocidad final?

23.26 Una batería de 10.0 V está conectada a dos placas metálicas paralelas colocadas en el vacío. Un electrón es acelerado a partir del reposo desde la placa negativa hacia la placa positiva.

a) ¿Qué energía cinética tiene el electrón justo cuando llega a la placa positiva?

b) ¿Cuál es la velocidad del electrón justo cuando llega a la placa positiva?

•**23.27** Un cañón de protones dispara un protón desde la mitad de la distancia entre dos placas, A y B, que se encuentran a una distancia de 10.0 cm entre sí; el protón se mueve inicialmente a una velocidad de 150.0 km/s hacia la placa B. La placa A se mantiene a potencial cero, y la placa B, a un potencial de 400.0 V.

a) ¿El protón llegará a la placa B?

b) En caso negativo, ¿dónde emprende el regreso?

c) ¿A qué velocidad choca contra la placa A?

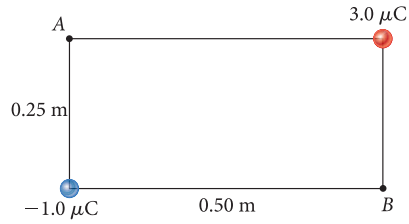
•**23.28** Iones de azufre (^{32}S) totalmente segregados (donde se han retirado todos los electrones) son acelerados en un acelerador a partir del reposo usando un voltaje total de $1.00 \cdot 10^{9}$ V. El ^{32}S tiene 16 protones y 16 neutrones. El acelerador produce un haz que consta de $6.61 \cdot 10^{12}$ iones por segundo. Este haz de iones se detiene por completo en un vertedero. ¿Cuál es la potencia total que debe absorber el vertedero?

Sección 23.4

23.29 Dos cargas puntuales están ubicadas en dos vértices de un rectángulo, como muestra la figura.

a) ¿Cuál es el potencial eléctrico en el punto *A*?

b) ¿Cuál es la diferencia de potencial entre los puntos *A* y *B*?

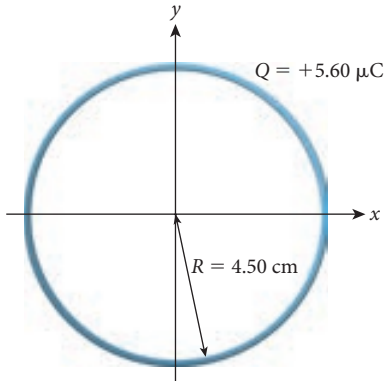


23.30 Cuatro cargas puntuales idénticas (+1.61 nC) están colocadas en los vértices de un rectángulo que mide 3.00 m por 5.00 m. Si el potencial eléctrico se toma igual a cero en el infinito, ¿cuál es el potencial en el centro geométrico de este rectángulo?

23.31 Si un generador Van de Graaff tiene un potencial eléctrico de 1.00×10^{5} V y un diámetro de 20.0 cm, encuentre cuántos protones más que electrones hay en su superficie.

23.32 Algo descubierto durante la exploración de Marte fue la acumulación de carga estática en vehículos, resultando en un potencial de 100. V o más. Calcule cuánta carga debe colocarse en la superficie de una esfera de radio 1.00 m para que el potencial eléctrico justo por arriba de la superficie sea 100. V. Suponga que la carga está distribuida uniformemente.

23.33 Una carga Q = +5.60 μC está distribuida uniformemente sobre una corteza cilíndrica de plástico. El radio, R, de la corteza es 4.50 cm. Calcule el potencial eléctrico en el origen de un sistema de coordenadas xy que se muestra en la figura. Suponga que el potencial eléctrico en el infinito es cero en puntos infinitamente lejos del origen.



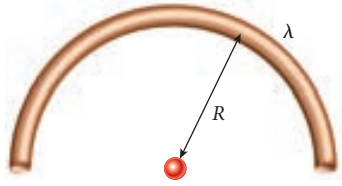
23.34 Un conductor esférico hueco con radio 5.0 cm tiene una carga superficial de 8.0 nC.

a) ¿Cuál es el potencial a 8.0 cm del centro de la esfera?

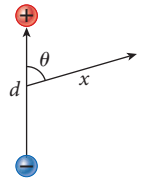
b) ¿Cuál es el potencial a 3.0 cm del centro de la esfera?

c) ¿Cuál es el potencial en el centro de la esfera?

23.35 Encuentre el potencial en el centro de curvatura del alambre (delgado) que se muestra en la figura. Tiene una carga (distribuida uniformemente) por unidad de área de $\lambda = 3.00 \cdot 10^{-8}$ C/m y un radio de curvatura de R = 8.00 cm.



•**23.36** Considere un dipolo con carga q y separación d. ¿Cuál es el potencial a una distancia x del centro de este dipolo a un ángulo θ con respecto al eje del dipolo, como muestra la figura?



•**23.37** Una gota de agua esférica de 50.0 μm de diámetro tiene una carga distribuida uniformemente de +20.0 pC. Encuentre *a*) el potencial en su superficie y *b*) el potencial en su centro.

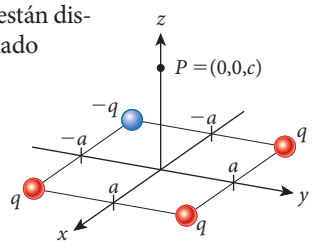
•**23.38** Considere un electrón en el estado fundamental del átomo de hidrógeno, separado del protón por una distancia de 0.0529 nm.

a) Si el electrón se considera como un satélite en órbita alrededor del protón en el potencial electrostático, calcule la velocidad del electrón en su órbita.

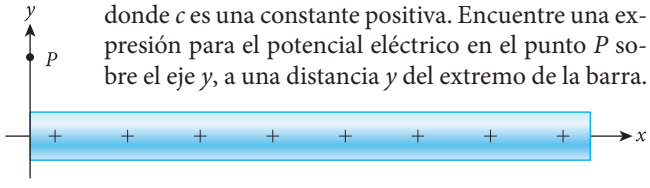
b) Calcule una velocidad de escape efectiva para el electrón.

c) Calcule la energía de un electrón que tiene esta velocidad, y a partir de esto calcule la energía que debe imprimirse al electrón para ionizar el átomo de hidrógeno.

•**23.39** Cuatro cargas puntuales están dispuestas en un cuadrado cuyo lado mide 2*a*, donde *a* = 2.7 cm. Tres de las cargas tienen magnitud 1.5 nC, y la magnitud de la otra es –1.5 nC, como muestra la figura. ¿Cuál es el valor del potencial eléctrico generado por estas cuatro cargas puntuales en el punto *P* = (0, 0, c), donde *c* = 4.1. cm?



•**23.40** La barra de plástico de longitud *L* mostrada en la figura tiene una distribución de carga lineal no uniforme $\lambda = cx$, donde *c* es una constante positiva. Encuentre una expresión para el potencial eléctrico en el punto *P* sobre el eje *y*, a una distancia *y* del extremo de la barra.

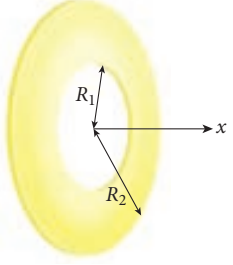


••**23.41** Un campo eléctrico varía en el espacio según esta ecuación: $\vec{E} = E_0 x e^{-x} \hat{x}$.

a) ¿Para qué valor de *x* el campo eléctrico tiene su valor máximo, $x_{máx}$?

b) ¿Cuál es la diferencia de potencial entre los puntos $x = 0$ y $x = x_{máx}$?

••**23.42** Obtenga una expresión para el potencial eléctrico a lo largo del eje (el eje *x*) de un disco con un orificio en el centro, como muestra la figura, donde R_1 y R_2 son los radios interno y externo del disco, respectivamente. ¿Cuál sería el potencial si $R_1 = 0$?



Sección 23.5

23.43 Se establece un campo eléctrico en una barra no uniforme. Se usa un voltímetro para medir la diferencia de potencial entre el extremo izquierdo de la barra y un punto a una distancia *x* de este extremo. El proceso se repite y se encuentra que los datos están descritos por la relación $\Delta V = 270x^2$, donde ΔV tiene unidades V/m^2. ¿Cuál es la componente *x* del campo eléctrico en un punto a 13 cm del extremo izquierdo de la barra?

23.44 Dos placas paralelas se mantienen a un potencial de +200.0 V y –100.0 V. La distancia entre las placas es 1.00 cm.

a) Encuentre el campo eléctrico entre las placas.

b) Inicialmente, un electrón se coloca a la mitad de la distancia entre las placas. Encuentre su energía cinética cuando choca contra la placa positiva.

23.45 Una partícula de polvo de 2.50 mg con una carga de 1.00 μC cae en un punto $x = 2.00$ m en una región en la que el potencial eléctrico varía según $V(x) = (2.00\ V/m^2)x^2 - (3.00\ V/m^3)x^3$. ¿Con qué aceleración empieza a moverse la partícula después de aterrizar?

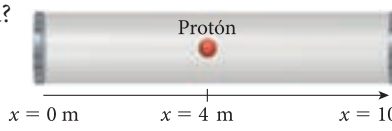
23.46 El potencial eléctrico en un volumen de espacio está dado por $V(x, y, z) = x^2 + xy^2 + yz$. Determine el campo eléctrico en esta región en la coordenada (3, 4, 5).

•**23.47** El potencial eléctrico dentro de un acelerador de partículas de 10.0 m de longitud está dado por $V = (3\,000 - 5x^2/m^2)$ V, donde *x* es la distancia de la placa izquierda a lo largo del tubo del acelerador, como muestra la figura.

a) Determine una expresión para el campo eléctrico a lo largo del tubo del acelerador.

b) Un protón se libera a partir de reposo en $x = 4.00$ m. Calcule la aceleración del protón justo después de que se libera.

c) ¿Cuál es la velocidad de impacto del protón cuando (y si) choca contra la placa?



•**23.48** Un plano infinito de carga tiene una distribución de carga uniforme de $+4.00\ nC/m^2$ y está ubicada en el plano *yz* en $x = 0$. A +11.0 nC es una carga puntual fija $x = +2.00$ m.

a) Encuentre el potencial eléctrico $V(x)$ sobre el eje *x* desde $0 < x < +2.00$ m.

b) ¿En qué posición o posiciones sobre el eje *x* entre $x = 0$ y $x = +2.00$ m el potencial eléctrico es un mínimo?

c) ¿Dónde, sobre el eje *x* entre $x = 0$ m y $x = +2.00$ m es posible colocar una carga puntual positiva de modo que no se mueva?

•**23.49** Use $V = \frac{kq}{r}$, $E_x = -\frac{\partial V}{\partial x}$, $E_y = -\frac{\partial V}{\partial y}$ y $E_z = -\frac{\partial V}{\partial z}$ para obtener una expresión para el campo eléctrico de una carga puntual, *q*.

•**23.50** Demuestre que un electrón en un potencial eléctrico unidimensional $V(x) = Ax^2$, donde la constante *A* es un número real positivo, ejecuta movimiento armónico simple alrededor del origen. ¿Cuál es el periodo de ese movimiento?

••**23.51** El campo eléctrico, $\vec{E}(\vec{r})$, y el potencial eléctrico, $V(\vec{r})$, se calculan a partir de la distribución de carga $\rho(\vec{r})$, al integrar la ley de Coulomb y luego el campo eléctrico. En la otra dirección, el campo y la distribución de carga se determinan a partir del potencial mediante diferenciación idónea. Suponga que el potencial eléctrico en una gran región del espacio está dado por $V(r) = V_0 \exp(-r^2/a^2)$, donde V_0 y *a* son constantes y $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ es la distancia al origen.

a) Encuentre el campo eléctrico $\vec{E}(\vec{r})$ en esta región.

b) Determine la densidad de carga $\rho(\vec{r})$ en esta región, que origina el potencial y el campo.

c) Encuentre la carga total en esta región.

d) Esboce la distribución de carga que podría originar tal campo eléctrico.

••**23.52** El haz de electrones emitido por un cañón electrónico es controlado (dirigido) con dos conjuntos de placas paralelas conductoras: un conjunto horizontal para controlar el movimiento vertical del haz y un conjunto vertical para controlar el movimiento horizontal del haz. El haz se emite con una velocidad inicial de $2.00 \cdot 10^7$ m/s. El ancho de las placas es $d = 5.00$ cm, la separación entre las placas es $D = 4.00$ cm y la distancia entre los bordes de las placas y una pantalla objetivo es $L = 40.0$ cm. Cuando no se aplica ningún voltaje, el haz de electrones choca en el origen del sistema de coordenadas *xy* sobre la pantalla de observación. ¿Qué voltajes deben aplicarse a los dos conjuntos de placas para que el haz de electrones incida en un objetivo ubicado sobre la pantalla de observación en las coordenadas $(x, y) = (0 \text{ cm}, 8.00 \text{ cm})$?

Sección 23.6

23.53 Las reacciones de fusión nuclear requieren que núcleos con carga positiva se aproximen bastante entre sí, contra la fuerza de repulsión electrostática. Como un simple ejemplo, suponga que un protón se dispara contra otro protón desde una gran distancia. ¿Qué energía cinética debe proporcionarse al protón móvil para que llegue a menos de $1.00 \cdot 10^{-15}$ m del objetivo? Suponga que ocurre una colisión frontal y que el objetivo se mantiene en su sitio.

23.54 La fisión de un núcleo de Uranio (que contiene 92 protones) produce un núcleo de Bario (56 protones) y un núcleo de Kriptón (36 protones). Los fragmentos se dispersan como resultado de la repulsión electrostática: terminan por surgir con una energía cinética total de 200 meV. Use esta información para estimar el tamaño del núcleo de Uranio; es decir, trate al Bario y al Kriptón como cargas puntuales y calcule la separación entre ellos al inicio del proceso.

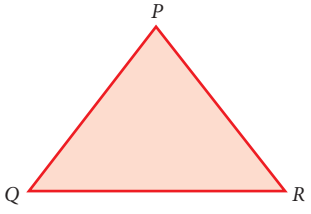
23.55 Un ion de Deuterio y un ion de Tritio tienen —cada uno— carga $+e$. ¿Qué trabajo debe realizarse sobre el ion de Deuterio para llevarlo a una distancia menor que 10^{-14} m del ion de Tritio? Ésta es la distancia a la que los dos iones pueden fusionarse como resultado de fuertes interacciones nucleares que superan la repulsión electrostática, para producir un núcleo de Helio-5. Exprese el trabajo en electronvoltios.

•**23.56** Tres cargas, q_1, q_2 y q_3, están ubicadas en los vértices de un triángulo equilátero de lado 1.2 m. Encuentre el trabajo realizado sobre cada uno de los casos siguientes.

a) Llevar la primera partícula, $q_1 = 1.0$ pC, desde el infinito hasta *P*.

b) Llevar la segunda partícula, $q_2 = 2.0$ pC, desde el infinito hasta *Q*.

c) Llevar la última partícula, $q_3 = 3.0$ pC, desde el infinito hasta *R*.



d) Encuentre la energía potencial total almacenada en la configuración final de q_1, q_2 y q_3.

•**23.57** Dos bolas metálicas de masa $m_1 = 5.00$ g (diámetro = 5.00 mm) y $m_2 = 8.00$ g (diámetro = 8.00 mm) tienen cargas positivas de $q_1 = 5.00$ nC y $q_2 = 8.00$ nC, respectivamente. Una fuerza las mantiene en su posición de modo que los centros están separados por 8.00 mm. ¿Cuáles son sus velocidades una vez que se retira la fuerza y están separadas por una gran distancia?

Problemas adicionales

23.58 Dos protones en reposo separados por 1.00 mm se liberan simultáneamente. ¿Cuál es la velocidad de cualquiera de los protones en el instante en el que están separados por una distancia de 10.0 mm?

23.59 Una batería de 12 V está conectada entre una esfera metálica hueca de radio 1 m y tierra, como muestra la figura. ¿Cuáles son el campo eléctrico y el potencial eléctrico dentro de la esfera metálica hueca?

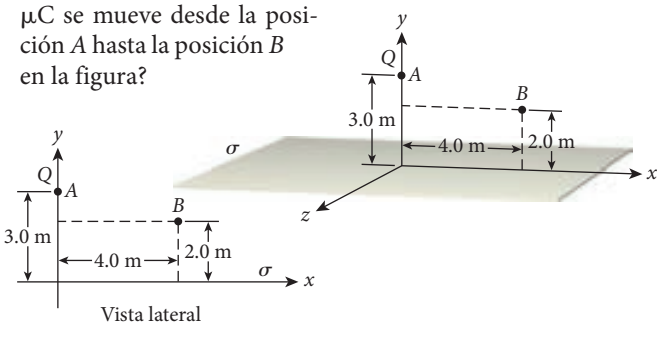
23.60 Una bola metálica sólida con radio 3.00 m tiene una carga de 4.00 mC. Si el potencial eléctrico es cero lejos de la bola, ¿cuál es el potencial eléctrico en cada una de las siguientes posiciones?

a) En $r = 0$ m, el centro de la bola.

b) En $r = 3.00$ m, sobre la superficie de la bola.

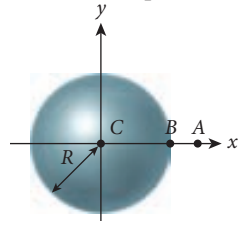
c) En $r = 5.00$ m.

23.61 Una lámina aislante en el plano *xy* está cargada uniformemente con una distribución de carga $\sigma = 3.5 \cdot 10^{-6}$ C/m^2. ¿Cuál es el cambio en potencial cuando una carga de $Q = 1.25$ μC se mueve desde la posición *A* hasta la posición *B* en la figura?



23.62 Suponga que un electrón dentro de un tubo de rayos catódicos empieza a partir del reposo y es acelerado por el voltaje del tubo de 21.9 kV. ¿Cuál es la velocidad (en km/s) con que el electrón (masa = $9.11 \cdot 10^{-31}$ kg) choca contra la pantalla del tubo?

23.63 La figura muestra una esfera sólida conductora (radio de $R = 18$ cm, carga de $q = 6.1 \cdot 10^{-6}$ C). Calcule el potencial eléctrico en un punto a 24 cm del centro (punto *A*), un punto sobre la superficie (punto *B*) y en el centro de la esfera (punto *C*). Suponga que el potencial eléctrico es cero en puntos infinitamente lejos del origen del sistema de coordenadas.



23.64 Un generador Van de Graaff de aula acumula una carga de $1.00 \cdot 10^{-6}$ C sobre su conductor esférico, cuyo radio mide 10.0 cm y se encuentra sobre una columna aislante. Ignore los efectos de la base del generador o de cualquier otro objeto o campo y encuentre el potencial en la superficie de la esfera. Suponga que el potencial es cero en el infinito.

23.65 Un generador Van de Graaff tiene un conductor esférico de radio 25.0 cm. Puede producir un campo eléctrico máximo de $2.00 \cdot 10^{6}$ V/m. ¿Cuáles son el voltaje y la carga máximos que puede soportar?

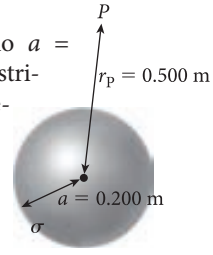
23.66 Un protón con una velocidad de $1.23 \cdot 10^{4}$ m/s se mueve desde el infinito directamente hacia un segundo protón. Suponga que el segundo protón está fijo en su sitio, encuentre la posición en la que el protón móvil se detiene momentáneamente antes de regresar.

23.67 Dos esferas metálicas de radios r_1 = 10.0 cm y r_2 = 20.0 cm, respectivamente, se han cargado positivamente de modo que ambos tienen una carga total de 100. μC.

a) ¿Cuál es la razón de sus distribuciones de carga superficiales?

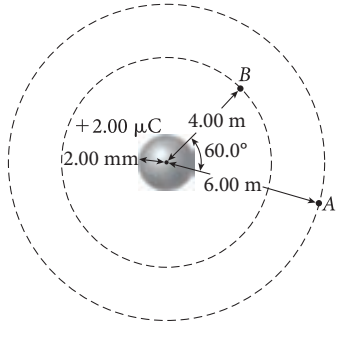
b) Si las dos esferas están conectadas por un alambre de cobre, ¿cuánta carga fluye por el alambre antes de que el sistema llegue al equilibrio?

23.68 La esfera metálica sólida de radio a = 0.200 m mostrada en la figura tiene una distribución de carga superficial de σ. La diferencia de potencial entre la superficie de la esfera y un punto P a una distancia r_P = 0.500 m al centro de la esfera es $\Delta V = V_{superficial} - V_P = +4\pi$ V = +12.566 V. Determine el valor de σ.



23.69 Una partícula con una carga de +5.0 μC se libera desde el reposo en un punto sobre el eje x, donde x = 0.10 m. La partícula empieza a moverse como resultado de la presencia de una carga de +9.0 μC que permanece fija en el origen. ¿Cuál es la energía cinética de la partícula en el instante en el que pasa por el punto x = 0.20 m?

23.70 La esfera que se muestra en la figura tiene un radio de 2.00 mm y transporta una carga de +2.00 μC distribuida uniformemente en todo su volumen. ¿Cuál es la diferencia de potencial, $V_B - V_A$, si el ángulo entre los dos radios hacia los puntos A y B es 60.0°? ¿La diferencia de potencial depende del ángulo? ¿La respuesta sería la misma si la distribución de carga tuviera una dependencia angular, $\rho = \rho(\theta)$?



•**23.71** Dos esferas metálicas tienen radios de 10.0 cm y 5.0 cm, respectivamente. La magnitud del campo eléctrico sobre la superficie de cada esfera es 3 600. V/m. Luego, las dos esferas se conectan a un largo alambre metálico. Determine la magnitud del campo eléctrico sobre la superficie de cada esfera cuando están conectadas.

•**23.72** Un anillo con carga Q y radio R está en el plano xy, centrado en el origen. ¿Cuál es el potencial eléctrico a una distancia x por arriba del centro del anillo? Obtenga el campo eléctrico a partir de esta relación.

•**23.73** Una carga de 0.681 nC está colocada en x = 0. Otra carga de 0.167 nC está colocada en x_1 = 10.9 cm sobre el eje x.

a) ¿Cuál es el potencial electrostático combinado de estas dos cargas en x = 20.1 cm, también sobre el eje x?

b) ¿En qué punto o puntos sobre el eje x este potencial tiene un mínimo?

•**23.74** Una carga puntual de +2.0 μC está colocada en (2.5 m, 3.2 m). Una segunda carga puntual de –3.1 μC está colocada en (–2.1 m,1.0 m).

a) ¿Cuál es el potencial electrostático en el origen?

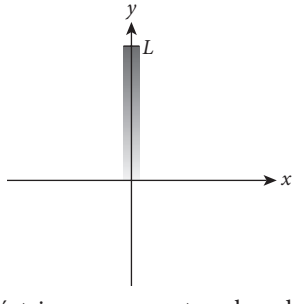
b) A lo largo de una recta que pasa por ambas cargas puntuales, ¿en qué punto(s) el (los) potencial(es) es (son) igual(es) a cero?

•**23.75** Una carga total de $Q = 4.2 \cdot 10^{-6}$ C está colocada sobre una esfera conductora (esfera 1) de radio R = 0.40 m.

a) ¿Cuál es el potencial eléctrico, V_1, en la superficie de la esfera 1 si se supone que el potencial infinitamente lejos de ésta es cero? (*Sugerencia*: ¿Cuál es el cambio en potencial si una carga se lleva desde el infinito, donde $V(\infty) = 0$, hasta la superficie de la esfera?)

b) Una segunda esfera conductora (esfera 2) de radio r = 0.10 m, con una carga inicial neta de cero (q = 0), está conectada a la esfera 1 por medio de un largo alambre metálico delgado. ¿Cuánta carga fluye de la esfera 1 a la esfera 2 para que lleguen al equilibrio? ¿Cuáles son los campos eléctricos en las superficies de las dos esferas?

•**23.76** Una pequeña línea de carga está alineada a lo largo del eje y positivo desde 0 ≤ y ≤ L, con L = 4.0 cm. La carga no está distribuida uniformemente, sino que tiene una carga por unidad de longitud de $\lambda = Ay$, con $A = 8.0 \cdot 10^{-7}$ C/m^2. Suponga que el potencial eléctrico es cero a una distancia infinita, encuentre el potencial eléctrico en un punto sobre el eje x como una función de x. Proporcione el valor del potencial eléctrico en x = 3.0 cm.



•**23.77** Dos cargas puntuales fijas están sobre el eje x. Una carga de –3.00 mC está ubicada en x = +2.00 m y una carga de +5.00 mC está ubicada en x = –4.00 m.

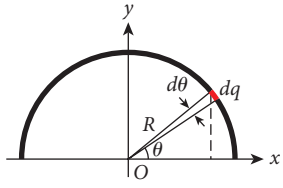
a) Encuentre el potencial eléctrico, $V(x)$, para un punto arbitrario sobre el eje x.

b) ¿En qué posición o posiciones sobre el eje *x* se cumple que $V(x) = 0$?

c) Encuentre $E(x)$ para un punto arbitrario sobre el eje *x*.

•**23.78** En uno de los mayores experimentos de física en la historia se midió la razón carga-a-masa de un electrón, q/m. Si una diferencia de potencial uniforme se crea entre dos placas, partículas atomizadas —cada una con una cantidad entera de carga— pueden suspenderse en el espacio. La hipótesis es que las partículas de masa desconocida, *M*, contienen un número neto, *n*, de electrones de masa *m* y carga *q*. Para una separación de placas igual a *d*, ¿cuál es la diferencia de potencial necesaria para suspender una partícula de masa *M* que contiene *n* electrones netos? ¿Cuál es la aceleración de la partícula si el voltaje se reduce a la mitad? ¿Cuál es la aceleración de la partícula si el voltaje se aumenta a la mitad?

•**23.79** Una distribución de carga lineal uniforme de carga total positiva *Q* tiene la forma de un semicírculo de radio *R*, como muestra la figura.



a) Sin realizar ningún cálculo, pronostique el potencial eléctrico producido por esta distribución de carga lineal en el punto *O*.

b) Confirme, por medio de cálculos directos, su pronóstico en el inciso *a*).

c) Haga un pronóstico semejante para el campo eléctrico.

••**23.80** Una carga puntal *Q* se coloca a una distancia *R* del centro de una esfera conductora de radio *a*, con $R > a$ (la carga puntual está fuera de la esfera). La esfera está conectada a tierra; es decir, conectada a una fuente ilimitada y/o sumidero distante de carga a potencial cero. (Ni la tierra distante ni la conexión afectan directamente el campo eléctrico en la vecindad de la carga de la esfera.) Como resultado, la esfera adquiere una carga de signo opuesto al signo de *Q*, y la carga puntual experimenta una fuerza de atracción hacia la esfera.

a) En forma sorprendente, el campo eléctrico *fuera de la esfera* es el mismo que produciría la carga puntual *Q* más una carga puntual *imagen especular* imaginaria *q*, con magnitud y ubicación que hacen del conjunto de puntos correspondientes a la superficie de la esfera un equipotencial de potencial cero. Es decir, la carga puntual imaginaria produce la misma contribución de campo fuera de la esfera que la carga superficial verdadera sobre la esfera. Calcule el valor y la ubicación de *q*. (*Sugerencia*: Por simetría, *q* debe estar en algún sitio sobre el eje que pasa por el centro de la esfera y la ubicación de *Q*.)

b) Calcule la fuerza ejercida sobre una carga puntual *Q* y dirigida hacia la esfera, en términos de las cantidades originales, *Q*, *R* y *a*.

c) Determine la distribución de carga superficial no uniforme verdadera sobre la esfera conductora.

24 Capacitores

FIGURA 24.1 Interacción con la pantalla táctil de un iPhone.

LO QUE APRENDEREMOS 774

24.1 Capacitancia 774
24.2 Circuitos 776
Carga y descarga de un capacitor 776
24.3 Capacitor de placas paralelas 777
Ejemplo 24.1 Área de un capacitor de placas paralelas 778
24.4 Capacitor cilíndrico 779
24.5 Capacitor esférico 779
24.6 Capacitores en circuitos 780
Capacitores en paralelo 780
Capacitores en serie 781
Ejemplo 24.2 Sistema de capacitores 782
24.7 Energía almacenada en capacitores 784
Ejemplo 24.3 Nube de tormenta 785
Problema resuelto 24.1 Energía almacenada en capacitores 786
Ejemplo 24.4 Instalación Nacional de Ignición, o NIF 786
Desfibrilador 787
24.8 Capacitores con dieléctricos 788
Ejemplo 24.5 Capacitor de placas paralelas con un dieléctrico 790
Ejemplo 24.6 Capacitancia de un cable coaxial 791
24.9 Perspectiva microscópica sobre los dieléctricos 791
Supercapacitores 792

LO QUE HEMOS APRENDIDO/ GUÍA DE ESTUDIO PARA EXAMEN 793

Práctica para resolución de problemas 794
Problema resuelto 24.2 Capacitor parcialmente lleno con un dieléctrico 794
Problema resuelto 24.3 Carga sobre un capacitor cilíndrico 796
Preguntas de opción múltiple 797
Preguntas 798
Problemas 798

LO QUE APRENDEREMOS

- Los capacitores (o condensadores) suelen constar de dos conductores o placas conductoras.
- Un capacitor puede almacenar carga sobre una placa y, por lo general, sobre la otra placa hay una carga igual y opuesta.
- La capacitancia de un capacitor es la carga almacenada sobre las placas dividida entre la diferencia de potencial resultante.
- Un capacitor puede almacenar energía potencial eléctrica.
- Un tipo común de capacitor es el de placas paralelas, que consta de dos placas paralelas conductoras.
- La capacitancia de un capacitor dado depende de su geometría.
- En un circuito, los capacitores conectados en paralelo o en serie pueden sustituirse por uno de capacitancia equivalente.
- La capacitancia de un capacitor dado se incrementa cuando se coloca un material dieléctrico entre las placas.
- Un material dieléctrico reduce el campo eléctrico entre las placas de un capacitor como resultado de la alineación de los momentos dipolares moleculares en el material dieléctrico.

Las pantallas táctiles, como la que muestra la figura 24.1, se han vuelto muy comunes, ya que se encuentran en todas partes, desde pantallas de computadoras hasta máquinas de votación. Funcionan de varias formas, de las cuales una implica el uso de una propiedad de los conductores denominada *capacitancia*, que estudiaremos en este capítulo. La capacitancia aparece siempre que dos conductores —cualquiera de los dos— están separados por una pequeña distancia. El contacto de un dedo con una pantalla táctil origina un cambio en la capacitancia que es posible detectar.

Los capacitores poseen la muy útil capacidad de almacenar carga eléctrica y luego liberarla rápidamente. Así, son de utilidad en accesorios para cámaras de flash, desfibriladores cardiacos e incluso reactores de fusión experimental; cualquier cosa que requiera la entrega rápida de una gran carga eléctrica. La mayor parte de los circuitos de cualquier tipo contienen por lo menos un capacitor. No obstante, la capacitancia presenta un inconveniente: también puede presentarse donde no se desea; por ejemplo, puede crear "diafonía": interferencia no deseada entre componentes de circuitos.

Debido a que los capacitores constituyen uno de los elementos básicos de los circuitos eléctricos, este capítulo analiza la forma en la que funcionan en circuitos simples. En los dos capítulos siguientes se cubren elementos de circuitos básicos adicionales y sus usos.

24.1 Capacitancia

FIGURA 24.2 Algunos tipos de capacitores representativos.

La figura 24.2 muestra que los capacitores existen en una amplia gama de tamaños y formas. En general, un **capacitor** consta de dos conductores separados, que suelen denominarse *placas* aunque no sean planos simples. Si analizamos uno de estos capacitores, podríamos encontrar dos láminas de papel de aluminio separadas por una capa aislante de Mylar (tereftalato de polietileno), como muestra la figura 24.3. Las capas intercaladas de papel de aluminio y Mylar pueden enrollarse con otra capa aislante en forma compacta que no semeja dos conductores paralelos, como muestra la figura 24.4. Esta técnica produce capacitores con alguno de los formatos mostrados en la figura 24.2. La capa aislante entre las dos láminas de papel de aluminio desempeña un papel crucial en las características del capacitor.

Para estudiar las propiedades de los capacitores, supondremos una geometría conveniente y luego generalizaremos los resultados. En la figura 24.5 se ilustra un **capacitor de placas paralelas**, que consta de dos placas conductoras paralelas, cada una de área A, separadas por una distancia, d, y que se supone están en un vacío. El capacitor se carga al colocar una carga $+q$ sobre una placa y una carga $-q$ en la otra placa. (No es necesario colocar cargas exactas pero opuestas sobre las dos placas del capacitor para cargarlo; esto se logra con cualquier diferencia de carga. Pero, para efectos prácticos, todo el dispositivo debe permanecer neutro, para lo cual se requieren cargas de la misma magnitud y signo opuesto sobre las dos placas.) Debido a que las placas son conductoras, son superficies equipotenciales; así, los electrones sobre las placas se distribuyen ellos mismos de manera uniforme sobre las superficies.

FIGURA 24.3 Dos láminas de papel de aluminio separadas por una capa aislante.

A continuación aplicamos los resultados obtenidos en el capítulo 23 para determinar el potencial eléctrico y el campo eléctrico del capacitor de placas

paralelas. (En principio, podemos hacer esto al calcular el potencial eléctrico y el campo eléctrico para distribuciones de carga continuas. Sin embargo, a fin de obtener la solución para esta configuración física se requiere una computadora.) Coloquemos el origen del sistema de coordenadas a la mitad de la distancia entre las placas, con el eje x alineado con las dos placas. En la figura 24.6 se muestra una gráfica tridimensional del potencial eléctrico, $V(x,y)$, en el plano xy, semejante a las gráficas en el capítulo 23.

El potencial en la figura 24.6 posee una caída muy pronunciada (y aproximadamente lineal) entre las dos placas y una caída más gradual fuera de las placas. Esto significa que puede esperarse que el campo eléctrico sea más intenso entre las placas y más débil fuera de éstas. La figura 24.7*a*) presenta una gráfica de contorno del potencial eléctrico mostrado en la figura 24.6 para las dos placas paralelas. Los valores de potencial negativo se muestran sombreados en verde, y los valores positivos, en rosa. Las líneas equipotenciales, que son las líneas donde las superficies equipotenciales tridimensionales cortan el plano xy, mostradas en la figura 24.6, también se señalan en esta gráfica, así como las representaciones de las dos placas. Observe que todas las líneas equipotenciales entre las placas son equidistantes y paralelas entre sí.

FIGURA 24.4 El sándwich con una lámina de papel de aluminio y Mylar mostrado en la figura 24.3 puede enrollarse con una capa aislante para producir un capacitor con geometría compacta.

En la figura 24.7*b*) las líneas de campo eléctrico se han agregado a la gráfica de contorno. El campo eléctrico se determina usando $\vec{E}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}V(\vec{r})$, que se presentó en el capítulo 23. Lejos de las dos placas, el campo eléctrico semeja bastante al generado por un dipolo compuesto por dos cargas puntuales. Resulta fácil ver que las líneas de campo eléctrico son perpendiculares a las líneas de contorno (¡que representan las superficies equipotenciales!) en todas partes en el espacio.

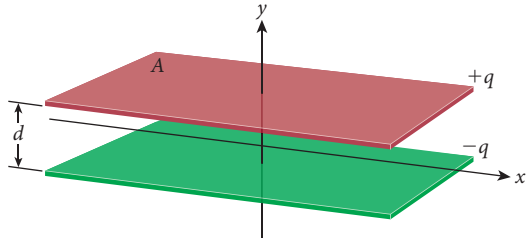


FIGURA 24.5 Capacitor de placas paralelas que consta de dos placas conductoras, cada una de área A, separadas por una distancia d.

Pero las líneas de campo eléctrico en la figura 24.7*b*) no contienen ninguna información idónea sobre la magnitud del campo eléctrico. Otra representación del campo eléctrico, en la figura 24.7*c*), muestra los vectores de campo eléctrico en puntos equidistantes en la rejilla en el plano xy. (Se ha eliminado el sombreado de contorno del potencial para reducir el desorden visual.) En esta gráfica, la intensidad de campo en cada punto de la rejilla es proporcional al tamaño de la flecha en ese punto. Usted puede ver claramente que el campo eléctrico entre las dos placas es perpendicular a éstas y mucho más grande en magnitud que el campo fuera de las placas. El campo en el espacio fuera de las placas se denomina *campo marginal*. Si las placas se aproximan entre sí, el campo eléctrico entre ellas permanece igual, mientras el campo marginal se reduce.

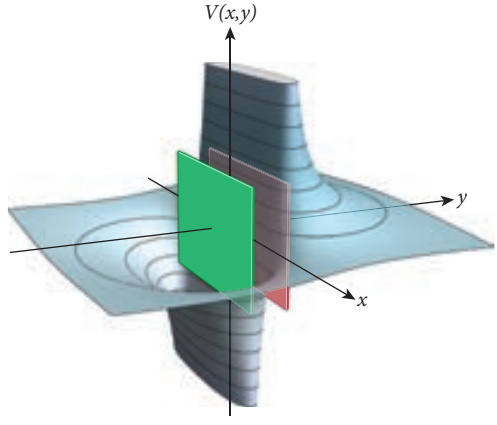


FIGURA 24.6 Potencial eléctrico en el plano xy para las dos placas paralelas con cargas opuestas (superpuestas) de la figura 24.5.

La diferencia de potencial, ΔV, entre las dos placas paralelas del capacitor es proporcional a la cantidad de carga en las placas. La constante de proporcionalidad es la **capacitancia**, C, del dispositivo, que se define como

$$C = \left| \frac{q}{\Delta V} \right|. \tag{24.1}$$

La capacitancia de un dispositivo depende del área de las placas y la distancia entre éstas, pero no de la carga de la diferencia de potencial. (Este hecho se demostrará para ésta y otras geometrías en las siguientes secciones.) Por definición, la capacitancia es un número positivo. Indica cuánta carga se requiere para

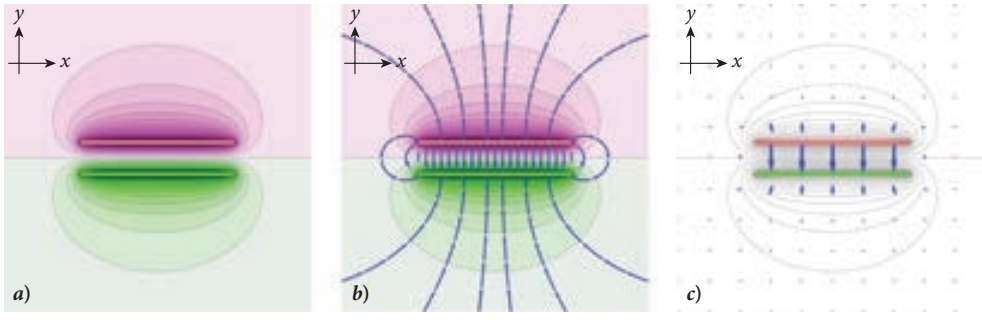


FIGURA 24.7 *a*) Gráfica de contorno bidimensional del mismo potencial que en la figura 24.6. *b*) Gráfica de contorno con líneas de campo eléctrico superpuestas. *c*) Intensidad del campo eléctrico en puntos espaciados regularmente en el plano xy, representada por los tamaños de las flechas.

producir una diferencia de potencial dada entre las placas. Mientras más grande sea la capacitancia, más carga se requiere para producir una diferencia de potencial dada. (Observe que una práctica común consiste en usar V, y no ΔV, para representar la diferencia de potencial. Asegúrese de comprender cuándo V se usa para el potencial y cuándo para la diferencia de potencial.)

La ecuación 24.1, la definición de capacitancia, puede volver a escribirse en esta forma usual:

$$q = C\Delta V.$$

La ecuación 24.1 indica que las unidades de la capacitancia son las unidades de carga divididas entre las unidades de potencial, o coulombs por voltio. Una nueva unidad se asignó a la capacitancia, denominada en honor del físico británico Michael Faraday (1791-1867). La unidad se denomina **faradio** (F):

$$1\ \text{F} = \frac{1\ \text{C}}{1\ \text{V}}. \tag{24.2}$$

Un faradio representa una capacitancia muy grande. Por lo general, los capacitores tienen una capacitancia en el intervalo desde $1\ \mu\text{F} = 1 \cdot 10^{-6}$ F hasta $1\ \text{pF} = 1 \cdot 10^{-12}$ F.

Con la definición del faradio podemos escribir la permitividad del espacio libre, ϵ_0 (analizada en el capítulo 21) como $8.85 \cdot 10^{-12}$ F/m.

24.2 Circuitos

Los siguientes capítulos presentan circuitos cada vez más complejos e interesantes. Así pues, analicemos qué es un circuito, en general.

Un **circuito eléctrico** consta de simples alambres o algunas otras rutas conductoras que conectan elementos del circuito. Estos elementos pueden ser capacitores, que analizaremos con mayor detalle en este capítulo. Otros elementos importantes del circuito son los resistores y los galvanómetros (que se presentarán en el capítulo 25), el voltímetro y el amperímetro (que se presentarán en el capítulo 26), y los inductores (analizados en el capítulo 29).

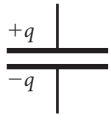
Los circuitos suelen necesitar algún tipo de energía, que puede suministrarse por medio de una batería o por una fuente de alimentación de CA (corriente alterna). El concepto de batería, un dispositivo que mantiene una diferencia de potencial a través de sus terminales por medio de reacciones químicas, fue presentado en el capítulo 23; para efectos de un circuito, puede considerarse simplemente como una fuente externa de diferencia de potencial electrostático, algo que proporciona una diferencia de potencial fija (que suele denominarse *voltaje*). Una fuente de alimentación de CA puede producir el mismo resultado con un circuito diseñado especialmente que mantiene una diferencia de potencial fija. En el capítulo 29 sobre inducción y el capítulo 30 sobre oscilaciones y corrientes electromagnéticas se analizarán las fuentes de alimentación de CA con más detalle. La figura 24.8 enumera los símbolos para los elementos de circuitos, que se usan en todo este capítulo y en los capítulos siguientes.

Cable		Galvanómetro	G
Capacitor		Voltímetro	V
Resistor		Amperímetro	A
Inductor		Batería	
Interruptor		Fuente de CA	

FIGURA 24.8 Símbolos de uso común para elementos de circuitos.

24.1 Ejercicio en clase

La figura muestra un capacitor cargado. ¿Cuál es la carga neta sobre el capacitor?



a) $(+q)+(-q) = 0$

b) $|+q| + |-q| = 0$

c) $|+q| + |-q| = 2q$

d) $(+q) + (-q) = 2q$

e) q

Carga y descarga de un capacitor

Un capacitor se carga al conectarlo a una batería o a una fuente de alimentación de voltaje constante para crear un circuito. La carga fluye hacia el capacitor desde la batería o la fuente de alimentación hasta que la diferencia de potencial a través del capacitor sea la misma que el voltaje suministrado. Si el capacitor se desconecta, retiene su carga y diferencia de potencial. Un capacitor verdadero experimenta fuga de carga con el tiempo. No obstante, en este capítulo supondremos que un capacitor aislado retiene indefinidamente su carga y diferencia de potencial.

La figura 24.9 ilustra el proceso de carga con un diagrama de circuito. En este diagrama, las líneas representan alambres conductores. La batería (fuente de alimentación) está representada por el símbolo ⊣⊢, identificado con un signo más y un signo menos para indicar las asignaciones de potencial de las terminales y con la diferencia de potencial, V. El capacitor está representado por el símbolo ⊣⊢, identificado por C. Este circuito también contiene un interruptor. Cuando el interruptor está entre las posiciones a y b, la batería no está conectada y el circuito está abierto. Cuando el interruptor está en la posición a, el circuito está cerrado; la batería está conectada a través del capacitor y el capacitor se carga. Cuando el interruptor está en la posición b, el circuito está cerrado de una manera diferente. La batería se retira del circuito, las dos placas del capacitor se conectan entre sí y puede fluir carga de una placa a la otra por el alambre, que ahora forma una conexión física entre las placas. Cuando la carga se ha disipado sobre ambas placas, la diferencia de potencial entre las placas desciende a cero y se dice que el capacitor está descargado. (La carga y la descarga de un capacitor se estudian en detalle cuantitativo en el capítulo 26.)

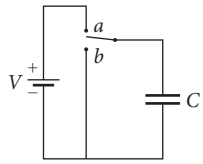


FIGURA 24.9 Circuito simple usado para cargar y descargar un capacitor.

24.3 Capacitor de placas paralelas

En la sección 24.1 se analizaron las características generales del potencial eléctrico y el campo eléctrico de dos placas con cargas opuestas. En esta sección se aborda cómo determinar la intensidad del campo eléctrico entre las placas y la diferencia de potencial entre ellas. Consideremos un capacitor de placas paralelas ideal en la forma de dos placas paralelas conductoras en el vacío con una carga $+q$ sobre una placa y $-q$ sobre la otra (figura 24.10). (Este capacitor de placas paralelas ideal tiene placas muy grandes, bastante próximas entre sí, mucho más de lo que se aprecia en la figura 24.10. Esta configuración nos permite ignorar el campo marginal, que es el pequeño campo eléctrico fuera del espacio entre las placas, mostrado en la figura 24.7*c*.) Cuando las placas están cargadas, la placa superior tiene una carga $+q$, y la inferior, una de $-q$. El campo eléctrico entre las dos placas apunta de la placa con carga positiva hacia abajo en dirección de la que tiene carga negativa. El campo cerca de los extremos de las placas, denominado campo marginal (compare con la figura 24.7), puede ignorarse, es decir, podemos suponer que el campo eléctrico es constante, con magnitud E, en todas partes entre las placas y cero fuera de ahí. El campo eléctrico siempre es perpendicular a la superficie de las dos placas paralelas.

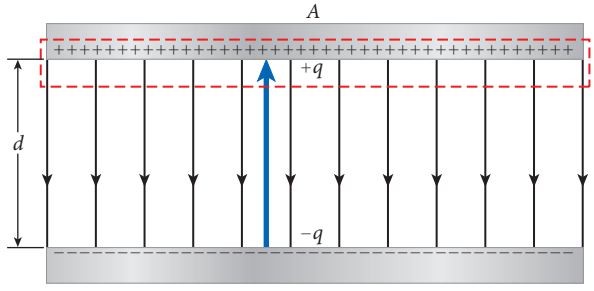


FIGURA 24.10 Vista lateral de un capacitor de placas paralelas que consta de dos placas de área común A separadas por una pequeña distancia, d. La línea roja discontinua es una superficie gaussiana. Las flechas negras que apuntan hacia abajo representan el campo eléctrico. La flecha azul indica una ruta de integración.

El campo eléctrico puede encontrarse usando la ley de Gauss:

$$\oiint \vec{E}\cdot d\vec{A} = \frac{q}{\epsilon_0}. \tag{24.3}$$

¿Cómo evaluamos la integral sobre la superficie gaussiana (cuya sección transversal se muestra como una línea roja discontinua en la figura 24.10)? Sumamos las contribuciones de la parte superior, la parte inferior y los lados. Los lados de la superficie gaussiana son muy pequeños, de modo que podemos ignorar las contribuciones del campo marginal. La superficie superior pasa por el capacitor, donde el campo eléctrico es cero (recuerde el blindaje; vea el capítulo 22). Esto deja sólo la parte inferior de la superficie gaussiana. Los vectores de campo eléctrico apuntan directamente hacia abajo y son perpendiculares a las superficies conductoras. El vector normal a la superficie, $d\vec{A}$, también apunta en la misma dirección y, por lo tanto, es paralelo a $\vec{E}$. En consecuencia, el producto escalar es $\vec{E}\cdot d\vec{A} = E\,dA\cos 0° = E\,dA$. Entonces, para la integral sobre la superficie gaussiana tenemos

$$\oiint \vec{E}\cdot d\vec{A} = \iint_{\text{inferior}} E\,dA = E\iint_{\text{inferior}} dA = EA,$$

donde A es el área de la placa. En otras palabras, para el capacitor de placas paralelas, la ley de Gauss produce

$$EA = \frac{q}{\epsilon_0}, \tag{24.4}$$

donde A es el área superficial de la placa con carga positiva y q es la magnitud de la carga de la placa con carga positiva. La carga sobre cada placa reside por completo en la superficie interior debido a la presencia de carga opuesta sobre la otra placa.

La diferencia de potencial eléctrico a través de las dos placas en términos del campo eléctrico es

$$\Delta V = -\int_{\text{i}}^{\text{f}} \vec{E} \cdot d\vec{s}. \tag{24.5}$$

La ruta de integración se escoge de la placa con carga negativa a la placa con carga positiva, a lo largo de la flecha azul en la figura 24.10. Puesto que el campo eléctrico es antiparalelo a esta ruta de integración (vea la figura 24.10), el producto escalar es $\vec{E} \cdot d\vec{s} = E\,ds\cos 180° = -E\,ds$. Por lo tanto, la integral en la ecuación 24.5 se reduce a

$$\Delta V = Ed = \frac{qd}{\epsilon_0 A},$$

donde hemos usado la ecuación 24.4 para relacionar el campo eléctrico con la carga. Al combinar esta expresión para la diferencia de potencial y la definición de capacitancia (ecuación 24.1), se obtiene una expresión para la capacitancia de un capacitor de placas paralelas:

$$C = \left|\frac{q}{\Delta V}\right| = \frac{\epsilon_0 A}{d}. \tag{24.6}$$

Observe que la capacitancia de un capacitor de placas paralelas depende sólo del área de las placas y la distancia entre ellas. En otras palabras, sólo la geometría del capacitor afecta su capacitancia. La cantidad de carga sobre el capacitor o la diferencia de potencial entre sus placas no afectan su capacitancia.

24.2 Ejercicio en clase

Suponga que usted carga un capacitor de placas paralelas usando una batería y luego retira la batería, aislando el capacitor y dejándolo cargado. Luego, usted aleja las placas del capacitor. La diferencia de potencial entre las placas

a) Aumenta.

b) Disminuye.

c) Permanece igual.

d) No puede determinarse.

24.1 Oportunidad de autoevaluación

Usted carga un capacitor de placas paralelas usando una batería. Luego retira la batería y aísla el capacitor. Si disminuye la distancia entre las placas del capacitor, ¿qué ocurre al campo eléctrico entre las placas?

EJEMPLO 24.1 Área de un capacitor de placas paralelas

La distancia que separa las placas de un capacitor de placas paralelas es 1.00 mm (figura 24.11).

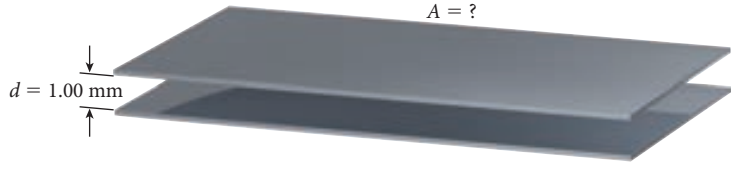


FIGURA 24.11 Un capacitor de placas paralelas cuyas placas están separadas por 1.00 mm.

PROBLEMA

¿Cuál es el área necesaria para que la capacitancia del capacitor sea de 1.00 F?

SOLUCIÓN

La capacitancia está dada por

$$C = \frac{\epsilon_0 A}{d}. \tag{i}$$

Al despejar el área en la ecuación (i) y hacer $d = 1.00 \cdot 10^{-3}$ m y $C = 1.00$ F, obtenemos

$$A = \frac{dC}{\epsilon_0} = \frac{\left(1.00 \cdot 10^{-3}\ \text{m}\right)\left(1.00\ \text{F}\right)}{\left(8.85 \cdot 10^{-12}\ \text{F/m}\right)} = 1.13 \cdot 10^{8}\ \text{m}^2.$$

Si estas placas fuesen cuadradas, ¡cada una mediría 10.6 km por 10.6 km! Este resultado recalca que un faradio es una cantidad de capacitancia extremadamente grande.

24.3 Ejercicio en clase

Suponga que tiene un capacitor de placas paralelas con área A y separación de placas d, pero restricciones de espacio sobre un tablero de circuitos lo obligan a reducir el área del capacitor por un factor de 2. ¿Qué debe hacer para compensar y retener el mismo valor de la capacitancia?

a) Reducir d por un factor de 2.

b) Aumentar d por un factor de 2.

c) Reducir d por un factor de 4.

d) Aumentar d por un factor de 4.

24.4 Capacitor cilíndrico

Considere un capacitor construido por dos cilindros conductores colineales con vacío entre los cilindros (figura 24.12). El cilindro interior tiene un radio r_1, y el exterior, un radio r_2. El cilindro interior tiene carga $-q$, y el exterior, una carga $+q$. Entonces, el campo eléctrico entre los dos cilindros está dirigido radialmente hacia dentro y es perpendicular a las superficies de ambos cilindros. Así como hacemos para un capacitor de placas paralelas, suponemos que los cilindros son largos y que esencialmente no hay campo marginal cerca de sus extremos.

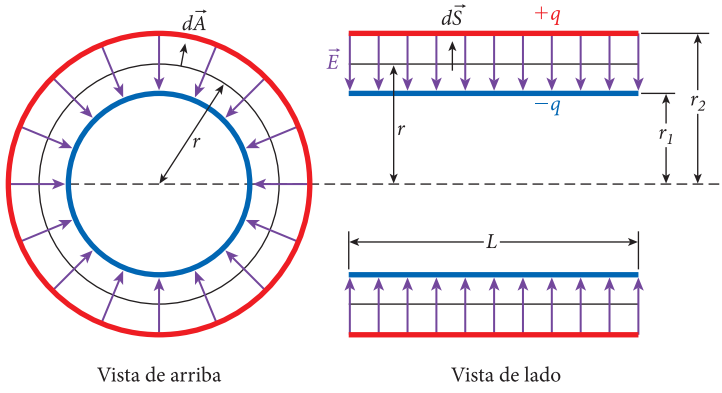


FIGURA 24.12 Un capacitor de placas paralelas que consta de dos largos cilindros conductores colineales. El círculo negro indica una superficie gaussiana. Las flechas moradas representan el campo eléctrico.

Podemos aplicar la ley de Gauss para encontrar el campo eléctrico entre los dos cilindros, usando una superficie gaussiana en forma de cilindro con radio r y longitud L que es colineal con los dos cilindros del capacitor, como muestra la figura 24.12. Entonces, la carga encerrada es $-q$ porque sólo la superficie con carga negativa del capacitor está dentro de la superficie gaussiana. El vector normal a la superficie gaussiana, $d\vec{A}$, apunta radialmente hacia fuera y, por lo tanto, es antiparalelo al campo eléctrico. Esto significa que $\vec{E}\cdot d\vec{A} = E\,dA\cos 180° = -E\,dA$. Luego, al aplicar la ley de Gauss y usar el hecho de que el área del cilindro es $A = 2\pi rL$ se obtiene

$$\oiint \vec{E}\cdot d\vec{A} = -E\oiint dA = -E2\pi rL = \frac{-q}{\epsilon_0}. \tag{24.7}$$

La ecuación 24.7 puede reordenarse para obtener una expresión para la magnitud del campo eléctrico:

$$E = \frac{q}{\epsilon_0 2\pi rL}, \quad \text{para } r_1 < r < r_2.$$

La diferencia de potencial entre las dos placas cilíndricas paralelas del capacitor se obtiene al integrar sobre el campo eléctrico, $\Delta V = -\int_i^f \vec{E}\cdot d\vec{s}$. Para la ruta de integración en la dirección radial desde el cilindro con carga negativa en r_1 hasta el cilindro con carga positiva en r_2, el campo eléctrico es antiparalelo a la ruta. Por lo tanto, $\vec{E}\cdot d\vec{s}$ en la ecuación 24.5 se vuelve $-E\,dr$. En consecuencia,

$$\Delta V = -\int_i^f \vec{E}\cdot d\vec{s} = \int_{r_1}^{r_2} E\,dr = \int_{r_1}^{r_2} \frac{q}{\epsilon_0 2\pi rL}dr = \frac{q}{\epsilon_0 2\pi L}\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right).$$

Esta expresión para la diferencia de potencial y la ecuación 24.1 producen una expresión para la capacitancia:

$$C = \left|\frac{q}{\Delta V}\right| = \frac{q}{\frac{q}{\epsilon_0 2\pi L}\ln\left(r_2/r_1\right)} = \frac{2\pi\epsilon_0 L}{\ln\left(r_2/r_1\right)}. \tag{24.8}$$

Justo como el capacitor de placas paralelas, la capacitancia de un capacitor cilíndrico depende sólo de la geometría del capacitor.

24.5 Capacitor esférico

A continuación consideraremos un capacitor esférico formado por dos esferas concéntricas conductoras con radios r_1 y r_2 con vacío entre las dos esferas (figura 24.13). La esfera interior tiene carga $+q$, y la esfera exterior, $-q$. El campo eléctrico es perpendicular a las superficies de ambas esferas y apunta radialmente de la esfera interior con carga positiva hacia la esfera exterior con carga negativa, como se muestra con las flechas moradas en la figura 24.13. (Previamente, para los capacitores de placas paralelas y cilíndrico, la integración era de la carga negativa a la positiva. En esta sección veremos qué ocurre cuando se invierte la dirección.) Para determinar la magnitud del campo eléctrico, empleamos la ley de Gauss, usando una superficie gaussiana que consta de una esfera concéntrica con las dos esferas conductoras y que tiene un radio r tal que $r_1 < r < r_2$. El

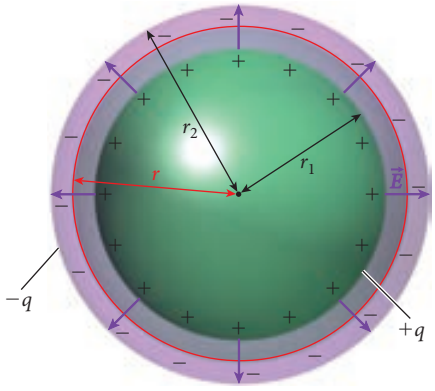


FIGURA 24.13 Capacitor esférico que consta de dos esferas concéntricas conductoras. La superficie gaussiana está representada por el círculo rojo de radio r.

campo eléctrico también es perpendicular a la superficie gaussiana en todas partes, de modo que tenemos

$$\oiint \vec{E}\cdot d\vec{A} = EA = E\left(4\pi r^2\right) = \frac{q}{\epsilon_0}. \tag{24.9}$$

Al despejar E en la ecuación (24.9), obtenemos

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}, \qquad \text{para } r_1 < r < r_2.$$

Para la diferencia de potencial procedemos en forma semejante a como hicimos para el capacitor cilíndrico y obtenemos

$$\Delta V = -\int_i^f \vec{E}\cdot d\vec{s} = -\int_{r_1}^{r_2} E\,dr = -\int_{r_1}^{r_2} \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\,dr = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right).$$

En este caso, $\Delta V < 0$. ¿Por qué? ¡Porque integramos desde la carga positiva hasta la carga negativa! La carga positiva está a un potencial más alto que la negativa, lo cual resulta en una diferencia de potencial negativa. La ecuación 24.1 proporciona la capacitancia de un capacitor esférico como el valor absoluto de la carga dividido entre el valor absoluto de la diferencia de potencial:

$$C = \left|\frac{q}{\Delta V}\right| = \frac{q}{\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)} = \frac{4\pi\epsilon_0}{\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)}.$$

Esto puede escribirse en forma más conveniente:

$$C = 4\pi\epsilon_0 \frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1}. \tag{24.10}$$

Observe de nuevo que la capacitancia depende sólo de la geometría del dispositivo.

Podemos obtener la capacitancia de una simple esfera conductora a partir de la ecuación 24.10, al suponer que el conductor esférico exterior está infinitamente lejos. Con $r_2 = \infty$ y $r_1 = R$, la capacitancia de un conductor esférico aislado está dada por

$$C = 4\pi\epsilon_0 R. \tag{24.11}$$

24.4 Ejercicio en clase

Si los radios interior y exterior de un capacitor esférico se incrementan por un factor de 2, ¿qué ocurre con la capacitancia?

a) Se reduce por un factor de 4.

b) Se reduce por un factor de 2.

c) Permanece igual.

d) Aumenta por un factor de 2.

e) Aumenta por un factor de 4.

24.6 Capacitores en circuitos

Como ya se planteó, un circuito es una serie de dispositivos eléctricos conectados por medio de alambres conductores. Los capacitores pueden conectarse de varias formas en los circuitos, pero las dos formas básicas de conexión son en paralelo y en serie.

Capacitores en paralelo

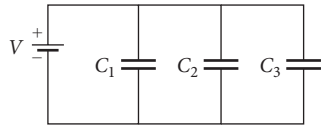


FIGURA 24.14 Circuito simple con una batería y tres capacitores en paralelo.

La figura 24.14 muestra un circuito con tres capacitores **conectados en paralelo**. Cada uno tiene una placa conectada directamente a la terminal positiva de una batería con diferencia de potencial V y una placa conectada directamente a la terminal negativa de esa batería. El mismo circuito aparece en la parte superior de la figura 24.15, y en la parte inferior se muestra el valor del potencial en cada parte del circuito en una gráfica tridimensional. Esto ilustra que todas las placas del capacitor conectadas a la terminal positiva de la batería están al mismo potencial. Todas las otras placas de los capacitores están al potencial de la terminal negativa de la batería (igualada a cero). (Las terminales negativa y positiva de la batería están unidas con un velo azul tenue para mostrar que forman parte del mismo dispositivo y proporcionar una mejor representación visual de la diferencia de potencial entre las dos terminales. Las placas de cada capacitor están unidas por una banda verde tenue.)

La pieza de información clave proporcionada por la figura 24.15 es que la diferencia de potencial a través de cada uno de los tres capacitores es la misma, ΔV. Así, para los tres capacitores en este circuito tenemos

$$q_1 = C_1 \Delta V$$
$$q_2 = C_2 \Delta V$$
$$q_3 = C_3 \Delta V.$$

En general, la carga sobre cada capacitor puede tener un valor diferente. Los tres capacitores pueden considerarse como un capacitor equivalente que mantiene una carga total q, dada por

$$q = q_1 + q_2 + q_3 = C_1\Delta V + C_2\Delta V + C_3\Delta V = (C_1 + C_2 + C_3)\Delta V.$$

Por lo tanto, la capacitancia equivalente para este capacitor es

$$C_{eq} = C_1 + C_2 + C_3.$$

Este resultado puede extenderse a cualquier número n de capacitores conectados en paralelo:

$$C_{eq} = \sum_{i=1}^{n} C_i. \qquad (24.12)$$

En otras palabras, la capacitancia equivalente de un sistema de capacitores en paralelo es justo la suma de las capacitancias. Así, varios capacitores en paralelo en un circuito pueden sustituirse por una capacitancia equivalente dada por la ecuación 24.12, como muestra la figura 24.16.

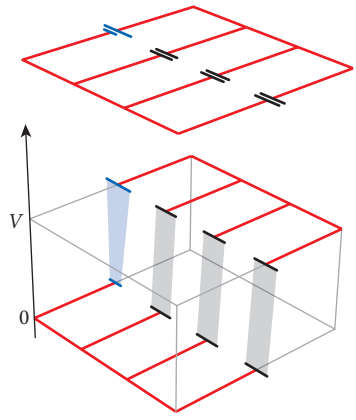


FIGURA 24.15 El potencial en diferentes partes del circuito de la figura 24.14.

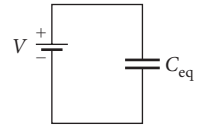


FIGURA 24.16 Los tres capacitores en la figura 24.14 pueden sustituirse por una capacitancia equivalente.

Capacitores en serie

La figura 24.17 ilustra un circuito con tres capacitores **conectados en serie**. En esta configuración, la batería produce una carga igual de $+q$ sobre la placa derecha de cada capacitor y una carga igual de $-q$ sobre la placa izquierda de cada capacitor. Este hecho puede clarificarse si empezamos por los capacitores descargados. Luego se conecta la batería a la disposición en serie de los tres capacitores. La placa positiva de C_3 se conecta a la terminal positiva de la batería y comienza a reunir carga positiva suministrada por la batería. Esta carga positiva induce una carga negativa de la misma magnitud sobre la otra placa de C_3. La placa de C_3 con carga negativa se conecta a la placa derecha de C_2, que entonces se vuelve cargada positivamente porque ninguna carga neta puede acumularse en la sección aislada que consta de la placa izquierda de C_3 y la placa derecha de C_2. La placa con carga positiva de C_2 induce una carga negativa de la misma magnitud sobre la otra placa de C_2. A su vez, la placa con carga negativa de C_2 deja una carga positiva sobre la placa de C_1 con la que está conectada, lo cual induce una carga negativa sobre la placa izquierda de C_1. La placa con carga negativa de C_1 está conectada a la terminal negativa de la batería. Así, la carga circula de la batería, cargando la placa positiva de C_3 a la carga de valor $+q$ e induciendo una carga correspondiente de $-q$ en la placa con carga negativa de C_1. Por lo tanto, cada capacitor termina con la misma carga.

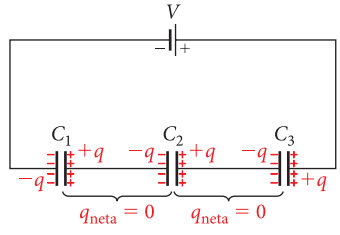


FIGURA 24.17 Circuito simple con tres capacitores en serie.

Cuando los tres capacitores en el circuito de la figura 24.17 están cargados, la suma de las caídas de potencial a través de los tres debe ser igual a la diferencia de potencial suministrada por la batería. Esto se ilustra en la figura 24.18, que es una representación tridimensional del potencial en el circuito con los tres capacitores en serie, semejante a la de la figura 24.15. (Observe que las caídas de potencial en los tres capacitores en serie no son iguales; esto es cierto en general para una conexión en serie.)

Como puede ver a partir de la figura 24.18, la suma de las caídas de potencial en los tres capacitores debe ser igual a la diferencia de potencial total, ΔV, suministrada por la batería. Debido a que cada capacitor tiene la misma carga, tenemos

$$\Delta V = \Delta V_1 + \Delta V_2 + \Delta V_3 = \frac{q}{C_1} + \frac{q}{C_2} + \frac{q}{C_3} = q\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}\right).$$

La capacitancia equivalente puede escribirse como

$$\Delta V = \frac{q}{C_{eq}},$$

donde

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}. \qquad (24.13)$$

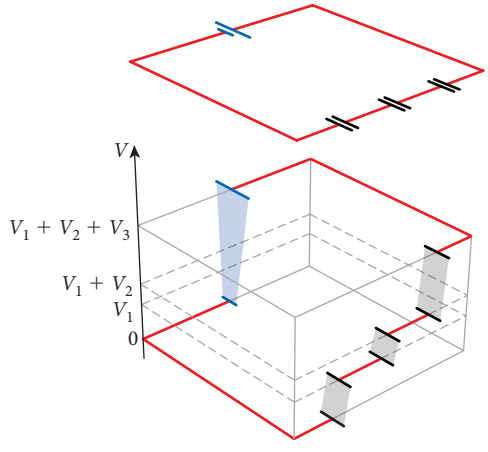


FIGURA 24.18 El potencial en un circuito con tres capacitores en serie.

Así, los tres capacitores en serie en el circuito mostrado en la figura 24.17 pueden sustituirse por una capacitancia equivalente igual por la ecuación 24.13, produciendo el mismo diagrama de circuito que el de la figura 24.16.

24.5 Ejercicio en clase

Para un circuito con tres capacitores en serie, la capacitancia equivalente siempre debe ser

a) Igual a la mayor de las tres capacitancias individuales.

b) Igual a la menor de las tres capacitancias individuales.

c) Más grande que la mayor de las tres capacitancias individuales.

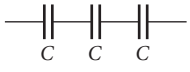
d) Más pequeña que la menor de las tres capacitancias individuales.

24.2 Oportunidad de autoevaluación

¿Cuál es la capacitancia equivalente para cuatro capacitores de 10.0 μF conectados en serie? ¿Cuál es la capacitancia equivalente para cuatro capacitores de 10.0 μF conectados en paralelo?

24.7 Ejercicio en clase

Tres capacitores, cada uno con capacitancia C, están conectados como se muestra en la figura. ¿Cuál es la capacitancia equivalente para esta disposición de capacitores?



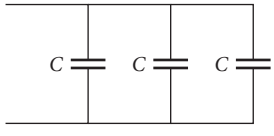
a) $C/3$ *d*) $9C$

b) $3C$ *e*) Ninguna de las anteriores.

c) $C/9$

24.8 Ejercicio en clase

Tres capacitores, cada uno con capacitancia C, están conectados como se muestra en la figura. ¿Cuál es la capacitancia equivalente para esta disposición de capacitores?



a) $C/3$ *d*) $9C$

b) $3C$ *e*) Ninguna de las anteriores.

c) $C/9$

24.6 Ejercicio en clase

La caída de potencial de un circuito con tres capacitores en serie de capacitancias individuales diferentes es

a) la misma a través de cada capacitor y tiene el mismo valor que la diferencia de potencial suministrada por la batería.

b) la misma a través de cada capacitor y tiene $\frac{1}{3}$ del valor que la diferencia de potencial suministrada por la batería.

c) mayor a través del capacitor con la menor capacitancia.

d) mayor a través del capacitor con la mayor capacitancia.

Para un sistema de n capacitores, la ecuación 24.13 se generaliza a

$$\frac{1}{C_{\text{eq}}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{C_i}. \tag{24.14}$$

Por lo tanto, la capacitancia de un sistema de capacitores en serie siempre es más pequeña que la menor de las capacitancias en el sistema.

Encontrar capacitancias equivalentes para capacitores en serie y en paralelo permite resolver problemas que implican circuitos complicados, como se ilustra en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 24.2 Sistema de capacitores

PROBLEMA

Considere el circuito mostrado en la figura 24.19*a*), una disposición que se ve complicada, de cinco capacitores con una batería. ¿Cuál es la capacitancia combinada de este conjunto de cinco capacitores? Si cada capacitor tiene una capacitancia de 5 nF, ¿cuál es la capacitancia equivalente de la disposición? Si la diferencia de potencial de la batería es 12 V, ¿cuál es la carga sobre cada capacitor?

SOLUCIÓN

Este problema puede parecer complicado al principio, pero puede simplificarse por pasos secuenciados, usando las reglas para capacitancias equivalentes de capacitores en serie y en paralelo. Empezamos con las estructuras más interiores del circuito y trabajaremos hacia afuera.

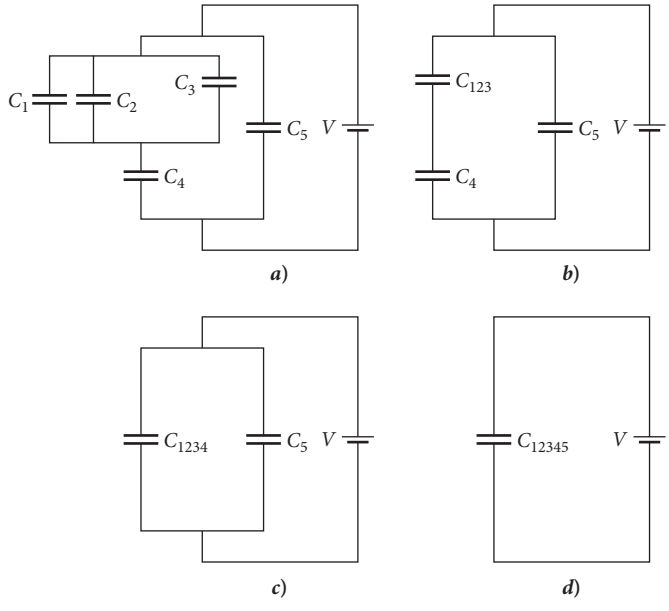


FIGURA 24.19 Sistema de capacitores: *a*) configuración original del circuito; *b*) reducción de capacitores en paralelo a su equivalente; *c*) reducción de capacitores en serie a su equivalente; *d*) capacitancia equivalente para todo el conjunto de capacitores.

PASO 1

Al ver los capacitores 1 y 2 en la figura 24.19*a*), de inmediato se observa que están en paralelo. Debido a que el capacitor 3 está algo alejado, resulta menos evidente que también está en paralelo con 1 y 2. No obstante, las placas superiores de estos tres capacitores están conectadas por alambres, de modo que están al mismo potencial. Lo mismo es válido para las placas inferiores, de modo que los tres capacitores están en paralelo. Según la ecuación 24.12, la capacitancia equivalente para estos tres capacitores es

$$C_{123} = \sum_{i=1}^{3} C_i = C_1 + C_2 + C_3.$$

Esta sustitución se muestra en la figura 24.19*b*).

PASO 2

En la figura 24.19*b*), C_{123} y C_4 están en serie. Por lo tanto, su capacitancia equivalente es, según la ecuación 24.14,

$$\frac{1}{C_{1234}} = \frac{1}{C_{123}} + \frac{1}{C_4} \Rightarrow C_{1234} = \frac{C_{123}C_4}{C_{123} + C_4}.$$

Esta sustitución se muestra en la figura 24.19*c*).

PASO 3

Finalmente, C_{1234} y C_5 están en paralelo en la figura 24.19*c*). En consecuencia, podemos repetir el cálculo para dos capacitores en paralelo y encontrar la capacitancia equivalente de todos los capacitores:

$$C_{12345} = C_{1234} + C_5 = \frac{C_{123}C_4}{C_{123} + C_4} + C_5 = \frac{(C_1 + C_2 + C_3)C_4}{C_1 + C_2 + C_3 + C_4} + C_5.$$

Este resultado proporciona el circuito simple mostrado en la figura 24.19*d*).

PASO 4: INSERTAR LOS NÚMEROS PARA LOS CAPACITORES

Ahora podemos encontrar la capacitancia equivalente si todos los capacitores tienen capacitancia idéntica de 5 nF:

$$\left(\frac{(5+5+5)5}{5+5+5+5} + 5\right) \text{nF} = 8.75 \text{ nF}.$$

Como puede ver, más de la mitad de la capacitancia total de esta disposición es proporcionada sólo por el capacitor 5. Este resultado muestra que debe tener mucho cuidado sobre la forma en la que se disponen los capacitores en los circuitos.

PASO 5: CALCULAR LAS CARGAS SOBRE LOS CAPACITORES

C_{1234} y C_5 están en paralelo. Por lo tanto, tienen la misma diferencia de potencial a través de ellos, 12 V. Entonces, la carga sobre C_5 es

$$q_5 = C_5 \Delta V = (5 \text{ nF})(12 \text{ V}) = 60 \text{ nC}.$$

C_{1234} está compuesto por C_{123} y C_4 en serie. Por lo tanto, C_{123} y C_4 deben tener la misma carga q_4, de modo que

$$\Delta V = \Delta V_{123} + \Delta V_4 = \frac{q_4}{C_{123}} + \frac{q_4}{C_4} = q_4\left(\frac{1}{C_{123}} + \frac{1}{C_4}\right).$$

Entonces, la carga sobre C_4 es

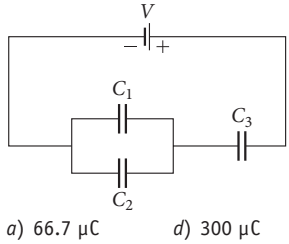
$$q_4 = \Delta V \frac{C_{123}C_4}{C_{123} + C_4} = \Delta V \frac{(C_1 + C_2 + C_3)C_4}{C_1 + C_2 + C_3 + C_4} = (12 \text{ V})\frac{(15 \text{ nF})(5 \text{ nF})}{20 \text{ nF}} = 45 \text{ nC}.$$

C_{123} es equivalente a tres capacitores en paralelo y también tiene la misma carga que C_4, o 45 nC. Los tres capacitores, C_1, C_2 y C_3, tienen la misma capacitancia, la misma diferencia de potencial a través de ellos ya que están en paralelo, y la suma de la carga sobre estos tres capacitores debe ser igual a 45 nC. En consecuencia, podemos calcular la carga sobre C_1, C_2 y C_3:

$$q_1 = q_2 = q_3 = \frac{45 \text{ nC}}{3} = 15 \text{ nC}.$$

24.9 Ejercicio en clase

Tres capacitores están conectados a una batería como se muestra en la figura. Si $C_1 = C_2 = C_3 = 10.0$ μF y $V = 10.0$ V, ¿cuál es la carga sobre el capacitor C_3?



a) 66.7 μC
b) 100 μC
c) 150 μC
d) 300 μC
e) 457 μC

24.7 Energía almacenada en capacitores

Los capacitores son extremadamente útiles para almacenar energía potencial eléctrica. Son mucho más útiles que las baterías si la energía potencial debe convertirse rápido en otras formas de energía. Una aplicación de los capacitores para almacenamiento y entrega rápida de energía potencial eléctrica se describe en el ejemplo 24.4, sobre el uso de los capacitores en la instalación NIF (National Ignition Facility, Proyecto de Estados Unidos para Fusión Inercial). A continuación analizaremos cuánta energía puede almacenarse en un capacitor.

Una batería debe realizar trabajo para cargar un capacitor. Este trabajo puede considerarse en términos de cambiar la energía potencial eléctrica del capacitor. Para lograr el proceso de carga, éste debe moverse contra el potencial entre las dos placas del capacitor. Como ya se observó en este capítulo, mientras más grande sea la carga del capacitor, más grande es la diferencia de potencial entre las placas. Esto significa que mientras más carga haya en el capacitor, más difícil resulta agregarle una cantidad diferencial de carga. El trabajo diferencial, dW, realizado por una batería con diferencia de potencial ΔV, para poner una carga, dq, sobre un capacitor con capacitancia C es

$$dW = \Delta V' \, dq' = \frac{q'}{C} dq',$$

donde $\Delta V'$ y q' son la diferencia de potencial (creciente) instantánea y la carga, respectivamente. El trabajo total, W_t, requerido para cargar por completo el capacitor hasta q, está dado por

$$W_t = \int dW = \int_0^q \frac{q'}{C} dq' = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C}.$$

Este trabajo se almacena como energía potencial eléctrica:

$$U = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C} = \frac{1}{2}C(\Delta V)^2 = \frac{1}{2}q\Delta V. \tag{24.15}$$

Los tres planteamientos para la energía potencial eléctrica almacenada en la ecuación 24.15 son igualmente válidos. Cada una puede transformarse en cada una de las otras al usar $q = C\Delta V$ y eliminar una de las tres cantidades a favor de las otras dos.

La **densidad de energía eléctrica**, u, se define como la energía potencial eléctrica por unidad de volumen:

$$u = \frac{U}{\text{volumen}}.$$

(*Nota*: V no se usa para representar el volumen aquí, porque este contexto está reservado para el potencial.)

Para el caso especial de un capacitor de placas paralelas que no tiene campo marginal, resulta fácil calcular el volumen encerrado entre dos placas de área A separadas por una distancia perpendicular d. Se trata del área de cada placa por la distancia entre las placas, o Ad. Al usar la ecuación 24.15 para la energía potencial eléctrica, obtenemos

$$u = \frac{U}{Ad} = \frac{\frac{1}{2}C(\Delta V)^2}{Ad} = \frac{C(\Delta V)^2}{2Ad}.$$

Al usar la ecuación 24.6 para la capacitancia de un capacitor de placas paralelas con un vacío entre las placas, obtenemos

$$u = \frac{(\epsilon_0 A/d)(\Delta V)^2}{2Ad} = \frac{1}{2}\epsilon_0\left(\frac{\Delta V}{d}\right)^2.$$

Al reconocer que $\Delta V/d$ es la magnitud del campo eléctrico, E, obtenemos una expresión para la densidad de energía eléctrica para un capacitor de placas paralelas:

$$u = \tfrac{1}{2}\epsilon_0 E^2. \tag{24.16}$$

Este resultado, aunque se obtuvo para un capacitor de placas paralelas, es de hecho mucho más general. La energía potencial eléctrica almacenada en cualquier campo eléctrico por unidad de volumen ocupada por ese campo puede describirse usando la ecuación 24.16.

24.10 Ejercicio en clase

¿Cuánta energía hay almacenada en el capacitor de 180 μF del flash de una cámara cargado a 300.0 V?

a) 1.22 J
b) 8.10 J
c) 45.0 J
d) 115 J
e) 300 J

EJEMPLO 24.3 Nube de tormenta

Suponga que una nube de tormenta de 2.0 km de ancho y 3.0 km de longitud se cierne a una altitud de 500 m sobre una zona plana. La nube lleva una carga de 160 C y el suelo no tiene carga.

PROBLEMA 1

¿Cuál es la diferencia de potencial entre la nube y el suelo?

SOLUCIÓN 1

Podemos aproximar el sistema nube-suelo como un capacitor de placas paralelas. Según la ecuación 24.6, su capacitancia es

$$C = \frac{\epsilon_0 A}{d} = \frac{(8.85 \cdot 10^{-12}\ \text{F/m})(2\,000\ \text{m})(3\,000\ \text{m})}{500\ \text{m}} = 0.11\ \mu\text{F}.$$

Debido a que conocemos la carga que lleva la nube, 160 C, resulta tentador insertar este valor en la relación entre carga, capacitancia y diferencia de potencial (ecuación 24.1) para encontrar la respuesta buscada. No obstante, un capacitor de placas paralelas con una carga de $+q$ sobre una placa y $-q$ sobre la otra tiene una diferencia de carga de $2q$ entre las placas. Para el sistema nube-suelo, $2q$ = 160 C, o q = 80 C. En forma alternativa, podemos pensar que la nube es un aislante cargado y usar el resultado de la sección 22.9 de que el campo debido a una lámina plana de carga es $E = \sigma/2\epsilon_0$, para justificar el factor de $\frac{1}{2}$. Ahora podemos usar la ecuación 24.1 y obtener

$$\Delta V = \frac{q}{C} = \frac{80\ \text{C}}{0.11\ \mu\text{F}} = 7.3 \cdot 10^{8}\ \text{V}.$$

¡La diferencia de potencial es mayor que 700 millones de voltios!

PROBLEMA 2

Los rayos requieren intensidades de campo eléctrico aproximadamente de 2.5 MV/m. ¿Las condiciones descritas en el planteamiento del problema son suficientes para que se produzca un rayo?

SOLUCIÓN 2

Para calcular el campo eléctrico, usamos la diferencia de potencial entre la nube y el suelo, así como la distancia dada entre ellos:

$$E = \frac{\Delta V}{d} = \frac{7.3 \cdot 10^{8}\ \text{V}}{500\ \text{m}} = 1.5\ \text{MV/m}.$$

A partir de este resultado podemos concluir que en estas condiciones no se origina ningún rayo. No obstante, si la nube se aproxima a una torre de radio, es probable que la intensidad del campo eléctrico aumente y produzca la descarga de un rayo.

PROBLEMA 3

¿Cuál es la energía potencial eléctrica total contenida en el campo entre esta nube de tormenta y el suelo?

SOLUCIÓN 3

A partir de la ecuación 24.15, la energía potencial eléctrica total almacenada en este sistema de capacitor es

$$U = \tfrac{1}{2} q \Delta V = 0.5(80\ \text{C})(7.3 \cdot 10^{8}\ \text{V}) = 2.9 \cdot 10^{10}\ \text{J}.$$

Para efectos de comparación, esta energía es suficiente para hacer funcionar una secadora de cabello típica de 1 500 W durante más de 5 000 horas.

PROBLEMA RESUELTO 24.1 Energía almacenada en capacitores

PROBLEMA

Suponga que muchos capacitores, cada uno con $C = 90.0\ \mu F$, están conectados en paralelo a través de una batería con una diferencia de potencial de $\Delta V = 160.0$ V. ¿Cuántos capacitores se requieren para almacenar 95.6 J de energía?

SOLUCIÓN

PIENSE

La capacitancia equivalente de muchos capacitores conectados en paralelo está dada por la suma de las capacitancias de todos los capacitores. Podemos calcular la energía almacenada a partir de la capacitancia equivalente de los capacitores en paralelo y la diferencia de potencial de la batería.

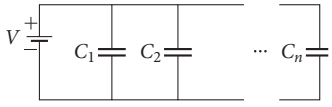


FIGURA 24.20 Un circuito con n conectados en paralelo a través de una batería.

ESBOCE

La figura 24.20 muestra un circuito con n capacitores conectados en paralelo a través de una batería.

INVESTIGUE

La capacitancia equivalente, C_{eq}, de n capacitores, cada uno con capacitancia C, conectados en paralelo es

$$C_{eq} = C_1 + C_2 + \cdots + C_n = nC.$$

Entonces, la energía almacenada en los capacitores está dada por

$$U = \tfrac{1}{2} C_{eq} (\Delta V)^2 = \tfrac{1}{2} nC(\Delta V)^2. \qquad \text{(i)}$$

SIMPLIFIQUE

Al resolver la ecuación (i) para el número de capacitores necesario, obtenemos

$$n = \frac{2U}{C(\Delta V)^2}.$$

CALCULE

Al escribir los valores numéricos, obtenemos

$$n = \frac{2(95.6\ \text{J})}{(90.0 \cdot 10^{-6}\ \text{C})(160.0\ \text{V})^2} = 82.986.$$

REDONDEE

Mostramos nuestro resultado como un número entero de capacitores:

$$n = 83 \text{ capacitores.}$$

VUELVA A REVISAR

La capacitancia de 83 capacitores con $C = 90.0\ \mu F$ es

$$C_{eq} = 83(90.0\ \mu\text{F}) = 0.00747\ \text{F}.$$

Cuando este capacitor se carga con una batería de 160 V produce una energía almacenada de

$$U = \tfrac{1}{2} C_{eq} (\Delta V)^2 = \tfrac{1}{2}(0.00747\ \text{F})(160.0\ \text{V})^2 = 95.6\ \text{J}.$$

Así, nuestra respuesta para el número de capacitores es consistente.

EJEMPLO 24.4 Instalación Nacional de Ignición, o NIF

La Instalación Nacional de Ignición (NIF, del inglés National Ignition Facility) es un láser de alta potencia diseñado para producir reacciones de fusión semejantes a las que ocurren en el Sol. El láser usa un pulso de luz corto y de alta energía para calentar y comprimir un pequeño

perdigón que contiene isótopos de hidrógeno. El láser es accionado por 192 módulos de potencia acondicionados (figura 24.21), cada uno de los cuales contiene 20 capacitores de 300 μF conectados en paralelo y cargados a 24 kV. Los capacitores se cargan durante un periodo de 90 s. Luego, el láser se dispara al descargar en 400 μs toda la energía almacenada en los capacitores.

FIGURA 24.21 Cuarenta y ocho módulos de potencia acondicionados en una de cuatro bahías en la Instalación Nacional de Ignición en el Lawrence Livermore National Laboratory, en Estados Unidos.

PROBLEMA 1

¿Cuánta energía está almacenada en los capacitores de la NIF?

SOLUCIÓN 1

Los capacitores están conectados en paralelo, por lo tanto, la capacitancia equivalente de cada módulo de potencia acondicionado es

$$C_{\text{eq}} = 20(300\ \mu\text{F}) = 0.006\ \text{F} = 6\ \text{mF}.$$

La energía almacenada en cada módulo de potencia acondicionado es

$$U = \tfrac{1}{2}C_{\text{eq}}(\Delta V)^2 = \tfrac{1}{2}\left(6\cdot 10^{-3}\ \text{F}\right)\left(24\cdot 10^{3}\ \text{V}\right)^2 = 1.73\ \text{MJ}.$$

Así, la energía total almacenada en todos los capacitores de la NIF es

$$U_{\text{total}} = 192(1.73\ \text{MJ}) = 332\ \text{MJ}.$$

PROBLEMA 2

¿Cuál es la potencia media liberada por los módulos de potencia acondicionados durante la pulsación del láser?

SOLUCIÓN 2

La potencia es la energía por unidad de tiempo, que está dada por

$$P = \frac{\Delta U}{\Delta t} = \frac{332\ \text{MJ}}{400\ \mu\text{s}} = \frac{332\cdot 10^{6}\ \text{J}}{400\cdot 10^{-6}\ \text{s}} = 8.3\cdot 10^{11}\ \text{W} = 0.83\ \text{TW}.$$

En comparación, la potencia eléctrica media generada en Estados Unidos en 2007 fue de 0.47 TW. Por supuesto, los 0.83 TW de potencia entregada al láser de la NIF sólo se mantiene durante una fracción de segundo.

Desfibrilador

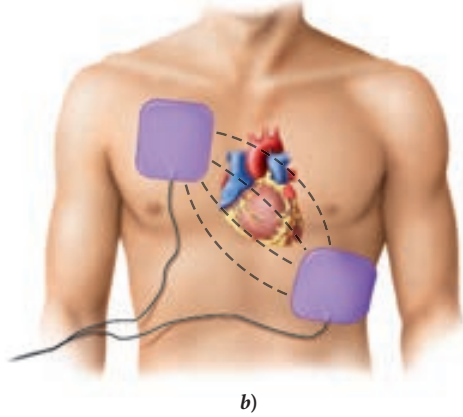
Una aplicación importante de los capacitores es el desfibrilador externo automático (AED del inglés *automatic external defibrilator*), un dispositivo diseñado para producir un choque en el corazón de una persona que está en situación de fibrilación ventricular. En la figura 24.22 se muestra un típico desfibrilador externo automático (AED).

Estar en situación de fibrilación ventricular significa que el corazón no late de manera regular. En lugar de eso, las señales que controlan el latido del corazón son erráticas, impidiendo que el corazón realice su función de mantener regular el flujo sanguíneo en todo el cuerpo. Esta condición debe tratarse al instante a fin de evitar daño permanente al corazón. Tener muchos dispositivos AED ubicados en sitios públicos permite el rápido tratamiento de esta condición.

Un AED proporciona un pulso de corriente eléctrica para estimular al corazón a que lata regularmente. En general, un AED está diseñado para analizar de manera automática los latidos del corazón de una persona, determinar si está en situación de fibrilación ventricular y administrar el pulso eléctrico en caso de ser necesario. El operador de un AED debe conectar los electrodos en el pecho de la persona que experimenta el problema y activar el botón de inicio. Si el AED determina que la persona está en situación de fibrilación ventricular, instruye al operador para que oprima el botón a fin de iniciar el pulso eléctrico. Observe que un AED no está diseñado para reiniciar un corazón que ya no late. En lugar de eso, está diseñado para restituir un latido regular cuando el corazón late erráticamente.

En general, un AED suministra 150 J de energía eléctrica al paciente, por medio de un par de electrodos conectados en la zona pectoral (vea la figura 24.22). Esta

a)



b)

FIGURA 24.22 *a*) Desfibrilador externo automático (AED) en su estuche colocado en una pared. *b*) Diagrama que muestra dónde colocar los electrodos manos libres.

energía es almacenada por un capacitor por medio de un circuito especial que proviene de una batería de bajo voltaje. En términos generales, este capacitor tiene una capacitancia de 100 μF y se carga en 10 s. La potencia usada durante el proceso de carga es

$$P = \frac{E}{t} = \frac{150\ \text{J}}{10\ \text{s}} = 15\ \text{W},$$

que está en el rango de la capacidad de una batería simple. Luego, la energía del capacitor se descarga en 10 ms. La potencia instantánea durante la descarga es

$$P = \frac{E}{t} = \frac{150\ \text{J}}{10\ \text{ms}} = 15\ \text{kW},$$

que está más allá de la capacidad de una pequeña batería portátil, pero perfectamente dentro de las capacidades de un capacitor bien diseñado.

La energía almacenada en el capacitor es $U = \frac{1}{2}C(\Delta V)^2$. Una vez que el capacitor está cargado, su diferencia de potencial es

$$\Delta V = \sqrt{\frac{2U}{C}} = \sqrt{\frac{2(150\ \text{J})}{100 \cdot 10^{-6}\ \text{F}}} = 1730\ \text{V}.$$

Cuando el AED entrega una corriente eléctrica, el capacitor se carga desde una batería contenida en el mismo dispositivo. Luego, el capacitor se descarga por medio de la persona que estimula el corazón para que lata en forma regular. La mayor parte de los AED pueden suministrar la corriente eléctrica muchas veces sin recargar la batería.

24.8 Capacitores con dieléctricos

Los capacitores que hemos analizado tienen aire o vacío entre las placas. No obstante, los capacitores diseñados para aplicaciones comerciales cuentan con un material aislante, denominado **dieléctrico**, entre las dos placas. Este dieléctrico sirve para varias cosas: primero, mantiene la separación entre las placas. Segundo, aísla eléctricamente las dos placas. Tercero, permite que el capacitor mantenga una diferencia de potencial más alta que si entre las placas sólo hubiera aire. Por último, un dieléctrico aumenta la capacitancia del capacitor. Veremos que esta habilidad se debe a la estructura molecular del dieléctrico.

Llenar por completo con un dieléctrico el espacio entre las placas de un capacitor aumenta la capacidad de éste por un factor numérico denominado **constante dieléctrica**, κ. Supondremos que el dieléctrico llena todo el volumen entre las placas del capacitor, a menos que explícitamente se diga otra cosa. En el problema resuelto 24.2 se considera un ejemplo en el que el llenado es sólo parcial.

La capacitancia, C, de un capacitor que contiene un dieléctrico con constante dieléctrica κ entre las placas está dada por

$$C = \kappa C_{\text{aire}}, \tag{24.17}$$

donde C_{aire} es la capacitancia del capacitor sin el dieléctrico.

Colocar un dieléctrico entre las placas de un capacitor tiene el efecto de aminorar el campo eléctrico entre las placas (para una explicación de este hecho, vea la sección 24.9) y permitir que más carga se almacene en el capacitor. Por ejemplo, el campo eléctrico entre las placas de un capacitor de placas paralelas, dado por la ecuación 24.4, se modifica para un capacitor de placas paralelas con un dieléctrico a

$$E = \frac{E_{\text{aire}}}{\kappa} = \frac{q}{\kappa\epsilon_0 A} = \frac{q}{\epsilon A}. \tag{24.18}$$

La constante ϵ_0 es la permitividad eléctrica del espacio libre, que ya se encontró en la ley de Coulomb. El miembro derecho de la ecuación 24.18 se obtuvo al sustituir el factor $\kappa\epsilon_0$ por ϵ, la **permitividad eléctrica** del dieléctrico. En otras palabras, la permitividad eléctrica de un dieléctrico es el producto de la permitividad eléctrica del espacio libre (en el vacío) y la constante dieléctrica del dieléctrico:

$$\epsilon = \kappa\epsilon_0. \tag{24.19}$$

Observe que esta sustitución de ϵ_0 por ϵ es todo lo que se requiere para generalizar expresiones para la capacitancia, como las ecuaciones 24.6, 24.8 y 24.10, desde los valores aplicables para un capacitor con vacío entre sus placas hasta los valores idóneos cuando el capacitor está completamente lleno con un dieléctrico. Ahora podemos ver que la capacitancia aumenta al agregar un dieléctrico entre sus placas. La diferencia de potencial a través de un capacitor de placas paralelas es

$$\Delta V = Ed = \frac{qd}{\kappa \epsilon_0 A}.$$

En consecuencia, podemos escribir la capacitancia como

$$C = \frac{q}{\Delta V} = \frac{\kappa \epsilon_0 A}{d} = \kappa C_{\text{aire}}.$$

La **resistencia dieléctrica** de un material es una medida de su habilidad para soportar diferencias de potencial. Si la intensidad del campo eléctrico en el dieléctrico excede la intensidad del dieléctrico, éste falla y empieza a conducir carga entre las placas por medio de una chispa, que suele destruir el capacitor. Así, un capacitor útil debe contener un dieléctrico que no sólo proporcione una capacitancia dada, sino que también permita que el dispositivo mantenga la diferencia de potencial requerida sin descomponerse. Los capacitores suelen especificarse por el valor de su capacitancia y por la máxima diferencia de potencial que están diseñados para manejar.

La constante dieléctrica del vacío se define como igual a 1, y la constante dieléctrica del aire está próxima a 1.0. La tabla 24.1 enumera las constantes dieléctricas y las resistencias dieléctricas del aire y otros materiales comunes usados como dieléctricos.

Tabla 24.1 **Constantes dieléctricas y resistencias dieléctricas para algunos materiales representativos**

Material	Constante dieléctrica, κ	Resistencia dieléctrica (kV/mm)
Vacío	1	
Aire (1 atm)	1.00059	2.5
Nitrógeno líquido	1.454	
Teflón	2.1	60
Polietileno	2.25	50
Benceno	2.28	
Poliestireno	2.6	24
Lexan	2.96	16
Mica	3-6	150-220
Papel	3	16
Mylar	3.1	280
Plexiglás	3.4	30
Cloruro de polivinilo (PVC)	3.4	29
Vidrio	5	14
Neopreno	16	12
Germanio	16	
Glicerina	42.5	
Agua	80.4	65
Titanato de estroncio	310	8

Observe que los valores son aproximados y para temperatura ambiente.

24.3 Oportunidad de autoevaluación

Una forma para aumentar la capacitancia de un capacitor de placas paralelas, además de agregar un dieléctrico entre las placas, consiste en disminuir la distancia entre las placas. ¿Cuál es la distancia mínima entre las placas de un capacitor de placas paralelas en aire si la diferencia de potencial máxima entre las placas debe ser 100.0 V? (*Sugerencia*: La tabla 24.1 puede ser útil).

24.11 Ejercicio en clase

Suponga que usted carga un capacitor de placas paralelas con un dieléctrico entre las placas usando una batería que luego retira, aislando el capacitor y dejándolo cargado. Luego, usted retira el dieléctrico que está entre las placas. La diferencia de potencial entre ellas

a) Aumenta.

b) Disminuye.

c) Permanece igual.

d) No puede determinarse.

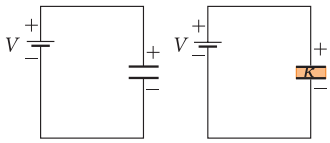


FIGURA 24.23 Capacitor de placas paralelas conectado a una batería: *a*) sin dieléctrico, *b*) con dieléctrico insertado entre las placas.

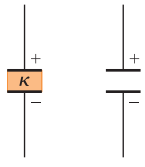


FIGURA 24.24 Capacitor aislado: *a*) con dieléctrico, *b*) sin dieléctrico.

24.12 Ejercicio en clase

¿Qué ocurriría si el dieléctrico en el capacitor del ejemplo 24.5 se saca a la mitad y luego se suelta?

a) El dieléctrico volvería hacia el capacitor.

b) El dieléctrico se calentaría rápido.

c) El dieléctrico saldría del capacitor.

d) Las placas del capacitor se calentarían rápido.

e) El dieléctrico permanecería en la posición con la mitad fuera del capacitor y no se observaría calentamiento.

EJEMPLO 24.5 Capacitor de placas paralelas con un dieléctrico

PROBLEMA 1

Considere un capacitor de placas paralelas sin dieléctrico y con capacitancia $C = 2.00\ \mu\text{F}$ conectado a una batería con diferencia de potencial $\Delta V = 12.0$ V (figura 24.23*a*). ¿Cuál es la carga almacenada en el capacitor?

SOLUCIÓN 1

Al usar la definición de capacitancia (ecuación 24.1), tenemos

$$q = C\Delta V = \left(2.00\cdot 10^{-6}\ \text{F}\right)\left(12.0\ \text{V}\right) = 2.40\cdot 10^{-5}\ \text{C}.$$

PROBLEMA 2

En la figura 24.23*b*), entre las placas del capacitor se ha insertado un dieléctrico con $\kappa = 2.5$ llenando por completo el espacio entre las placas. Ahora, ¿cuál es la carga sobre el capacitor?

SOLUCIÓN 2

La capacitancia del capacitor ha aumentado a causa del dieléctrico:

$$C = \kappa C_{\text{aire}}.$$

La carga es

$$q = \kappa C_{\text{aire}}\Delta V = (2.50)\left(2.00\cdot 10^{-6}\ \text{F}\right)\left(12.0\ \text{V}\right) = 6.00\cdot 10^{-5}\ \text{C}.$$

La carga sobre el capacitor se incrementa cuando la capacitancia aumenta porque la batería mantiene una diferencia de potencial constante a través del capacitor. La batería proporciona la carga adicional hasta que el capacitor esté cargado por completo.

PROBLEMA 3

Ahora suponga que el capacitor se desconecta de la batería (figura 24.24*a*). El capacitor, que ahora está aislado, mantiene su carga de $q = 6.00\cdot 10^{-5}$ C y su diferencia de potencial de $\Delta V = 12.0$ V. ¿Qué ocurre con la carga y la diferencia de potencial si se retira el dieléctrico, pero el capacitor se mantiene aislado (figura 24.24*b*)?

SOLUCIÓN 3

La carga sobre el capacitor aislado cambia cuando se retira el dieléctrico porque ahora no hay sitio al que pueda fluir la carga. Por lo tanto, la diferencia de potencial sobre el capacitor es

$$\Delta V = \frac{q}{C} = \frac{6.00\cdot 10^{-5}\ \text{C}}{2.00\cdot 10^{-6}\ \text{F}} = 30.0\ \text{V}.$$

La diferencia de potencial aumenta porque, cuando se retira el dieléctrico, se incrementan el campo eléctrico y la diferencia de potencial entre las placas.

PROBLEMA 4

¿Retirar el dieléctrico modifica la energía almacenada en el capacitor?

SOLUCIÓN 4

La energía almacenada en un capacitor está dada por la ecuación 24.15. Antes de retirar el dieléctrico, la energía en el capacitor es

$$U = \tfrac{1}{2}C(\Delta V)^2 = \tfrac{1}{2}\kappa C_{\text{aire}}(\Delta V)^2 = \tfrac{1}{2}(2.50)\left(2.00\cdot 10^{-6}\ \text{F}\right)\left(12\ \text{V}\right)^2 = 3.60\cdot 10^{-4}\ \text{J}.$$

Una vez que el dieléctrico es retirado, la energía es

$$U = \tfrac{1}{2}C_{\text{aire}}(\Delta V)^2 = \tfrac{1}{2}\left(2.00\cdot 10^{-6}\ \text{F}\right)\left(30\ \text{V}\right)^2 = 9.00\cdot 10^{-4}\ \text{J}.$$

El incremento en energía desde $3.60\cdot 10^{-4}$ J hasta $9.00\cdot 10^{-4}$ J cuando se retira el dieléctrico, se debe al trabajo realizado sobre el dieléctrico al sacarlo del campo eléctrico entre las placas.

EJEMPLO 24.6 Capacitancia de un cable coaxial

Los cables coaxiales se usan para transportar señales, por ejemplo, señales de TV, entre los dispositivos con interferencia mínima proveniente del entorno. Un cable coaxial de 20.0 m de largo consta de un conductor y un escudo conductor coaxial alrededor del conductor. El espacio entre el conductor y el escudo está lleno de poliestireno. El radio de conductor mide 0.250 mm, y el del escudo, 2.00 mm (figura 24.25).

PROBLEMA

¿Cuál es la capacitancia del cable coaxial?

SOLUCIÓN

Podemos suponer que el conductor del cable coaxial es un cilindro porque toda la carga sobre el conductor reside en su superficie. A partir de la tabla 24.1, la constante dieléctrica para el poliestireno es 2.6. Podemos tratar el cable coaxial como un capacitor cilíndrico con $r_1 = 0.250$ mm y $r_2 = 2.00$ mm, lleno con un dieléctrico con $\kappa = 2.6$. Luego, podemos usar la ecuación 24.8 para encontrar la capacitancia del cable coaxial:

$$C = \kappa \frac{2\pi\epsilon_0 L}{\ln(r_2/r_1)} = \frac{2.6(2\pi)\left(8.85\cdot10^{-12}\ \text{F/m}\right)(20.0\ \text{m})}{\ln\left[\left(2.00\cdot10^{-3}\ \text{m}\right)/\left(2.5\cdot10^{-4}\ \text{m}\right)\right]} = 1.39\cdot10^{-9}\ \text{F} = 1.39\ \text{nF}.$$

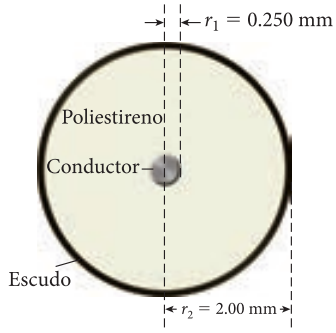


FIGURA 24.25 Sección transversal de un cable coaxial.

24.13 Ejercicio en clase

Determine si cada una de las siguientes afirmaciones sobre un capacitor de placas paralelas *aislado* es falsa o verdadera.

a) Cuando se duplica la distancia entre las placas del capacitor, la energía almacenada en el capacitor se duplica.

b) Aumentar la distancia entre las placas incrementa el campo eléctrico entre las placas.

c) Cuando la distancia entre las placas del capacitor se reduce a la mitad, la carga entre las placas permanece igual.

d) Insertar un dieléctrico entre las placas aumenta la carga sobre las placas.

e) Insertar un dieléctrico entre las placas disminuye la energía almacenada en el capacitor.

Una aplicación interesante de la capacitancia y la constante dieléctrica consiste en medir los niveles de hidrógeno en criostatos (contenedores aislados para mantener temperaturas frías). A menudo es difícil llevar a cabo un examen visual para determinar cuánto nitrógeno líquido queda en un criostato. No obstante, si se determina la capacitancia, C, del criostato vacío, entonces, cuando está completamente lleno de nitrógeno líquido, el criostato puede tener una capacitancia de $\kappa C = 1.454C$, ya que el nitrógeno líquido tiene una constante dieléctrica de 1.454. La capacitancia varía en forma continua como una función del llenado entre el valor máximo $\kappa C = 1.454C$ para el criostato completamente lleno y el valor C para el criostato vacío, lo cual constituye una forma fácil de determinar cuánto nitrógeno líquido contiene el criostato.

24.9 Perspectiva microscópica sobre los dieléctricos

A continuación consideraremos lo que ocurre a nivel atómico y molecular cuando un dieléctrico se coloca en el campo eléctrico. Hay dos tipos de materiales dieléctricos: dieléctricos polares y dieléctricos no polares.

Un **dieléctrico polar** es un material compuesto por moléculas cuyo momento dipolar eléctrico es permanente debido a su estructura. Un ejemplo común de una de estas moléculas es el agua. Normalmente, las direcciones de los dipolos eléctricos están distribuidos de manera aleato-

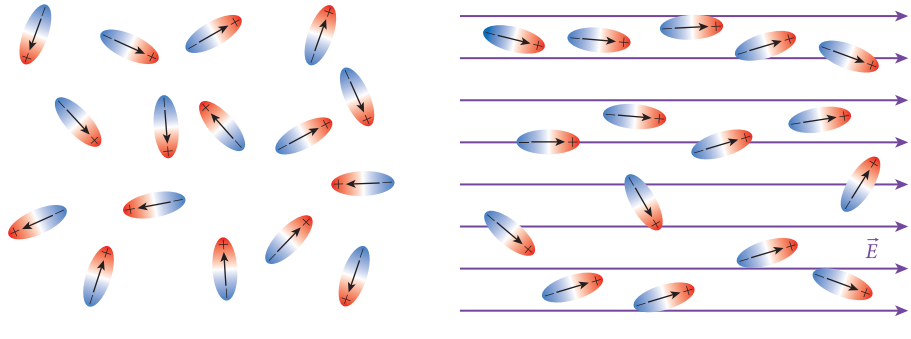


FIGURA 24.26 Moléculas polares: *a*) distribuidas aleatoriamente y *b*) orientadas por un campo eléctrico externo.

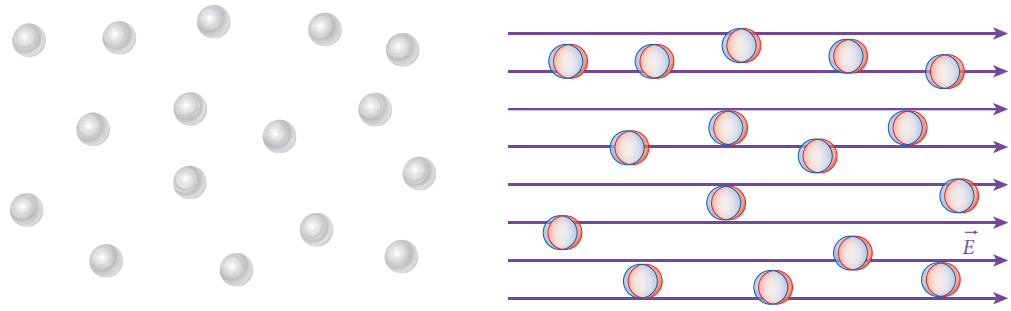


FIGURA 24.27 Moléculas no polares: *a*) sin momento dipolar eléctrico y *b*) con un momento dipolar eléctrico inducido por un campo eléctrico externo.

ria (figura 24.26*a*). No obstante, cuando a estas moléculas polares se les aplica un campo eléctrico, tienden a alinearse con el campo (figura 24.26*b*).

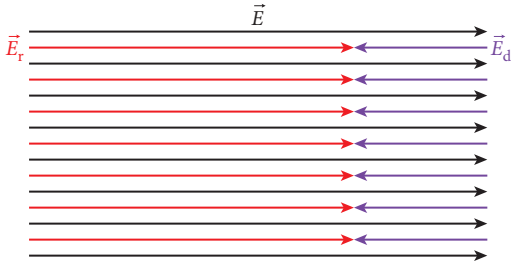


FIGURA 24.28 Cancelación parcial del campo eléctrico aplicado a través de un capacitor de placas paralelas por los dipolos eléctricos de un dieléctrico.

Un **dieléctrico no polar** es un material compuesto por átomos o moléculas que no tienen un momento dipolar eléctrico inherente (figura 24.27*a*). Es posible inducir estos átomos o moléculas para que tengan un momento dipolar bajo la influencia de un campo eléctrico externo (figura 24.27*b*). Las direcciones opuestas de las fuerzas eléctricas que actúan sobre las cargas negativas y positivas en el átomo o en la molécula desplazan estas dos distribuciones de carga y producen un momento dipolar eléctrico inducido.

Tanto en dieléctricos polares como en no polares, los campos resultantes de los momentos dipolares eléctricos tienden a cancelar parcialmente el campo eléctrico externo original (figura 24.28). Para un campo eléctrico, $\vec{E}$, aplicado a través de un capacitor con un dieléctrico entre las placas, el campo eléctrico resultante, $\vec{E}_r$, dentro del capacitor es justo el campo eléctrico original más el campo eléctrico inducido en el material dieléctrico, $\vec{E}_d$:

$$\vec{E}_r = \vec{E} + \vec{E}_d ,$$

o bien,

$$E_r = E - E_d .$$

Observe que el campo eléctrico resultante apunta en la misma dirección que el campo original, pero su magnitud es menor. La constante dieléctrica está dada por $\kappa = E/E_r$.

Supercapacitores

Como hemos visto en este capítulo, 1 F es una cantidad enorme de capacitancia. Incluso la Instalación Nacional de Ignición (NIF), que requiere el almacenamiento máximo posible de energía, sólo usa capacitores de 300 μF. No obstante, es posible crear *supercapacitores* (también denominados *ultracapacitores*) con capacitancia mucho mayor. Esto se logra al usar un material con una gran área superficial entre las placas del capacitor. Una posibilidad es usar carbón activado, que tiene una amplia área superficial debido a su estructura semejante a espuma, a un nivel de nanoescala. A dos capas de carbón activado se proporcionan cargas de polaridad opuesta y se separan por un material aislante (representado por la línea roja en la figura 24.29*b*). Esto permite que cada lado del supercapacitor almacene iones libres con cargas opuestas provenientes del electrolito. La separación entre los iones del electrolito y las cargas sobre el carbón activado suele ser del orden de nanómetros (nm); es decir, millones de veces menor que en los capacitores convencionales. El carbón activado proporciona superficies con órdenes de magnitud mayores que en los capacitores convencionales. Puesto que, como se observó en la sección 24.3, la capacitancia es proporcional al área superficial e inversamente proporcional a la separación de las placas, esta tecnología ha resultado en capacitores comerciales cuyas

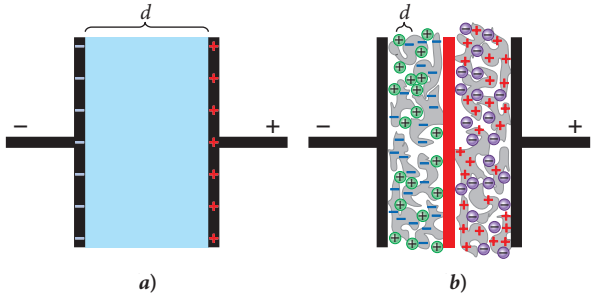


FIGURA 24.29 Comparación de *a*) un capacitor de placas paralelas convencional y *b*) un supercapacitor lleno de carbón activado.

capacitancias son del orden de los kilofaradios (kF); esto es, millones de veces más grandes que las usadas en la NIF.

¿Por qué la NIF no utiliza supercapacitores? La respuesta es que estos supercapacitores sólo pueden funcionar con diferencias de potencial hasta 2-3 V. Los supercapacitores comerciales de mayor capacidad tienen valores de capacitancia hasta 5 kF. El uso de $U = \frac{1}{2}C(\Delta V)^2$ y $\Delta V = 2$ V muestra que un supercapacitor puede tener 10 kJ. Los capacitores de 300 μF usados en la NIF, cuando se cargan hasta 24 kV, pueden tener 86.4 kJ. Además, pueden descargarse mucho más rápido, lo cual es crucial para satisfacer el alto requerimiento de energía láser de la NIF.

Sin embargo, los supercapacitores pueden alcanzar capacidades de almacenamiento de energía que rivalizan con las de las baterías convencionales. Además, pueden cargarse y descargarse millones de veces, en comparación quizá con las miles de veces de las baterías recargables. Esto, junto con su tiempo de carga muy breve, los hace potencialmente idóneos para muchas aplicaciones. Por ejemplo, hay mucha investigación concerniente al uso de estos supercapacitores para vehículos eléctricos. Un autobús basado en esta tecnología, denominado *capabus*, está actualmente en uso en Shanghái, China.

Una línea de investigación promisoria sobre el mejoramiento de la diferencia de potencial que los supercapacitores pueden usar, es analizar el uso de tubos de nanocarbono en lugar de carbón activado. Los primeros prototipos de laboratorio son muy promisorios, y productos comerciales basados en este método podrían usarse dentro de pocos años.

LO QUE HEMOS APRENDIDO | GUÍA DE ESTUDIO PARA EXAMEN

- La capacitancia de un capacitor se define en términos de la carga, q, que es posible almacenar sobre el capacitor y la diferencia de potencial, V, a través de las placas: $q = C\Delta V$.
- El faradio es la unidad de capacitancia: $1\ \text{F} = \dfrac{1\ \text{C}}{1\ \text{V}}$.
- La capacitancia de un capacitor de placas paralelas, con placas de área A en el vacío (o aire) entre las placas separadas por una distancia d, está dada por $C = \dfrac{\epsilon_0 A}{d}$.
- La capacitancia de un capacitor cilíndrico de longitud L, que consta de dos cilindros colineales con vacío (o aire) entre los cilindros con radio interior r_1 y radio exterior r_2, está dada por $C = \dfrac{2\pi\epsilon_0 L}{\ln(r_2/r_1)}$.
- La capacitancia de un capacitor esférico, que consta de dos esferas concéntricas con vacío (o aire) entre las esferas con radio interior r_1 y radio exterior r_2, está dada por $C = 4\pi\epsilon_0 \dfrac{r_1 r_2}{r_2 - r_1}$.
- La densidad de energía eléctrica, u, entre las placas de un capacitor de placas paralelas con vacío (o aire) entre las placas está dada por $u = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2$.
- Un sistema de n capacitores conectados en paralelo en un circuito puede sustituirse por una capacitancia equivalente dada por la suma de las capacitancias de los capacitores: $C_{\text{eq}} = \sum_{i=1}^{n} C_i$.
- Un sistema de n capacitores conectados en serie en un circuito puede sustituirse por una capacitancia equivalente dada por el recíproco de la suma de las capacitancias recíprocas de los capacitores: $\dfrac{1}{C_{\text{eq}}} = \sum_{i=1}^{n} \dfrac{1}{C_i}$.
- Cuando el espacio entre las placas de un capacitor está lleno con un dieléctrico de constante dieléctrica κ, la capacitancia aumenta con respecto a la capacitancia en el aire: $C = \kappa C_{\text{aire}}$.

TÉRMINOS CLAVE

capacitor, p. 774
capacitor de placas paralelas, p. 774
capacitancia, p. 775
faradio, p. 776
circuito eléctrico, p. 776
conectados en paralelo, p. 780
conectados en serie, p. 781
densidad de energía eléctrica, p. 784
dieléctrico, p. 788
constante dieléctrica, p. 788
permitividad eléctrica, p. 788
resistencia dieléctrica, p. 789
dieléctrico polar, p. 791
dieléctrico no polar, p. 792

NUEVOS SÍMBOLOS Y ECUACIONES

C, capacitancia de un capacitor

$C_{eq} = \sum_{i=1}^{n} C_i$, capacitancia equivalente de varios capacitores en paralelo

$\frac{1}{C_{eq}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{C_i}$, capacitancia equivalente de varios capacitores en serie

F, faradio, unidad de capacitancia

κ, constante dieléctrica

$u = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2$, densidad de energía eléctrica

RESPUESTAS A LAS OPORTUNIDADES DE AUTOEVALUACIÓN

24.1 El campo eléctrico permanece constante.

24.2 En serie:

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{4}{C} \Rightarrow C_{eq} = \frac{1}{4}C = 2.50\ \mu\text{F}.$$

En paralelo:

$$C_{eq} = 4C = 40.0\ \mu\text{F}.$$

24.3 $100\ \text{V} = d(2\,500\ \text{V/mm}) \Rightarrow d = 0.04\ \text{mm}$.

PRÁCTICA PARA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Lineamientos para resolución de problemas

1. Recuerde que decir que un capacitor tiene carga q significa que una placa tiene carga $+q$ y la otra placa tiene carga $-q$. Asegúrese de entender cómo la carga aplicada a un capacitor se distribuye entre las dos placas conductoras; revise el ejemplo 24.3 si tiene dudas al respecto.

2. Siempre es una buena idea trazar un diagrama de circuito al resolver problemas que implican circuitos, en caso de no contar con uno. Para identificar conexiones en serie y en paralelo puede requerirse práctica, pero este primer paso suele ser importante para reducir un circuito aparentemente complicado a un circuito equivalente con el que sea posible trabajar de modo directo. Recuerde que todos los capacitores conectados en serie tienen la misma carga y que todos los capacitores conectados en paralelo tienen la misma diferencia de potencial.

3. Usted puede recordar la mayor parte de los resultados importantes para un capacitor con un dieléctrico si recuerda que en este último aumenta la capacitancia. (Ésta es la razón de la utilidad de un dieléctrico.) Si sus cálculos muestran una capacitancia reducida con un dieléctrico, vuelva a comprobar su trabajo.

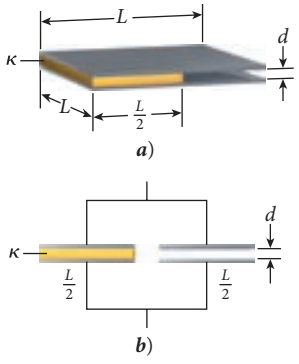


FIGURA 24.30 *a*) Un capacitor de placas paralelas con placas cuadradas de longitud de lado L, separadas por la distancia d, con un dieléctrico que es L de ancho y $L/2$ de largo con una constante dieléctrica κ insertado entre las placas. *b*) El capacitor parcialmente lleno se representa como dos capacitores en paralelo.

PROBLEMA RESUELTO 24.2 Capacitor parcialmente lleno con un dieléctrico

PROBLEMA

Un capacitor de placas paralelas está construido con dos placas cuadradas conductoras de longitud de lado L = 10.0 cm (figura 24.30*a*). La distancia entre las placas es d = 0.250 cm. Un dieléctrico con constante dieléctrica κ =15.0 y grosor 0.250 cm se inserta entre las placas. El dieléctrico mide L = 10.0 cm de ancho y L/2 = 5.00 cm de largo, como muestra la figura 24.30*a*). ¿Cuál es la capacitancia de este capacitor?

SOLUCIÓN

PIENSE

Tenemos un capacitor de placas paralelas parcialmente lleno con un dieléctrico. Podemos considerar este capacitor como dos capacitores en paralelo. Un capacitor es un capacitor de placas paralelas con área de placa $A = L(L/2)$ y aire entre las placas; el segundo capacitor es un capacitor de placas paralelas con área de placa $A = L(L/2)$ y un dieléctrico entre las placas.

ESBOCE

La figura 24.30*b*) ilustra una representación de un capacitor parcialmente lleno como dos capacitores en paralelo: uno lleno con un dieléctrico y otro lleno de aire.

INVESTIGUE

La capacitancia, C_1, de un capacitor de placas paralelas está dada por la ecuación 24.6:

$$C_1 = \frac{\epsilon_0 A}{d},$$

donde A es el área de las placas y d es la distancia que las separa. Si entre las placas se coloca un dieléctrico, la capacitancia se vuelve

$$C_2 = \kappa \frac{\epsilon_0 A}{d},$$

donde κ es la constante dieléctrica. Para dos capacitores, C_1 y C_2, en paralelo, la capacitancia efectiva, C_{12}, está dada por

$$C_{12} = C_1 + C_2.$$

SIMPLIFIQUE

Al sustituir las expresiones para las dos capacitancias individuales en la suma, obtenemos

$$C_{12} = \frac{\epsilon_0 A}{d} + \kappa \frac{\epsilon_0 A}{d} = (\kappa + 1)\frac{\epsilon_0 A}{d}. \qquad \text{(i)}$$

El área de las placas para cada capacitor es

$$A = (L)(L/2) = L^2/2.$$

Al insertar la expresión para el área en la ecuación (i) se obtiene que la capacitancia del capacitor parcialmente lleno es

$$C_{12} = (\kappa + 1)\frac{\epsilon_0 \left(L^2/2\right)}{d} = \frac{(\kappa + 1)\epsilon_0 L^2}{2d}.$$

CALCULE

Al escribir los valores numéricos, obtenemos

$$C_{12} = \frac{(15.0 + 1)\left(8.85 \cdot 10^{-12}\ \text{F/m}\right)(0.100\ \text{m})^2}{2(0.00250\ \text{m})} = 2.832 \cdot 10^{-10}\ \text{F}.$$

REDONDEE

Mostramos nuestro resultado con tres cifras:

$$C_{12} = 2.83 \cdot 10^{-10}\ \text{F} = 283\ \text{pF}.$$

VUELVA A REVISAR

Para volver a revisar nuestra respuesta, calculamos la capacitancia del capacitor sin ningún dieléctrico:

$$C = \frac{\epsilon_0 A}{d} = \frac{\left(8.85 \cdot 10^{-12}\ \text{F/m}\right)(0.100\ \text{m})^2}{0.0025\ \text{m}} = 3.54 \cdot 10^{-11}\ \text{F} = 35.4\ \text{pF}.$$

Luego calculamos la capacitancia del capacitor si está lleno por completo con un dieléctrico:

$$C = \kappa \frac{\epsilon_0 A}{d} = (15.0)(35.4\ \text{pF}) = 5.31 \cdot 10^{-10}\ \text{F} = 531\ \text{pF}.$$

Nuestro resultado para el capacitor parcialmente lleno es la mitad de la suma de estos dos resultados, de modo que parece razonable.

a) *b*)

FIGURA 24.31 *a*) Capacitor cilíndrico con radio interior r_1, radio exterior r_2 y longitud L. *b*) Dieléctrico con constante dieléctrica κ insertado entre los cilindros.

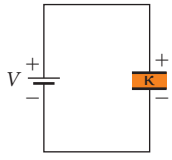


FIGURA 24.32 Capacitor cilíndrico conectado a una batería.

PROBLEMA RESUELTO 24.3 Carga sobre un capacitor cilíndrico

PROBLEMA

Considere un capacitor cilíndrico con radio interior $r_1 = 10.0$ cm, radio exterior $r_2 = 12.0$ cm y longitud $L = 50.0$ cm (figura 24.31*a*). Un dieléctrico con constante dieléctrica $\kappa = 12.5$ llena el volumen entre los dos cilindros (figura 24.31*b*). El capacitor está conectado a una batería de 100.0 V y se carga por completo. ¿Cuál es la carga sobre el capacitor?

SOLUCIÓN

PIENSE

Tenemos un capacitor cilíndrico lleno con un dieléctrico. Cuando el capacitor se conecta a la batería, sobre el capacitor se acumula carga hasta que se carga por completo. Entonces calculamos la cantidad de carga sobre el capacitor.

ESBOCE

La figura 24.32 muestra un diagrama de circuito con el capacitor cilíndrico conectado a una batería.

INVESTIGUE

La capacitancia, C, de un capacitor cilíndrico está dada por la ecuación 24.8:

$$C = \frac{2\pi\epsilon_0 L}{\ln(r_2/r_1)},$$

donde r_1 es el radio interior del capacitor, r_2 es el radio exterior del capacitor y L es la longitud del capacitor. Con un dieléctrico entre las placas, la capacitancia se vuelve

$$C = \kappa\frac{2\pi\epsilon_0 L}{\ln(r_2/r_1)}, \tag{i}$$

donde κ es la constante dieléctrica. Para un capacitor con capacitancia C, cargado con una diferencia de potencial ΔV, la carga q está dada por la ecuación 24.1:

$$q = C\Delta V. \tag{ii}$$

SIMPLIFIQUE

Al combinar las ecuaciones (i) y (ii), se obtiene

$$q = C\Delta V = \left(\kappa\frac{2\pi\epsilon_0 L}{\ln(r_2/r_1)}\right)\Delta V = \frac{2\kappa\pi\epsilon_0 L\Delta V}{\ln(r_2/r_1)}.$$

CALCULE

Al escribir los valores numéricos, obtenemos

$$q = \frac{2\kappa\pi\epsilon_0 L\Delta V}{\ln(r_2/r_1)} = \frac{2(12.5)\pi\left(8.85\cdot10^{-12}\ \text{F/m}\right)(0.500\ \text{m})(100.0\ \text{V})}{\ln(0.120\ \text{m})/(0.100\ \text{m})} = 19.0618\cdot10^{-8}\ \text{C}.$$

REDONDEE

Mostramos nuestro resultado con tres cifras:

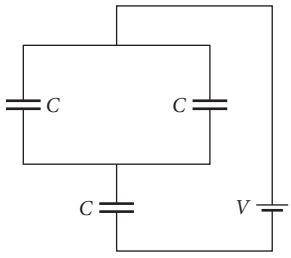
$$q = 19.1\cdot10^{-8}\ \text{C} = 191\ \text{nC}.$$

VUELVA A REVISAR

Nuestra respuesta es una pequeña fracción de un coulomb de carga, de modo que parece razonable.

PREGUNTAS DE OPCIÓN MÚLTIPLE

24.1 En el circuito que ilustra la figura, la capacitancia de cada capacitor es C. La capacitancia equivalente para estos tres capacitores es



a) $\frac{1}{3}C$ *d*) $\frac{3}{5}C$
b) $\frac{2}{3}C$ *e*) C
c) $\frac{2}{5}C$ *f*) $\frac{5}{3}C$

24.2 Las placas de un capacitor de placas paralelas con capacitancia C tiene un área A con una distancia d entre ellas. Cuando el capacitor se conecta a una batería de diferencia de potencial V, tiene una carga de magnitud Q sobre sus placas. Mientras el capacitor está conectado a la batería, la distancia entre las placas se reduce por un factor de 3. Entonces, la magnitud de la carga sobre las placas y la capacitancia son

a) $\frac{1}{3}Q$ y $\frac{1}{3}C$. *c*) $3Q$ y $3C$.
b) $\frac{1}{3}Q$ y $3C$. *d*) $3Q$ y $\frac{1}{3}C$.

24.3 La distancia entre las placas de un capacitor de placas paralelas se reduce a la mitad y el área de las placas se duplica. ¿Qué ocurre a la capacitancia?

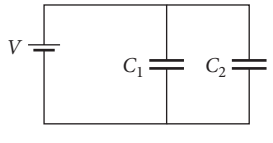
a) Permanece sin cambio.
b) Se duplica.
c) Se cuadruplica.
d) Se reduce a la mitad.

24.4 ¿Cuál de los siguientes capacitores tiene la carga más alta?

a) Un capacitor de placas paralelas con un área de 10 cm^2 y separación de placas de 2 mm, conectado a una batería de 10 V.
b) Un capacitor de placas paralelas con un área de 5 cm^2 y separación de placas de 1 mm, conectado a una batería de 5 V.
c) Un capacitor de placas paralelas con un área de 10 cm^2 y separación de placas de 4 mm, conectado a una batería de 5 V.
d) Un capacitor de placas paralelas con un área de 20 cm^2 y separación de placas de 2 mm, conectado a una batería de 20 V.
e) Todos los capacitores tienen la misma carga.

24.5 Dos capacitores de placas paralelas idénticos están conectados en un circuito como muestra la figura. Inicialmente el espacio entre las placas de cada capacitor está lleno de aire. ¿Cuál de los siguientes cambios duplicará la cantidad total de carga almacenada sobre ambos capacitores con la misma diferencia de potencial aplicada?

a) Llenar el espacio entre las placas de C_1 con vidrio (constante dieléctrica de 4) y dejar C_2 como está.
b) Llenar el espacio entre las placas de C_1 con teflón (constante dieléctrica de 2) y dejar C_2 como está.
c) Llenar el espacio entre las placas tanto de C_1 como de C_2 con teflón (constante dieléctrica de 2).
d) Llenar el espacio entre las placas tanto de C_1 como de C_2 con vidrio (constante dieléctrica de 4).



24.6 El espacio entre las placas de un capacitor de placas paralelas aislado está lleno por una plancha de material dieléctrico. La magnitud de la carga Q sobre cada placa se mantiene constante. Si el material dieléctrico se retira de su sitio, la energía almacenada en el capacitor

a) Aumenta. *c*) Disminuye.
b) Permanece igual. *d*) Puede aumentar o disminuir.

24.7 ¿Cuál de las siguientes situaciones es proporcional a la capacitancia de un capacitor de placas paralelas?

a) La carga almacenada sobre cada placa conductora.
b) La diferencia de potencial entre las dos placas.
c) La distancia de separación entre las dos placas.
d) El área de cada placa.
e) Todas las anteriores.
f) Ninguna de las anteriores.

24.8 Un dieléctrico con constante dieléctrica $\kappa = 4$ se inserta en un capacitor de placas paralelas, ocupando $\frac{1}{3}$ del volumen, como muestra la figura. Si la capacitancia del capacitor sin el dieléctrico es C, ¿cuál es la capacitancia del capacitor con el dieléctrico?

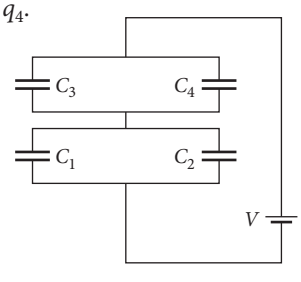
a) $0.75C$ *d*) $4C$
b) C *e*) $6C$
c) $2C$

24.9 Un capacitor de placas paralelas se conecta a una batería para cargarlo. Luego de algún tiempo, mientras la batería sigue conectada al capacitor, la distancia entre las placas del capacitor se duplica. ¿Cuál o cuáles de las siguientes afirmaciones es verdadera?

a) El campo eléctrico entre las placas se reduce a la mitad.
b) La diferencia de potencial de la batería se reduce a la mitad.
c) La capacitancia se duplica.
d) La diferencia de potencial a través de las placas no cambia.
e) La carga entre las placas no cambia.

24.10 Con referencia a la figura, decida si cada una de las siguientes ecuaciones es falsa o verdadera. Suponga que todos los capacitores tienen diferentes capacitancias. La diferencia de potencial a través del capacitor C_1 es V_1. La diferencia de potencial a través del capacitor C_2 es V_2. La diferencia de potencial a través del capacitor C_3 es V_3. La diferencia de potencial a través del capacitor C_4 es V_4. La carga almacenada en el capacitor C_1 es q_1. La carga almacenada en el capacitor C_2 es q_2. La carga almacenada en el capacitor C_3 es q_3. La carga almacenada en el capacitor C_4 es q_4.

a) $q_1 = q_3$
b) $V_1 + V_2 = V$
c) $q_1 + q_2 = q_3 + q_4$
d) $V_1 + V_2 = V_3 + V_4$
e) $V_1 + V_3 = V$



PREGUNTAS

24.11 ¿Las placas de un capacitor deben ser de un material conductor? ¿Qué ocurriría si se usaran dos placas aislantes en lugar de placas conductoras?

24.12 ¿Requiere más trabajo separar las placas de un capacitor de placas paralelas cargado mientras está conectado a la batería de carga o hacerlo después que se ha desconectado?

24.13 Cuando los electricistas trabajan sobre alguna pieza de equipo, algunas veces conectan un alambre a tierra al equipo incluso después de haber apagado y desconectado el equipo. ¿Por qué hacen esto?

24.14 La tabla 24.1 no muestra ningún valor de la constante dieléctrica para algún buen conductor. ¿Qué valor le asignaría usted?

24.15 Un capacitor de placas paralelas se carga con una batería y luego se desconecta, dejando una cantidad de energía almacenada en el capacitor. Luego, la separación entre las placas se incrementa. ¿Qué ocurre con la energía almacenada en el capacitor? Analice su respuesta en términos de conservación de la energía.

24.16 Usted tiene un dispositivo eléctrico que contiene un capacitor de 10.0 μF pero una aplicación requiere un capacitor de 18.0 μF. ¿Qué modificación puede hacer al dispositivo a fin de aumentar su capacitancia hasta 18.0 μF?

24.17 Dos capacitores con capacitancias C_1 y C_2 están conectados en serie. Demuestre que, sin importar cuáles son los valores de C_1 y C_2, la capacitancia equivalente siempre es menor que la más pequeña de las dos capacitancias.

24.18 Dos capacitores con capacitancias C_1 y C_2 están conectados en serie. Una diferencia de potencial V_0 se aplica a través de la combinación de los capacitores. Encuentre las diferencias de potencial V_1 y V_2 a través de los capacitores individuales, en términos de V_0, C_1 y C_2.

24.19 Un conductor esférico sólido aislado de radio 5.00 cm está rodeado por aire seco. Se le proporciona una carga, con lo que adquiere un potencial V, donde se supone que el potencial al infinito es cero.

a) Calcule la magnitud máxima que puede tener V.

b) Explique claramente y en forma concisa *por qué* ahí hay un máximo.

24.20 Un capacitor de placas paralelas de capacitancia C está conectado a una fuente de alimentación que mantiene una diferencia de potencial constante, V. Luego se inserta una plancha bien ceñida de dieléctrico, con constante dieléctrica κ, que llena el espacio previamente vacío entre las placas.

a) ¿Cuál es la energía almacenada sobre el capacitor antes de la inserción del dieléctrico?

b) ¿Cuál es la energía almacenada sobre el capacitor después de la inserción del dieléctrico?

c) ¿El dieléctrico fue jalado desde el espacio entre las placas o fue empujado hacia éste? Explique.

24.21 A un capacitor de placas paralelas con placas cuadradas que miden L de longitud separadas por una distancia d se le asigna una carga Q y luego se desconecta de la fuente de alimentación. Luego se inserta una plancha bien ceñida de dieléctrico, con constante dieléctrica κ, en el espacio previamente vacío entre las placas. Calcule la fuerza con la que la plancha es empujada dentro del capacitor durante el proceso de inserción.

24.22 Considere un capacitor cilíndrico, con radio exterior R y separación d entre los cilindros. Determine a qué tiende la capacitancia en el límite cuando $d \ll R$. (*Sugerencia*: Exprese la capacitancia en términos de la razón d/R y luego analice lo que ocurre cuando la razón d/R se vuelve muy pequeña en comparación con 1.) Explique por qué el límite sobre la capacitancia tiene sentido.

24.23 Se construye un capacitor de placas paralelas a partir de dos placas de áreas diferentes. Si el capacitor inicialmente está sin cargar y luego se conecta a una batería, ¿cómo se compara la cantidad de carga sobre la placa grande con la cantidad de carga sobre la placa pequeña?

24.24 Un capacitor de placas paralelas se conecta a una batería. A medida que las placas se alejan, ¿qué ocurre con cada uno de los siguientes?

a) Con la diferencia de potencial a través de las placas.

b) Con la carga sobre las placas.

c) Con el campo eléctrico entre las placas.

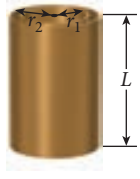
PROBLEMAS

Una • y dos •• indican un nivel creciente de dificultad.

Secciones 24.3 a 24.5

24.25 Los supercapacitores, con capacitancias de 1.00 F o más, se elaboran con placas que tienen una estructura semejante a la esponja con un área superficial muy grande. Determine el área superficial de un supercapacitor de capacitancia igual a 1.00 F y cuya eficaz separación entre las placas es $d = 1.0$ mm.

24.26 A través de los dos cilindros conductores colineales que se muestran en la figura se aplica una diferencia de potencial de 100. V. El radio del cilindro exterior es 15.0 cm, el radio del cilindro interior es 10.0 cm y la longitud de los dos cilindros es 40.0 cm. ¿Cuánta carga se aplica a cada uno de los dos cilindros? ¿Cuál es la magnitud del campo eléctrico entre los dos cilindros?



24.27 ¿Cuál es el radio de un conductor esférico aislado cuya capacitancia es 1.00 F?

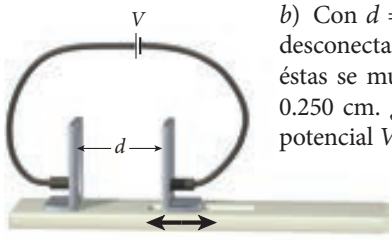
24.28 Un capacitor esférico se elabora con dos cortezas delgadas conductoras. La corteza interior tiene radio r_1, y la externa, r_2. ¿Cuál es la diferencia fraccionaria en las capacitancias de este capacitor esférico y un capacitor de placas paralelas hecho con placas que tienen la misma área que la esfera interior y la misma separación $d = r_2 - r_1$ entre las placas?

24.29 Calcule la capacitancia de la Tierra. Considere que la Tierra es un conductor esférico aislado de radio 6 371 km.

24.30 Se encuentra que dos esferas metálicas concéntricas tienen una diferencia de potencial de 900. V cuando se les aplica una carga de $6.726 \cdot 10^{-8}$ C. El radio de la esfera exterior es 0.210 m. ¿Cuál es el radio de la esfera interior?

•**24.31** Un capacitor consta de dos placas paralelas, pero una puede moverse con respecto a la otra como se muestra en la figura. Entre las placas hay aire que llena este espacio, y la capacitancia es 32.0 pF cuando la separación entre las placas es $d = 0.500$ cm.

a) A las placas se conecta una batería con diferencia de potencial $V = 9.0$ V. ¿Cuál es la distribución de carga, σ, sobre la placa izquierda? ¿Cuáles son la capacitancia, C', y la distribución de carga, σ', cuando d cambia a 0.250 cm?



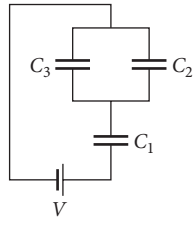
b) Con $d = 0.500$ cm, la batería se desconecta de las placas. Luego, éstas se mueven de modo que $d = 0.250$ cm. ¿Cuál es la diferencia de potencial V', entre las placas?

Sección 24.6

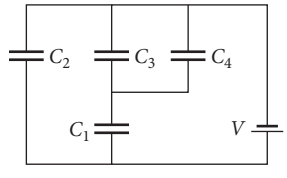
24.32 Determine los valores de la capacitancia equivalente que usted puede obtener al usar cualquier combinación de tres capacitores idénticos con capacitancia C.

24.33 Un gran capacitor de placas paralelas con placas cuadradas, que miden 1.00 cm por lado y están separadas por una distancia de 1 mm, se cayó, dañándose. La mitad de las áreas de las dos placas se aproxima hasta una distancia de 0.500 mm. ¿Cuál es la capacitancia del capacitor dañado?

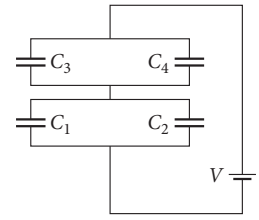
24.34 Tres capacitores con capacitancias $C_1 = 3.1$ nF, $C_2 = 1.3$ nF y $C_3 = 3.7$ nF están conectados a una batería con $V = 14.9$ V, como muestra la figura. ¿Cuál es la caída de potencial a través del capacitor C_2?



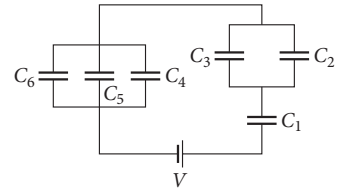
24.35 Cuatro capacitores con capacitancias $C_1 = 3.5$ nF, $C_2 = 2.1$ nF y $C_3 = 1.3$ nF y $C_4 = 4.9$ nF están conectados a una batería con $V = 10.3$ V, como ilustra la figura. ¿Cuál es la capacitancia equivalente de este conjunto de capacitores?



24.36 Los capacitores del circuito mostrado en la figura tienen capacitancias $C_1 = 18.0$ μF, $C_2 = 11.3$ μF, $C_3 = 33.0$ μF y $C_4 = 44.0$ μF. La diferencia de potencial es $V = 10.0$ V. ¿Cuál es la carga total que debe suministrar la fuente de alimentación para cargar esta disposición de capacitores?



24.37 Seis capacitores están conectados como se muestra en la figura.



a) Si $C_3 = 2.3$ nF, ¿cuál debe ser C_2 para producir una capacitancia equivalente de 5.000 nF para la combinación de los dos capacitores?

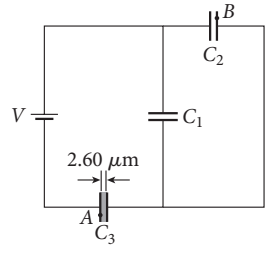
b) Para los mismos valores de C_2 y C_3 que en el inciso *a*), ¿cuál es el valor de C_1 que proporcionará una capacitancia equivalente de 1.914 nF para la combinación de los tres capacitores?

c) Para los mismos valores de C_1, C_2 y C_3 que en el inciso *b*), ¿cuál es la capacitancia equivalente de todo el conjunto de capacitores si los valores de las otras capacitancias son $C_4 = 1.3$ nF, $C_5 = 1.7$ nF y $C_6 = 4.7$ nF?

d) Si una batería con una diferencia de potencial de 11.7 V se conecta a los capacitores mostrados en la figura, ¿cuál es la carga total sobre los seis capacitores?

e) ¿Cuál es la caída de potencial a través de C_5 en este caso?

•**24.38** Una diferencia de potencial de $V = 80.0$ V se aplica a través de un circuito con capacitancias $C_1 = 15.0$ nF, $C_2 = 7.00$ nF y $C_3 = 20.0$ nF, como muestra la figura. ¿Cuáles son la magnitud y el signo de q_{3l}, la carga sobre la placa izquierda de C_3 (marcada por el punto A)? ¿Cuál es el potencial eléctrico, V_3, a través de C_3? ¿Cuáles son la magnitud y el signo de la carga q_{2r}, sobre la placa derecha de C_2 (marcada por el punto B)?



•**24.39** Cincuenta capacitores con placas paralelas se conectan en serie. La distancia entre las placas es d para el primer capacitor, $2d$ para el segundo capacitor, $3d$ para el tercer capacitor y así sucesivamente. El área de las placas es la misma para todos los capacitores. Exprese la capacitancia equivalente de todo el conjunto en términos de C_1 (la capacitancia del primer capacitor).

•**24.40** Un capacitor de 5.00 nF cargado hasta 60.0 V y un capacitor de 7.00 nF cargado hasta 40.0 V están conectados con la placa negativa de cada uno conectada a la placa negativa del otro. ¿Cuál es la carga final sobre el capacitor de 7.00 nF?

Sección 24.7

24.41 Cuando un capacitor tiene una carga de magnitud 60.0 μC sobre cada placa, la diferencia de potencial a través de las placas es 12.0 V. ¿Cuánta energía se almacena en el capacitor cuando la diferencia de potencial a través de sus placas es 120. V?

24.42 El capacitor en un desfibrilador externo automático se carga hasta 7.5 kV y almacena 2 400 J de energía. ¿Cuál es su capacitancia?

24.43 La Tierra tiene un campo eléctrico de 150 N/C cerca de su superficie. Encuentre la energía eléctrica contenida en cada metro cúbico de aire cerca de la superficie terrestre.

•**24.44** La diferencia de potencial a través de dos capacitores en serie es 120. V. Las capacitancias son $C_1 = 1.00 \cdot 10^3$ μF y $C_2 = 1.50 \cdot 10^3$ μF.

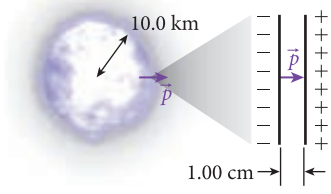
a) ¿Cuál es la capacitancia total de este par de capacitores?

b) ¿Cuál es la carga sobre cada capacitor?

c) ¿Cuál es la diferencia de potencial a través de cada capacitor?

d) ¿Cuál es la energía total almacenada por los capacitores?

•**24.45** Se cree que las estrellas de neutrones tienen capas de dipolo eléctrico ($\vec{p}$) en su superficie. Si una estrella de neutrones con 10.0 km de radio tiene una capa de dipolo de 1.00 cm de grosor con distribuciones de carga de +1 μC/cm^2 y –1 μC/cm^2 sobre la superficie, como se indica en la figura, ¿cuál es la capacitancia de esta estrella? ¿Cuál es el potencial eléctrico almacenado en la capa de dipolo del neutrón de la estrella?



•**24.46** Un capacitor de placas paralelas de $4.0 \cdot 10^3$ nF se conecta a una batería de 12.0 V y se carga.

a) ¿Cuál es la carga *Q* sobre la placa positiva del capacitor?

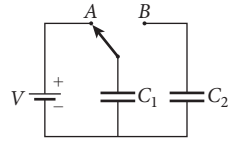
b) ¿Cuál es el potencial eléctrico almacenado en el capacitor?

Después, el capacitor de $4.0 \cdot 10^3$ nF se desconecta de la batería de 12.0 V y se usa para cargar tres capacitores descargados, uno de 100. nF, uno de 200. nF y otro de 300. nF, conectados en serie.

c) Después de que se cargan, ¿cuál es la diferencia de potencial a través de cada uno de los cuatro capacitores?

d) ¿Cuánta de la energía eléctrica almacenada en el capacitor de $4.00 \cdot 10^3$ nF se transfirió a los otros tres capacitores?

•**24.47** La figura muestra un circuito con $V = 12.0$ V, $C_1 = 500.$ pF y $C_2 = 500.$ pF. El interruptor se cierra, hasta *A*, y el capacitor C_1 se carga por completo. Encuentre *a*) la energía liberada por la batería y *b*) la energía almacenada en C_1. Luego, el interruptor se mueve a *B* y se deja que el circuito llegue al equilibrio. Encuentre *c*) la energía total almacenada en C_1 y C_2. *d*) Explique la pérdida de energía, en caso de haber.



••**24.48** La Tierra se mantiene unida debido a su propia gravedad. Pero también es un conductor que porta carga.

a) La Tierra puede considerarse una esfera conductora de radio 6 371 km, con campo eléctrico $\vec{E} = (-150 \text{ V/m})\hat{r}$ en su superficie, donde $\hat{r}$ es un vector unitario dirigido radialmente hacia fuera. Calcule la energía potencial electrostática total asociada con la carga y el campo eléctrico de la Tierra.

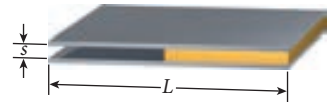
b) La Tierra tiene energía potencial gravitatoria, parecida a la energía potencial electrostática. Calcule esta energía, considerando la Tierra como una esfera sólida uniforme. (*Sugerencia*: $dU = -(Gm/r)dm$.)

c) Use los resultados de los incisos *a*) y *b*) para responder esta pregunta: ¿en qué medida las fuerzas electrostáticas afectan la estructura de la Tierra?

Sección 24.8

24.49 Dos capacitores de placas paralelas tienen áreas de placas idénticas y las mismas separaciones entre las placas. La energía máxima que puede almacenar cada capacitor está determinada por la máxima diferencia de potencial que puede aplicarse antes de que ocurra una avería dieléctrica. Un capacitor tiene aire entre sus placas, y el otro, Mylar. Encuentre la razón de la energía máxima que puede almacenar el capacitor con Mylar a la energía máxima que puede almacenar el capacitor con aire.

24.50 Un capacitor tiene placas paralelas, con la mitad del espacio entre las placas lleno con un material dieléctrico de constante κ y la otra mitad llena con aire, como muestra la figura. Suponga que las placas son cuadradas, con lados de longitud *L*, y que la separación entre ellas es *S*. Determine la capacitancia como una función de *L*.



24.51 Calcule la distribución de carga superficial máxima que puede mantenerse sobre cualquier superficie rodeada por aire seco.

24.52 Thermocoax es un tipo de cable coaxial utilizado para filtrado de alta frecuencia en experimentos cuánticos criogénicos en computación. Su escudo de acero inoxidable tiene un diámetro de 0.35 mm y su conducto de nicromo tiene un diámetro de 0.17 mm. El nicromo se usa porque su resistencia no varía mucho al pasar de temperatura ambiente a cerca del cero absoluto. El dieléctrico aislante es óxido de magnesio (MgO), con constante dieléctrica de 9.7. Calcule la capacitancia por metro de Thermocoax.

24.53 Un capacitor de placas paralelas tiene placas cuadradas de lado $L = 10.0$ cm y una distancia $d = 1.00$ cm entre las placas. Del espacio entre las placas, $\frac{1}{5}$ está ocupado por un dieléctrico con constante dieléctrica $\kappa_1 = 20.0$. Los $\frac{4}{5}$ restantes del espacio están ocupados por un dieléctrico diferente con $\kappa_2 = 5.00$. Encuentre la capacitancia del capacitor.

•**24.54** Un capacitor de placas paralelas de 4.0 nF con una lámina de Mylar ($\kappa = 3.1$) que llena el espacio entre las placas se carga hasta una diferencia de potencial de 120 V y luego se desconecta.

a) ¿Cuánto trabajo se requiere para retirar por completo la lámina de Mylar del espacio entre las dos placas?

b) ¿Cuál es la diferencia de potencial entre las placas de este capacitor una vez que el Mylar se retira por completo?

•**24.55** El volumen entre los dos cilindros de un capacitor cilíndrico está semiocupado por un dieléctrico con constante dieléctrica κ y está conectado a una batería con diferencia de potencial ΔV. ¿Cuál es la carga colocada sobre el capacitor? ¿Cuál es la razón de esta carga a la carga colocada sobre un capacitor sin dieléctrico conectado de la misma manera a través de la misma caída de potencial?

•**24.56** Una plancha dieléctrica de grosor d y constante dieléctrica $\kappa = 2.31$ se inserta en un capacitor de placas paralelas que ha sido cargado por una batería de 110. V de área $A = 100.\ \text{cm}^2$ y distancia de separación $d = 2.50$ cm.

a) Encuentre la capacitancia, C, la diferencia de potencial, V, el campo eléctrico, E, la carga total almacenada en el capacitor, Q, y la energía potencial eléctrica almacenada en el capacitor, U, antes de la inserción del material dieléctrico.

b) Encuentre C, V, E, Q y U una vez que se ha insertado la plancha dieléctrica y la batería sigue conectada.

c) Encuentre C, V, E, Q y U cuando la plancha dieléctrica está en su sitio y la batería se ha desconectado.

•**24.57** Un capacitor de placas paralelas tiene una capacitancia de 120. pF y el área de sus placas es 100. cm^2. El espacio entre las placas está lleno por una mica cuya constante dieléctrica es 5.40. Las placas del capacitor se mantienen a 50.0 V.

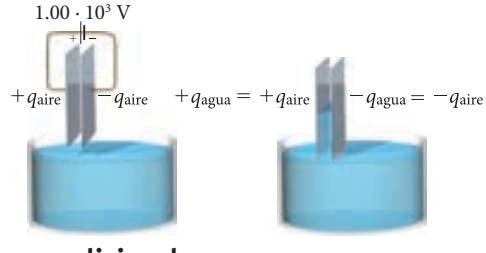
a) ¿Cuál es la intensidad del campo eléctrico en la mica?

b) ¿Cuál es la cantidad de carga sobre las placas?

c) ¿Cuál es la cantidad de carga inducida sobre la mica?

••**24.58** Diseñe un capacitor de placas paralelas con una capacitancia de 47.0 pF y capacidad de 7.50 nC. Usted cuenta con placas conductoras, que puede cortar a cualquier tamaño, y láminas de plexiglás, que puede cortar a cualquier tamaño y maquinar a cualquier grosor. El plexiglás tiene una constante dieléctrica de 3.40 y resistencia dieléctrica de $4.00 \cdot 10^7$ V/m. Su capacitor debe ser lo más compacto posible. Especifique todas las dimensiones relevantes. Ignore cualquier campo marginal en los bordes de las placas del capacitor.

••**24.59** Un capacitor de placas paralelas consta de un par de placas rectangulares, cada una de 1.00 cm por 10.0 cm, con una separación entre las placas de 0.100 mm, se carga con una fuente de alimentación a una diferencia de potencial de 1 000 V. Luego, la fuente de alimentación se retira y, sin descargar, el capacitor se coloca en posición vertical sobre un contenedor con agua desionizada, donde los lados cortos de las placas están en contacto con el agua, como muestra la figura. Use consideraciones de energía para demostrar que el agua sube entre las placas. Ignore otros efectos y determine el sistema de ecuaciones que puede usarse para calcular la altura a la que sube el agua entre las placas. No es necesario que resuelva el sistema.

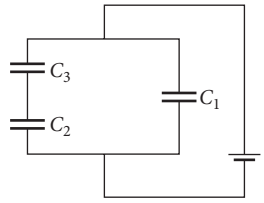


Problemas adicionales

24.60 En un capacitor de placas paralelas se usan dos placas metálicas circulares de radio 0.61 m y grosor 7.1 mm. Entre las placas se deja un entrehierro de 2.1 mm, y la mitad del espacio (un semicírculo) se llena con un dieléctrico para el cual $\kappa = 11.1$ y la otra mitad está llena de aire. ¿Cuál es la capacitancia de este capacitor?

24.61 Al considerar la resistencia dieléctrica del aire, ¿cuál es la cantidad máxima de carga que puede almacenarse sobre las placas de un capacitor que están a una distancia de 15 mm de separación y tienen un área de 25 cm^2?

24.62 La figura ilustra tres capacitores en un circuito: $C_1 = 2.0$ nF y $C_2 = C_3 = 4.0$ nF. Encuentre la carga sobre cada capacitor cuando la diferencia de potencial aplicada es $V = 1.5$ V.



24.63 Un capacitor con vacío entre sus placas se conecta a una batería y luego el entrehierro se llena con Mylar. ¿En qué porcentaje se incrementa su capacidad de almacenamiento de energía?

24.64 Un capacitor de placas paralelas con área de placas de 12.0 cm^2 y aire en el espacio entre las placas, cuya distancia de separación es 1.50 mm, se conecta a una batería de 9.00 V. Si las placas se alejan de modo que la separación aumenta a 2.75 mm, ¿cuánto trabajo se realiza?

24.65 Suponga que desea fabricar un capacitor de 1.0 F usando dos láminas cuadradas de papel de aluminio. Si las hojas del papel de aluminio están separadas por una simple pieza de papel (cuyo grosor aproximado mide 0.10 mm y $\kappa \approx 5.0$), encuentre el tamaño de las hojas de papel de aluminio (la longitud de cada borde).

24.66 Un capacitor de placas paralelas de 4.00 pF tiene una diferencia de potencial de 10.0 V a través de él. Las placas están separadas por 3.00 mm y el espacio entre éstas contiene aire.

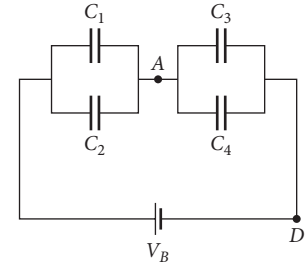
a) ¿Cuál es la carga sobre el capacitor?

b) ¿Cuánta energía se almacena en el capacitor?

c) ¿Cuál es el área de las placas?

d) ¿Cuál debe ser la capacitancia de este capacitor si el espacio entre las placas se llena con poliestireno?

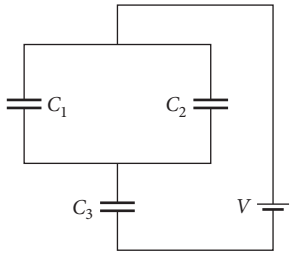
24.67 Un circuito con cuatro capacitores se carga por medio de una batería, como muestra la figura. Las capacitancias son $C_1 = 1.0$ mF, $C_2 = 2.0$ mF, $C_3 = 3.0$ mF y $C_4 = 4.0$ mF, y el potencial de la batería es $V_B = 1.0$ V. Cuando el circuito está en equilibrio, el punto D tiene un potencial $V_D = 0$ V. ¿Cuál es el potencial, V_A, en el punto A?



24.68 ¿Cuánta energía puede almacenarse en un capacitor con dos placas paralelas, cada una con área de 64.0 cm^2 y separadas por un entrehierro de 1.30 mm, lleno con porcelana cuya resistencia dieléctrica es 7.0 y que contiene cargas iguales, pero opuestas de 420. μC de magnitud?

24.69 Un dispositivo mecánico cuántico denominado *unión de Josephson* consta de dos capas superpuestas de metal superconductor (por ejemplo, aluminio a 1.00 K) separadas por 20.0 nm de óxido de aluminio, cuya constante dieléctrica es 9.1. Si el área de este dispositivo es 100. μm^2 y su configuración es de placas paralelas, estime su capacitancia.

24.70 Tres capacitores con capacitancias C_1 = 6.00 μF, C_2 = 3.00 μF, y C_3 = 5.00 μF están conectados en un circuito como ilustra la figura, con un potencial aplicado de V. Después de que las cargas sobre los capacitores han alcanzado sus valores en equilibrio, se encuentra que la carga Q_2 sobre el segundo capacitor es 40.0 μC.

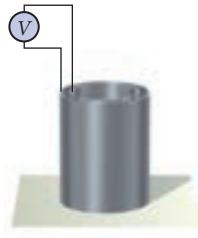


a) ¿Cuál es la carga, Q_1, sobre el capacitor C_1?

b) ¿Cuál es la carga, Q_3, sobre el capacitor C_3?

c) ¿Cuánto voltaje, V, se aplicó a través de los capacitores?

24.71 Para un proyecto científico, una estudiante de cuarto año corta las tapas superiores e inferiores de dos latas de sopa que miden lo mismo de altura, 7.24 cm, y con radios de 3.02 cm y 4.16 cm; introduce la lata más pequeña en la más grande y las pega sobre una lámina de plástico, como muestra la figura. Luego, la estudiante llena el hueco entre las latas con una "sopa" especial (constante dieléctrica de 63). ¿Cuál es la capacitancia de esta disposición?



24.72 Es posible considerar que la Tierra es un capacitor esférico. Si la carga neta sobre la Tierra es $-7.8 \cdot 10^5$ C , encuentre *a*) la capacitancia de la Tierra y *b*) la energía potencial eléctrica sobre la superficie terrestre.

•**24.73** Un capacitor de placas paralelas con aire en el entrehierro entre las placas se conecta a una batería de 6.00 V. Después de la carga, la energía almacenada en el capacitor es 72.0 nJ. Sin desconectar el capacitor de la batería, se introduce un dieléctrico en el entrehierro y de la batería al capacitor fluyen 317 nJ adicionales de energía.

a) ¿Cuál es la constante dieléctrica del dieléctrico?

b) Si cada una de las placas tiene un área de 50.0 cm^2, ¿cuál es la carga sobre la placa positiva del capacitor tras insertarse el dieléctrico?

c) ¿Cuál es la magnitud del campo eléctrico entre las placas antes de que se inserte el dieléctrico?

d) ¿Cuál es la magnitud del campo eléctrico entre las placas tras insertarse el dieléctrico?

•**24.74** Un capacitor de 8.00 μF se carga por completo por medio de una batería de 240. V, que luego se desconecta. A continuación, el capacitor se conecta a un capacitor inicialmente descargado de capacitancia C y se encuentra que la diferencia de potencial a través del capacitor es 80.0 V. ¿Cuál es el valor de C? ¿Cuánta energía termina por ser almacenada en el segundo capacitor?

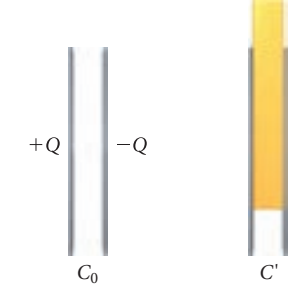
•**24.75** Un capacitor de placas paralelas consta de placas cuadradas de 2.00 cm por lado, separadas por una distancia de 1.00 mm. El capacitor se carga con una batería de 15.0 V, que luego se retira. Entre las placas se desliza una hoja de nailon (constante dieléctrica = 3.0) de 1.00 mm de grosor. ¿Cuál es la fuerza media (magnitud y dirección) de la hoja de nailon cuando se inserta en el capacitor?

•**24.76** Un protón que se mueve a lo largo del eje x a una velocidad de $1.0 \cdot 10^6$ m/s entra en el entrehierro entre las placas de un capacitor de placas paralelas de 2.0 cm de ancho. La distribución de carga superficial sobre las placas está dada por $\sigma = \pm 1.0 \cdot 10^{-6}$ C/m^2. ¿Cuánto se ha desviado el electrón (Δy) cuando llega al borde lejano del capacitor? Suponga que el campo eléctrico es uniforme dentro del capacitor y cero fuera de éste.

•**24.77** Las placas de un capacitor de placas paralelas miden L = 10.0 cm por lado y están separadas por una distancia d = 2.5 mm, como muestra la figura. El capacitor se carga por medio de una batería con diferencia de potencial V_0 = 75.0 V; luego, la batería se desconecta.

a) Determine la capacitancia, C_0, y la energía potencial eléctrica, U_0, almacenada en el capacitor en este punto.

b) Luego se inserta una plancha de plexiglás (κ = 3.4) de modo que ocupa $\frac{2}{3}$ del volumen entre las placas, como se ilustra en la figura. Determine la nueva capacitancia, C', la nueva diferencia de potencial entre las placas V' y la nueva energía potencial eléctrica, U', almacenada en el capacitor.



c) Si se ignora la gravedad, ¿se realiza trabajo, o no, para insertar la plancha dieléctrica?

•**24.78** Una batería común AAA tiene una energía almacenada de aproximadamente 3 400 J (la capacidad de la batería suele ser de 625 mA h, lo cual significa que tanta carga puede entregarse a aproximadamente 1.5 V). Suponga que desea construir un capacitor de placas paralelas que almacene esta cantidad de energía, usando una separación de placas de 1.0 mm y con aire que llena el espacio entre las placas.

a) Suponga que la diferencia de potencial a través del capacitor es 1.5 V. ¿Cuál debe ser el área de cada placa?

b) Si se supone que la diferencia de potencial a través del capacitor es la máxima que puede aplicarse sin que se descomponga el dieléctrico, ¿cuál debe ser el área de cada placa?

c) ¿Puede cada capacitor ser un sustituto idóneo para la batería AAA?

•**24.79** Dos capacitores con placas paralelas, C_1 y C_2, se conectan en serie a una batería de 96.0 V. Las placas de ambos capacitores tienen un área de 1.00 cm^2 y una separación de 0.100 mm; C_1 tiene aire entre sus placas, y el espacio entre las placas de C_2 está lleno de porcelana (constante dieléctrica de 7.0 y resistencia dieléctrica de 5.70 kV/mm).

a) Después del cargado, ¿cuáles son las cargas sobre cada capacitor?

b) ¿Cuál es la energía total almacenada en los dos capacitores?

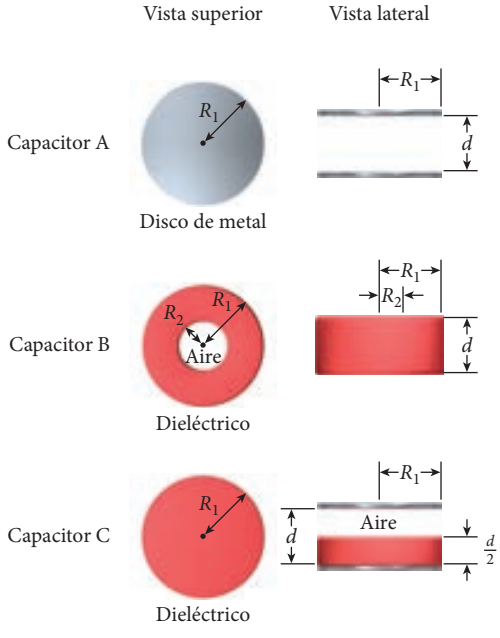
c) ¿Cuál es el campo eléctrico entre las placas de C_2?

•**24.80** Las placas de un capacitor de placas paralelas *A* constan de dos discos metálicos del mismo radio, R_1 = 4.00 cm, separados por una distancia d = 2.00 mm, como se muestra en la figura.

a) Calcule la capacitancia de este capacitor de placas paralelas donde el espacio entre las placas está lleno de aire.

b) Un dieléctrico en forma de cilindro con pared gruesa y radio exterior $R_1 = 4.00$ cm, radio interior $R_2 = 2.00$ cm, grosor $d =$ 2.00 mm y constante dieléctrica κ = 2.00 se coloca entre las placas, en forma coaxial con éstas, como ilustra la figura. Calcule la capacitancia del capacitor *B* con este dieléctrico.

c) El cilindro dieléctrico se retira, y en su lugar se coloca un disco sólido de radio R_1 hecho del mismo dieléctrico para formar el capacitor *C*, como se muestra en la figura. ¿Cuál es la nueva capacitancia?



•**24.81** Dos capacitores están conectados: uno de 1 μF cargado hasta 50.0 V y otro de 2 μF cargado hasta 20.0 V, con la placa positiva de cada uno conectada con la placa negativa del otro. ¿Cuál es la carga final sobre el capacitor de 1 μF?

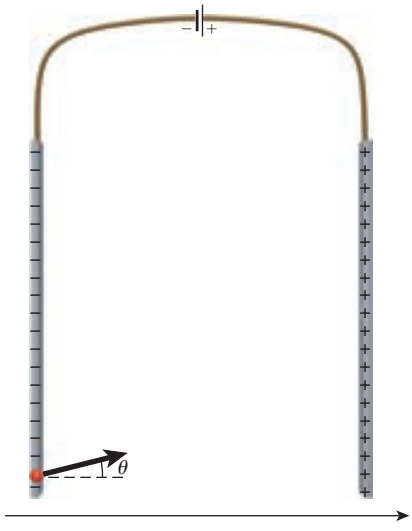
•**24.82** La capacitancia de un capacitor esférico que consta de dos esferas concéntricas conductoras con radios r_1 y r_2 ($r_2 > r_1$) está dada por $C = 4\pi\epsilon_0 r_1 r_2/(r_2 - r_1)$. Suponga que el espacio entre las esferas, desde r_1 hasta un radio R ($r_1 < R < r_2$) está lleno con un dieléctrico para el cual $\epsilon = 10\epsilon_0$. Encuentre una expresión para la capacitancia y compruebe los límites cuando $R = r_1$ y $R = r_2$.

•**24.83** En la figura, un capacitor de placas paralelas está conectado a una batería de 300. V. Con el capacitor conectado, se dispara un protón con una velocidad de $2.00 \cdot 10^5$ m/s (a través) de la placa negativa del capacitor a un ángulo θ con la normal a la placa.

a) Demuestre que el protón no puede llegar a la placa positiva del capacitor, sin importar cuál sea el ángulo θ.

b) Esboce la trayectoria del protón entre las placas.

c) Suponga que $V = 0$ en la placa negativa y calcule el potencial en el punto entre las placas donde el protón invierte su movimiento en la dirección *x*.



d) Suponga que las placas son lo suficientemente largas para que el protón permanezca entre ellas durante todo su movimiento, calcule la velocidad (sólo la magnitud) del protón cuando choca contra la placa negativa.

••**24.84** Para el capacitor de placas paralelas con dieléctrico mostrado en la figura, demuestre que para un grosor dado de la plancha dieléctrica, la capacitancia no depende de la posición de la plancha con respecto a las dos placas conductoras (es decir, no depende de los valores de d_1 y d_3).

25 Corriente y resistencia

LO QUE APRENDEREMOS 805

25.1 Corriente eléctrica 805
Ejemplo 25.1 Iontoforesis 807
25.2 Densidad de corriente 808
Problema resuelto 25.1 Velocidad de deriva de los electrones en un alambre de cobre 809
25.3 Resistividad y resistencia 811
Convención del calibre de alambres 813
Ejemplo 25.2 Resistencia de un alambre de cobre 814
Códigos de resistores 814
Dependencia con respecto a la temperatura y superconductividad 814
Bases microscópicas de la conducción en sólidos 815
25.4 Fuerza electromotriz y la ley de Ohm 816
Resistencia del cuerpo humano 817
25.5 Resistores en serie 818
Ejemplo 25.3 Resistencia interna de una batería 818
Resistor con sección transversal no constante 819
Problema resuelto 25.2 Sonda cerebral 819
25.6 Resistores en paralelo 821
Ejemplo 25.4 Resistencia equivalente en un circuito con seis resistores 822
Problema resuelto 25.3 Caída de potencial a través de un resistor en un circuito 823
25.7 Energía y potencia en circuitos eléctricos 825
Transmisión de corriente directa de alto voltaje 825
Ejemplo 25.5 Dependencia con respecto a la temperatura de la resistencia de una bombilla 826
25.8 Diodos: calles de un solo sentido en circuitos 827

LO QUE HEMOS APRENDIDO/ GUÍA DE ESTUDIO PARA EXAMEN 828

Práctica para resolución de problemas 829
Problema resuelto 25.4 Diámetro de un alambre en una línea de transmisión eléctrica 829
Preguntas de opción múltiple 831
Preguntas 832
Problemas 833

FIGURA 25.1 La corriente que fluye a través de un alambre hace que esta bombilla se encienda.

LO QUE APRENDEREMOS

- La corriente eléctrica en un punto de un circuito es la razón a la que se mueve la carga neta al pasar por ese punto.
- La corriente directa es corriente circulando en una dirección que no cambia con el tiempo. La dirección de la corriente se define como la dirección en la que la carga positiva se mueve.
- La densidad de corriente que pasa por un punto dado en un conductor es la corriente por área de la sección transversal.
- La conductividad de un material caracteriza la capacidad de ese material para conducir corriente. Su inversa se denomina resistividad.
- La resistencia de un dispositivo depende de su geometría y del material con el que está hecho.
- La resistencia de un conductor aumenta en forma aproximadamente lineal con la temperatura.
- La fuerza electromotriz (que suele denominarse fem) es una diferencia de potencial en un circuito eléctrico.
- La ley de Ohm establece que la caída de potencial a través de un dispositivo es igual a la corriente que fluye a través del dispositivo multiplicada por la resistencia del dispositivo.
- Un circuito simple consta de una fuente de fem y resistores conectados en serie o en paralelo.
- En un diagrama de circuito, una resistencia equivalente puede sustituir resistores conectados en serie o en paralelo.
- La potencia en un circuito es el producto de la corriente y la caída de potencial.
- Un diodo conduce corriente en una dirección, pero no en la dirección opuesta.

La iluminación eléctrica es algo tan común que ya ni siquiera se piense en ella. Usted camina en una habitación a oscuras y simplemente oprime un interruptor para que la habitación se ilumine casi como si fuera de día (figura 25.1). No obstante, lo que ocurre cuando se oprime el interruptor depende en última instancia de principios de física y dispositivos ingenieriles cuyo desarrollo y refinamiento requirieron décadas.

Este capítulo es el primero en centrarse en cargas eléctricas en movimiento. Presenta algunos de los conceptos fundamentales que usaremos en el capítulo 26 para analizar circuitos eléctricos básicos, que forman parte de todas las aplicaciones en electrónica. Estos capítulos se centran en los efectos eléctricos de cargas en movimiento, aunque usted debe saber que las cargas en movimiento también originan otros efectos, que empezaremos a analizar en el capítulo 27 sobre magnetismo.

25.1 Corriente eléctrica

Hasta este punto, nuestro estudio de la electricidad se ha dedicado a la electrostática, que trata sobre las propiedades de cargas y campos eléctricos estacionarios. Los circuitos eléctricos se presentaron en el análisis de capacitores en el capítulo 24, aunque sólo se cubrieron situaciones que implicaban capacitores cargados por completo, donde la carga está en reposo. Si la electrostática fuese todo la que hay en electricidad, no sería tan importante para la sociedad moderna como lo es. El impacto de la electricidad en el mundo cambiante se debe a las propiedades de las cargas en movimiento o corriente eléctrica. Todos los dispositivos eléctricos dependen de algún tipo de corriente para su operación.

Empezaremos analizando unos cuantos experimentos muy simples. Cuando usted era niño, tal vez tenía juguetes accionados por baterías, y probablemente algunos contenían pequeñas bombillas. Considere un circuito muy sencillo que consta sólo de una batería, un interruptor y una bombilla (vea la figura 25.2). Si el interruptor está abierto, como en la figura 25.2*a*), la bombilla no se enciende. Si el interruptor está cerrado, como en la figura 25.2*b*), la bombilla se enciende. Todos sabemos por qué ocurre esto: debido a que por el circuito cerrado circula una corriente. En el capítulo 24 vimos que la batería proporciona una diferencia de potencial para el circuito. En este capítulo analizaremos qué significa que la corriente circule, cuál es la base física de la corriente y cómo está relacionada con la diferencia de potencial suministrada por una batería. Veremos que la bombilla actúa como un resistor en el circuito y analizaremos la forma en que se comportan los resistores.

Comencemos considerando el experimento simple realizado en la figura 25.2*c*), en el que la orientación de la batería es la inversa de la orientación en la figura 25.2*b*). La bombilla se ilumina justo igual, a pesar del hecho de que el signo de la diferencia de potencial proporcionada por la batería se invierte. (La terminal positiva de la batería está en el extremo en color cobre.) En la figura 25.2*d*), dos bombillas están en el circuito, una detrás de la otra (el centro de atención de

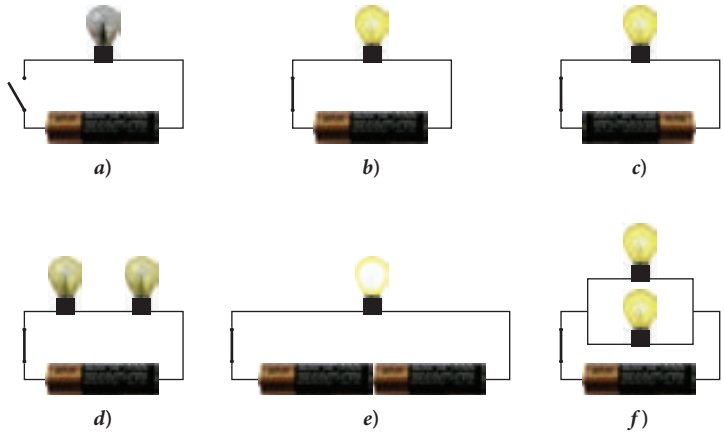


FIGURA 25.2 Experimentos con baterías y bombillas.

la sección 25.5 es esta disposición de resistores, que es una *conexión en serie*). Cada una de las dos bombillas brilla con intensidad significativamente menor que la bombilla única de la figura 25.2*c*), de modo que la corriente en el circuito puede ser menor que antes. Por otra parte, dos baterías en serie, como en la figura 25.2*e*), duplican la diferencia de potencial en el circuito y la bombilla brilla significativamente más. Por último, si se usan cables por separado para conectar las dos bombillas a una sola batería, como muestra la figura 25.2*f*), la bombilla brilla casi con la misma intensidad que en la figura 25.2*b*) o la 25.2*c*). Esta manera de conectar resistores en un circuito se denomina *conexión en paralelo* y se analizará en la sección 25.6.

Cuantitativamente, la **corriente eléctrica**, *i*, es la carga neta que pasa por un punto dado en un tiempo dado, dividida entre el tiempo. El movimiento aleatorio de los electrones en un conductor no es una corriente, a pesar de que grandes cantidades de carga pasan por un punto dado, porque no fluye ninguna carga *neta*. Si una carga neta *dq* pasa por un punto durante el tiempo *dt*, la corriente en ese punto es, por definición,

$$i = \frac{dq}{dt}. \tag{25.1}$$

La cantidad neta de carga que pasa por un punto dado en el tiempo *t* es la integral de la corriente con respecto al tiempo:

$$q = \int dq = \int_0^t i\,dt'. \tag{25.2}$$

La carga total se conserva, lo cual implica que la carga que fluye en un conductor nunca se pierde. En consecuencia, la misma cantidad de carga que circula hacia un extremo del conductor sale por el otro extremo.

A la unidad de corriente, coulombs por segundo, se le asignó el nombre de **amperio** (abreviado, A, y algunas veces amp) en honor del físico francés André Ampère (1775-1836):

$$1\ \text{A} = \frac{1\ \text{C}}{1\ \text{s}}.$$

Algunas corrientes típicas son 1 A para una bombilla eléctrica, 200 A para el arrancador de un automóvil, 1 mA = $1 \cdot 10^{-3}$ A para el funcionamiento de un reproductor de MP3, 1 nA para las corrientes en las neuronas y las conexiones sinápticas en el cerebro, y 10 000 A = 10^4 A para un rayo (durante un breve lapso). Las corrientes más pequeñas que es posible medir corresponden a los electrones individuales durante el efecto túnel en microscopios para este propósito y son del orden de 10 pA. La corriente más alta en el Sistema Solar Planetario es el viento solar, cuyo rango es de GA. En la figura 25.3 se muestran otros ejemplos del amplio rango de corrientes.

Hay una regla práctica de seguridad relacionada con los órdenes de magnitud de las corrientes que usted debe conocer: 1-10-100. Es decir, 1 mA de corriente que fluye a través de un cuerpo humano puede sentirse (casi siempre como un hormigueo), 10 mA de corriente provoca contracción muscular hasta el punto en el que la persona no puede soltarse del alambre que conduce la corriente y 100 mA es suficiente para detener el corazón.

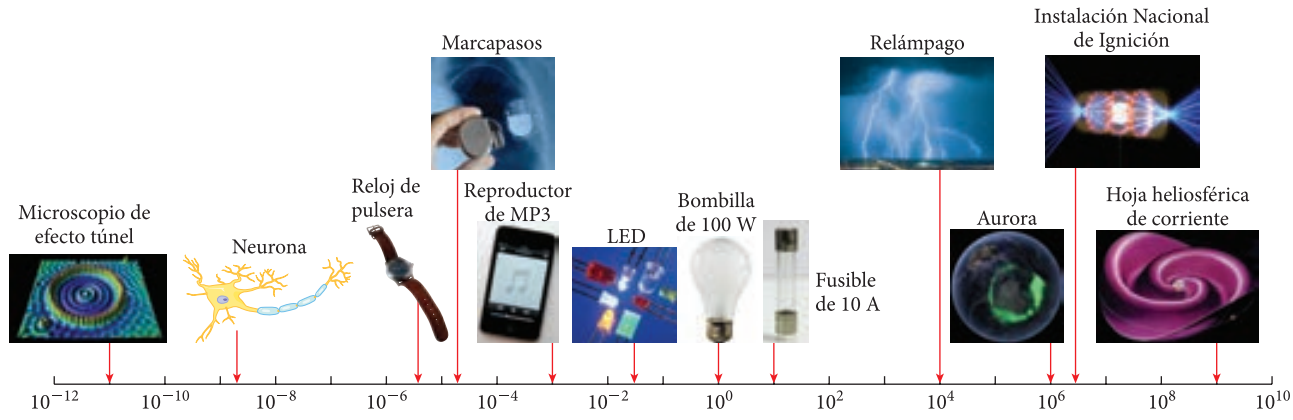


FIGURA 25.3 Ejemplos de corrientes eléctricas que varían de 1 pA a 10 GA.

Una corriente que sólo fluye en una dirección, que no cambia con el tiempo, se denomina **corriente directa**. (La corriente que primero fluye en una dirección y luego lo hace en la dirección opuesta se denomina *corriente alterna* y se analizará en el capítulo 30.) En este capítulo, la dirección en la que fluye la corriente en un conductor se indica con una flecha.

Físicamente, los portadores de carga en un conductor son los electrones, que tienen carga negativa. No obstante, por convención, la corriente positiva se define como la corriente que fluye de la terminal positiva a la terminal negativa. La razón para esta definición contraintuitiva acerca de la dirección de la corriente es que la definición se originó en la segunda mitad del siglo XIX, cuando se ignoraba que los electrones son los portadores de carga responsables de la corriente. Por lo tanto, la dirección de la corriente se definió simplemente como la dirección en la que deberían fluir las cargas positivas.

25.1 Oportunidad de autoevaluación

Una batería recargable típica AA con capacidad nominal de 700 mAh. ¿Durante cuánto tiempo esta batería puede suministrar una corriente de 100 μA ?

EJEMPLO 25.1 Iontoforesis

FIGURA 25.4 La iontoforesis es la aplicación subcutánea de medicamento con ayuda de corriente eléctrica.

Hay varias formas de administrar sustancias antiinflamatorias. La forma menos dolorosa es la oral: simplemente uno se traga el medicamento. No obstante, este método suele llevar a la acumulación de una pequeña cantidad del medicamento en el tejido afectado, del orden de 1 μg. La segunda forma es aplicando localmente el medicamento por medio de una aguja. Este método es doloroso, pero el orden del medicamento que puede depositar en el tejido afectado es de 10 mg: cuatro órdenes de magnitud más que por la vía oral. Sin embargo, desde la década de 1990 se dispone de un tercer método, que también es doloroso y puede depositar alrededor

(*continúa*)

del orden de 100 μg de la sustancia en la zona en la que es necesaria. Este método, denominado *iontoforesis*, usa corrientes eléctricas (muy débiles) que se envían a través de la piel del paciente (figura 25.4). El dispositivo para efectuar la iontoforesis consta de una batería y dos electrodos (más otros circuitos electrónicos que permiten que la enfermera controle la intensidad de la corriente aplicada). La sustancia antiinflamatoria, que suele ser dexametasona, se aplica en la parte inferior del electrodo con carga negativa (cátodo). Por la piel del paciente circula una corriente que deposita la sustancia en la piel hasta una profundidad de 1.7 cm.

PROBLEMA

Una enfermera desea administrar 80 μg de dexametasona en el talón de un jugador de fútbol soccer. Si ella usa un dispositivo de iontoforesis que aplica una corriente de 0.14 mA, como muestra la figura 25.4, ¿en cuánto tiempo se administra esta dosis de sustancia? Suponga que el instrumento tiene una tasa de aplicación de 650 μg/C y que la corriente circula con rapidez constante.

SOLUCIÓN

Si la tasa de aplicación de la sustancia es de 650 μg/C, para aplicar 80 μg se requiere una carga total de

$$q = \frac{80\ \mu\text{g}}{650\ \mu\text{g/C}} = 0.123\ \text{C}.$$

La corriente circula con rapidez constante, de modo que la integral de la ecuación 25.2 se simplifica a

$$q = \int_0^t i\,dt' = it.$$

Al despejar t e insertar los números, encontramos

$$q = it \Rightarrow t = \frac{q}{i} = \frac{0.123\ \text{C}}{0.14 \cdot 10^{-3}\ \text{A}} = 880\ \text{s}.$$

El tratamiento de iontoforesis del atleta dura aproximadamente 15 minutos.

25.2 Densidad de corriente

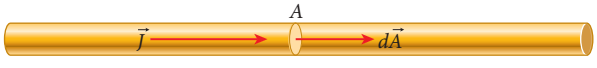


FIGURA 25.5 Segmento de un conductor (alambre) con un plano perpendicular que lo corta y forma una sección transversal de área A.

Considere una corriente que fluye por un conductor. Para un plano perpendicular que pasa por el conductor, la corriente por unidad de área que circula por el conductor en ese punto (la sección transversal de área A en la figura 25.5) es la **densidad de corriente**, $\vec{J}$. La dirección de $\vec{J}$ se define como la dirección de la velocidad de las cargas positivas (o bien, opuesta a la dirección de las cargas negativas) que cruzan el plano. La corriente que cruza el plano es

$$i = \int \vec{J} \cdot d\vec{A}, \tag{25.3}$$

donde $d\vec{A}$ es el elemento de área diferencial del plano perpendicular, como se indica en la figura 25.5. Si la corriente es uniforme y perpendicular al plano, entonces $i = JA$, y la magnitud de la densidad de corriente puede expresarse como

$$J = \frac{i}{A}. \tag{25.4}$$

En un conductor que no lleva corriente, los electrones de conducción se mueven aleatoriamente. Cuando por el conductor circula corriente, los electrones de conducción siguen moviéndose aleatoriamente pero, además, tienen una **velocidad de deriva** adicional, $\vec{v}_d$, en dirección opuesta a la del campo eléctrico que produce la corriente. La magnitud de la velocidad del movimiento aleatorio es del orden de 10^6 m/s, mientras la magnitud de la velocidad de deriva es del orden de 10^{-4} m/s e incluso menos. Con esta velocidad de deriva tan lenta, podría preguntarse por qué la luz se presenta casi de inmediato cuando se oprime un interruptor. La respuesta es que el interruptor establece un campo eléctrico casi inmediatamente por todo el circuito (con una velocidad del orden de $3 \cdot 10^8$ m/s), provocando que los electrones libres en todo el circuito (incluyendo la bombilla) se muevan de manera casi instantánea.

La densidad de corriente está relacionada con la velocidad de deriva de los electrones en movimiento. Considere un conductor con sección transversal de área A al que se aplica un campo eléctrico $\vec{E}$. Suponga que el conductor tiene n electrones de conducción por unidad de volumen y también suponga que todos los electrones tienen la misma velocidad de deriva y que la densidad de corriente es uniforme. Los electrones con carga negativa se mueven a la deriva en una dirección opuesta a la del campo eléctrico. En un intervalo de tiempo, dt, cada electrón se mueve una distancia neta $v_d dt$. Entonces, el volumen de electrones que pasan por una sección transversal del conductor en el tiempo dt es $Av_d\,dt$, y el número de electrones en este volumen es $nAv_d\,dt$. La carga de cada electrón es $-e$, de modo que la carga dq que fluye por el área en el tiempo dt es

$$dq = -nev_d A\,dt. \tag{25.5}$$

En consecuencia, la corriente es

$$i = \frac{dq}{dt} = -nev_d A. \tag{25.6}$$

La densidad de corriente resultante es

$$J = \frac{i}{A} = -nev_d. \tag{25.7}$$

La ecuación 25.7 se dedujo en una dimensión espacial, como es idóneo para un alambre. No obstante, puede generalizarse fácilmente a direcciones arbitrarias en el espacio tridimensional:

$$\vec{J} = -(ne)\vec{v}_d.$$

Usted puede ver que el vector velocidad de deriva es antiparalelo al vector densidad de corriente, como se había establecido.

La figura 25.6 muestra un diagrama de un alambre que conduce una corriente. Los portadores de corriente físicos son electrones con carga negativa. En la figura 25.6, estos electrones se mueven hacia la izquierda con velocidad de deriva $\vec{v}_d$. Sin embargo, el campo eléctrico, la densidad de corriente y la corriente están dirigidos —todos— hacia la derecha debido a la convención de que estas cantidades se refieren a cargas positivas. Tal vez encuentre que esta convención es algo confusa, pero debe tenerla en cuenta.

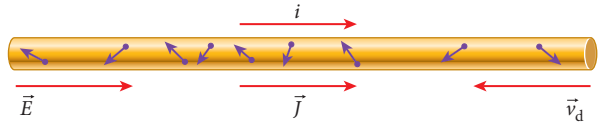


FIGURA 25.6 Electrones que se mueven en un alambre de derecha a izquierda, originando una corriente que va de izquierda a derecha.

PROBLEMA RESUELTO 25.1 Velocidad de deriva de los electrones en un alambre de cobre

PROBLEMA

Usted está jugando "Galactic Destroyer" en su consola de videojuegos. Su controlador de juegos opera a 12 V y está conectado a la caja principal con un alambre de cobre calibre 18 de 1.5 m de longitud. Cuando usted conduce su nave espacial hacia la batalla, sostiene la palanca de mando en la posición hacia delante durante 5.3 s, enviando una corriente de 0.78 mA a la consola. ¿Qué distancia recorrieron los electrones en el alambre durante estos pocos segundos, mientras en la pantalla su nave espacial ha recorrido la mitad de un sistema estelar?

SOLUCIÓN

PIENSE

Para encontrar la distancia que se han movido los electrones en un alambre durante un intervalo de tiempo dado, es necesario calcular su velocidad de deriva. Para determinar la velocidad de deriva para electrones en un alambre de cobre que conduce corriente, necesitamos encontrar la densidad de los electrones portadores de carga en cobre. Luego, podemos aplicar la definición de densidad de carga para calcular la velocidad de deriva.

ESBOCE

La figura 25.7 ilustra un alambre de cobre con sección transversal de área A que conduce una corriente, i, donde también se muestra que, por convención, los electrones derivan en dirección opuesta a la dirección de la corriente.

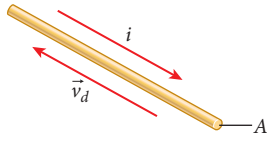


FIGURA 25.7 Un alambre de cobre con sección transversal de área A que conduce una corriente, i.

(*continúa*)

(*continuación*)

INVESTIGUE

Obtenemos la distancia x recorrida por los electrones durante el tiempo t a partir de

$$x = v_d t,$$

donde v_d es la magnitud de la velocidad de deriva de los electrones. La velocidad de deriva está relacionada con la densidad de corriente a través de la ecuación 25.7:

$$\frac{i}{A} = -nev_d \tag{i}$$

donde i es la corriente, A es el área de la sección transversal (0.823 mm^2 para un alambre calibre 18), n es la densidad de electrones y $-e$ es la carga de un electrón. La densidad de electrones es

$$n = \frac{\text{número de electrones de conducción}}{\text{volumen}}.$$

Podemos calcular la densidad de electrones al suponer que hay un electrón de conducción por átomo de cobre. La densidad del cobre es

$$\rho_{Cu} = 8.96\ \text{g/cm}^3 = 8\,960\ \text{kg/m}^3.$$

Un mol de cobre tiene una masa de 63.5 g y contiene $6.02 \cdot 10^{23}$ átomos. Por lo tanto, la densidad

$$n = \left(\frac{1\ \text{electrón}}{1\ \text{átomo}}\right)\left(\frac{6.02\cdot 10^{23}\ \text{átomos}}{63.5\ \text{g}}\right)\left(\frac{8.96\ \text{g}}{1\ \text{cm}^3}\right)\left(\frac{10^6\ \text{cm}^3}{1\ \text{m}^3}\right) = 8.49\cdot 10^{28}\ \frac{\text{electrones}}{\text{m}^3}.$$

SIMPLIFIQUE

En la ecuación (i) despejamos la magnitud de la velocidad de deriva:

$$v_d = \frac{i}{neA}.$$

Por lo tanto, la distancia recorrida por los electrones es

$$x = v_d t = \frac{i}{neA} t.$$

CALCULE

Al escribir los valores numéricos, obtenemos

$$\begin{aligned} x = v_d t = \frac{it}{neA} &= \frac{\left(0.78\cdot 10^{-3}\ \text{A}\right)(5.3\ \text{s})}{\left(8.49\cdot 10^{28}\ \text{m}^{-3}\right)\left(1.602\cdot 10^{-19}\ \text{C}\right)\left(0.823\ \text{mm}^2\right)} \\ &= \left(6.96826\cdot 10^{-8}\ \text{m/s}\right)(5.3\ \text{s}) \\ &= 3.69318\cdot 10^{-7}\ \text{m}. \end{aligned}$$

REDONDEE

Mostramos nuestro resultado con dos cifras:

$$v_d = 7.0\cdot 10^{-8}\ \text{m/s},$$

y

$$x = 3.7\cdot 10^{-7}\ \text{m} = 0.37\ \mu\text{m}.$$

VUELVA A REVISAR

Ocurre que nuestro resultado para la magnitud de la velocidad de deriva es un número sorprendentemente pequeño. Antes, se afirmó que las velocidades de deriva típicas son del orden de 10^{-4} m/s o menores. Puesto que la corriente es proporcional a la velocidad de deriva, una corriente relativamente pequeña implica una velocidad de deriva relativamente pequeña. Un alambre calibre 18 puede portar una corriente de varios amperios, de modo que la corriente especificada en el planteamiento del problema es menor que 1% de la corriente máxima. En consecuencia, el hecho de que nuestra velocidad de deriva sea menor que 1% de 10^{-4} m/s, una velocidad de deriva típica para corrientes elevadas es razonable.

La distancia que calculamos para el movimiento de los electrones es menor que 0.001 del grosor de una uña del dedo, una distancia muy pequeña cuando se compara con la longitud del alambre. Este resultado constituye un recordatorio valioso de que el campo electromagnético se mueve casi a la velocidad de la luz (en el vacío) dentro de un conductor y provoca que todos los electrones de conducción deriven básicamente al mismo tiempo. En consecuencia, la señal de su controlador de juego llega casi instantáneamente a la consola, a pesar del paso increíblemente lento de los electrones.

25.3 Resistividad y resistencia

Algunos materiales conducen electricidad mejor que otros. Aplicar una diferencia de potencial dada a través de un buen conductor resulta en una corriente relativamente grande; al aplicar la misma diferencia de potencial a través de un aislante se obtiene poca corriente. La **resistividad**, ρ, es una medida de cuán intensamente un material se opone al flujo de corriente eléctrica. La **resistencia**, R, es la oposición de un material al flujo de corriente eléctrica.

Si una diferencia de potencial eléctrica conocida, ΔV, se aplica a través de un conductor (algún dispositivo o material físico que conduzca corriente) y se mide la corriente resultante, i, entonces la resistencia del conductor está dada por

$$R = \frac{\Delta V}{i}. \tag{25.8}$$

La unidad de resistencia es el voltio por amperio, al cual se denomina **ohm** y se ha asignado el símbolo Ω (la letra griega mayúscula omega), en honor del físico alemán Georg Simon Ohm (1789-1854):

$$1\ \Omega = \frac{1\ \text{V}}{1\ \text{A}}.$$

Al reordenar la ecuación 25.8 se obtiene

$$i = \frac{\Delta V}{R}, \tag{25.9}$$

que establece que para una diferencia de potencial dada, ΔV, la corriente, i, es inversamente proporcional a la resistencia, R. Esta ecuación suele referirse comúnmente como la **ley de Ohm**. Un reordenamiento de la ecuación 25.9, $\Delta V = iR$, algunas veces también se refiere como la ley de Ohm.

Algunas veces los dispositivos se describen en términos de la **conductancia**, G, definida como

$$G = \frac{i}{\Delta V} = \frac{1}{R}.$$

La conductancia tiene la unidad derivada SI de siemens (S):

$$1\ \text{S} = \frac{1\ \text{A}}{1\ \text{V}} = \frac{1}{1\ \Omega}.$$

En algunos conductores, la resistividad depende de la dirección en la que fluye la corriente. En este capítulo se supone que la resistividad de un material es uniforme en todas las direcciones de la corriente.

La resistencia de un dispositivo depende del material del que está hecho el dispositivo, así como de su geometría. Como ya se planteó, la resistividad de un material caracteriza cuánto se opone al flujo de corriente. La resistividad se define en términos de la magnitud del campo eléctrico aplicado, E, y la magnitud de la densidad de corriente resultante, J:

$$\rho = \frac{E}{J}. \tag{25.10}$$

Las unidades de la resistividad son

$$[\rho] = \frac{[E]}{[J]} = \frac{\text{V/m}}{\text{A/m}^2} = \frac{\text{V m}}{\text{A}} = \Omega\,\text{m}.$$

La tabla 25.1 enumera las resistividades de algunos conductores representativos a 20 °C. Como puede ver, valores típicos para la resistividad de metales conductores usados en alambres son del orden de 10^{-8} Ω m. Por ejemplo, la resistividad del cobre es alrededor de $2 \cdot 10^{-8}$ Ω m. Varias aleaciones mostradas en la taba 25.1 tienen propiedades útiles. Por ejemplo, el alambre hecho a partir de nicromo (80% níquel y 20% cromo) a menudo se usa como elemento de calefacción en dispositivos como tostadoras. La próxima vez que tueste pan, mire dentro de la tostadora. Los elementos brillantes quizá sean alambres de nicromo. La resistividad del nicromo ($108 \cdot 10^{-8}$ Ω m) es aproximadamente 50 veces la del cobre. Así, cuando circula corriente por estos alambres de una tostadora, disipan potencia y se calientan hasta que adquieren un brillo rojo mate, mientras los alambres de cobre del cordón eléctrico que conecta la tostadora con la pared permanecen fríos.

Algunas veces, los materiales se especifican en términos de su **conductividad**, σ, más que de su resistividad, ρ, que se define como

$$\sigma = \frac{1}{\rho}.$$

Las unidades de la conductividad son $(\Omega\ \text{m})^{-1}$.

La resistencia de un conductor puede encontrarse a partir de su resistividad y su geometría. Para un conductor homogéneo de longitud L y sección transversal de área constante A, la ecuación $\Delta V = -\int \vec{E} \cdot d\vec{s}$ del capítulo 23 puede usarse para relacionar el campo eléctrico, E, y la diferencia de potencial eléctrico, ΔV, a través del conductor:

$$E = \frac{\Delta V}{L}.$$

Observe que, en contraste con lo que ocurre en electrostática, donde la superficie de cualquier conductor es una superficie equipotencial y no tiene campo eléctrico dentro y por él no circula ninguna corriente, el conductor en esta situación tiene $\Delta V \neq 0$ y $\vec{E} \neq 0$, ocasionando que circule

Tabla 25.1 **La resistividad y el coeficiente de temperatura de la resistividad de algunos conductores representativos**

Material	Resistividad, ρ a 20 °C (10^{-8} Ω m)	Coeficiente de temperatura, α (10^{-3} K^{-1})
Plata	1.62	3.8
Cobre	1.72	3.9
Oro	2.44	3.4
Aluminio	2.82	3.9
Latón	3.9	2
Tungsteno	5.51	4.5
Níquel	7	5.9
Hierro	9.7	5
Acero	11	5
Tantalio	13	3.1
Plomo	22	4.3
Constantán	49	0.01
Acero inoxidable	70	1
Mercurio	95.8	0.89
Nicromo	108	0.4

Los valores para el acero y el acero inoxidable dependen del tipo de acero.

corriente. La magnitud de la densidad de corriente es la corriente dividida entre el área de la sección transversal:

$$J = \frac{i}{A}.$$

A partir de la definición de resistividad (ecuación 25.10) y usando $J = i/A$ y la ley de Ohm (ecuación 25.8), obtenemos

$$\rho = \frac{E}{J} = \frac{\Delta V/L}{i/A} = \frac{\Delta V}{i}\frac{A}{L} = \frac{iR}{i}\frac{A}{L} = R\frac{A}{L}.$$

Al reordenar los términos en la expresión para la resistencia de un conductor en términos de la resistividad de su material constituyente, la longitud y el área de la sección transversal:

$$R = \rho\frac{L}{A}. \tag{25.11}$$

Convención del calibre de alambres

La convención del calibre de alambres de la American Wire Gauge (AWG) especifica diámetros y, por lo tanto, áreas de secciones transversales sobre una escala logarítmica. La convención de la AWG se muestra en la tabla 25.2. El calibre del alambre está relacionado con el diámetro: mientras más alto sea el número de calibre, más delgado es el alambre. Para alambres con gran diámetro, los números de calibre constan de uno o más ceros, como muestra la tabla 25.2. Un alambre calibre 00 es equivalente a un calibre -1, un calibre 000 es equivalente a un calibre -2 y así sucesivamente. Por definición, el diámetro de un alambre calibre 36 es exactamente 0.005 pulgadas y el diámetro de un alambre calibre 0000 es exactamente 0.46 pulgadas. (Estos números se muestran en rojo en la tabla 25.2.) Entre los calibres 0000 y 36 hay 39 valores de calibre, y el número de calibre es una representación logarítmica del diámetro del alambre. En consecuencia, la fórmula para convertir del calibre de la AWG al diámetro del alambre, en pulgadas, es $d = (0.005)92^{(36-n)/39}$, donde n es el número de calibre. En residencias, los alambres que suelen usarse son calibre 12 y calibre 10.

Tabla 25.2 Diámetros y áreas de sección transversal como los define la Convención de Calibres de Alambres de E.U. (AWG)

AWG	d (in)	d (mm)	A (mm^2)	AWG	d (in)	d (mm)	A (mm^2)	AWG	d (in)	d (mm)	A (mm^2)
000000	0.5800	14.733	170.49	**11**	0.0907	2.3048	4.1723	**26**	0.0159	0.4049	0.1288
00000	0.5165	13.120	135.20	**12**	0.0808	2.0525	3.3088	**27**	0.0142	0.3606	0.1021
0000	**0.46**	11.684	107.22	**13**	0.0720	1.8278	2.6240	**28**	0.0126	0.3211	0.0810
000	0.4096	10.405	85.029	**14**	0.0641	1.6277	2.0809	**29**	0.0113	0.2859	0.0642
00	0.3648	9.2658	67.431	**15**	0.0571	1.4495	1.6502	**30**	0.0100	0.2546	0.0509
0	0.3249	8.2515	53.475	**16**	0.0508	1.2908	1.3087	**31**	0.0089	0.2268	0.0404
1	0.2893	7.3481	42.408	**17**	0.0453	1.1495	1.0378	**32**	0.0080	0.2019	0.0320
2	0.2576	6.5437	33.631	**18**	0.0403	1.0237	0.8230	**33**	0.0071	0.1798	0.0254
3	0.2294	5.8273	26.670	**19**	0.0359	0.9116	0.6527	**34**	0.0063	0.1601	0.0201
4	0.2043	5.1894	21.151	**20**	0.0320	0.8118	0.5176	**35**	0.0056	0.1426	0.0160
5	0.1819	4.6213	16.773	**21**	0.0285	0.7229	0.4105	**36**	**0.005**	0.1270	0.0127
6	0.1620	4.1154	13.302	**22**	0.0253	0.6438	0.3255	**37**	0.0045	0.1131	0.0100
7	0.1443	3.6649	10.549	**23**	0.0226	0.5733	0.2582	**38**	0.0040	0.1007	0.0080
8	0.1285	3.2636	8.3656	**24**	0.0201	0.5106	0.2047	**39**	0.0035	0.0897	0.0063
9	0.1144	2.9064	6.6342	**25**	0.0179	0.4547	0.1624	**40**	0.0031	0.0799	0.0050
10	0.1019	2.5882	5.2612								

Una regla práctica importante es que una reducción por tres calibres duplica el área de la sección transversal del alambre. Al analizar la ecuación 25.11, puede ver que para reducir a la mitad la resistencia de una longitud de alambre dada, debe disminuir el número de calibre por 3.

EJEMPLO 25.2 Resistencia de un alambre de cobre

Los alambres normales que los electricistas instalan en casas residenciales tienen una resistencia bastante baja.

PROBLEMA

¿Cuál es la resistencia de un alambre normal de cobre calibre 12 de 100.0 m que suele usarse en instalaciones eléctricas domésticas?

SOLUCIÓN

El diámetro de un alambre de cobre calibre 12 mide 2.053 mm (vea la tabla 25.2). Entonces, el área de su sección transversal es

$$A = 3.31\ \text{mm}^2.$$

Al usar el valor de la resistividad del cobre en la tabla 25.1 y la ecuación 25.11, encontramos

$$R = \rho\frac{L}{A} = (1.72\cdot10^{-8}\ \Omega\,\text{m})\frac{100.0\ \text{m}}{3.31\cdot10^{-6}\ \text{m}^2} = 0.520\ \Omega.$$

25.1 Ejercicio en clase

¿Cuál es la resistencia de un alambre de cobre de longitud L = 70.0 m y diámetro d = 2.60 mm?

a) 0.119 Ω *d*) 0.190 Ω

b) 0.139 Ω *e*) 0.227 Ω

c) 0.163 Ω

a)

b)

FIGURA 25.8 *a*) Selección de resistores con varias resistencias. *b*) Código de color de un resistor de 150 Ω.

Códigos de resistores

En muchas aplicaciones, el diseño de circuitos demanda un intervalo de resistencias en varias partes de un circuito. Resistores comerciales, como los que se muestran en la figura 25.8*a*), tienen una amplia gama de resistencias. Los resistores suelen fabricarse de carbono encerrado en una cubierta de plástico que semeja una cápsula de medicina, con alambres que salen por los extremos para la conexión eléctrica. El valor de la resistencia está indicado por tres o cuatro bandas de color sobre la cubierta de plástico. Las dos primeras bandas indican números para la mantisa, la tercera representa una potencia de 10 y la cuarta indica una tolerancia para el intervalo de valores. Para la mantisa y la potencia de 10, los números asociados con los colores son negro = 0, café = 1, rojo = 2, naranja = 3, amarillo = 4, verde = 5, azul = 6, morado = 7, gris = 8 y blanco = 9. Para la tolerancia, café significa 1%; rojo, 2%; dorado, 5%; plateado, 10%, y ninguna banda significa 20%. Por ejemplo, el resistor que ilustra la figura 25.8*b*) tiene los colores (de izquierda a derecha) café, verde, café y dorado. A partir del código, la resistencia de este resistor es $15\cdot10^1\ \Omega$ = 150 Ω, con una tolerancia de 5%.

Dependencia con respecto a la temperatura y superconductividad

Los valores de la resistividad y la resistencia varían con la temperatura. Para metales, esta dependencia con respecto a la temperatura es lineal sobre un gran intervalo de temperaturas. Una relación empírica para la dependencia de la resistividad de un metal con respecto a la temperatura es

$$\rho - \rho_0 = \rho_0\alpha(T - T_0), \tag{25.12}$$

donde ρ es la resistividad a temperatura T, ρ_0 es la resistividad a temperatura T_0 y α es el **coeficiente de temperatura de resistividad eléctrica** para el conductor particular.

En aplicaciones cotidianas, la dependencia de la resistencia con respecto a la temperatura a menudo es importante. La ecuación 25.11 establece que la resistencia de un dispositivo depende de su longitud y del área de la sección transversal. Estas cantidades dependen de la temperatura, como vimos en el capítulo 17; no obstante, para un conductor particular la dependencia de la expansión lineal con respecto a la temperatura es mucho menor que la dependencia de la resistividad con respecto a la temperatura. Así, la dependencia de la resistencia de un conductor con respecto a la temperatura puede aproximarse como

$$R - R_0 = R_0\alpha(T - T_0). \tag{25.13}$$

Observe que las ecuaciones 25.12 y 25.13 tienen que ver con diferencias de temperatura, de modo que éstas pueden expresarse en grados Celsius o kelvins (¡pero no en grados Fahrenheit!).

La tabla 25.1 enumera valores de α para conductores representativos. Observe que metales conductores comunes como el cobre tienen un coeficiente de temperatura de resistividad eléctrica del orden de $4 \cdot 10^{-3}$ K^{-1}. No obstante, una aleación de metal, el constantán (60% cobre y 40% níquel), tiene la característica especial de que su coeficiente de temperatura de resistividad eléctrica es muy pequeño: $\alpha = 1 \cdot 10^{-5}$ K^{-1}. El nombre de esta aleación proviene de abreviar la frase "constant resistance" ("resistencia constante"). El pequeño coeficiente de temperatura del constantán combinado con su resistividad relativamente alta de $4.9 \cdot 10^{-7}$ Ω m lo hace útil para resistores de precisión cuyas resistencias dependen poco de la temperatura. Observe también que el nicromo tiene un coeficiente de temperatura relativamente pequeño, $4 \cdot 10^{-4}$ K^{-1}, lo cual lo hace idóneo para la construcción de elementos de calefacción, como ya se mencionó.

Según la ecuación 25.12, la mayor parte de los materiales tienen una resistividad que varía linealmente con la temperatura en circunstancias normales. Sin embargo, algunos materiales no obedecen esta regla a bajas temperaturas. A temperaturas muy bajas, la resistividad de algunos materiales se hace exactamente igual a cero. Estos materiales se denominan **superconductores**, que tienen aplicaciones en la fabricación de imanes para dispositivos con los que se obtienen imágenes por resonancia magnética (MRI, del inglés *magnetic resonance imagers*). Los imanes elaborados con superconductores usan menos potencia y pueden producir campos magnéticos más altos que los imanes elaborados con conductores resistivos convencionales. Los capítulos 27 y 28 presentan un análisis más detallado de la superconductividad.

La resistencia de algunos materiales superconductores en realidad disminuye con el aumento de temperatura, lo cual implica un coeficiente de temperatura de resistividad eléctrica negativo. Estos materiales a menudo se emplean en detectores de alta resolución para mediciones ópticas o en detectores de partículas. Tales dispositivos deben mantenerse fríos a fin de preservar alta su resistencia, lo cual se logra con refrigeradores o nitrógeno líquido.

Un *termistor* es un semiconductor cuya resistencia depende mucho de la temperatura. Los termistores se usan para medir la temperatura. La dependencia de la resistencia de un termistor típico con respecto a la temperatura se muestra en la figura 25.9*a*). Ahí puede ver usted que la resistencia de un termistor disminuye con el aumento de temperatura. Esta caída contrasta con el incremento en la resistencia de un alambre de cobre sobre el mismo intervalo de temperatura, lo cual se muestra en la figura 25.9*b*).

Bases microscópicas de la conducción en sólidos

La conducción de corriente en sólidos resulta del movimiento de los electrones. En un conductor metálico como el cobre, los átomos del metal forman un arreglo regular denominado *estructura cristalina*. Los electrones más externos de cada átomo son esencialmente libres de moverse aleatoriamente en esta estructura. Cuando se aplica un campo eléctrico, los electrones se desplazan en la dirección opuesta a la del campo eléctrico. Ocurre resistencia a este desplazamiento cuando los electrones interactúan con los átomos del metal en la red. Cuando se incrementa la temperatura del metal, el movimiento de los átomos en la estructura aumenta. Esto, a su vez, aumenta la probabilidad de que los electrones interactúen con los átomos, haciendo que la resistencia del metal se incremente de manera eficaz.

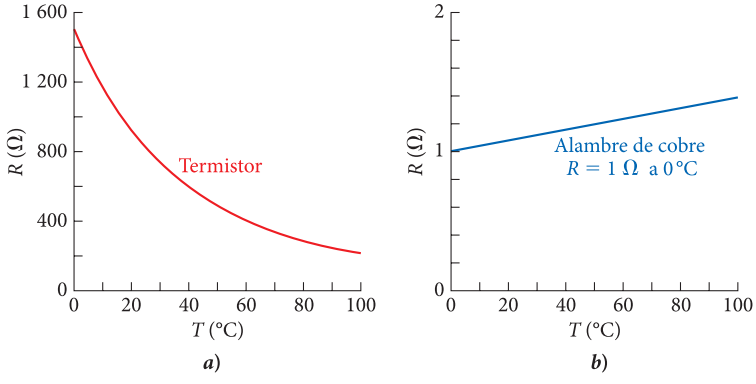


FIGURA 25.9 *a*) Dependencia de la resistencia de un termistor con respecto a la temperatura. *b*) Dependencia con respecto a la temperatura de la resistencia de un alambre de cobre cuya resistencia es 1 Ω a $T = 0$ °C.

Los átomos de un semiconductor también están dispuestos en una estructura cristalina. No obstante, los electrones más externos de los átomos del semiconductor no son libres de moverse dentro de la estructura o red. Para que lo hagan, es necesario suministrarles suficiente energía para que alcancen un estado energético que les permita moverse libremente. Así, un semiconductor típico tiene una resistencia más alta que un conductor de metal porque tiene muchos menos electrones de conducción. Además, cuando un semiconductor se calienta, muchos más electrones ganan suficiente energía para moverse libremente; así, la resistencia del semiconductor disminuye cuando sube su temperatura.

25.4 Fuerza electromotriz y la ley de Ohm

Para que la corriente fluya por un conductor, es necesario establecer una diferencia de potencial a través del resistor. Esta diferencia de potencial, suministrada por una batería o algún otro dispositivo, se denomina **fuerza electromotriz**, que se abrevia **fem**. (La fuerza electromotriz no es una fuerza en absoluto, sino una diferencia de potencial. El término sigue siendo de amplio uso, aunque principalmente en su forma abreviada.) Un dispositivo que mantiene una diferencia de potencial se denomina *dispositivo de fem* y realiza trabajo sobre los portadores de carga. La diferencia de potencial creada por el dispositivo de fem se representa por V_{fem}. En este texto se supone que los dispositivos de fem tienen terminales a las que es posible conectar un circuito. Se supone que el dispositivo de fem mantiene una diferencia de potencial constante, V_{fem}, entre estas terminales.

Algunos ejemplos de estos dispositivos son las baterías, los generadores eléctricos y las celdas solares. Las **baterías**, analizadas en los capítulos 23 y 24, producen fem por medio de reacciones químicas. Los generadores eléctricos crean fem a partir de movimiento mecánico. Las celdas solares convierten energía luminosa del Sol en energía eléctrica. Si examina una batería, encontrará que tiene escrita su diferencia de potencial (algunas veces se menciona coloquialmente como "voltaje"). Este "voltaje" es la diferencia de potencial (fem) que la batería puede suministrar a un circuito. (Observe que la batería es una fuente de fem constante, *no* suministra corriente constante a un circuito.) Las baterías recargables también muestran una clasificación en mAh (miliamperio-hora), que proporciona información sobre la carga total que la batería puede entregar cuando está cargada por completo. El mAh es otra unidad de carga:

$$1\ \text{mAh} = (10^{-3}\ \text{A})(3\,600\ \text{s}) = 3.6\ \text{As} = 3.6\ \text{C}.$$

Los componentes eléctricos en un circuito pueden ser fuentes de fem, capacitores, resistores o algún otro dispositivo eléctrico. Estos componentes están conectados por medio de alambres conductores. Por lo menos un componente debe ser una fuente de fem porque la diferencia de potencial creada por el dispositivo de fem es lo que acciona la corriente en el circuito. Puede pensar que un dispositivo de fem es la bomba en una tubería de agua; sin bomba, el agua permanece en la tubería sin moverse. Una vez que se enciende la bomba, el agua fluye por la tubería de manera continua.

Un circuito eléctrico empieza y termina en un dispositivo de fem. Puesto que el dispositivo de fem mantiene una diferencia de potencial continua, V_{fem}, entre sus terminales, corriente positiva abandona el dispositivo a mayor potencial de su terminal positiva y entra en su terminal negativa a un potencial menor. Este potencial menor suele igualarse a cero.

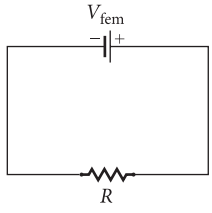


FIGURA 25.10 Circuito simple que contiene una fuente de fem y un resistor.

Considere un circuito simple de la forma mostrada en la figura 25.10, donde una fuente de fem proporciona una diferencia de potencial, V_{fem}, a través de un resistor con resistencia R. Observe una convención importante para los diagramas de circuitos: un resistor siempre se simboliza con una línea en zigzag, y se supone que toda la resistencia, R, está concentrada ahí. Los alambres que conectan los diferentes elementos del circuito se representan por líneas rectas; se sobrentiende que éstas no tienen resistencia. Los alambres físicos, por supuesto, tienen algo de resistencia, pero para el objetivo del diagrama esto se ignora.

Para un circuito como el que muestra la figura 25.10, el dispositivo de fem proporciona la diferencia de potencial que hace que la corriente fluya a través del resistor. En consecuencia, en este caso, la ley de Ohm (ecuación 25.9) puede escribirse en términos de la fem externa como

$$V_{\text{fem}} = iR. \tag{25.14}$$

Observe que, a diferencia de la ley de Gravitación de Newton o la ley de conservación de la energía, la ley de Ohm no es una ley de la naturaleza. Ni siquiera la obedecen todos los resistores. Para muchos, denominados *resistores óhmicos*, la corriente es directamente proporcional a la diferencia de potencial a través del resistor sobre un amplio intervalo de temperaturas y un amplio

intervalo de diferencias de potencial aplicadas. Para otros resistores, denominados *resistores no óhmicos*, la corriente y la diferencia de potencial no son directamente proporcionales en absoluto. Los resistores no óhmicos incluyen muchos tipos de transistores, lo cual significa que muchos dispositivos electrónicos modernos no obedecen la ley de Ohm. En la sección 25.8 consideraremos con más detalle uno de estos dispositivos, el diodo. No obstante, una gran clase de materiales y dispositivos (como los alambres convencionales, por ejemplo) obedecen la ley de Ohm, de modo que vale la pena dedicar atención a sus consecuencias. El resto de este capítulo (con excepción de la sección 25.8) trata los resistores como dispositivos óhmicos; es decir, como dispositivos que obedecen la ley de Ohm.

La corriente, i, que circula por el resistor en la figura 25.10 también fluye a través de la fuente de fem y los alambres que conectan los componentes. Debido a que se supone que los alambres tienen resistencia cero (como ya se observó), el cambio en el potencial de la corriente debe ocurrir en el resistor, según la ley de Ohm. Este cambio se denomina **caída de potencial** a través del resistor. Así, el circuito mostrado en la figura 25.10 puede representarse en una forma diferente, clarificando más dónde ocurre la caída de potencial y mostrando cuáles partes del circuito están a qué potencial. La figura 25.11*a*) muestra el circuito en la figura 25.10. En la figura 25.11*b*) se ilustra el mismo circuito pero con la dimensión vertical que representa el valor del potencial eléctrico en diferentes puntos alrededor del circuito. La diferencia de potencial es suministrada por la fuente de fem, y toda la caída de potencial ocurre a través del resistor único. [Recuerde que la convención es que las líneas que unen los elementos del circuito en un diagrama de circuito están representados en la figura 25.11*b*) por líneas horizontales, lo cual significa que todo el alambre está exactamente al mismo potencial.] La ley de Ohm es válida para la caída de potencial a través del resistor, y la corriente en el circuito puede calcularse usando la ecuación 25.9.

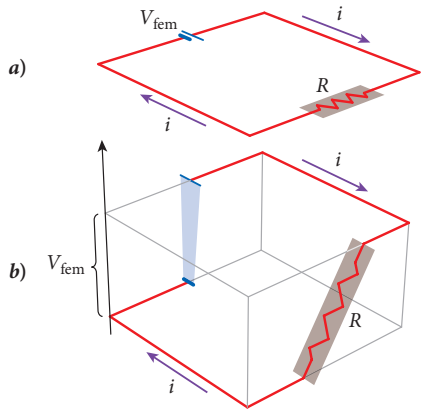


FIGURA 25.11 *a*) Representación convencional de un circuito simple con un resistor y una fuente de fem. *b*) Representación tridimensional del mismo circuito, que muestra el potencial en cada punto en el circuito. La corriente en el circuito se muestra en ambas vistas.

La figura 25.11 ilustra una cuestión importante sobre los circuitos. Las fuentes de fem suministran una diferencia de potencial a un circuito, y las caídas de potencial a través de los resistores reducen el potencial en el circuito. No obstante, la diferencia de potencial total sobre cualquier ruta cerrada alrededor de todo el circuito debe ser cero. Ésta es una consecuencia directa de la ley de conservación de la energía. Una analogía con la gravedad puede ayudar: usted puede ganar y perder energía potencial al moverse de un lado a otro en un campo gravitacional (por ejemplo, al subir y bajar colinas), pero si regresa al mismo punto del que partió, la energía neta ganada o perdida es exactamente cero. Lo mismo es cierto para la corriente que circula por un circuito: no importa cuántas caídas de potencial o fuentes de fem se encuentren sobre cualquier circuito cerrado, un punto dado siempre tiene el mismo valor de potencial eléctrico. La corriente puede fluir por todo el circuito en cualquier dirección con el mismo resultado.

25.2 Oportunidad de autoevaluación

Un resistor con $R = 10.0\ \Omega$ está conectado a través de una fuente de fem con diferencia de potencial $V_{fem} = 1.50$ V. ¿Cuál es la corriente que circula por el circuito?

Resistencia del cuerpo humano

Esta breve introducción de la resistencia y la ley de Ohm conducen a una cuestión concerniente a la seguridad eléctrica. Ya se mencionó que corrientes por arriba de 100 mA pueden ser mortales si fluyen a través del músculo del corazón humano. La ley de Ohm es clara en el sentido de que la resistencia del cuerpo humano determina si una diferencia de potencial dada —por ejemplo, de la batería de un automóvil— puede ser peligrosa. Puesto que normalmente manipulamos herramientas con las manos, la medida más relevante para la resistencia del cuerpo humano, R_{cuerpo}, es la resistencia a lo largo de una ruta que va de las yemas de los dedos de una mano a las yemas de los dedos de la otra mano. (¡Observe que el corazón se encuentra casi en el centro de esta ruta!) Para la mayoría de la gente, esta resistencia está en el intervalo $500\ \text{k}\Omega < R_{cuerpo} < 2\ \text{M}\Omega$. La mayor parte de esta resistencia proviene de la piel; en particular, de las capas de piel muerta en la superficie. No obstante, si la piel está húmeda, su conductividad aumenta notablemente y, en consecuencia, la resistencia del cuerpo disminuye bastante. Para una diferencia de potencial dada, la ley de Ohm implica que la corriente aumenta drásticamente. Por eso, manipular dispositivos eléctricos o tocarlos con la lengua en entornos húmedos es mala idea.

Los alambres en un circuito pueden ser puntiagudos en el sitio donde se cortan. Si estas puntas penetran la piel en las yemas de los dedos, la resistencia de la piel se elimina y la resistencia de yema a yema se reduce notoriamente. Si un alambre penetra un vaso capilar, la resistencia del cuerpo humano disminuye aún más, porque la sangre tiene una salinidad elevada, de modo que es una buena conductora. En este caso, incluso diferencias de potencial relativamente pequeñas provenientes de baterías puede tener efectos mortales.

25.5 Resistores en serie

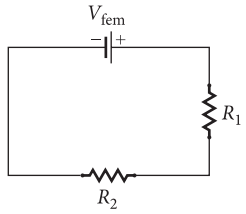


FIGURA 25.12 *a*) Circuito con dos resistores en serie con una fuente de fem.

Un circuito puede contener más de un resistor y/o más de una fuente de fem. El análisis de circuitos con múltiples resistores requiere técnicas diferentes. Primero analizaremos resistores conectados en serie.

En el circuito que se muestra en la figura 25.12, dos resistores, R_1 y R_2, están conectados en serie con una fuente de fem con diferencia de potencial V_{fem}. La caída de potencial a través del resistor R_1 se denota por ΔV_1, y la caída de potencial a través del resistor R_2 se denota por ΔV_2. La suma de las dos caídas de potencial debe ser igual a la diferencia de potencial suministrada por la fuente de fem:

$$V_{fem} = \Delta V_1 + \Delta V_2 .$$

La idea crucial es que la misma corriente debe circular a través de todos los elementos del circuito. ¿Cómo sabemos esto? Recuerde que al principio de este capítulo la corriente se definió como la razón de cambio de la carga con respecto al tiempo: $i = dq/dt$. La corriente debe ser la misma en todas partes a lo largo del alambre, y también en un resistor, porque la carga se conserva en todas partes. A lo largo del alambre no se gana ni pierde carga, de modo que la corriente es la misma alrededor del bucle en la figura 25.12.

Para eliminar un malentendido que se encuentra a menudo, observe que *no existe algo como una corriente "agotada" en un resistor*. No importa cuántos resistores estén conectados en serie, la corriente que entra en el primero es la corriente que sale del segundo. Una analogía de agua que fluye en un tubo puede ayudar: no importa cuán largo sea el tubo o cuántos codos tenga, el agua que entra por un extremo debe salir por el otro.

Así, la corriente que circula a través de cada resistor en la figura 25.12 es la misma. Para cada resistor podemos aplicar la ley de Ohm y obtener:

$$V_{fem} = iR_1 + iR_2 .$$

Una resistencia equivalente, R_{eq}, puede sustituir las dos resistencias individuales:

$$V_{fem} = iR_1 + iR_2 = iR_{eq} ,$$

donde

$$R_{eq} = R_1 + R_2 .$$

Así, dos resistores en serie pueden sustituirse por una resistencia equivalente igual a la suma de las dos resistencias. En la figura 25.13 se ilustran las caídas de potencial en el circuito en serie de la figura 25.12, usando una vista tridimensional.

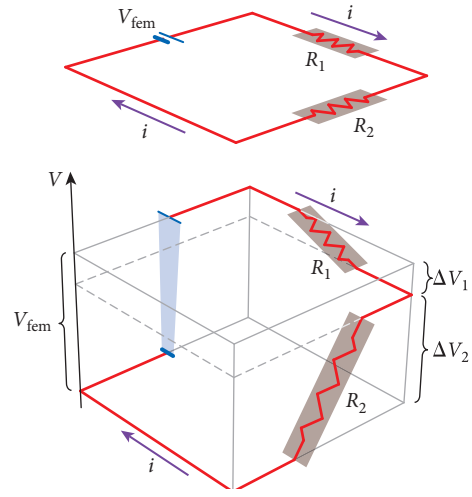


FIGURA 25.13 *a*) Representación convencional de un circuito simple con dos resistores en serie y una fuente de fem. *b*) Representación tridimensional del mismo circuito, que muestra el potencial en cada punto en el circuito. La corriente en el circuito se muestra en ambas vistas.

25.2 Ejercicio en clase

¿Cuáles son los valores relativos de las dos resistencias en la figura 25.13?

a) $R_1 < R_2$

b) $R_1 = R_2$

c) $R_1 > R_2$

d) En la figura no se proporciona información suficiente para comparar las resistencias.

La expresión para la resistencia equivalente de dos resistores en serie puede generalizarse a un circuito con n resistores en serie:

$$R_{eq} = \sum_{i=1}^{n} R_i \qquad \text{(para resistores en serie).} \tag{25.15}$$

Es decir, si los resistores están conectados en una ruta simple de modo que la misma corriente circula por todos ellos, su resistencia total es justo la suma de sus resistencias individuales.

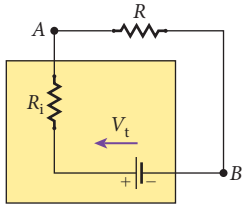


FIGURA 25.14 Batería (zona amarilla) con resistencia interna R_i conectada a un resistor externo, R.

EJEMPLO 25.3 Resistencia interna de una batería

Cuando una batería no está conectada a ningún circuito, la diferencia de potencial a través de sus terminales es V_t. Cuando una batería está conectada en serie a un resistor con resistencia R, a través del circuito fluye corriente. Cuando la corriente fluye, la diferencia de potencial, V_{fem}, a través de las terminales de la batería es menor que V_t. Esta caída de potencial ocurre porque la batería tiene una resistencia interna, R_i, que puede considerarse como si estuviera en serie con el resistor externo (figura 25.14). Es decir,

$$V_t = iR_{eq} = i(R + R_i).$$

La batería se representa con el rectángulo amarillo en la figura 25.14. Las terminales de la batería se representan con los puntos A y B.

PROBLEMA

Considere una batería que tiene $V_t = 12.0$ V cuando no está conectada a ningún circuito. Cuando un resistor de 10.0 Ω se conecta con la batería, la diferencia de potencial a través de las terminales de la batería cae a 10.9 V. ¿Cuál es la resistencia interna de la batería?

SOLUCIÓN

La corriente que circula por el resistor externo está dada por

$$i = \frac{\Delta V}{R} = \frac{10.9\ \text{V}}{10.0\ \Omega} = 1.09\ \text{A}.$$

La corriente que fluye por todo el circuito, incluida la batería, debe ser la misma que la corriente que fluye en el resistor externo. Así, tenemos

$$V_t = iR_{eq} = i(R + R_i)$$

$$(R + R_i) = \frac{V_t}{i}$$

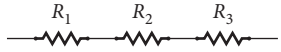
$$R_i = \frac{V_t}{i} - R = \frac{12.0\ \text{V}}{1.09\ \text{A}} - 10.0\ \Omega = 1.0\ \Omega.$$

La resistencia interna de la batería es 1.0 Ω. Las baterías con resistencia interna se denominan no ideales. A menos que se especifique otra cosa, se supone que las baterías en los circuitos tienen resistencia interna cero. Estas baterías se denominan ideales. Una batería ideal mantiene una diferencia de potencial constante entre sus terminales, sin importar qué corriente circule.

El hecho de si una batería puede seguir proporcionando energía no puede determinarse al medir simplemente la diferencia de potencial a través de sus terminales. En lugar de esto, es necesario colocar una resistencia en la batería y luego medir la diferencia de potencial. Si la batería ya no es funcional, aún puede proporcionar su diferencia de potencial nominal cuando no está conectada, pero su diferencia de potencial puede caer a cero cuando se conecta a una resistencia externa. Algunas marcas de baterías cuentan con dispositivos integrados para medir la diferencia de potencial en funcionamiento simplemente al oprimir un punto particular sobre la batería y observar un indicador.

25.3 Ejercicio en clase

Tres resistores idénticos, R_1, R_2 y R_3, están conectados entre sí, como muestra la figura. Una corriente eléctrica fluye por los tres resistores. La corriente por R_2



a) es la misma que la corriente que pasa por R_1 y R_3.

b) es un tercio de la corriente que pasa por R_1 y R_3.

c) es el doble de la suma de la corriente que pasa por R_1 y R_3.

d) es tres veces la corriente que pasa por R_1 y R_3.

e) no puede determinarse.

Resistor con sección transversal no constante

Hasta ahora, hemos supuesto en el análisis que un resistor tiene la misma área de sección transversal, A, y la misma resistividad, ρ, en todas partes a lo largo de su longitud (éste era el supuesto implícito en la deducción que llevó a la obtención de la ecuación 25.11). Esto, por supuesto, no siempre es así. ¿Cómo abordamos el análisis de un resistor cuya área de sección transversal es una función de la posición x a lo largo del resistor, $A(x)$, y/o cuya resistividad puede variar como una función de la posición, $\rho(x)$? Simplemente dividimos el resistor en muchas piezas muy cortas Δx y sumamos sobre todas ellas, puesto que la ecuación 25.15 establece que la resistencia total es la suma de todas las resistencias de las piezas cortas individuales; luego tomamos el límite $\Delta x \to 0$. Si esto le parece como una integración, tiene razón. La fórmula general para calcular la resistencia de un resistor de longitud L cuya sección transversal tiene un área no uniforme, $A(x)$, es

$$R = \int_0^L \frac{\rho(x)}{A(x)}\,dx. \tag{25.16}$$

Un ejemplo concreto ayudará a clarificar esta ecuación.

PROBLEMA RESUELTO 25.2 Sonda cerebral

En el capítulo 22 se mencionó el campo de electrocorticografía (ECoG), con el que los investigadores miden el campo eléctrico generado por las neuronas en el cerebro. Algunas de estas mediciones sólo pueden realizarse por medio de la inserción de alambres muy delgados en el cerebro a fin de sondear directamente las neuronas. Estos alambres están aislados, con sólo una

(*continúa*)

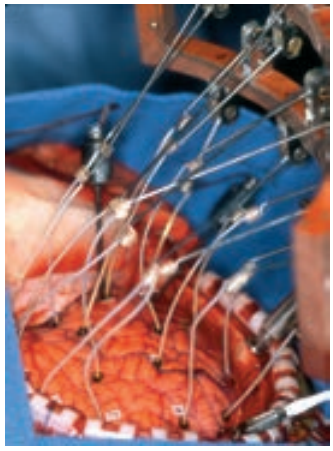


FIGURA 25.15 Electrocorticografía realizada con redes de electrodos sobre la corteza cerebral de un paciente con epilepsia.

(*continuación*)

punta muy corta expuesta, que se empuja dentro de una punta cónica muy fina. La figura 25.15 muestra el uso de la ECoG para tratar a un paciente con epilepsia.

PROBLEMA

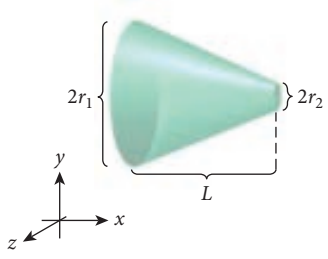
Si el alambre para realizar una ECoG está hecho de tungsteno y tiene un diámetro de 0.74 mm, la punta tiene una longitud de 2.0 mm y está afilado de modo que su diámetro en el extremo mide 2.4 μm, ¿cuál es la resistencia de la punta? (La resistividad del tungsteno se encuentra en la tabla 25.1 y es $5.51 \cdot 10^{-8}\ \Omega$ m.)

SOLUCIÓN

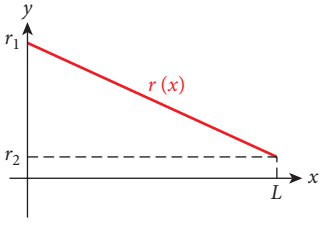
PIENSE

Primero, podríamos preguntarnos por qué querríamos conocer la resistencia. Para medir campos eléctricos o diferencias de potencial en neuronas, no es posible usar sondas con gran resistencia; por ejemplo, del orden de los kilo-ohms, debido a que los campos o las diferencias no son detectables. No obstante, puesto que la resistencia es inversamente proporcional al área de la sección transversal, un área muy pequeña significa una resistencia relativamente grande. El planteamiento del problema indica que la sonda tiene una punta muy fina, más aguda que la punta de cualquier aguja para coser. ¡De aquí la necesidad de encontrar la resistencia de la sonda antes de insertarla en el cerebro!

Resulta evidente que estamos tratando con un caso de área de sección transversal no constante, por lo que necesitaremos efectuar la integración de la ecuación 25.16. Sin embargo, puesto que la punta está completamente hecha de tungsteno, la resistividad es constante en todo su volumen, lo cual simplifica la tarea.



a)



b)

FIGURA 25.16 *a*) Forma de la punta de la sonda. *b*) Sistema de coordenadas para la integración.

ESBOCE

La figura 25.16*a*) muestra una vista tridimensional de la punta, y la figura 25.16*b*) presenta un corte a través de su plano de simetría y la ruta de integración.

INVESTIGUE

Para este problema, la parte de investigación es bastante sencilla, porque ya sabemos cuál ecuación usar. No obstante, es necesario modificar la ecuación 25.16 para reflejar el hecho de que la resistividad es constante en toda la punta:

$$R = \rho \int_0^L \frac{1}{A(x)}\,dx, \tag{i}$$

donde $A(x)$ es el área de un círculo, $A(x) = \pi[r(x)]^2$. El radio de un círculo disminuye en forma casi lineal desde r_1 hasta r_2 (vea la figura 25.16*b*):

$$r(x) = r_1 + \frac{(r_2 - r_1)x}{L}. \tag{ii}$$

SIMPLIFIQUE

Sustituimos la expresión para el radio de la ecuación (ii) en la fórmula para el área y luego sustituimos la expresión resultante para $A(x)$ en la ecuación (i). Llegamos a

$$R = \rho \int_0^L \frac{1}{\pi\left(r_1 + (r_2 - r_1)x / L\right)^2}\,dx.$$

Esta integral puede parecer intimidante a primera vista, pero excepto para x todas las otras cantidades son constantes. Al consultar una tabla de integrales o software para integrar, encontramos

$$R = -\frac{\rho L}{\pi(r_2 - r_1)\left(r_1 + (r_2 - r_1)x/L\right)}\Bigg|_0^L = \frac{\rho L}{\pi r_1 r_2}.$$

CALCULE

Al escribir los valores numéricos, obtenemos

$$R = \frac{\left(5.51 \cdot 10^{-8}\ \Omega\text{m}\right)\left(2.0 \cdot 10^{-3}\ \text{m}\right)}{\pi(0.37 \cdot 10^{-3}\ \text{m})(1.2 \cdot 10^{-6}\ \text{m})} = 7.90039 \cdot 10^{-2}\ \Omega.$$

REDONDEE

Mostramos nuestro resultado con dos cifras, para las cuales se proporcionaron las propiedades geométricas de la punta:

$$R = 7.9 \cdot 10^{-2}\ \Omega.$$

VUELVA A REVISAR

El valor de 79 mΩ parece una resistencia muy pequeña para una corriente que debe pasar por una punta afilada cuyo diámetro mide 2.4 μm. Por otra parte, la longitud de la punta es muy corta, lo cual hace necesaria una resistencia pequeña. Otro factor de confianza adicional es el hecho de que las unidades se trabajaron correctamente.

No obstante, también hay algunas pruebas que podemos realizar para convencernos de que los límites asintóticos de la solución a $R = \rho L/(\pi r_1 r_2)$ son razonables. Primero, cuando la longitud tiende a cero, también lo hace la resistencia, como era de esperar. Segundo, puesto que el radio de cualquier extremo de la punta tiende a cero, la fórmula pronostica una resistencia infinita, lo que también es de esperar.

25.6 Resistores en paralelo

En lugar de estar conectados en serie de modo que toda la corriente tenga que pasar por ambos resistores, dos resistores pueden conectarse en paralelo, con lo cual se divide la corriente entre ambos, como muestra la figura 25.17. De nuevo, para ilustrar las caídas de potencial, en la figura 25.18 se ilustra el mismo circuito en una vista tridimensional.

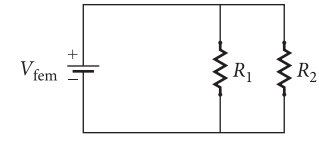


FIGURA 25.17 Circuito con dos resistores conectados en paralelo y una sola fuente de fem.

En este caso, la caída de potencial a través de cada resistor es igual a la diferencia de potencial suministrada por la fuente de fem. Al usar la ley de Ohm (ecuación 25.14) para la corriente i_1 en R_1 y la corriente i_2 en R_2, tenemos

$$i_1 = \frac{V_{fem}}{R_1}$$

y

$$i_2 = \frac{V_{fem}}{R_2}.$$

La corriente total de la fuente de fem, i, debe ser

$$i = i_1 + i_2.$$

Al insertar las expresiones para i_1 e i_2, obtenemos

$$i = i_1 + i_2 = \frac{V_{fem}}{R_1} + \frac{V_{fem}}{R_2} = V_{fem}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right).$$

La ley de Ohm (ecuación 25.14) puede escribirse como

$$i = V_{fem}\left(\frac{1}{R_{eq}}\right).$$

Así, dos resistores conectados en paralelo pueden sustituirse con una resistencia equivalente dada por

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}.$$

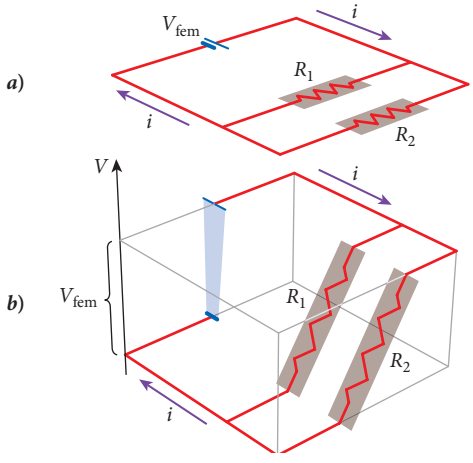


FIGURA 25.18 *a*) Representación convencional de un circuito simple con dos resistores en paralelo y una fuente de fem. *b*) Representación tridimensional del mismo circuito, mostrando el potencial en cada punto en el circuito.

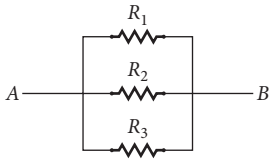
En general, la resistencia equivalente para n resistores conectados en paralelo está dada por

$$\frac{1}{R_{eq}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{R_i} \quad \text{(resistores en paralelo).} \tag{25.17}$$

Resulta evidente que combinar resistores en serie y en paralelo para obtener resistencias equivalentes permite analizar circuitos con varias combinaciones de resistores en una forma semejante al análisis de combinaciones de capacitores realizado en el capítulo 24.

25.4 Ejercicio en clase

Tres resistores idénticos, R_1, R_2, y R_3, están conectados entre sí, como muestra la figura. Una corriente eléctrica fluye del punto A al punto B. La corriente por R_2



a) es la misma que la corriente que pasa por R_1 y R_3.

b) es un tercio de la corriente que pasa por R_1 y R_3.

c) es el doble de la suma de la corriente que pasa por R_1 y R_3.

d) es tres veces la corriente que pasa por R_1 y R_3.

e) no puede determinarse.

25.5 Ejercicio en clase

¿Cuál combinación de resistores tiene la mayor resistencia equivalente?

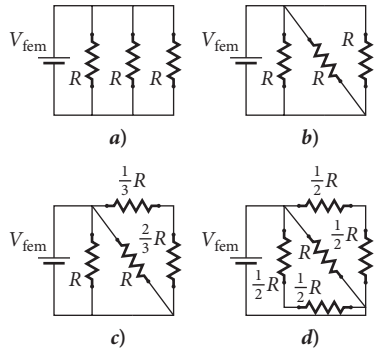
a) La combinación **a)**.

b) La combinación **b)**.

c) La combinación **c)**.

d) La combinación **d)**.

e) La resistencia equivalente es la misma para los cuatro.



EJEMPLO 25.4 Resistencia equivalente en un circuito con seis resistores

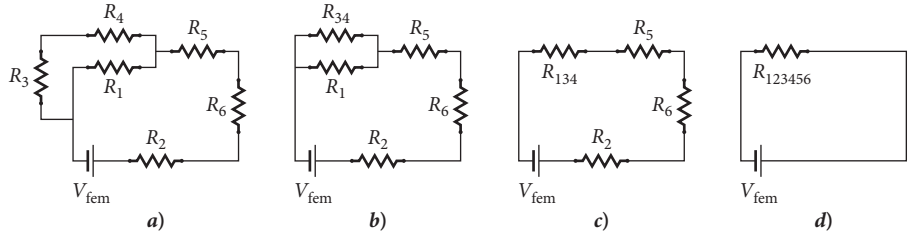


FIGURA 25.19 *a*) Circuito con seis resistores. *b*) a *d*) Pasos para combinar estos seis resistores y determinar la resistencia equivalente.

PROBLEMA

En la figura 25.19*a*) se muestra un circuito con seis resistores, R_1 a R_6. ¿Cuál es la corriente que fluye por los resistores R_1 y R_3 en términos de V_{fem} y R_1 a R_6?

SOLUCIÓN

Empezamos por identificar las partes del circuito que están conectadas claramente en paralelo o en serie. La corriente que fluye por R_2 es la corriente que fluye de la fuente de fem. Observamos que R_3 y R_4 están en serie. Así, podemos escribir

$$R_{34} = R_3 + R_4. \tag{i}$$

Esta sustitución se hace en la figura 25.19*b*). Esta figura muestra que R_{34} y R_1 están en paralelo. Entonces podemos escribir

$$\frac{1}{R_{134}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_{34}},$$

o bien,

$$R_{134} = \frac{R_1 R_{34}}{R_1 + R_{34}}. \tag{ii}$$

Esta sustitución se muestra en la figura 25.19*c*). A partir de esta figura podemos ver que R_2, R_5, R_6 y R_{134} están en serie. Entonces podemos escribir

$$R_{123456} = R_2 + R_5 + R_6 + R_{134}. \tag{iii}$$

Esta sustitución se muestra en la figura 25.19*d*). Sustituimos R_{34} y R_{134} de las ecuaciones (i) y (ii) en la ecuación (iii):

$$R_{123456} = R_2 + R_5 + R_6 + \frac{R_1 R_{34}}{R_1 + R_{34}} = R_2 + R_5 + R_6 + \frac{R_1(R_3 + R_4)}{R_1 + R_3 + R_4}.$$

Así, i_2, la corriente que fluye por R_2, está dada por

$$i_2 = \frac{V_{\text{fem}}}{R_{123456}}.$$

Luego determinamos la corriente que circula por R_3. La corriente i_2 también fluye por el resistor equivalente R_{134} que contiene a R_3 (vea la figura 25.19*c*). Así, podemos escribir

$$V_{134} = i_2 R_{134},$$

donde V_{134} es la caída de potencial a través del resistor equivalente R_{134}. El resistor R_1 y el resistor equivalente R_{34} están en paralelo. Por lo tanto, V_{34}, la caída de potencial a través de R_{34}, es la misma que la caída de potencial a través de R_{134}, que es V_{134}. Los resistores R_3 y R_4 están en serie, de modo que i_3, la corriente que fluye por R_3, es la misma que i_{34} la corriente que circula por R_{34}. Así, podemos escribir

$$V_{34} = V_{134} = i_{34} R_{34} = i_3 R_{34}.$$

Ahora podemos expresar i_3 en términos de V y R_1 a través de R_6:

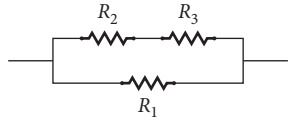
$$i_3 = \frac{V_{134}}{R_{34}} = \frac{i_2 R_{134}}{R_{34}} = \frac{\left(\dfrac{V_{\text{fem}}}{R_{123456}}\right) R_{134}}{R_{34}} = \frac{V_{\text{fem}} R_{134}}{R_{34} R_{123456}} = \frac{V_{\text{fem}} \left(\dfrac{R_1 R_{34}}{R_1 + R_{34}}\right)}{R_{34} R_{123456}} = \frac{V_{\text{fem}} R_1}{R_{123456}(R_1 + R_{34})}$$

o bien,

$$i_3 = \frac{V_{\text{fem}} R_1}{\left(R_2 + R_5 + R_6 + \dfrac{R_1(R_3 + R_4)}{R_1 + R_3 + R_4}\right)(R_1 + R_3 + R_4)} = \frac{V_{\text{fem}} R_1}{(R_2 + R_5 + R_6)(R_1 + R_3 + R_4) + R_1(R_3 + R_4)}.$$

25.6 Ejercicio en clase

En la figura, R_1 = 1.90 Ω, R_2 = 0.980 Ω y R_3 = 1.70 Ω.



¿Cuál es la resistencia equivalente de esta combinación de resistores?

a) 0.984 Ω
b) 1.11 Ω
c) 1.26 Ω
d) 1.42 Ω
e) 1.60 Ω

PROBLEMA RESUELTO 25.3 Caída de potencial a través de un resistor en un circuito

PROBLEMA

El circuito que muestra la figura 25.20*a*) tiene cuatro resistores y una batería con V_{fem} = 149 V. Los valores de los cuatro resistores son R_1 = 17.0 Ω, R_2 = 51.0 Ω, R_3 = 114.0 Ω y R_4 = 55.0 Ω. ¿Cuál es la magnitud de la caída de potencial a través de R_2?

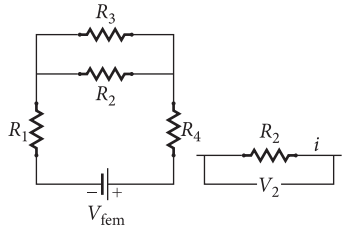


FIGURA 25.20 *a*) Un circuito con cuatro resistores y una batería. *b*) Caída de potencial a través del resistor R_2.

SOLUCIÓN

PIENSE

Los resistores R_2 y R_3 están en paralelo y pueden sustituirse con una resistencia equivalente, R_{23}. Los resistores R_1 y R_4 están en serie con R_{23}. La corriente que fluye por R_1, R_4 y R_{23} es la misma porque están en serie. Podemos obtener la corriente en el circuito al calcular la resistencia equivalente para R_1, R_4 y R_{23} y usando la ley de Ohm. La caída de potencial a través de R_{23} es igual a la corriente que pasa por el circuito multiplicada por R_{23}. La caída de potencial a través de R_2 es la misma que a través de R_{23}, ya que R_2 y R_3 están en paralelo.

ESBOCE

La caída de potencial a través del resistor R_2 se ilustra en la figura 25.20*b*).

INVESTIGUE

La resistencia equivalente para R_2 y R_3 puede calcularse usando la ecuación 25.17:

$$\frac{1}{R_{23}} = \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}. \qquad \text{(i)}$$

La resistencia equivalente para los tres resistores en serie puede calcularse usando la ecuación 25.15:

$$R_{\text{eq}} = \sum_{i=1}^{n} R_i = R_1 + R_{23} + R_4$$

Finalmente, encontramos la corriente en el circuito al usar la ley de Ohm:

$$V_{\text{fem}} = i R_{\text{eq}} = i(R_1 + R_{23} + R_4).$$

(*continúa*)

(*continuación*)

SIMPLIFIQUE

La caída de potencial, V_2, a través de R_2 es igual a la caída de potencial, V_{23}, a través de la resistencia equivalente R_{23}:

$$V_2 = V_{23} = iR_{23} = \frac{V_{\text{fem}}}{R_1 + R_{23} + R_4} R_{23} = \frac{R_{23} V_{\text{fem}}}{R_1 + R_{23} + R_4}. \tag{ii}$$

Podemos despejar R_{23} en la ecuación (i) para obtener

$$R_{23} = \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3}.$$

Podemos usar la ecuación (ii) para determinar la caída de potencial V_2 como

$$V_2 = \frac{\left(\dfrac{R_2 R_3}{R_2 + R_3}\right) V_{\text{fem}}}{R_1 + \left(\dfrac{R_2 R_3}{R_2 + R_3}\right) + R_4} = \frac{R_2 R_3 V_{\text{fem}}}{R_1 (R_2 + R_3) + R_2 R_3 + R_4 (R_2 + R_3)},$$

que podemos volver a escribir como

$$V_2 = \frac{R_2 R_3 V_{\text{fem}}}{(R_1 + R_4)(R_2 + R_3) + R_2 R_3}.$$

CALCULE

Al escribir los valores numéricos, obtenemos

$$\begin{aligned} V_2 &= \frac{R_2 R_3 V_{\text{fem}}}{(R_1 + R_4)(R_2 + R_3) + R_2 R_3} \\ &= \frac{(51.0\ \Omega)(114.0\ \Omega)(149\ \text{V})}{(17.0\ \Omega + 55.0\ \Omega)(51.0\ \Omega + 114.0\ \Omega) + (51.0\ \Omega)(114.0\ \Omega)} \\ &= 48.9593\ \text{V}. \end{aligned}$$

REDONDEE

Mostramos nuestro resultado con dos cifras:

$$V = 49.0\ \text{V}.$$

VUELVA A REVISAR

Tal vez esté tentado a no completar la solución analítica como hemos hecho aquí. En lugar de ello, sería aconsejable insertar los valores numéricos antes; por ejemplo, en la expresión para R_{23}. Así, para volver a revisar su resultado, calculemos la corriente en el circuito de manera explícita y luego la caída de potencial a través de R_{23} usando esa corriente. La resistencia equivalente para R_2 y R_3 en paralelo es

$$R_{23} = \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3} = \frac{(51.0\ \Omega)(114.0\ \Omega)}{51.0\ \Omega + 114.0\ \Omega} = 35.2\ \Omega.$$

Entonces, la corriente en el circuito es

$$i = \frac{V_{\text{fem}}}{R_1 + R_{23} + R_4} = \frac{149.0\ \text{V}}{17.0\ \Omega + 35.2\ \Omega + 55.0\ \Omega} = 1.39\ \text{A}.$$

La caída de potencial a través de R_2 es entonces

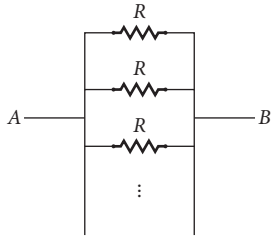
$$V_2 = iR_{23} = (1.39\ \text{A})(35.2\ \Omega) = 48.9\ \text{V},$$

lo cual coincide con nuestro resultado en errores de redondeo. Es alentador que ambos métodos produjeron la misma respuesta.

También podemos comprobar que la suma de la caída de potencial a través de R_1, R_{23} y R_4 es V_{fem}, como debía ser el caso puesto que R_1, R_{23} y R_4 están en serie. La caída de potencial a través de R_1 es $V_1 = iR_1 = (1.39\ \text{A})(17.0\ \Omega) = 23.6\ \text{V}$. La caída de potencial a través de R_4 es $V_4 = iR_4 = (1.39\ \text{A})(55.0\ \Omega) = 76.5\ \text{V}$. Así, la caída de potencial total es $V_{\text{total}} = V_1 + V_{23} + V_4 = (23.6\ \text{V}) + (48.9\ \text{V}) + (76.5\ \text{V}) = 149\ \text{V}$, que es igual a V_{fem}. Así, nuestra respuesta es consistente.

25.7 Ejercicio en clase

A medida que más resistores idénticos, R, se agregan al circuito mostrado en la figura, la resistencia entre los puntos A y B



a) aumenta.

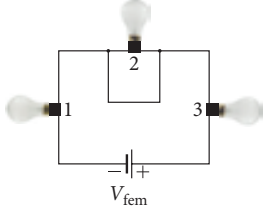
b) permanece igual.

c) disminuye.

d) cambia de manera impredecible.

25.8 Ejercicio en clase

Tres bombillas se conectan en serie con una batería que suministra una diferencia de potencial constante, V_{fem}. Cuando un alambre se conecta a través de la bombilla 2 como se muestra en la figura, las bombillas 1 y 3



a) brillan tanto como antes de conectar el alambre.

b) brillan más que antes de conectar el alambre.

c) brillan menos que antes de conectar el alambre.

d) se apagan.

25.7 Energía y potencia en circuitos eléctricos

Considere un circuito simple en el que la fuente de fem con diferencia de potencial ΔV origina el flujo de una corriente, i. El trabajo requerido por el dispositivo de fem para mover una cantidad diferencial de carga, dq, de la terminal negativa a la terminal positiva (dentro del dispositivo de fem) es igual al incremento en energía potencial eléctrica de la carga, dU:

$$dU = dq\,\Delta V.$$

Si se recuerda que la corriente se define como $i = dq/dt$, podemos volver a escribir la diferencia de energía potencial eléctrica como

$$dU = i\,dt\,\Delta V.$$

Al usar la definición de potencia, $P = dU/dt$, y sustituirla en la expresión para la diferencia de energía potencial eléctrica, obtenemos

$$P = \frac{dU}{dt} = \frac{i\,dt\,\Delta V}{dt} = i\Delta V.$$

Así, el producto de la corriente por la diferencia de potencial proporciona la potencia suministrada por la fuente de fem. Por conservación de la energía, esta potencia es igual a la potencia disipada en un circuito que contiene un resistor. En un circuito más complicado, cada resistor disipa potencia a la razón dada por esta última ecuación, donde i y ΔV se refieren a la corriente y a la diferencia de potencial a través del resistor. La ley de Ohm (ecuación 25.9) lleva a planteamientos diferentes de la potencia:

$$P = i\Delta V = i^2 R = \frac{(\Delta V)^2}{R}. \tag{25.18}$$

La unidad de potencia (como se observó en el capítulo 5) es el watt (W). Dispositivos eléctricos, como las bombillas, se clasifican en términos de la potencia que consumen. La cuenta por el consumo de energía eléctrica depende de la cantidad de energía eléctrica que consumen sus aparatos, y esta energía se mide en kilowatt-horas (kW h).

¿A dónde se va toda esta energía? Esta pregunta se abordará desde un punto de vista cuantitativo en el capítulo 30 cuando se analicen las corrientes alternas. En términos cualitativos, mucha o la mayor parte de la energía disipada en resistores se convierte en calor. Este fenómeno se usa en iluminación incandescente, donde el calentamiento de un filamento metálico a muy alta temperatura lo hace emitir luz. El calor disipado en circuitos eléctricos constituye un gran problema para sistemas de computación a gran escala y redes de servidores para las bases de datos más grandes de internet. Estos sistemas de computación usan miles de procesadores para aplicaciones que pueden paralelizarse. Todos estos procesadores emiten calor, y para compensarlo es necesario contar con equipo de enfriamiento bastante costoso. Resulta que el costo del enfriamiento es una de las condiciones de frontera más rigurosas que limitan el tamaño máximo de estas supercomputadoras.

Algo de la potencia disipada en circuitos puede convertirse en energía mecánica mediante el uso de motores. El funcionamiento de motores eléctricos requiere comprender magnetismo, lo cual revisaremos después.

Transmisión de corriente directa de alto voltaje

La transmisión de energía eléctrica desde estaciones generadoras de energía eléctrica hasta los usuarios es de gran interés práctico. A menudo, las estaciones generadoras de energía eléctrica están ubicadas en zonas remotas, por lo que la energía debe transmitirse a grandes distancias. Esto es particularmente cierto para fuentes de energía limpias, como presas hidroeléctricas y grandes granjas solares ubicadas en los desiertos.

La potencia, P, que se transmite a los usuarios es el producto de la corriente, i, y la diferencia de potencial, ΔV, en la línea de energía: $P = i\Delta V$. Así, la corriente requerida para una potencia dada es $i = P/\Delta V$, y una diferencia de potencial más alta significa menor corriente en la línea de energía. La ecuación 25.18 indica que la potencia disipada en una línea de transmisión de energía eléctrica, P_{perdida}, está dada por $P_{\text{perdida}} = i_2\,R$. La resistencia, R, de la línea de energía es fija; así, disminuir la potencia perdida durante la transmisión significa reducir la corriente transportada en la línea de transmisión. Esta reducción se logra al transmitir la potencia usando una diferen-

a)

b)

FIGURA 25.21 *a*) La estación que convierte corriente alterna en corriente directa en la presa Itaipú en el río Paraná en Brasil y Paraguay. *b*) La estación que convierte la corriente directa transmitida de vuelta en corriente alterna en São Paulo, Brasil.

cia de potencial alta y una corriente muy baja. Al observar la ecuación 25.18, quizás usted podría razonar que también hubiera sido posible escribir $P_{\text{perdida}} = (\Delta V)^2/R$ y que una diferencia alta de potencial significa una gran pérdida de potencia en lugar de una pérdida pequeña. No obstante, ΔV en esta ecuación se ve la caída de potencial a través de la línea de energía, no la diferencia de potencial a la que se transmite la energía eléctrica. La caída de potencial a través de la línea de transmisión es $V_{\text{caída}} = iR$, es mucho menor que la alta diferencia de potencial usada para transmitir la energía. Las expresiones para la potencia transmitida y la potencia disipada pueden combinarse para obtener $P_{\text{perdida}} = (P/\Delta V)^2 R = P^2R/(\Delta V)^2$, lo cual significa que, para una cantidad de potencia dada, la potencia disipada decrece con el cuadrado de la diferencia de potencial usada para transmitir la potencia.

Normalmente, para la generación y transmisión de energía eléctrica se usan corrientes alternas. Como veremos en el capítulo 30, estas corrientes tienen la ventaja de que es fácil elevar o bajar la diferencia de potencial por medio de transformadores. No obstante, las corrientes alternas tienen la desventaja inherente de grandes pérdidas de potencia. Las líneas de transmisión de corriente directa de alta tensión (HVDC, del inglés *High-Voltage Direct Current*) no presentan este problema y sólo adolecen de pérdidas de potencia debidas a la resistencia de la línea de transmisión. Sin embargo, las líneas de transmisión de HVDC plantean el requerimiento adicional de que la corriente alterna debe convertirse en corriente directa para su transmisión y que la corriente directa debe transformarse de vuelta en corriente alterna en el destino.

En el capítulo 5 se mencionó la energía eléctrica producida en la presa Itaipú en el río Paraná en Brasil y Paraguay. Parte de la potencia producida por esta planta hidroeléctrica se transmite a través de las líneas de transmisión de HVDC más grandes del mundo a lo largo de una distancia aproximada de 800 km desde la presa Itaipú hasta São Paulo, Brasil, una de las diez áreas metropolitanas más grandes del mundo. La línea de transmisión conduce 6 300 MV de potencia eléctrica usando corriente directa con una diferencia de potencial de ±600 kV. La estación en la presa Itaipú que convierte la corriente alterna a corriente directa se ilustra en la figura 25.21*a*). La estación en São Paulo que convierte la corriente directa transmitida de vuelta en corriente alterna se muestra en la figura 25.21*b*).

Aplicaciones futuras de transmisión de corriente directa de alto voltaje incluyen la transmisión de potencia desde plantas solares ubicadas en zonas remotas en el suroeste de Estados Unidos hasta zonas densamente pobladas, como grandes ciudades en California y Texas.

25.3 Oportunidad de autoevaluación

Considere una batería con resistencia interna R_i. ¿Qué resistencia externa, R, experimenta el calentamiento máximo cuando se conecta a esta batería?

EJEMPLO 25.5 Dependencia con respecto a la temperatura de la resistencia de una bombilla

Una bombilla de 100 W está conectada en serie a una fuente de fem con $V_{\text{fem}} = 100$ V. Cuando la bombilla está encendida, la temperatura de su filamento de tungsteno es 2 520 °C.

PROBLEMA

¿Cuál es la resistencia del filamento de tungsteno de la bombilla a temperatura ambiente (20 °C)?

SOLUCIÓN

La resistencia del filamento cuando la bombilla está encendida puede obtenerse usando la ecuación 25.18:

$$P = \frac{V_{\text{fem}}^2}{R}.$$

Reordenamos esta ecuación y sustituimos los valores numéricos para obtener la resistencia del filamento:

$$R = \frac{V_{\text{fem}}^2}{P} = \frac{(100\ \text{V})^2}{100\ \text{W}} = 100\ \Omega.$$

La dependencia de la resistencia del filamento con respecto a la temperatura está dada por la ecuación 25.13:

$$R - R_0 = R_0\alpha\left(T - T_0\right).$$

Despejamos la resistencia a temperatura ambiente, R_0:

$$R = R_0 + R_0\alpha\left(T - T_0\right) = R_0\left[1 + \alpha\left(T - T_0\right)\right]$$

$$R_0 = \frac{R}{1 + \alpha\left(T - T_0\right)}.$$

Al usar el coeficiente de temperatura de la resistividad del tungsteno de la tabla 25.1, obtenemos

$$R_0 = \frac{R}{1 + \alpha\left(T - T_0\right)} = \frac{100\ \Omega}{1 + \left(4.5 \cdot 10^{-3}\ °C^{-1}\right)\left(2\,520\ °C - 20\ °C\right)} = 8.2\ \Omega.$$

25.9 Ejercicio en clase

Una corriente de 2.00 A se mantiene en un circuito con una resistencia total de 5.00 Ω. ¿Cuánto calor se genera en 4.00 s?

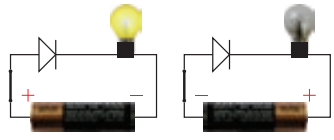
a) 55.2 J *d*) 168 J

b) 80.0 J *e*) 244 J

c) 116 J

25.8 Diodos: calles de un solo sentido en circuitos

En la sección 25.4 se estableció que muchos resistores obedecen la ley de Ohm. Sin embargo, se observó que también hay resistores no óhmicos, es decir, que no obedecen la ley de Ohm. Un ejemplo muy común y extremadamente útil es el diodo. Un *diodo* es un dispositivo electrónico diseñado para conducir corriente eléctrica en una dirección, pero no en la otra. Recuerde que la figura 25.2*c*) muestra que una bombilla sigue encendida con la misma intensidad cuando la batería a la que está conectada se invierte. Si un diodo (representado por el símbolo ⊣▷⊢) se agrega al mismo circuito, el diodo evita que la corriente fluya cuando la diferencia de potencial entregada por la batería se invierte; vea la figura 25.22. El diodo actúa como una calle de un solo sentido para la corriente.



a) *b*)

FIGURA 25.22 *a*) El circuito de la figura 25.2*c*), pero con un diodo incluido. *b*) Invertir la diferencia de potencial de la batería causa que la corriente deje de fluir y que la bombilla deje de estar encendida.

La figura 25.23 muestra la corriente contra la diferencia de potencial para un resistor óhmico de 3 Ω y un diodo de silicio. El resistor obedece la ley de Ohm, donde la corriente fluye en dirección opuesta cuando la diferencia de potencial es negativa. La gráfica de la corriente contra la diferencia de potencial para el resistor es una recta con pendiente 1/3(Ω). El diodo de silicio está conectado de modo que no conduce corriente cuando hay una diferencia de potencial negativa. Este diodo de silicio, como la mayoría, conduce corriente si la diferencia de potencial es superior a 0.7 V. Para diferencias de potencial por arriba de este umbral, el diodo es esencialmente un conductor; por debajo de este nivel, el diodo no conduce corriente. El tiempo de encendido del diodo por arriba de la diferencia de potencial crítica aumenta exponencialmente; puede ser casi instantáneo, como puede ver en la figura 25.23.

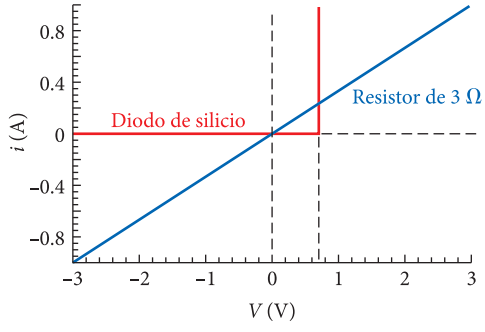


FIGURA 25.23 Corriente como una función de la diferencia de potencial para un resistor (azul) y un diodo (rojo).

Los diodos son muy útiles para convertir corriente alterna en corriente directa, como veremos en el capítulo 30. Los principios físicos fundamentales que constituyen la base del funcionamiento de los diodos requieren comprender mecánica cuántica.

Un tipo de diodo particularmente útil es el diodo emisor de luz (LED), que no sólo regula la corriente en un circuito, también emite luz de una longitud de onda única de manera controlada. Se han producido LED que emiten luz de muchas longitudes de onda y lo hacen de manera más eficiente que las bombillas incandescentes convencionales. El flujo luminoso se mide en lumen. Las fuentes luminosas pueden compararse en términos de cuántos lúmenes producen por watt de potencia eléctrica. Durante la década pasada, las intensas investigaciones realizadas sobre tecnología LED resultaron en incrementos enormes en la salida de lúmenes por watt para los LED, alcanzando valores hasta de 130 a 170 lm/W. Esto se compara favorablemente con bombillas incandescentes convencionales (que están en el intervalo de 5 a 20 lm/W), luces de halógeno (de 20 a 30 lm/W) e incluso luces fluorescentes de alta eficiencia (de 30 a 95 lm/W). Los precios de los LED (en particular de los LED "blancos") siguen siendo comparativamente altos, aunque se espera que disminuyan de manera importante. En Estados Unidos se usan más de 100 mil millones de kW h de energía eléctrica cada año sólo para iluminación, lo cual es aproximadamente 10% del total del consumo de energía en ese país. El uso universal de iluminación LED podría ahorrar entre 70 y 90% de estos 100 mil millones de kW h, aproximadamente la producción anual de energía de 10 plantas nucleares (~1 GW de potencia cada una).

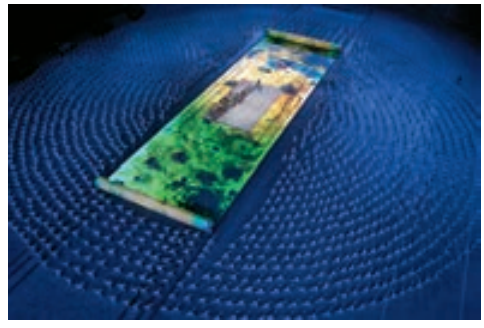


FIGURA 25.24 Pantalla de LED gigante usada durante los Juegos Olímpicos de Beijing, en 2008.

Los LED también se usan en grandes pantallas, en las que se desea contar con una imagen de alta salida de luz. Tal vez la más impresionante de éstas fue presentada durante la inauguración de los Juegos Olímpicos de 2008 en Beijing (figura 25.24), donde se usaron 44 000 LED individuales y cuyas sorprendentes dimensiones eran de 147 m por 22 m.

LO QUE HEMOS APRENDIDO | GUÍA DE ESTUDIO PARA EXAMEN

- La corriente, i, se define como la razón a la que la carga, q, fluye por un punto en particular: $i = \frac{dq}{dt}$.
- La magnitud de la densidad de corriente promedio, J, en una sección transversal de área, A, en un conductor está dada por $J = \frac{i}{A}$.
- La magnitud de la densidad de corriente, J, está relacionada con la magnitud de la velocidad de deriva, v_d, de las cargas que portan corriente, $-e$, por $J = \frac{i}{A} = -nev_d$, donde n es el número de portadores de carga por unidad de volumen.
- La resistividad, ρ, de un material se define en términos de las magnitudes del campo eléctrico aplicado a través del material, E, y la densidad de corriente resultante, J: $\rho = \frac{E}{J}$.
- La resistencia, R, de un dispositivo específico que tiene resistividad ρ, longitud L y área de sección transversal constante A, es $R = \rho\frac{L}{A}$.
- La dependencia de la resistividad de un material con respecto a la temperatura está dada por $\rho - \rho_0 = \rho_0\alpha(T - T_0)$, donde ρ es la resistividad final, ρ_0 es la resistividad inicial, α es el coeficiente de temperatura de la resistividad eléctrica, T es la temperatura final y T_0 es la temperatura inicial.
- La fuerza electromotriz, o fem, es una diferencia de potencial creada por un dispositivo que provoca el paso de corriente por un circuito.
- La ley de Ohm establece que cuando a través de un resistor, R, aparece una diferencia de potencial, ΔV, la corriente, i, que fluye por el resistor es $i = \frac{\Delta V}{R}$.
- Los resistores conectados en serie pueden sustituirse con una resistencia equivalente, R_{eq}, dada por la suma de las resistencias de los resistores: $R_{eq} = \sum_{i=1}^{n} R_i$.
- Los resistores conectados en paralelo pueden sustituirse con una resistencia equivalente, R_{eq}, dada por: $\frac{1}{R_{eq}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{R_i}$.
- La potencia, P, disipada por un resistor, R, por el que fluye una corriente, i, está dada por $P = i\Delta V = i^2R = \frac{(\Delta V)^2}{R}$, donde ΔV es la caída de potencial a través del resistor.

TÉRMINOS CLAVE

corriente eléctrica, p. 806
amperio, p. 806
corriente directa, p. 807
densidad de corriente, p. 808
velocidad de deriva, p. 808
resistividad, p. 811
resistencia, p. 811
ohm, p. 811
ley de Ohm, p. 811
conductancia, p. 811
conductividad, p. 812
coeficiente de temperatura de resistividad eléctrica, p. 814
superconductores, p. 815
fuerza electromotriz (fem), p. 816
baterías, p. 816
caída de potencial, p. 817

NUEVOS SÍMBOLOS Y ECUACIONES

$i = \frac{dq}{dt}$, corriente

$\vec{v}_d$, velocidad de deriva de cargas (portadoras de carga) que transportan corriente

$J = \frac{i}{A}$, densidad de corriente

ρ, resistividad

$R = \rho\frac{L}{A}$, resistencia

V_{fem}, diferencia de potencial de una fuente de fem

α, coeficiente de temperatura de resistividad

RESPUESTAS A LAS OPORTUNIDADES DE AUTOEVALUACIÓN

25.1 $\frac{700\text{ mAh}}{0.1\text{ mA}} = 7\,000\text{ h} \approx 292\text{ días}.$

25.2 $\Delta V = iR \quad i = \frac{\Delta V}{R} = \frac{1.50\text{ V}}{10.0\,\Omega} = 0.150\text{ A}.$

25.3 El calentamiento máximo de la resistencia externa ocurre cuando la resistencia externa es igual a la resistencia interna.

$V_t = V_{fem} + iR_i = i(R + R_i)$

$P_{calor} = i^2R = \frac{V_t^2R}{(R + R_i)^2}$

$$\frac{dP_{\text{calor}}}{dR} = -\frac{2V_t^2 R}{(R+R_i)^3} + \frac{V_t^2}{(R+R_i)^2} = 0 \text{ en el extremo.}$$

A partir de aquí se concluye que $R = R_i$.

Puede comprobar que este extremo es un máximo al tomar la segunda derivada en $R = R_1$. Encontrará:

$$\left.\frac{d^2P_{\text{calor}}}{dR^2}\right|_{R=R_i} = V_t^2\left(\frac{6}{16R^3} - \frac{5}{8R^3}\right) = -\frac{V_t^2}{R^3}\left(\frac{1}{2}\right) < 0\,.$$

PRÁCTICA PARA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Lineamientos para resolución de problemas

1. Si como parte de un problema no se proporciona un diagrama de circuito, trace usted mismo uno e identifique todos los valores dados y los componentes desconocidos. Indique la dirección de la corriente, empezando por la fuente de fem. (No se preocupe si en su diagrama la dirección de la corriente no es la correcta; si éste es el caso, su respuesta final para la corriente será un número negativo.)

2. Las fuentes de fem suministran potencial a un circuito y los resistores reducen el potencial en el circuito. No obstante, tenga cuidado en comprobar la dirección del potencial de la fuente de fem con respecto a la de la corriente; una corriente que fluye en dirección opuesta al potencial de un dispositivo de fem registra una diferencia negativa de potencial.

3. La suma de las caídas de potencial a través de resistores en un circuito es igual a la cantidad neta de fem proporcionada al circuito. (Ésta es una consecuencia de la ley de conservación de la energía.)

4. En cualquier segmento de alambre dado, la corriente es la misma. (Ésta es una consecuencia de la ley de conservación de la carga.)

PROBLEMA RESUELTO 25.4 Diámetro de un alambre en una línea de transmisión eléctrica

PROBLEMA

Suponga que está diseñando una línea de transmisión de HVDC de la presa Itaipú en el río Paraná en Brasil y Paraguay a la ciudad de São Paulo en Brasil. La línea de transmisión mide 800 km de longitud y transmite 6 300 MW de potencia a una diferencia de potencial de 1.20 MV. (La figura 25.25 muestra una línea de transmisión de HVDC.)

La compañía eléctrica requiere que no más de 25% de la potencia se pierda en la transmisión. Si la línea consta de un cable de cobre cuya sección transversal es circular, ¿cuál es el diámetro mínimo del alambre?

FIGURA 25.25 Línea de transmisión de HVDC.

SOLUCIÓN

PIENSE

Al conocer la potencia transmitida y la diferencia de potencial con que se transmite, podemos calcular la corriente transportada en la línea. Luego podemos expresar la potencia perdida en términos de la resistencia de la línea de transmisión. Con la corriente y la resistencia del cable, entonces podemos escribir una expresión para la potencia perdida durante la transmisión. La resistencia del cable es una función del diámetro del cable, de su longitud y de la resistividad del cobre. Así, podemos despejar el diámetro del cable con el que la potencia perdida se mantendrá inferior a un límite especificado.

ESBOCE

La figura 25.26 ilustra un dibujo de un cable de cobre de longitud L y diámetro d.

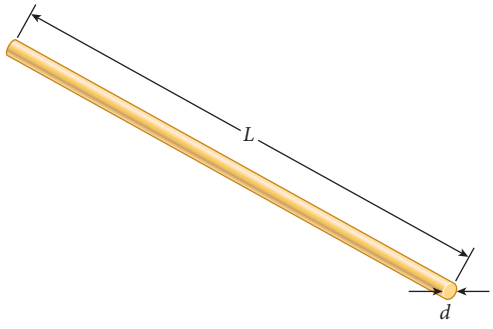


FIGURA 25.26 Línea de transmisión de HVDC que consta de un conductor de cobre (no está a escala).

INVESTIGUE

La potencia, P, transportada en la línea está relacionada con la corriente, i, y con la diferencia de potencial, ΔV: $P = i\Delta V$. La potencia perdida en la transmisión, P_{perdida}, puede relacionarse (vea la ecuación 25.18) con la corriente en el cable y la resistencia, R, del cable:

$$P_{\text{perdida}} = i^2 R. \qquad \text{(i)}$$

(*continúa*)

(*continuación*)

La resistencia del cable está dada por la ecuación 25.11:

$$R = \rho_{Cu}\frac{L}{A}, \tag{ii}$$

donde ρ_{Cu} es la resistividad del cobre, L es la longitud del cable y A es el área de la sección transversal del cable.

El área de la sección transversal del cable es el área de un círculo:

$$A = \pi\left(\frac{d}{2}\right)^2 = \frac{\pi d^2}{4},$$

donde d es el diámetro del cable. Así, con el área de un círculo sustituida por A, la ecuación (ii) se vuelve

$$R = \rho_{Cu}\frac{L}{\pi d^2/4}. \tag{iii}$$

SIMPLIFIQUE

Podemos despejar $P = i\Delta V$ para la corriente en el cable:

$$i = \frac{P}{\Delta V}.$$

Al sustituir esta expresión para la corriente y la de la resistencia de la ecuación (iii) en la ecuación (i) para la potencia perdida, obtenemos

$$P_{\text{perdida}} = \left(\frac{P}{\Delta V}\right)^2\left(\rho_{Cu}\frac{L}{\pi d^2/4}\right) = \frac{4P^2\rho_{Cu}L}{\pi(\Delta V)^2 d^2}.$$

La fracción de potencia perdida con respecto a la potencia total, f, es

$$\frac{P_{\text{perdida}}}{P} = \frac{\left(\dfrac{4P^2\rho_{Cu}L}{\pi(\Delta V)^2 d^2}\right)}{P} = \frac{4P\rho_{Cu}L}{\pi(\Delta V)^2 d^2} = f.$$

Al despejar en esta ecuación el diámetro del cable, obtenemos

$$d = \sqrt{\frac{4P\rho_{Cu}L}{f\pi(\Delta V)^2}}.$$

CALCULE

Al escribir los valores numéricos, obtenemos

$$d = \sqrt{\frac{4\left(6\,300\cdot10^6\ \text{W}\right)\left(1.72\cdot10^{-8}\ \Omega\,\text{m}\right)\left(800\cdot10^3\ \text{m}\right)}{(0.25)\pi\left(1.20\cdot10^6\ \text{V}\right)^2}} = 0.0175099\ \text{m}.$$

REDONDEE

Redondear nuestro resultado hasta tres cifras nos proporciona el diámetro mínimo del cable de cobre:

$$d = 1.75\ \text{cm}.$$

VUELVA A REVISAR

Para corroborar nuestro resultado, calculemos la resistencia de la línea de transmisión. Al usar nuestro valor calculado para el diámetro, podemos encontrar el área de la sección transversal y luego, al usar la ecuación 25.11, encontramos

$$R = \rho_{Cu}\frac{L}{\pi d^2/4} = \frac{4\rho_{Cu}L}{\pi d^2} = \frac{4\left(1.72\cdot10^{-8}\ \Omega\,\text{m}\right)\left(800\cdot10^{3}\ \text{m}\right)}{\pi\left(1.75\cdot10^{-2}\ \text{m}\right)^2} = 57.2\ \Omega.$$

La corriente transmitida es

$$i = \frac{P}{V} = \frac{6\,300\cdot10^{6}\ \text{W}}{1.20\cdot10^{6}\ \text{V}} = 5\,250\ \text{A}.$$

Entonces, la potencia perdida es

$$P = i^2R = \left(5\,250\ \text{A}\right)^2\left(57.2\ \Omega\right) = 1\,580\ \text{MW},$$

que es próxima (dentro del error de redondeo) a 25% de la potencia total de 6 300 MW. Así, nuestro resultado parece razonable.

PREGUNTAS DE OPCIÓN MÚLTIPLE

25.1 Si la corriente que pasa por un resistor es aumentada por un factor de 2, ¿cómo afecta este hecho la potencia que se disipa?

a) Disminuye por un factor de 4.
b) Aumenta por un factor de 2.
c) Disminuye por un factor de 8.
d) Aumenta por un factor de 4.

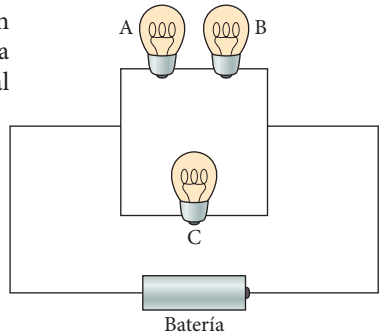
25.2 Usted hace una combinación en paralelo de resistores, que consta de un resistor A, que tiene una resistencia muy elevada, y un resistor B, que tiene una resistencia muy baja. La resistencia equivalente para esta combinación es:

a) Ligeramente mayor que la resistencia del resistor A.
b) Ligeramente menor que la resistencia del resistor A.
c) Ligeramente mayor que la resistencia del resistor B.
d) Ligeramente menor que la resistencia del resistor B.

25.3 Dos alambres cilíndricos, 1 y 2, hechos del mismo material, tienen la misma resistencia. Si la longitud del alambre 2 es el doble de la longitud del alambre 1, ¿cuál es la razón de las áreas de sus secciones transversales, A_1 y A_2?

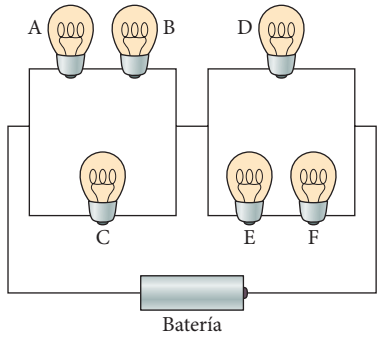
a) $A_1/A_2 = 2$ *c*) $A_1/A_2 = 0.5$
b) $A_1/A_2 = 4$ *d*) $A_1/A_2 = 0.25$

25.4 Las tres bombillas en el circuito mostrado en la figura son idénticas. ¿Cuál de las tres brilla más?



a) A
b) B
c) C
d) A y B
e) Las tres brillan igual.

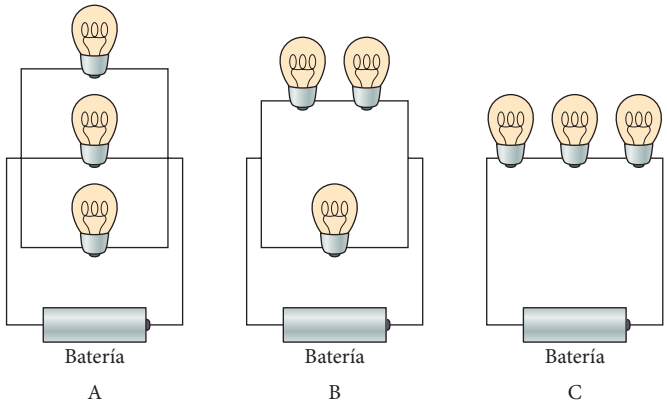
25.5 Las seis bombillas del circuito ilustrado en la figura son idénticas. ¿Cuál de los siguientes ordenamientos expresa la brillantez relativa de las bombillas? (*Sugerencia*: ¡Mientras más corriente pasa por una bombilla, más brillante es!)



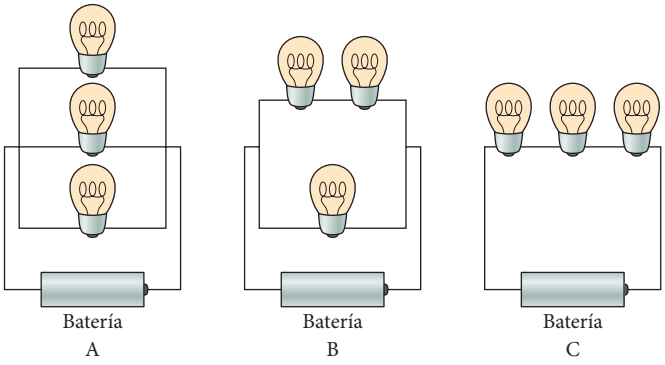
a) A = B > C = D > E = F *c*) C = D > A = B = E = F
b) A = B = E = F > C = D *d*) A = B = C = D = E = F

25.6 ¿Cuál de las siguientes disposiciones de tres bombillas idénticas, mostradas en la figura, extrae más corriente de la batería?

a) A *d*) Las tres extraen la misma corriente.
b) B *e*) A y C extraen la mayor cantidad de corriente.
c) C

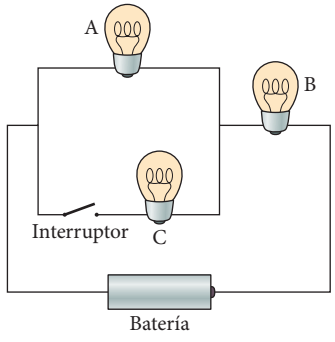


25.7 ¿Cuál de las siguientes disposiciones de tres bombillas idénticas, mostradas en la figura, tiene la resistencia más alta?



a) A
b) B
c) C
d) Las tres tienen la misma resistencia.
e) A y C están cerca de tener la mayor resistencia.

25.8 Tres bombillas idénticas están conectadas como se muestra en la figura. Inicialmente, el interruptor está cerrado. Cuando el interruptor se abre (como se ilustra en la figura), la bombilla C se apaga. ¿Qué ocurre con las bombillas A y B?



a) La bombilla A se hace más brillante y la bombilla B se hace más tenue.
b) Las bombillas A y B se hacen más brillantes.
c) Las bombillas A y B se hacen más tenues.
d) La bombilla A se vuelve más tenue y la bombilla B se hace más brillante.

25.9 ¿Por cuál de los siguientes alambres fluye la mayor cantidad de corriente?

a) Un alambre de cobre de 1 m de largo y diámetro 1 mm conectado a una batería de 10 V.
b) Un alambre de cobre de 0.5 m de largo y diámetro 0.5 mm conectado a una batería de 5 V.
c) Un alambre de cobre de 2 m de largo y diámetro 2 mm conectado a una batería de 20 V.
d) Un alambre de cobre de 1 m de largo y diámetro 0.5 mm conectado a una batería de 5 V.
e) Por todos los alambres circula la misma corriente.

25.10 La ley de Ohm establece que la diferencia de potencial a través de un dispositivo es igual a

a) La corriente que fluye por el dispositivo multiplicada por la resistencia del dispositivo.
b) La corriente que fluye a través del dispositivo dividida entre la resistencia del dispositivo.
c) La resistencia del dispositivo dividida entre la corriente que fluye por el dispositivo.
d) La corriente que fluye por el dispositivo multiplicada por el área de la sección transversal del dispositivo.
e) La corriente que fluye por el dispositivo multiplicada por la longitud del dispositivo.

25.11 Dentro de un semiconductor se mantiene un campo eléctrico. Cuando disminuye la temperatura, la magnitud de la densidad de corriente dentro del semiconductor

a) aumenta.
b) permanece igual.
c) disminuye.
d) puede aumentar o disminuir.

25.12 ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es incorrecta?

a) Las corrientes que circulan por dispositivos electrónicos conectados en serie son iguales.
b) Las caídas de potencial a través de dispositivos electrónicos conectados en paralelo son iguales.
c) A través de la menor resistencia circula más corriente cuando dos resistores están en una conexión en paralelo.
d) A través de la menor resistencia circula más corriente cuando dos resistores están en una conexión en serie.

PREGUNTAS

25.13 ¿Qué ocurriría a la velocidad de deriva de los electrones en un alambre si desapareciera la resistencia debida a las colisiones entre los electrones y los átomos en la estructura cristalina del metal?

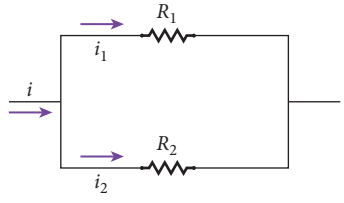
25.14 ¿Por qué las bombillas eléctricas se funden justo cuando se encienden, en lugar de cuando están encendidas?

25.15 Dos bombillas idénticas están conectadas a una batería. ¿Brillarán más las bombillas si se conectan en serie o en paralelo?

25.16 Dos resistores con resistencias R_1 y R_2 se conectan en paralelo. Demuestre que, sin importar cuáles sean los valores de R_1 y R_2, la resistencia equivalente siempre es menor que la más pequeña de las dos resistencias.

25.17 Demuestre que para resistores conectados en serie, siempre es la resistencia más alta la que disipa la mayor cantidad de potencia, mientras que para resistores conectados en paralelo, siempre es la resistencia más baja la que disipa la mayor cantidad de potencia.

25.18 Para las conexiones mostradas en la figura, determine la corriente i_1 en términos de la corriente total, i, y R_1 y R_2.



25.19 Un número infinito de resistores están conectados en paralelo. Si $R_1 = 10\ \Omega$, $R_2 = 10^2\ \Omega$, $R_3 = 10^3\ \Omega$, y así sucesivamente, demuestre que $R_{eq} = 9\ \Omega$.

25.20 Usted tiene dos baterías idénticas y dos trozos de alambre. El alambre rojo tiene mayor resistencia que el alambre negro. Usted coloca el alambre rojo en la terminal de una batería y el alambre negro en la terminal de la otra batería. ¿Cuál batería se calienta más?

25.21 ¿Las bombillas (que suelen ser incandescentes con filamentos de tungsteno) deben considerarse resistores óhmicos? ¿Por qué? ¿Cómo es posible determinar experimentalmente este hecho?

25.22 Un haz de partículas cargadas se usa para inyectar una carga, Q_0, en una pequeña región irregular (no una cavidad, sino alguna región dentro de un bloque sólido) en el interior de un bloque de material óhmico con conductividad σ y permitividad ϵ en el instante $t = 0$. Eventualmente, toda la carga inyectada se desplazará hacia la superficie externa del bloque pero, ¿cuán rápido?

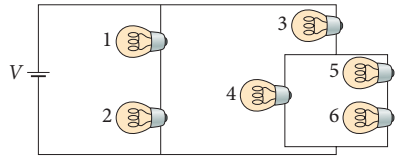
a) Obtenga una ecuación diferencial para la carga, $Q(t)$, en la región de inyección como una función del tiempo.

b) Resuelva la ecuación del inciso *a*) a fin de encontrar $Q(t)$ para toda $t \geq 0$.

c) Para el cobre, un buen conductor, y para el cuarzo (SiO_2 cristalino), un aislante, calcule el tiempo para que la carga en la región de inyección decrezca la mitad. Considere los valores necesarios. Suponga que la "constante dieléctrica" efectiva del cobre es 1.00000.

25.23 Demuestre que la velocidad de deriva de los electrones libres en un alambre no depende del área de la sección transversal del alambre.

25.24 Clasifique la brillantez de las seis bombillas idénticas que se muestran en la figura. Cada bombilla puede considerarse como un resistor idéntico con resistencia R.



25.25 Dos conductores de la misma longitud y radio están conectados al mismo dispositivo de fem. Si la resistencia de uno es el doble de la del otro, ¿a qué conductor se suministra más potencia?

PROBLEMAS

Una • y dos •• indican un nivel creciente de dificultad.

Secciones 25.1 y 25.2

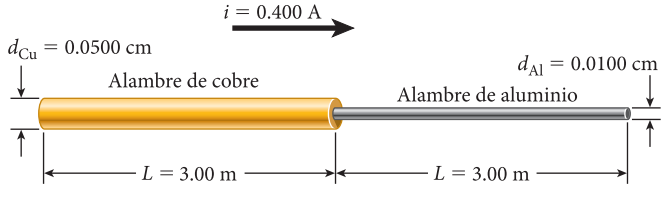
25.26 ¿Cuántos protones hay en el haz que se desplaza casi a la velocidad de la luz en el Tevatrón en el Fermilab, que transporta 11 mA de corriente alrededor de la circunferencia de 6.3 km del anillo principal del Tevatrón?

25.27 ¿Cuál es la densidad de corriente en un alambre de aluminio de 1.00 mm de radio que transporta una corriente de 1.00 mA? ¿Cuál es la velocidad de deriva de los electrones que transportan esta corriente? La densidad del aluminio es $2.70 \cdot 10^3$ kg/m^3, y 1 mol de aluminio tiene una masa de 26.98 g. Hay un electrón de conducción por átomo de aluminio.

•**25.28** Un alambre de cobre mide $d_{Cu} = 0.0500$ cm de diámetro, 3.00 m de longitud y tiene una densidad de portadores de carga de $8.50 \cdot 10^{28}$ electrones/m^3. Como se muestra en la figura, el alambre de cobre está sujeto a una longitud igual de alambre de aluminio con diámetro $d_{Al} = 0.0100$ cm y densidad de portadores de carga de $6.02 \cdot 10^{28}$ electrones/m^3. Una corriente de 0.400 A fluye a través del alambre de cobre.

a) ¿Cuál es la razón de densidades de corriente en los dos alambres, J_{Cu}/J_{Al}?

b) ¿Cuál es la razón de velocidades de deriva en los dos alambres, $v_{d\text{-}Cu}/v_{d\text{-}Al}$?



•**25.29** Una corriente de 0.123 mA fluye en un alambre de plata cuya área de sección transversal es 0.923 mm^2.

a) Encuentre la densidad de electrones en el alambre, en el supuesto de que hay un electrón de conducción por átomo de plata.

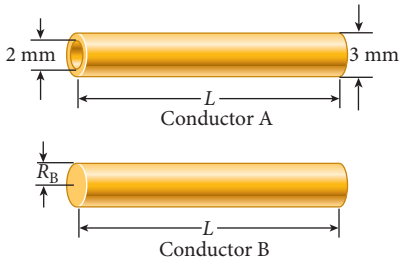
b) Encuentre la densidad de corriente en el alambre, en el supuesto de que la corriente es uniforme.

c) Encuentre la velocidad de deriva de los electrones.

Sección 25.3

25.30 ¿Cuál es la resistencia de un alambre de cobre de longitud $l = 10.9$ m y diámetro $d = 1.3$ mm? La resistividad del cobre es $1.72 \cdot 10^{-8}\ \Omega$ m.

25.31 Dos conductores están hechos del mismo material y tienen la misma longitud L. El conductor A es un tubo hueco con diámetro interior de 2.00 mm y diámetro exterior de 3.00 mm; el conductor B es un alambre sólido con radio R_B. ¿Qué valor de R_B se requiere para que los dos conductores tengan la misma resistencia medida entre sus extremos?



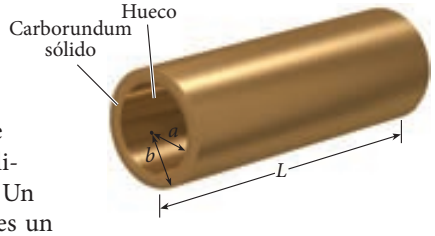
25.32 Una bobina de cobre tiene una resistencia de 0.10 Ω a temperatura ambiente (20. °C). ¿Cuál es su resistencia cuando se enfría a –100 °C?

25.33 ¿Qué calibre de alambre de aluminio tiene la misma resistencia por unidad de longitud que un alambre de cobre calibre 12?

25.34 Una oblea rectangular de silicio puro, con resistividad $\rho = 2\,300\ \Omega$ m, mide 2.00 cm por 3.00 cm por 0.010 cm. Encuentre la resistencia máxima de esta oblea rectangular entre dos caras cualesquiera.

•**25.35** Un alambre de cobre que mide 1 m de longitud y 0.5 mm de radio se alarga hasta una longitud de 2 m. ¿Cuál es el cambio fraccionario en resistencia, $\Delta R/R$, cuando el alambre se estira? ¿Cuál es $\Delta R/R$ para un alambre de aluminio con las mismas dimensiones iniciales?

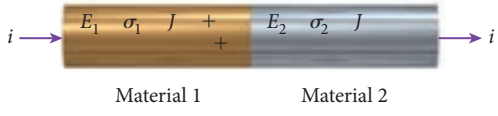
•**25.36** El material más común usado para papel de lija, carburo de silicio, también se usa mucho en aplicaciones eléctricas. Un dispositivo común es un resistor tubular hecho de un carburo de silicio superior denominado *carborundum*. Un resistor particular de carborundum (vea la figura) consta de una corteza cilíndrica gruesa (un tubo) de radio interior $a = 1.50$ cm, radio exterior $b = 2.50$ cm y longitud $L = 60.0$ cm. La resistencia de este resistor de carborundum a 20.0 °C es 1 Ω.



a) Calcule la resistividad del carborundum a temperatura ambiente. Compare esto con las resistividades de la mayor parte de los resistores de uso común (cobre, aluminio y plata).

b) El carborundum tiene un elevado coeficiente de temperatura $\alpha = 2.14 \cdot 10^{-3}\ \text{K}^{-1}$. Si, en una aplicación particular, el resistor de carborundum se calienta hasta 300. °C, ¿cuál es el cambio porcentual en su resistencia entre la temperatura ambiente (20.0 °C) y esta temperatura de operación?

••**25.37** Como se ilustra en la figura, una corriente, *i*, fluye por la unión de dos materiales con la misma área de sección transversal y las mismas conductividades σ_1 y σ_2. Demuestre que la cantidad total de carga en la unión es $\epsilon_0 i(1.00/\sigma_2 - 1/\sigma_1)$.



Sección 25.4

25.38 Una diferencia de potencial de 12.0 V se aplica a través de un alambre con área de sección transversal 4.50 mm^2 y longitud 1 000. km. La corriente que pasa por el alambre es $3.20 \cdot 10^{-3}$ A.

a) ¿Cuál es la resistencia del alambre?

b) ¿Qué tipo de alambre es éste?

25.39 Se advierte que una marca de batería automotriz de 12.0 V debe usarse para suministrar "600 A de corriente de arranque en frío". Suponga que ésta es la corriente entregada por la batería si sus terminales están en cortocircuito, es decir, conectadas a una resistencia despreciable, determine la resistencia interna de la batería. (*IMPORTANTE*: ¡**No** intente hacer esta conexión, ya que puede ser letal!)

25.40 Un alambre de cobre mide $r = 0.0250$ cm de radio y 3.00 m de longitud, tiene resistividad $\rho = 1.72 \cdot 10^{-8}\ \Omega$ m, y transporta una corriente de 0.400 A. El alambre tiene una densidad de portadores de carga de $8.50 \cdot 10^{28}$ electrones/m^3.

a) ¿Cuál es la resistencia, *R*, del alambre?

b) ¿Cuál es la diferencia de potencial eléctrico, ΔV, a través del alambre?

c) ¿Cuál es el campo eléctrico, *E*, en el alambre?

•**25.41** Un alambre de cobre calibre 34, con una diferencia de potencial constante de 0.10 V aplicada a través de 1.0 m de longitud a temperatura ambiente (20.0 °C) se enfría hasta la temperatura del nitrógeno líquido (77 K = –196 °C).

a) Determine el cambio porcentual en la resistencia del alambre durante la caída de temperatura.

b) Determine el cambio porcentual en el flujo de corriente en el alambre.

c) Compare las velocidades de deriva de los electrones a las dos temperaturas.

Sección 25.5

25.42 Un resistor de resistencia desconocida y un resistor de 35 Ω están conectados a través de un dispositivo de fem de 120 V, de modo que fluye una corriente de 11 A. ¿Cuál es el valor de la resistencia desconocida?

25.43 Una batería tiene una diferencia de potencial de 14.50 V cuando no está conectada en un circuito. Cuando un resistor de 17.91 Ω se conecta a través de la batería, la diferencia de potencial de la batería cae a 12.68 V. ¿Cuál es la resistencia interna de la batería?

25.44 Cuando una batería se conecta a un resistor de 100. Ω la corriente es 4.00 A. Cuando la misma batería se conecta a un resistor de 400. Ω la corriente es 1.01 A. Encuentre la fem suministrada por la batería y la resistencia interna de la batería.

•**25.45** Una bombilla se conecta a una fuente de fem. A través de ella hay una caída de potencial de 6.20 V y fluye una corriente de 4.1 A.

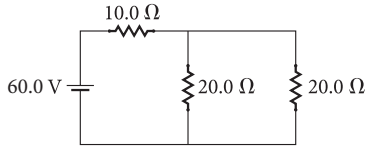
a) ¿Cuál es la resistencia de la bombilla?

b) Una segunda bombilla, idéntica a la primera, se conecta en serie con la primera bombilla. La caída de potencial a través de las bombillas ahora es 6.29 V, y la corriente a través de ellas es 2.9 A. Calcule la resistencia de cada una.

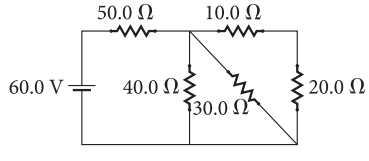
c) ¿Por qué sus respuestas a los incisos *a*) y *b*) no son las mismas?

Sección 25.6

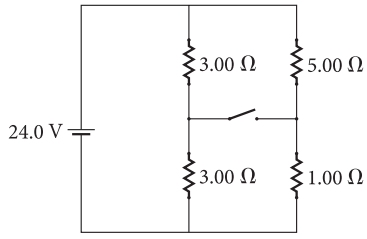
25.46 ¿Cuál es la corriente en el resistor de 10.0 Ω en el circuito de la figura?



25.47 ¿Cuál es la resistencia equivalente de los cinco resistores en la figura?



•**25.48** ¿Cuál es la corriente en el circuito mostrado en la figura cuando el interruptor *a*) está abierto y *b*) está cerrado?

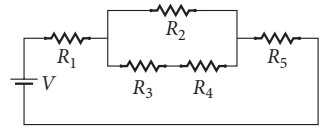


25.49 Para el circuito mostrado en la figura, $R_1 = 6.00\ \Omega$, $R_2 = 6.00\ \Omega$, $R_3 = 2.00\ \Omega$, $R_4 = 4.00\ \Omega$, $R_5 = 3.00\ \Omega$, y la diferencia de potencial es 12.0 V.

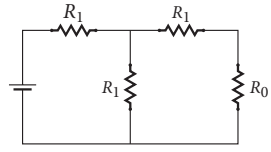
a) ¿Cuál es la resistencia equivalente para el circuito?

b) ¿Cuál es la corriente que pasa por R_5 ?

c) ¿Cuál es la caída de potencial a través de R_3?



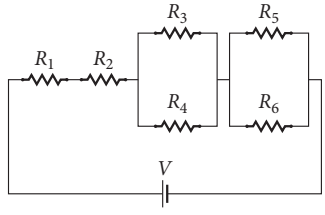
25.50 Cuatro resistores están conectados en un circuito como muestra la figura. ¿Qué valor de R_1, expresado como un múltiplo de R_0, hace que la resistencia equivalente del circuito sea igual a R_0?



•**25.51** Como se muestra en la figura, un circuito consta de una fuente de fem con $V = 20.0$ V y seis resistores. Los resistores $R_1 = 5.00\ \Omega$ y $R_2 = 10.0\ \Omega$ están conectados en serie. Los resistores $R_3 = 5.00\ \Omega$ y $R_4 = 5.00\ \Omega$ están conectados en paralelo y están en serie con R_1 y R_2. Los resistores $R_5 = 2.00\ \Omega$ y $R_6 = 2.00\ \Omega$ están conectados en paralelo y también están en serie con R_1 y R_2.

a) ¿Cuál es la caída de potencial a través de cada resistor?

b) ¿Cuánta corriente fluye por cada resistor?



•**25.52** Cuando un dispositivo de fem de 40.0 V se coloca a través de dos resistores en serie, en cada uno de los resistores fluye una corriente de 10.0 A. Cuando el mismo dispositivo de fem se coloca a través de los mismos dos resistores en paralelo, la corriente que pasa por el dispositivo de fem es 50.0 A. ¿Cuál es la magnitud de la mayor de las dos resistencias?

Sección 25.7

25.53 Un pico de voltaje hace que la tensión de la línea en un hogar salte rápidamente de 110. V a 150. V. ¿Cuál es el incremento porcentual en la potencia de salida de una bombilla incandescente de 100. W, de filamento de tungsteno, durante el pico, en el supuesto de que la resistencia de la bombilla permanece constante?

25.54 Una nube de tormenta semejante a la descrita en el ejemplo 24.3 produce un rayo que impacta en una torre de radio. Si el rayo transmite 5.00 C de carga en alrededor de 0.100 ms y el potencial permanece constante en 70.0 MV, encuentre *a*) la corriente media, *b*) la potencia media, *c*) la energía total y *d*) la resistencia efectiva del aire durante el rayo.

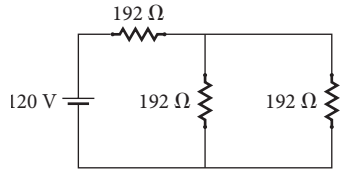
25.55 Una secadora de cabello consume 1 600 W de potencia y opera a 110 V. (Suponga que la corriente es CD. De hecho, estos valores son raíz cuadrática media de cantidades de CA, pero el cálculo no se ve afectado. Los circuitos CA se cubren en detalle en el capítulo 30.)

a) ¿Activará la secadora un interruptor de circuito diseñado para interrumpir el paso de corriente si excede 15.0 A?

b) ¿Cuál es la resistencia de la secadora cuando está operando?

25.56 ¿Cuánto dinero deberá pagar una persona a una compañía eléctrica si enciende una bombilla incandescente de 100.00 W y la deja así durante un año? (Suponga que el costo de la electricidad es \$0.12 kW/h y que la bombilla funciona durante ese tiempo.) Una bombilla fluorescente compacta de 26.000 W puede suministrar la misma cantidad de luz. ¿Cuál sería el costo para la persona si dejara encendida una de éstas durante un año?

25.57 Tres resistores están conectados a través de una batería como muestra la figura.

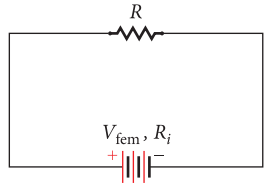


a) ¿Cuánta potencia se disipa a través de los tres resistores?

b) Determine la caída de potencial a través de cada resistor.

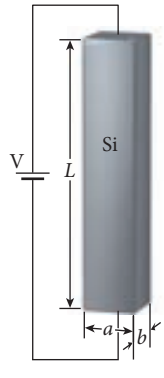
25.58 Suponga que una batería AAA es capaz de suministrar 625 mAh antes de que su potencial caiga por debajo de 1.5 V. ¿Cuánto tiempo será capaz de suministrar potencia a una bombilla de 5.0 W antes de que el potencial caiga por debajo de 1.5 V?

•**25.59** Demuestre que la potencia suministrada al circuito de la figura por la batería, con una resistencia interna R_i, es máxima cuando la resistencia del resistor en el circuito, R, es igual a R_i. Determine la potencia suministrada a R. Para efectos de práctica, calcule la potencia disipada por una batería de 12.0 V, con una resistencia interna de $2.00\ \Omega$ cuando $R = 1.00\ \Omega$, $R = 2.00\ \Omega$, y $R = 3.00\ \Omega$.



•**25.60** Un calentador de agua que consta de una bobina de metal conectada a través de las terminales de una fuente de alimentación de 15 V es capaz de calentar 250 mL de agua desde temperatura ambiente hasta el punto de ebullición en 45 s. ¿Cuál es la resistencia de la bobina?

•**25.61** Una diferencia de potencial de $V = 0.500$ V se aplica a través de un bloque de silicio cuya resistividad es $8.70 \cdot 10^{-4}\ \Omega$ m. Como se indica en la figura, las dimensiones del bloque de silicio son ancho $a = 2.00$ mm y longitud $L = 15.0$ cm. La resistencia del bloque de silicio es $50.0\ \Omega$, y la densidad de portadores de carga es $1.23 \cdot 10^{23}$ m^{-3}. Suponga que la densidad de corriente en el bloque es uniforme y que la corriente fluye en el silicio según la ley de Ohm. La longitud total del alambre de cobre de



0.500 mm de diámetro en el circuito es 75.0 cm y la resistividad del cobre es $1.69 \cdot 10^{-8}\ \Omega$ m.

a) ¿Cuál es la resistencia, R_W, del alambre de cobre?

b) ¿Cuáles son la dirección y la magnitud de la corriente eléctrica, *i*, en el bloque?

c) ¿Cuál es el grosor, *b*, del bloque?

d) En promedio, ¿en cuánto tiempo un electrón pasa de un extremo del bloque al otro?

e) ¿Cuánta potencia, *P*, es disipada por el bloque?

f) ¿En qué forma de energía aparece esta potencia disipada?

Problemas adicionales

25.62 En una emergencia, usted necesita operar un radio que usa 30.0 W de potencia cuando está conectado a una fuente de energía de 10.0 V. La única fuente de energía a la que usted tiene acceso proporciona 25.0 V, pero usted tiene una gran cantidad de resistores de 25.0 Ω. Si usted quiere que la potencia del radio se aproxime lo más posible a 30.0 W, ¿cuántos resistores debe usar y cómo deben estar conectados (en serie o en paralelo)?

25.63 Una marca de horno de hot dogs aplica una diferencia de potencial de 120 V a los extremos opuestos del hot dog y lo cocina por medio del calor producido. Si para cocinar cada hot dog se requieren 48 kJ, ¿qué corriente es necesaria para cocinar tres hot dogs simultáneamente en 2.0 minutos? Suponga una conexión en paralelo.

25.64 Un circuito consta de un alambre de cobre de 10.0 m de longitud y 1.00 mm de radio conectado a una batería de 10.0 V. Un alambre de aluminio de 5.00 m está conectado a la misma batería y disipa la misma cantidad de potencia. ¿Cuál es el radio del alambre de aluminio?

25.65 La resistividad de un conductor es $\rho = 1.00 \cdot 10^{-5}\ \Omega$ m. Si un alambre cilíndrico está hecho de este conductor, con un área de sección transversal de $1.00 \cdot 10^{-6}\ \text{m}^2$, ¿cuál debe ser la longitud del alambre para que su resistencia sea 10.0 Ω?

25.66 Dos alambres cilíndricos de la misma longitud están hechos de cobre y aluminio. Si conducen la misma corriente y tienen la misma diferencia de potencial a través de su longitud, ¿cuál es la razón de sus radios?

25.67 Dos resistores con resistencias 200. Ω y 400. Ω están conectados *a*) en serie y *b*) en paralelo a una batería ideal de 9.00 V. Compare la potencia suministrada por el resistor de 200. Ω.

25.68 ¿Cuáles son *a*) la conductancia y *b*) el radio de un elemento de calefacción de hierro de 3.5 m de longitud para un calentador de 110 V y 1 500 W?

25.69 Una bombilla europea de 100. W y 240. V se usa en una casa estadounidense, donde la electricidad se proporciona a 120. V. ¿Qué potencia consumirá?

25.70 Los circuitos de una casa moderna están diseñados para 115 V y la corriente está limitada hasta un máximo de 200. A. (Para efectos de este problema, considere que estas cantidades son para CD.)

a) Calcule la resistencia mínima total que pueden tener los circuitos en la casa.

b) Calcule la máxima potencia eléctrica que puede consumir la casa.

•**25.71** Una batería de 12.0 V con una resistencia interna $R_i = 4.00\ \Omega$ está conectada a través de un resistor externo de resistencia *R*. Encuentre la potencia máxima que puede suministrarse al resistor.

•**25.72** Un alambre multiclad consta de un núcleo de cinc de 1.00 mm de radio rodeado por una cubierta de cobre de 1.00 mm de grosor. La resistividad del cinc es $\rho = 5.964 \cdot 10^{-8}\ \Omega$ m. ¿Cuál es la resistencia de un filamento de 10.0 m de largo de este alambre?

•**25.73** El Acelerador Lineal de Stanford aceleró un haz que consta de $2.0 \cdot 10^{14}$ electrones por segundo a través de una diferencia de potencial de $2.0 \cdot 10^{10}$ V.

a) Calcule la corriente en el haz.

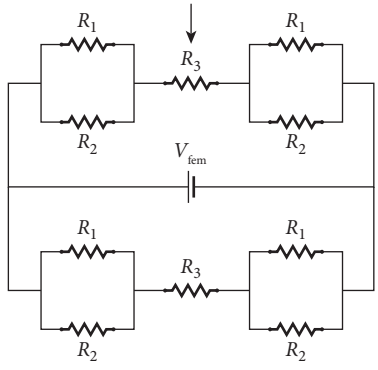
b) Calcule la potencia en el haz.

c) Calcule la resistencia óhmica eficaz del acelerador.

•**25.74** En el circuito que se muestra en la figura, $R_1 = 3.00\ \Omega$, $R_2 = 6.00\ \Omega$, $R_3 = 20.0\ \Omega$, y $V_{fem} = 12.0$ V.

a) Determine un valor para la resistencia equivalente.

b) Calcule la magnitud de la corriente que fluye a través de R_3 en la rama superior del circuito (marcada con una flecha vertical).

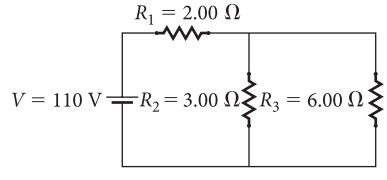


•**25.75** Tres resistores están conectados a una fuente de alimentación con $V = 110$. V, como indica la figura.

a) Encuentre la caída de potencial a través de R_3.

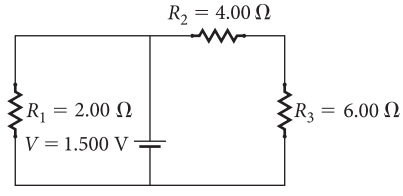
b) Encuentre la corriente en R_1.

c) Encuentre la razón a la que la energía térmica se disipa desde R_2.



•**25.76** Una batería con $V = 1.500$ V está conectada a tres resistores como muestra la figura.

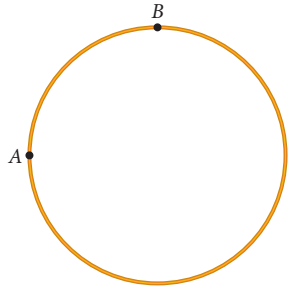
a) Encuentre la caída de potencial a través de cada resistor.



b) Encuentre la corriente en cada resistor.

•**25.77** Un cable de cobre de 2.5 m de longitud está conectado a las terminales de una batería de automóvil de 12 V. En el supuesto de que esté completamente aislado del entorno, ¿cuánto tiempo después de que se hace la conexión el cobre empieza a fundirse?

•**25.78** Un trozo de alambre de cobre se usa para formar un círculo de 10.0 cm de radio. El área de la sección transversal del alambre es de 10 mm^2. La separación entre los puntos *A* y *B* es de 90.0°, como ilustra la figura. Encuentre la resistencia entre los puntos *A* y *B*.



•**25.79** Dos alambres conductores tienen la misma longitud $L_1 = L_2 = L = 10.0$ km y las mismas secciones transversales circulares de radio $r_1 = r_2 = r = 1.00$ mm. Un alambre es de acero (con resistividad $\rho_{acero} = 40.0 \cdot 10^{-8}\ \Omega$ m); el otro es de cobre (con resistividad $\rho_{cobre} = 1.68 \cdot 10^{-8}\ \Omega$ m).

a) Calcule la razón de la potencia disipada por los dos alambres, P_{cobre}/P_{acero}, cuando están conectados en paralelo; se les aplica una diferencia de potencial de $V = 100.$ V.

b) Con base en este resultado, ¿cómo explica el hecho de que los conductores para transmisión de energía eléctrica estén hechos de cobre y no de acero?

•**25.80** Antes del desarrollo de filamentos de tungsteno flexibles, Thomas Alva Edison usó filamentos de carbono en sus bombillas. Aunque la temperatura de fusión del carbono es muy elevada (3 599 °C), su velocidad de sublimación es elevada a altas temperaturas. Así, los filamentos de carbono se mantenían a bajas temperaturas, haciéndolas más tenues que las actuales bombillas de tungsteno. Una bombilla típica de carbono requiere una potencia media de 40 W cuando a través de ella se aplican 110 voltios y el filamento tiene una temperatura de 1 800 °C. El carbono, a diferencia del cobre, tiene un coeficiente de temperatura de resistividad $\alpha = -0.0005\ °C^{-1}$. Calcule la resistencia a temperatura ambiente (20 °C) de este filamento de carbono.

••**25.81** Se dice que un material es *óhmico* si un campo eléctrico, $\vec{E}$, en el material origina una densidad de corriente $\vec{J} = \sigma\vec{E}$, donde la conductividad, σ, es una constante independiente de $\vec{E}$ o $\vec{J}$. (Ésta es la forma precisa de la ley de Ohm.) Suponga que en algún material un campo eléctrico, $\vec{E}$, produce una densidad de corriente, $\vec{J}$, no necesariamente relacionada por la ley de Ohm, es decir, el material puede ser óhmico o no.

a) Calcule la razón de disipación de energía (algunas veces denominada *calentamiento óhmico* o *calentamiento joule*) por unidad de volumen en este material, en términos de $\vec{E}$ y $\vec{J}$.

b) Exprese el resultado del inciso *a*) sólo en términos de $\vec{E}$ y sólo en términos de $\vec{J}$ para $\vec{E}$ y $\vec{J}$ relacionados por la ley de Ohm, es decir, en un material óhmico con conductividad σ o resistividad ρ.

26

Circuitos de corriente directa

LO QUE APRENDEREMOS 839

26.1 Leyes de Kirchhoff 839
- Ley de la corriente de Kirchhoff 839
- Ley de voltaje de Kirchhoff 840

26.2 Circuitos de bucle único 842
- **Problema resuelto 26.1** Carga de una batería 842

26.3 Circuitos multiloop 843
- **Ejemplo 26.1** Circuito multiloop 843
- **Problema resuelto 26.2** Puente de Wheatstone 845
- Observaciones generales sobre redes de circuitos 846

26.4 Amperímetros y voltímetros 847
- **Ejemplo 26.2** Voltímetro en un circuito simple 847
- **Problema resuelto 26.3** Cómo incrementar el rango de un amperímetro 848

26.5 Circuitos RC 849
- Carga de un capacitor 849
- Descarga de un capacitor 850
- **Ejemplo 26.3** Tiempo necesario para cargar un capacitor 851
- Marcapasos 851
- **Ejemplo 26.4** Elementos de circuito de un marcapasos 852
- Neurona 854

LO QUE HEMOS APRENDIDO/ GUÍA DE ESTUDIO PARA EXAMEN 855
- Práctica para resolución de problemas 855
- **Problema resuelto 26.4** Razón de almacenamiento de energía en un capacitor 856
- Preguntas de opción múltiple 857
- Preguntas 858
- Problemas 859

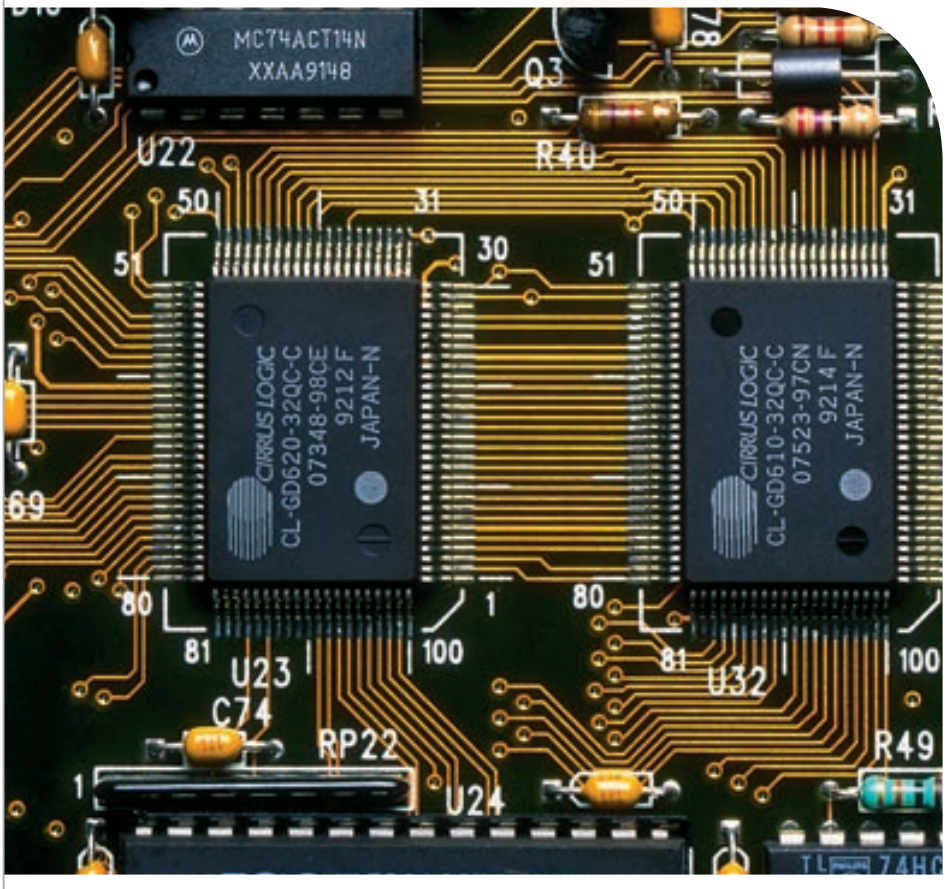


FIGURA 26.1 La placa de circuito impreso puede contener cientos de componentes de circuito conectados por rutas conductoras metálicas.

LO QUE APRENDEREMOS

- Algunos circuitos no pueden reducirse a un bucle único; los circuitos complicados pueden analizarse usando las leyes de Kirchhoff.
- La ley de la corriente de Kirchhoff (o primera ley de Kirchhoff) establece que la suma algebraica de las corrientes en cualquier nodo en un circuito debe ser cero.
- La ley de voltaje de Kirchhoff (o segunda ley de Kirchhoff) establece que la suma algebraica de los cambios de potencial alrededor de cualquier bucle cerrado en un circuito debe ser cero.
- Los circuitos de bucle único pueden analizarse usando la ley de la corriente de Kirchhoff.
- Los circuitos multiloop pueden analizarse usando tanto la ley de la corriente de Kirchhoff como la ley del voltaje de Kirchhoff.
- La corriente en un circuito que contiene un resistor y un capacitor varía exponencialmente con el tiempo, con una constante de tiempo característica dada por el producto de la resistencia y la capacitancia.

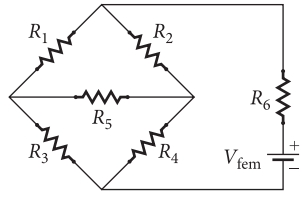
El circuito eléctrico, como el que muestra la figura 26.1, indiscutiblemente ha cambiado el mundo. La electrónica moderna continúa modificando la sociedad humana a pasos cada vez más rápidos. Para que la radio llegara a 50 millones de usuarios en Estados Unidos fueron necesarios 38 años. No obstante, para alcanzar ese número de usuarios bastaron 13 años para la televisión, 10 años para la televisión por cable, 5 años para internet y 3 años para los teléfonos móviles.

En este capítulo se abordan las técnicas usadas para analizar circuitos que no es posible descomponer en conexiones en serie y en paralelo simples. El diseño electrónico moderno depende de millones de circuitos diferentes, cada uno con sus propios propósitos y configuraciones. No obstante, sin importar cuán complicado sea un circuito, las leyes básicas para analizarlos son las que se presentan en este capítulo.

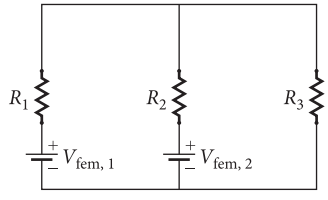
Algunos de los circuitos analizados en este capítulo contienen no sólo resistores y dispositivos de fem, también capacitores. En tales circuitos, la corriente no es estable, sino que cambia con el tiempo. Las corrientes que cambian con el tiempo se abordarán con más detalle en capítulos posteriores, en los que se introducen componentes de circuitos adicionales.

26.1 Leyes de Kirchhoff

En el capítulo 25 consideramos varios tipos de circuitos de corriente directa (CD), cada uno de los cuales sólo contenía un dispositivo de fem junto con resistores conectados en serie o en paralelo. Algunos circuitos aparentemente complicados contienen múltiples resistores en serie o en paralelo que es posible sustituir por una resistencia equivalente. Sin embargo, no consideramos circuitos que contienen múltiples fuentes de fem. Además, hay circuitos de bucle único y circuitos multiloop con dispositivos de fem y resistores que no es posible reducir a circuitos simples que contienen conexiones en serie o en paralelo. La figura 26.2 muestra dos ejemplos de tales circuitos. En este capítulo se explica cómo analizar este tipo de circuitos usando las **leyes de Kirchhoff**.



a)



b)

FIGURA 26.2 Dos ejemplos de circuitos que no es posible reducir a combinaciones simples de resistores en paralelo y en serie.

Ley de la corriente de Kirchhoff

Un **nodo**, unión o empalme, es un sitio en un circuito en el que dos o tres alambres están conectados entre sí. Cada conexión entre dos nodos en un circuito se denomina **rama**. Una rama puede contener cualquier número de elementos de circuito diferentes y los alambres entre éstos. En cada rama puede circular una corriente, y esta corriente es la misma en todas partes. Este hecho conduce a la **ley de la corriente de Kirchhoff**:

> La suma de las corrientes que entran en un nodo debe ser igual a la suma de las corrientes que salen del mismo.

Si a las corrientes que entran al nodo se asigna, de manera arbitraria, un signo positivo y a las corrientes que salen del nodo se asigna, también de manera arbitraria, un signo negativo, entonces la ley de la corriente de Kirchhoff se expresa matemáticamente como:

$$\text{Nodo: } \sum_{k=1}^{n} i_k = 0. \tag{26.1}$$

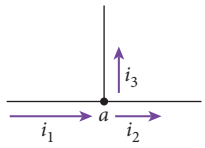
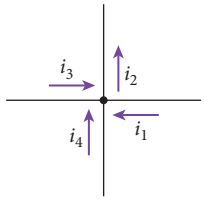


FIGURA 26.3 Un nodo simple de un circuito multiloop.

26.1 Ejercicio en clase

Para el nodo mostrado en la figura, ¿qué ecuación expresa correctamente la suma de las corrientes?



a) $i_1 + i_2 + i_3 + i_4 = 0$

b) $i_1 - i_2 + i_3 + i_4 = 0$

c) $-i_1 + i_2 + i_3 - i_4 = 0$

d) $i_1 - i_2 - i_3 - i_4 = 0$

e) $i_1 + i_2 - i_3 - i_4 = 0$

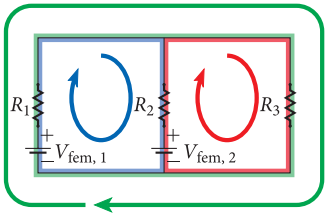


FIGURA 26.4 Los tres bucles posibles (indicados en rojo, verde y azul) para el diagrama de circuito mostrado en la figura 26.2*b*).

¿Cómo sabe usted cuáles corrientes entran en un nodo y cuáles salen del nodo cuando traza un esquema como el que ilustra la figura 26.3? No puede; simplemente asigna una dirección para cada corriente que circula por un alambre dado. Si resulta que una dirección asignada está equivocada, obtendrá un número negativo para esa corriente particular en su solución final.

La ley de la corriente de Kirchhoff es una consecuencia directa de la conservación de la carga eléctrica. Los nodos no tienen la capacidad de almacenar carga. Así, la conservación de la carga requiere que todas las cargas que fluyen hacia un nodo también salgan de éste, que es exactamente lo que establece la ley de la corriente de Kirchhoff.

Según esta ley, en cada nodo en un circuito multiloop, la corriente que fluye hacia el nodo debe ser igual a la corriente que fluye fuera del nodo. Por ejemplo, en la figura 26.3 se muestra un nodo único, *a*, con corriente, i_1, que entra en el nodo y dos corrientes, i_2 e i_3, que salen del nodo. Según la ley de la corriente de Kirchhoff, en este caso,

$$\sum_{k=1}^{3} i_k = i_1 - i_2 - i_3 = 0 \Rightarrow i_1 = i_2 + i_3.$$

Ley de voltaje de Kirchhoff

Un **bucle** en un circuito es cualquier conjunto de alambres conectados y elementos de circuito que forman una ruta cerrada. Si usted sigue un bucle, al final llegará al mismo punto en el que empezó el recorrido. Por ejemplo, en el diagrama de circuito mostrado en la figura 26.2*b*), es posible identificar tres bucles que se muestran en diferentes colores (rojo, verde y azul) en la figura 26.4. El bucle azul incluye los resistores 1 y 2, las fuentes de fem 1 y 2 y sus alambres de conexión. El rojo incluye los resistores 2 y 3, la fuente de fem 2 y sus alambres de conexión. Por último, el verde incluye los resistores 1 y 3, la fuente de fem 1 y sus alambres de conexión. Observe que cualquier alambre o elemento del circuito dado puede, y suele, ser parte de más de un bucle.

Usted puede moverse a través de cualquier bucle en un circuito, ya sea en dirección del movimiento de las manecillas del reloj o en contra de éstas. La figura 26.4 muestra una ruta en dirección del movimiento de las manecillas del reloj a través de cada uno de los bucles, como lo indican las flechas. Pero la dirección de la ruta que se tome alrededor del bucle es irrelevante en la medida en la que la elección se siga de manera constante durante todo el trayecto alrededor del bucle.

La suma de las diferencias de potencial de todos los elementos de circuito encontrados a lo largo de cualquier bucle dado produce la diferencia de potencial total de la ruta completa a lo largo del bucle. Así, la **ley de voltaje de Kirchhoff** establece lo siguiente:

> La suma de la diferencia de potencial alrededor de un bucle completo en un circuito debe ser cero.

Esta ley es una consecuencia directa del hecho de que el potencial eléctrico tiene un valor único. Esto significa que la energía potencial eléctrica de un electrón de conducción en un punto en el circuito tiene un valor específico. Suponga que esta regla no fuera válida. Entonces podríamos analizar los cambios de potencial de un electrón de conducción al recorrer el bucle y encontrar que el electrón tiene energía potencial diferente cuando regresa al punto de inicio. La energía potencial de este electrón cambiaría en un punto del circuito, en contradicción evidente con la ley de conservación de la energía. En otras palabras, la ley de voltaje de Kirchhoff es simplemente una consecuencia de la ley de conservación de la energía.

La aplicación de la ley de voltaje de Kirchhoff requiere convenciones para determinar la caída de potencial a través de cada elemento del circuito. Esto depende de la trayectoria supuesta de la corriente y de la dirección del análisis. Para fuentes de fem, las reglas son directas, puesto que los signos menos y más (así como las líneas corta y larga) indican qué lado de la fuente de fem está al potencial más alto. La caída de potencial para una fuente de fem es en la dirección del signo menos al signo más, o de la línea corta a la línea larga. Como ya se observó, la asignación de direcciones de corriente y la elección de una ruta en el sentido del movimiento de las manecillas del reloj o al revés, son arbitrarias. Cualquier dirección proporciona la misma información en tanto se aplique de manera constante alrededor de un bucle. Las convenciones que se usan para analizar elementos de circuitos en un bucle se resumen en la tabla 26.1 y en la figura 26.5, donde la magnitud de la corriente a través del elemento de circuito es *i*. (Las etiquetas en la columna de la extrema derecha de la tabla 26.1 corresponden a las partes de la figura 26.5.)

Tabla 26.1 **Convenciones usadas para determinar el signo de los cambios de potencial alrededor de un circuito de bucle único que contiene varios resistores y fuentes de fem.**

Elemento	Dirección del análisis	Cambio de potencial	
R	Misma que la corriente	$-iR$	(a)
R	Opuesta a la corriente	$+iR$	(b)
V_{fem}	Misma que la fem	$+V_{\text{fem}}$	(c)
V_{fem}	Opuesta a la fem	$-V_{\text{fem}}$	(d)

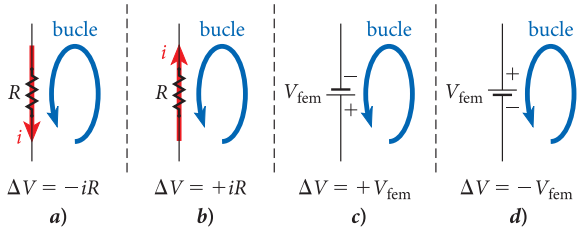


FIGURA 26.5 Convención de signos para cambios de potencial al analizar bucles.

Si nos movemos alrededor de un bucle en el sentido del movimiento de las manecillas del reloj, los cambios de potencial a través de los resistores serán negativos. Si el movimiento es en sentido contrario a la dirección de la corriente, los cambios de potencial a través de los resistores serán positivos. Si nos desplazamos alrededor de un bucle de modo que pasemos por una fuente de fem de la terminal negativa a la terminal positiva, este componente contribuye a una diferencia de potencial positiva. Si pasamos por una fuente de fem de la terminal positiva a la negativa, ese componente contribuye a una diferencia de potencial negativa.

Con las convenciones anteriores, la ley de voltaje de Kirchhoff se escribe en forma matemática como

$$\text{Bucle cerrado:} \quad \sum_{j=1}^{m} V_{\text{fem},j} - \sum_{k=1}^{n} i_k R_k = 0. \tag{26.2}$$

Para detallar la ley de voltaje de Kirchhoff, la figura 26.6 muestra un bucle con dos fuentes de fem y tres resistores, usando la representación tridimensional empleada en los capítulos 24 y 25, en la que el valor del potencial eléctrico, V, se representa en la dimensión vertical. La cuestión más importante a observar a partir de la figura 26.6 es que una vuelta completa alrededor del bucle siempre termina en el mismo valor del potencial que en el punto de partida. Esto es exactamente lo que plantea la ley de voltaje de Kirchhoff (ecuación 26.2). Una analogía como esquiar cuesta abajo puede ser de utilidad. Cuando esquía, usted se mueve alrededor de un potencial gravitacional, cuesta arriba y cuesta abajo en la montaña. Un salto en esquí corresponde a una fuente de fem, que la eleva a un valor superior del potencial gravitacional. Un deslizamiento en esquí cuesta abajo corresponde a un resistor. (Los aburridos recorridos transversales entre deslizamientos corresponden a los alambres en un circuito: tanto los alambres como los recorridos horizontales están a un potencial constante.) Así, empezando en $V_{\text{fem},1}$ y procediendo en el sentido del movimiento de las manecillas del reloj alrededor del bucle en la figura 26.6, es análogo a la salida en esquí en la que usted realiza dos saltos distintos y esquía hacia abajo durante tres tramos diferentes. Y la cuestión importante, que resulta evidente cuando se esquía, es que usted regresa a la misma altitud (el mismo valor del potencial gravitacional) desde la cual partió, una vez que ha completado una vuelta completa.

Una última cuestión sobre bucles se ilustra en la figura 26.7. En ella se reproduce el mismo circuito mostrado en la figura 26.6 como un bucle aislado único. Puesto que este bucle no tiene nodos y entonces sólo tiene una rama (que es todo el bucle), la misma corriente i fluye en todas partes del bucle. En la figura 26.7*b*), este bucle está conectado en cuatro nodos (identificados por *a*, *b*, *c* y *d*) a otras partes de un circuito más extendido. Ahora este circuito tiene cuatro ramas, por las cuales puede fluir una corriente diferente, como se representa por las flechas de colores distintos en la figura. Ésta es la cuestión: en ambas partes de la figura, la ley de voltaje de Kirchhoff se cumple para el bucle mostrado. Los valores relativos del potencial eléctrico entre dos elementos de

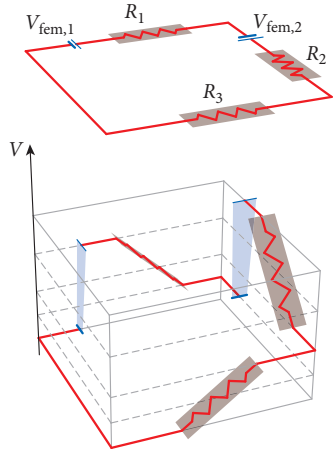


FIGURA 26.6 Bucle con múltiples fuentes de fem y múltiples resistores.

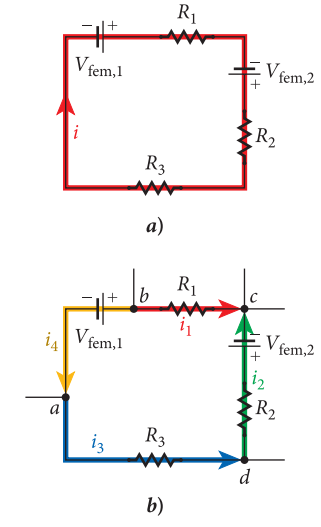


FIGURA 26.7 El mismo bucle del circuito que en la figura 26.6: *a*) como un bucle único aislado; *b*) como un bucle conectado a otras ramas del circuito.

circuito cualesquiera en la figura 26.7*b*) son los mismos que los mostrados en la figura 26.6, independientemente de las corrientes forzadas a través de las diferentes ramas del bucle por el resto del circuito. (En la analogía de esquiar cuesta abajo, las corrientes corresponden a números diferentes de esquiadores en los tramos cuesta arriba y cuesta abajo. Resulta evidente que el número de esquiadores en la colina no afecta lo pronunciado de la colina.)

26.2 Circuitos de bucle único

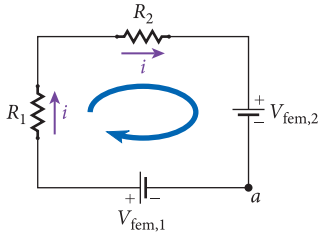


FIGURA 26.8 Circuito de bucle único que contiene dos resistores y dos fuentes de fem en serie.

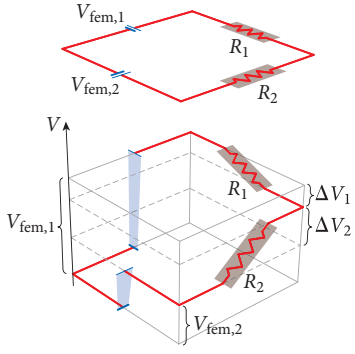


FIGURA 26.9 Representación tridimensional del circuito de bucle único en la figura 26.8, que contiene dos resistores y dos fuentes de fem en serie.

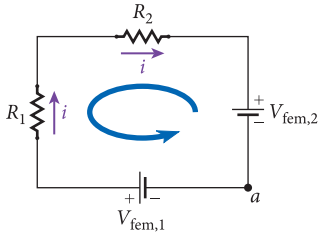


FIGURA 26.10 El mismo circuito que en la figura 26.8, pero analizado en dirección opuesta al movimiento de las manecillas del reloj.

Empezaremos nuestro análisis de circuitos generales al considerar un circuito que contiene dos fuentes de fem, $V_{fem,1}$ y $V_{fem,2}$, y dos resistores, R_1 y R_2, conectados en serie a un bucle único, como muestra la figura 26.8. Observe que $V_{fem,1}$ y $V_{fem,2}$ tienen polaridades opuestas. En este circuito de bucle único no hay nodos, de modo que todo el circuito consta de una sola rama. La corriente es la misma en todas partes. Para ilustrar los cambios de potencial a través de los componentes de este circuito, la figura 26.9 muestra una vista tridimensional.

Aunque podemos escoger de manera arbitraria cualquier punto en el circuito en la figura 26.8 y asignarle el valor 0 V (o cualquier otro valor del potencial, ya que siempre podemos añadir una constante aditiva global a todos los valores de potencial sin modificar el resultado físico), empezamos en un punto *a* con $V = 0$ V y procedemos alrededor del circuito en la dirección del movimiento de las manecillas del reloj (indicada por la flecha elíptica azul en la figura). Debido a que los componentes del circuito están en serie, la corriente, i, es la misma en cada componente y suponemos que la corriente circula en la dirección del movimiento de las manecillas del reloj (flechas moradas en la figura). El primer componente de circuito a lo largo de la ruta mencionada a partir del punto *a* es la fuente de fem, $V_{fem,1}$, que produce una ganancia de potencial positiva de $V_{fem,1}$. Luego está el resistor R_1, que produce una caída de potencial dada por $\Delta V_1 = iR_1$. Al continuar alrededor del bucle, el siguiente componente es el resistor R_2, que produce una caída de potencial dada por $\Delta V_2 = iR_2$. Luego, encontramos una segunda fuente de fem, $V_{fem,2}$. Esta fuente de fem está conectada en el circuito con su polaridad opuesta a la de $V_{fem,1}$. Por lo tanto, este componente produce una *caída* de potencial con la magnitud $V_{fem,2}$, en lugar de una *ganancia* de potencial. Ahora ya hemos completado el circuito y estamos de vuelta en $V = 0$ V. Al usar la ecuación 26.2, sumamos los cambios de potencial de este bucle como sigue:

$$V_{fem,1} - \Delta V_1 - \Delta V_2 - V_{fem,2} = V_{fem,1} - iR_1 - iR_2 - V_{fem,2} = 0.$$

Para demostrar que la dirección en la que nos movemos por un circuito, en la dirección del movimiento de las manecillas del reloj o en dirección opuesta, es arbitraria, analicemos el mismo circuito en la dirección contraria al movimiento de las manecillas del reloj, empezando en el punto *a* (vea la figura 26.10). El primer elemento del circuito es $V_{fem,2}$, que produce una ganancia de potencial positiva. El siguiente elemento es R_2. Debido a que hemos supuesto que la corriente circula en la dirección del movimiento de las manecillas del reloj y estamos analizando el bucle en el sentido opuesto al movimiento de las manecillas del reloj, el cambio de potencial para R_2 es $+iR_2$, según las convenciones enumeradas en la tabla 26.1. Al continuar al siguiente componente en el bucle, R_1, usamos un razonamiento semejante para designar el cambio de potencial para este resistor como $+iR_1$. El último elemento en el circuito es $V_{fem,1}$, que está alineada en dirección opuesta a la de nuestro análisis, de modo que el cambio de potencial a través de este elemento es $-V_{fem,1}$. Entonces, la ley de voltaje de Kirchhoff nos ofrece

$$+V_{fem,2} + iR_2 + iR_1 - V_{fem,1} = 0.$$

Puede ver que las direcciones en el circuito en el sentido del movimiento de las manecillas del reloj y en dirección opuesta proporcionan la misma información, lo cual significa que la dirección que elijamos para realizar el análisis el circuito no importa.

PROBLEMA RESUELTO 26.1 Carga de una batería

Una batería de 12.0 V con resistencia interna $R_i = 0.200\ \Omega$ está siendo cargada por el cargador de una batería que es capaz de suministrar una corriente de magnitud $i = 6.00$ A.

PROBLEMA

¿Cuál es la fem mínima que debe tener la batería para poder cargarla?

SOLUCIÓN

PIENSE

El cargador de la batería, que es una fuente de fem externa, debe tener una diferencia de potencial suficiente para superar la diferencia de potencial de la batería y la caída de potencial a través de la resistencia interna de la batería. El cargador de la batería debe disponerse de modo que su terminal positiva esté conectada a la terminal positiva de la batería a cargar. Podemos considerar que la resistencia interna de la batería es un resistor en un circuito de bucle único que también contiene dos fuentes de fem con polaridades opuestas.

ESBOCE

La figura 26.11 muestra un diagrama del circuito, que consta de una batería con diferencia de potencial V_t y una resistencia interna R_i conectada a una fuente de fem externa, V_e. La zona sombreada amarilla representa las dimensiones físicas de la batería. Observe que la terminal positiva del cargador de la batería está conectada a la terminal positiva de la batería.

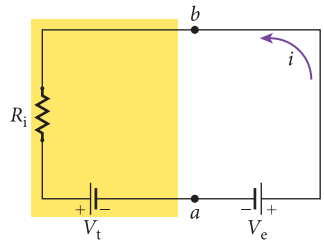


FIGURA 26.11 Circuito que consta de una batería con resistencia interna conectada a una fuente de fem externa.

INVESTIGUE

Podemos aplicar la ley de voltaje de Kirchhoff a este circuito. Suponemos que por el circuito fluye una corriente en dirección opuesta al movimiento de las manecillas del reloj, como se muestra en la figura 26.11. La suma de los cambios de potencial alrededor del circuito debe ser cero. Sumamos los potenciales empezando en el punto b y moviéndonos en dirección contraria al movimiento de las manecillas del reloj:

$$-iR_i - V_t + V_e = 0.$$

SIMPLIFIQUE

En esta ecuación podemos despejar la diferencia de potencial requerida por el cargador:

$$V_e = iR_i + V_t,$$

donde i es la corriente suministrada por el cargador.

CALCULE

Al escribir los valores numéricos, obtenemos

$$V_e = iR_i + V_t = (6.00\ \text{A})(0.200\ \Omega) + 12.0\ \text{V} = 13.20\ \text{V}.$$

REDONDEE

Mostramos nuestro resultado con tres cifras:

$$V_e = 13.2\ \text{V}.$$

VUELVA A REVISAR

Nuestro resultado indica que el cargador de la batería debe tener una diferencia de potencial más alta que la diferencia de potencial especificada para la batería, lo cual es razonable. La diferencia de potencial de un cargador típico para una batería de 12 V es aproximadamente 14 V.

26.3 Circuitos multiloop

Para analizar circuitos multiloop se requieren la ley de la corriente de Kirchhoff y la ley de voltaje de Kirchhoff. El procedimiento para analizar un circuito multiloop consiste en identificar bucles completos y puntos nodales en el circuito y aplicar las leyes de Kirchhoff a estas partes del circuito por separado. El análisis de bucles únicos en un circuito multiloop con la ley de voltaje de Kirchhoff y los nodos con la ley de la corriente de Kirchhoff resulta en un sistema de ecuaciones acopladas con variables incógnitas. De estas ecuaciones es posible despejar las cantidades de interés usando varias técnicas, incluida la sustitución directa. El ejemplo 26.1 ilustra el análisis de un circuito multiloop.

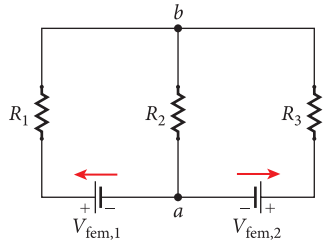


FIGURA 26.12 Circuito multiloop con tres resistores y dos fuentes de fem.

EJEMPLO 26.1 Circuito multiloop

Considere el circuito de la figura 26.12. Este circuito tiene tres resistores, R_1, R_2 y R_3, y dos fuentes de fem, $V_{fem,1}$ y $V_{fem,2}$. Las flechas rojas muestran la dirección de caída de potencial a través de las

(*continúa*)

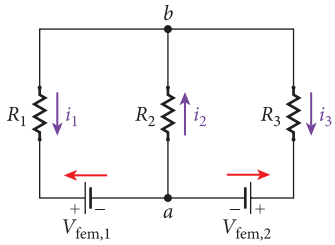


FIGURA 26.13 Circuito multiloop con la dirección supuesta de la corriente a través de los resistores indicados.

(*continuación*)

fuentes de fem. Este circuito no puede resolverse en conexiones simples en serie o en paralelo. Para analizar este circuito, debemos asignar direcciones a las corrientes que circulan a través de los resistores. Podemos escoger estas direcciones de manera arbitraria (sabiendo que si escogemos la dirección equivocada, el valor de la corriente resultante será negativo). La figura 26.13 muestra el circuito con corrientes asignadas en las direcciones mostradas por las flechas moradas.

Consideremos el nodo *b* primero. La corriente que entra al nodo debe ser igual a la corriente que sale de él, por lo que podemos escribir

$$i_2 = i_1 + i_3. \tag{i}$$

Al observar el nodo *a*, de nuevo igualamos la corriente de entrada y la de salida para obtener

$$i_1 + i_3 = i_2,$$

lo cual proporciona la misma información que se obtuvo para el nodo *b*. Observe que este resultado es típico: si un circuito tiene *n* nodos, es posible obtener cuando mucho *n* – 1 ecuaciones independientes a partir de la aplicación de la ley de la corriente de Kirchhoff. (En este caso, *n* = 2, de modo que podemos obtener una sola ecuación independiente.)

En este punto no podemos determinar las corrientes en el circuito porque tenemos tres valores desconocidos y una sola ecuación. En consecuencia, necesitamos dos ecuaciones independientes más. Para obtenerlas, aplicamos la ley de voltaje de Kirchhoff. Podemos identificar tres bucles en el circuito mostrado en la figura 26.13:

1. la mitad izquierda del circuito, incluidos los elementos R_1, R_2 y $V_{fem,1}$;
2. la mitad derecha del circuito, incluidos los elementos R_2, R_3 y $V_{emf,2}$, y
3. el bucle exterior, incluidos los elementos R_1, R_3, $V_{fem,1}$ y $V_{fem,2}$.

Al aplicar la ley de voltaje de Kirchhoff a la mitad izquierda del circuito, usando la dirección supuesta para la corriente y analizando el bucle en dirección opuesta al movimiento de las manecillas del reloj empezando en el nodo *b*, obtenemos

$$-i_1R_1 - V_{fem,1} - i_2R_2 = 0,$$

o bien,

$$i_1R_1 + V_{fem,1} + i_2R_2 = 0. \tag{ii}$$

Al aplicar la ley de voltaje a la mitad derecha del circuito, empezando de nuevo en el nodo *b* y analizando el circuito en la dirección del movimiento de las manecillas del reloj, obtenemos

$$-i_3R_3 - V_{fem,2} - i_2R_2 = 0,$$

o bien,

$$i_3R_3 + V_{fem,2} + i_2R_2 = 0. \tag{iii}$$

Al aplicar la ley de voltaje al bucle exterior, empezando en el nodo *b* y recorriéndola en dirección del movimiento de las manecillas del reloj, obtenemos

$$-i_3R_3 - V_{fem,2} + V_{fem,1} + i_1R_1 = 0.$$

Esta ecuación no proporciona nueva información, ya que también la obtenemos al restar la ecuación (iii) de la ecuación (ii). Para los tres bucles, obtenemos información equivalente si los analizamos en cualquier dirección: del movimiento de las manecillas del reloj o en dirección opuesta, o si empezamos en cualquier otro punto y desde ahí nos desplazamos por los bucles.

Con tres ecuaciones (i), (ii) y (iii), y tres incógnitas, i_1, i_2 e i_3, podemos despejar las corrientes desconocidas de varias formas. Por ejemplo, podemos escribir las tres ecuaciones en forma matricial y luego resolverlas usando el método de Kramer o una calculadora. Este método se recomienda para circuitos complicados con muchas ecuaciones e incógnitas. No obstante, para este ejemplo, podemos proceder al sustituir la ecuación (i) en las otras dos, eliminando así i_2. Luego despejamos i_1 en una de las dos ecuaciones resultantes y sustituimos esto en la otra para obtener una expresión para i_3. Al sustituir de vuelta, obtenemos las soluciones para i_2 e i_1:

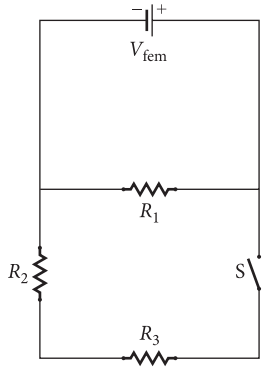
$$i_1 = -\frac{(R_2 + R_3)V_{fem,1} - R_2V_{fem,2}}{R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3}$$

$$i_2 = -\frac{R_3V_{fem,1} + R_1V_{fem,2}}{R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3}$$

$$i_3 = -\frac{-R_2V_{fem,1} + (R_1 + R_2)V_{fem,2}}{R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3}.$$

26.2 Ejercicio en clase

En el circuito mostrado en la figura hay tres resistores idénticos. Inicialmente, el interruptor S está abierto. Cuando el interruptor está cerrado, ¿qué ocurre con la corriente que fluye en R_1?



a) La corriente en R_1 disminuye.

b) La corriente en R_1 aumenta.

c) La corriente en R_1 permanece igual.

Nota: No es necesario recordar esta solución particular o el procedimiento algebraico usado para obtenerla. Sin embargo, el método general de aplicar las leyes de Kirchhoff para bucles y nodos, y asignar corrientes en direcciones arbitrarias, constituye la idea central del análisis de circuitos.

PROBLEMA RESUELTO 26.2 Puente de Wheatstone

El puente de Wheatstone es un circuito particular usado para medir resistencias desconocidas. La figura 26.14 muestra el diagrama de circuito de un puente de Wheatstone. Este circuito consta de tres resistencias conocidas, R_1, R_3 y un resistor variable, R_v, así como una resistencia desconocida, R_u. A través de los nodos a y c se conecta una fuente de fem, V. Un amperímetro sensible (un dispositivo usado para medir corriente, analizado en la sección 26.4) se conecta entre los nodos b y d. El puente de Wheatstone se usa para determinar R_u al variar R_v, hasta que el amperímetro entre b y d deja de mostrar flujo de corriente. Una vez que la lectura del amperímetro es cero, se dice que el puente está en equilibrio.

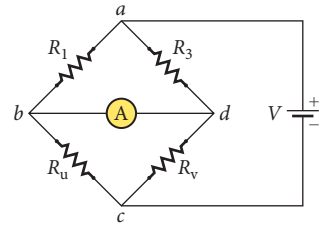


FIGURA 26.14 Diagrama de circuito de un puente de Wheatstone.

PROBLEMA

Determine la resistencia desconocida, R_u, en el puente de Wheatstone mostrado en la figura 26.14. Las resistencias conocidas son $R_1 = 100.0\ \Omega$ y $R_3 = 110.0\ \Omega$, y $R_v = 15.63\ \Omega$ cuando la corriente que circula por el amperímetro es cero y, por lo tanto, el puente está en equilibrio.

SOLUCIÓN

PIENSE

El circuito tiene cuatro resistores y un amperímetro, y por cada componente puede fluir corriente. Sin embargo, en este caso con $R_v = 15.63\ \Omega$, por el amperímetro no fluye ninguna corriente. Igualar esta corriente a cero deja cuatro corrientes desconocidas a través de los cuatro resistores, de modo que necesitamos cuatro ecuaciones. Podemos usar las leyes de Kirchhoff para analizar dos bucles, *adb* y *cbd*, y dos nodos, b y d.

ESBOCE

La figura 26.15 muestra el puente de Wheatstone con las direcciones supuestas para las corrientes i_1, i_3, i_u, i_v e i_A.

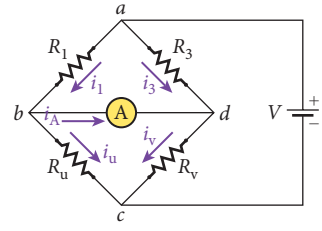


FIGURA 26.15 El puente de Wheatstone con las supuestas direcciones de corriente indicadas.

INVESTIGUE

Primero aplicamos la ley de voltaje de Kirchhoff al bucle *adb*, empezando en a y procediendo en el sentido del movimiento de las manecillas del reloj, para obtener

$$-i_3R_3 + i_AR_A + i_1R_1 = 0, \tag{i}$$

donde R_A es la resistencia del amperímetro. Aplicamos de nuevo la ley de voltaje de Kirchhoff al bucle *cbd*, empezando en c y procediendo en el sentido del movimiento de las manecillas del reloj, para obtener

$$+i_uR_u - i_AR_A - i_vR_v = 0. \tag{ii}$$

Ahora podemos usar la ley de la corriente de Kirchhoff en el nodo b para obtener

$$i_1 = i_A + i_u. \tag{iii}$$

Otra aplicación de la ley de la corriente de Kirchhoff, en el nodo d, proporciona

$$i_3 + i_A = i_v. \tag{iv}$$

SIMPLIFIQUE

Cuando la corriente a través del amperímetro es cero ($i_A = 0$), podemos volver a escribir las ecuaciones (i) a (iv) como sigue:

$$i_1R_1 = i_3R_3 \tag{v}$$

$$i_uR_u = i_vR_v \tag{vi}$$

$$i_1 = i_u \tag{vii}$$

e

$$i_3 = i_v. \tag{viii}$$

Al dividir la ecuación (vi) entre la ecuación (v), obtenemos

$$\frac{i_uR_u}{i_1R_1} = \frac{i_vR_v}{i_3R_3},$$

(*continúa*)

(*continuación*)

que podemos volver a escribir usando las ecuaciones (vii) y (viii):

$$R_u = \frac{R_1}{R_3} R_v .$$

CALCULE

Al escribir los valores numéricos, obtenemos

$$R_u = \frac{R_1}{R_3} R_v = \frac{100.0\ \Omega}{110.0\ \Omega} 15.63\ \Omega = 14.20901\ \Omega.$$

REDONDEE

Mostramos nuestro resultado con cuatro cifras:

$$R_u = 14.21\ \Omega.$$

VUELVA A REVISAR

Nuestro resultado para la resistencia del resistor desconocido es semejante al valor para el resistor variable. Así, nuestra respuesta parece razonable, porque los otros dos resistores en el circuito también tienen resistencias que son aproximadamente iguales.

26.1 Oportunidad de autoevaluación

Demuestre que cuando la corriente que pasa por el amperímetro es cero, la resistencia equivalente en el puente de Wheatstone está dada por

$$R_{eq} = \frac{(R_1 + R_u)(R_3 + R_v)}{R_1 + R_u + R_3 + R_v}.$$

Observaciones generales sobre redes de circuitos

Una observación importante sobre la resolución de problemas es que, en general, el análisis completo de un circuito requiere conocer la corriente que fluye en cada una de sus ramas. Usamos la ley de la corriente de Kirchhoff y la ley de voltaje de Kirchhoff para establecer ecuaciones que relacionan las corrientes, y necesitamos tantas ecuaciones linealmente independientes como ramas hay a fin de asegurar que podemos obtener las soluciones del sistema.

Consideremos el ejemplo abstracto de la figura 26.16, donde se han omitido todos los componentes del circuito excepto los alambres. Este circuito tiene cuatro nodos, mostrados en azul en la figura 26.16*a*). Seis ramas conectan estos nodos, ilustrados en la figura 26.16*b*). En consecuencia, necesitamos seis ecuaciones linealmente independientes que relacionen las corrientes en esas ramas. Ya se observó que no todas las ecuaciones obtenidas al aplicar las leyes de Kirchhoff a un circuito son linealmente independientes. Merece la pena repetir este hecho: si un circuito tiene n nodos, es posible obtener cuando mucho $n - 1$ ecuaciones independientes a partir de la regla de la corriente. (Para el circuito en la figura 26.16, $n = 4$, de modo que sólo podemos obtener tres ecuaciones independientes.)

La regla de la corriente no es suficiente para efectuar el análisis completo de algún circuito. En general, resulta mejor escribir tantas ecuaciones como sea posible para los nodos y luego aumentarlas con ecuaciones obtenidas a partir de los bucles. La figura 26.16*c*) muestra que en esta red hay seis bucles posibles, indicados con colores diferentes. Resulta evidente que hay más bucles de los que necesitamos analizar para obtener tres ecuaciones. De nuevo, ésta es una observación general: el sistema de ecuaciones que puede establecerse al considerar todos los bucles posibles está sobredeterminado. Así, siempre se tiene la libertad de escoger bucles particulares para aumentar las ecuaciones obtenidas al analizar los nodos. Como regla práctica general, resulta mejor escoger bucles con menor número de elementos de circuito, lo cual hace considerablemente más simples los procedimientos algebraicos posteriores. En particular, si a usted se le pide encontrar la corriente en una rama particular de una red, escoger el bucle idóneo le permite evitarse el planteamiento de un extenso conjunto de ecuaciones y resolver el problema con una sola ecuación. Así, ¡merece la pena dedicar algo de atención a la selección de bucles! No escriba más ecuaciones de las necesarias para encontrar las incógnitas en cualquier problema particular. Esto sólo complica el

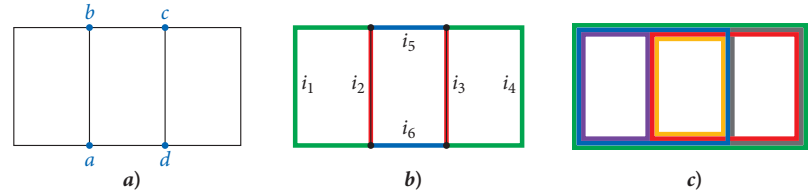
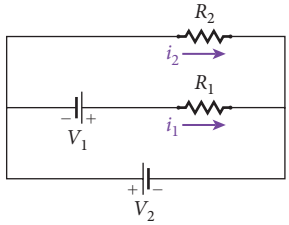


FIGURA 26.16 Red de circuito que consta de *a*) cuatro nodos, *b*) seis ramas, *c*) seis bucles posibles.

26.3 Ejercicio en clase

En el circuito multiloop de la figura, $V_1 = 6.00$ V, $V_2 = 12.0$ V, $R_1 = 10.0\ \Omega$ y $R_2 = 12.0$ V. ¿Cuál es la magnitud de la corriente i_2?



a) 0.500 A
b) 0.750 A
c) 1.00 A
d) 1.25 A
e) 1.50 A

procedimiento algebraico. No obstante, una vez que tenga la solución, puede usar uno o más de los bucles sin utilizar para comprobar sus valores.

26.4 Amperímetros y voltímetros

Un dispositivo usado para medir corriente se denomina **amperímetro**. Un dispositivo utilizado para medir diferencia de potencial se denomina **voltímetro**. Para medir la corriente, un amperímetro debe estar conectado *en serie* en un circuito. En la figura 26.17 se muestra un amperímetro conectado en un circuito de modo que permite medir la corriente i. Para medir la diferencia de potencial, un voltímetro debe estar conectado *en paralelo* con el componente a través del cual se medirá la diferencia de potencial. La figura 26.17 ilustra un voltímetro colocado en el circuito para medir la caída de potencial a través del resistor R_1.

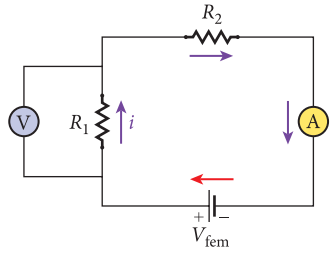


FIGURA 26.17 Colocación de un amperímetro y un voltímetro en un circuito simple.

Resulta importante darse cuenta de que estos instrumentos deben ser capaces de realizar mediciones tratando de perturbar lo menos posible el circuito. Así, los amperímetros están diseñados para tener la menor resistencia posible, que suele ser del orden de 1 Ω, de modo que no tengan un efecto apreciable sobre las corrientes que miden. Los voltímetros se diseñan para tener la mayor resistencia posible, normalmente del orden de 10 MΩ (10^7 Ω), de modo que tengan un efecto despreciable sobre las diferencias de potencial que miden.

En la práctica, las mediciones de corriente y diferencia de potencial se realizan con un multímetro digital que puede conmutar entre funcionar como amperímetro y hacerlo como voltímetro. Este aparato muestra los resultados en una representación digital numérica con ajuste automático del rango, que incluye el signo de la diferencia de potencial o de la corriente. La mayor parte de los multímetros también pueden medir la resistencia del componente de un circuito; es decir, pueden funcionar como **óhmetro**. El multímetro digital realiza esta tarea al aplicar una diferencia de potencial conocida y medir la corriente resultante. Esta prueba es de utilidad para determinar la continuidad de circuitos y el estado de los fusibles, así como para medir la resistencia de los resistores.

EJEMPLO 26.2 Voltímetro en un circuito simple

Considere un circuito simple que consta de una fuente de fem con voltaje $V_{fem} = 150$ V y un resistor con resistencia $R = 100$ kΩ (figura 26.18). A través del resistor se conecta un voltímetro con resistencia $R_V = 10.0$ MΩ.

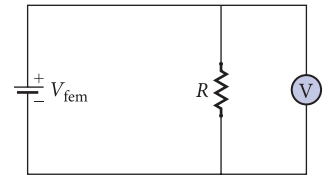


FIGURA 26.18 Un circuito simple con un voltímetro conectado en paralelo a través de un resistor.

PROBLEMA

¿Cuál es la corriente en el circuito antes de que se conecte el voltímetro?

SOLUCIÓN

La ley de Ohm establece que $V = iR$, de modo que podemos encontrar la corriente en el circuito:

$$i = \frac{V_{fem}}{R} = \frac{150\ \text{V}}{100 \cdot 10^3\ \Omega} = 1.50 \cdot 10^{-3}\ \text{A} = 1.50\ \text{mA}.$$

PROBLEMA

¿Cuál es la corriente en el circuito cuando el voltímetro se conecta a través del resistor?

SOLUCIÓN

La resistencia equivalente del resistor y el voltímetro conectados en paralelo está dada por

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R} + \frac{1}{R_V}.$$

Al despejar la resistencia equivalente y escribir los valores numéricos, obtenemos

$$R_{eq} = \frac{RR_V}{R + R_V} = \frac{\left(100 \cdot 10^3\ \Omega\right)\left(10\,0 \cdot 10^6\ \Omega\right)}{100 \cdot 10^3\ \Omega + 10.0 \cdot 10^6\ \Omega} = 9.90 \cdot 10^4\ \Omega = 99.0\ \text{k}\Omega.$$

Entonces, la corriente es

$$i = \frac{V_{fem}}{R_{eq}} = \frac{150\ \text{V}}{9.90 \cdot 10^4\ \Omega} = 1.52 \cdot 10^{-3}\ \text{A} = 1.52\ \text{mA}.$$

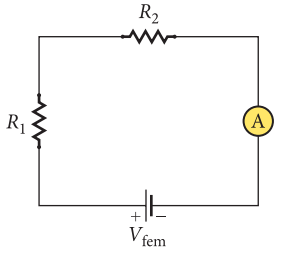
La corriente en el circuito aumenta por 0.02 mA cuando el voltímetro está conectado porque la combinación en paralelo del resistor y el voltímetro tiene una menor resistencia que la del resistor solo. No obstante, el efecto es pequeño, incluso con esta resistencia relativamente grande ($R = 100$ kΩ).

26.2 Oportunidad de autoevaluación

Cuando arrancamos un automóvil mientras las luces están encendidas, la luz de los faros se vuelve tenue. Explique.

26.4 Ejercicio en clase

Dos resistores, $R_1 = 3.00\ \Omega$ y $R_2 = 5.00\ \Omega$, están conectados en serie con una batería con $V_{fem} = 8.00$ V y un amperímetro con $R_A = 1.00\ \Omega$, como muestra la figura. ¿Cuál es la corriente medida por el amperímetro?



a) 0.500 A *d*) 1.00 A

b) 0.750 A *e*) 1.50 A

c) 0.889 A

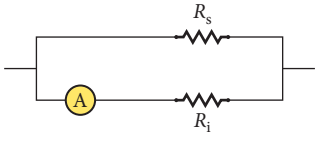


FIGURA 26.19 Un amperímetro con un resistor de derivación conectado en paralelo.

PROBLEMA RESUELTO 26.3 Cómo incrementar el rango de un amperímetro

PROBLEMA

Un amperímetro puede ser usado para medir diferentes rangos de corriente sumando un divisor de corriente en la forma de un resistor de derivación conectado en paralelo con el amperímetro. Un resistor de derivación es simplemente un resistor con una resistencia muy pequeña. Su nombre viene del hecho de que cuando se conecta en paralelo con el amperímetro, cuya resistencia es mayor, la mayor parte de la corriente pasará por él y no por el medidor. La sensibilidad del amperímetro decrecerá permitiendo entonces la medición de grandes corrientes. Suponga que el amperímetro, cuando está a escala completa, mide una corriente de $i_{int} = 5.10$ mA. Si el amperímetro tiene una resistencia interna de $R_i = 16.8\ \Omega$ y se usa este amperímetro para medir una corriente máxima de $i_{máx} = 20.2$ A, ¿cuál debería ser la resistencia del resistor de derivación, R_s, conectado en paralelo con el amperímetro?

SOLUCIÓN

PIENSE

El resistor de derivación conectado en paralelo con el amperímetro necesita tener una resistencia sustancialmente menor que la resistencia interna del amperímetro. Así, la mayor parte de la corriente circulará por el resistor de derivación, en lugar de hacerlo por el amperímetro.

ESBOCE

La figura 26.19 ilustra un resistor de derivación, R_s, conectado en paralelo con el amperímetro.

INVESTIGUE

Los dos resistores están conectados en paralelo, de modo que la diferencia de potencial a través de cada resistor es la misma. La diferencia de potencial que proporciona una lectura a escala completa sobre el amperímetro es

$$\Delta V_{fs} = i_{int} R_i. \tag{i}$$

Del capítulo 25 aprendimos que la resistencia equivalente de los dos resistores en paralelo está dada por

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_i} + \frac{1}{R_s}. \tag{ii}$$

La caída de voltaje a través de la resistencia equivalente debe ser igual a la caída de voltaje a través del amperímetro que proporciona una lectura a escala completa cuando $i_{máx}$ fluye por el circuito. En consecuencia, podemos escribir

$$\Delta V_{fs} = i_{máx} R_{eq}. \tag{iii}$$

SIMPLIFIQUE

Al combinar las ecuaciones (i) y (iii) para la diferencia de potencial, se obtiene

$$\Delta V_{fs} = i_{int} R_i = i_{máx} R_{eq}. \tag{iv}$$

Volvemos a ordenar la ecuación (iv) y sustituimos R_{eq} en la ecuación (ii):

$$\frac{i_{máx}}{i_{int} R_i} = \frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_i} + \frac{1}{R_s}. \tag{v}$$

Al despejar en (v) la resistencia de derivación, obtenemos

$$\frac{1}{R_s} = \frac{i_{máx}}{i_{int} R_i} - \frac{1}{R_i} = \frac{1}{R_i}\left(\frac{i_{máx}}{i_{int}} - 1\right) = \frac{1}{R_i}\left(\frac{i_{máx} - i_{int}}{i_{int}}\right),$$

o bien,

$$R_s = R_i \frac{i_{int}}{i_{máx} - i_{int}}.$$

CALCULE

Al escribir los valores numéricos, obtenemos

$$R_s = R_i \frac{i_{int}}{i_{máx} - i_{int}} = (16.8\ \Omega)\frac{5.10 \cdot 10^{-3}\ \text{A}}{20.2\ \text{A} - 5.10 \cdot 10^{-3}\ \text{A}}$$
$$= 0.00424266\ \Omega.$$

REDONDEE

Mostramos nuestro resultado con tres cifras:

$$R_s = 0.00424\ \Omega.$$

VUELVA A REVISAR

La resistencia equivalente del amperímetro y el resistor de derivación conectados en paralelo está dada por la ecuación (ii). Al despejar en esa ecuación la resistencia equivalente y escribir los números, obtenemos

$$R_{eq} = \frac{R_i R_s}{R_i + R_s} = \frac{(16.8\ \Omega)(0.00424\ \Omega)}{16.8\ \Omega + 0.00424\ \Omega} = 0.00424\ \Omega.$$

Así, la resistencia equivalente del amperímetro y el resistor de derivación conectados en paralelo es aproximadamente igual a la resistencia del resistor de derivación. Esta baja resistencia equivalente es necesaria para un instrumento que mide corriente, que debe colocarse en serie en el circuito. Si el dispositivo para medir la corriente tiene una alta resistencia, su presencia perturba la medición realizada.

26.5 Circuitos RC

Hasta el momento, en este capítulo hemos tratado con circuitos que contienen fuentes de fem y resistores. La corriente en estos circuitos no varía con el tiempo. Ahora consideramos circuitos que contienen capacitores (vea el capítulo 24), así como fuentes de fem y resistores. Estos circuitos, denominados **circuitos RC**, tienen corrientes que *varían* con el tiempo. Las operaciones de circuito más simples que implican corrientes dependientes del tiempo son la carga y descarga de un capacitor. Comprender estos procesos dependientes del tiempo implica la solución de algunas ecuaciones diferenciales simples. Después de que el magnetismo y los fenómenos magnéticos se aborden en los capítulos 27 a 29, las corrientes dependientes del tiempo volverán a analizarse en el capítulo 30, que se basa en las técnicas que aquí se tratan.

Carga de un capacitor

Considere un circuito con una fuente de fem, V_{fem}, un resistor, R, y un capacitor, C (figura 26.20). Inicialmente, el interruptor está abierto y el capacitor está descargado, como muestra la figura 26.20*a*). Cuando el interruptor está cerrado (figura 26.20*b*), por el circuito empieza a fluir corriente, acumulando cargas opuestas sobre las placas del capacitor, creando así una diferencia de potencial, ΔV, a través del capacitor. La corriente circula debido a la fuente de fem, que mantiene un voltaje constante. Cuando el capacitor está cargado por completo (figura 26.20*c*), por el circuito ya no fluye corriente. Entonces, la diferencia de potencial a través de las placas es igual al voltaje suministrado por la fuente de fem, y la cantidad de carga total, q_{tot}, sobre cada placa es $q_{tot} = CV_{fem}$.

Mientras el capacitor se está cargando, podemos analizar la corriente, i, que fluye en el circuito (en el supuesto de que fluye de la terminal negativa a la terminal positiva dentro de la fuente de voltaje) al aplicar la ley de voltaje de Kirchhoff al bucle en la figura 26.20*b*) en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj:

$$V_{fem} - V_R - V_C = V_{fem} - i(t)R - q(t)/C = 0,$$

donde V_C es la caída de potencial a través del capacitor y $q(t)$ es la carga sobre el capacitor en un instante dado t. El cambio de la carga sobre las placas del capacitor debido a la corriente es $i(t) = dq(t)/dt$, y podemos volver a escribir la ecuación precedente como

$$R\frac{dq(t)}{dt} + \frac{q(t)}{C} = V_{fem},$$

o bien,

$$\frac{dq(t)}{dt} + \frac{q(t)}{RC} = \frac{V_{fem}}{R}. \tag{26.3}$$

Esta ecuación diferencial relaciona la carga con su derivada con respecto al tiempo. El análisis de oscilaciones amortiguadas en el capítulo 14 implicó ecuaciones diferenciales semejantes. Parece

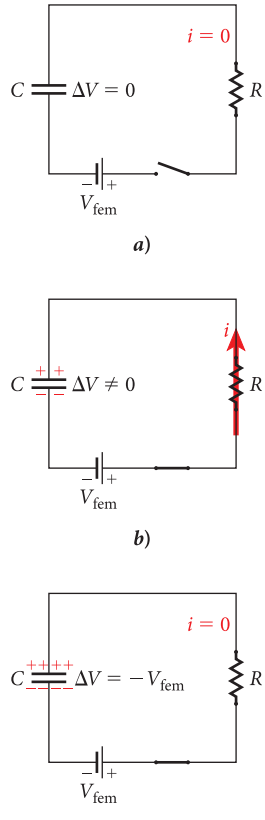


FIGURA 26.20 Un circuito RC básico, que contiene una fuente de fem, un resistor y un capacitor: *a*) con el interruptor abierto; *b*) poco tiempo después de que se cierra el interruptor; *c*) mucho tiempo después que se cierra el interruptor.

idóneo intentar una forma exponencial para la solución de la ecuación 26.3 porque una exponencial es la única función con la propiedad de tener una derivada que es idéntica a sí misma. Debido a que la ecuación 26.3 también contiene un término constante, la solución propuesta debe tener un término constante. En consecuencia, intentamos una solución con una constante y una exponencial, para la cual $q(0) = 0$:

$$q(t) = q_{\text{máx}}\left(1 - e^{-t/\tau}\right),$$

donde es necesario determinar las constantes $q_{\text{máx}}$ y τ. Al sustituir esta solución propuesta en la ecuación 26.3, obtenemos

$$q_{\text{máx}}\frac{1}{\tau}e^{-t/\tau} + \frac{1}{RC}q_{\text{máx}}\left(1 - e^{-t/\tau}\right) = \frac{V_{\text{fem}}}{R}.$$

Luego escribimos los términos dependientes del tiempo en el lado izquierdo y los términos independientes del tiempo en el derecho.

$$q_{\text{máx}}e^{-t/\tau}\left(\frac{1}{\tau} - \frac{1}{RC}\right) = \frac{V_{\text{fem}}}{R} - \frac{1}{RC}q_{\text{máx}}.$$

Esta ecuación sólo puede ser verdadera siempre si ambos lados son iguales a cero. A partir del lado izquierdo encontramos

$$\tau = RC. \tag{26.4}$$

Así, la constante τ (denominada **constante de tiempo**) es simplemente el producto de la capacitancia y la resistencia. A partir del lado derecho encontramos una expresión para la constante $q_{\text{máx}}$:

$$q_{\text{máx}} = CV_{\text{fem}}.$$

Por lo tanto, la ecuación diferencial para la carga de un capacitor (ecuación 26.3) tiene la solución

$$q(t) = CV_{\text{fem}}\left(1 - e^{-t/RC}\right). \tag{26.5}$$

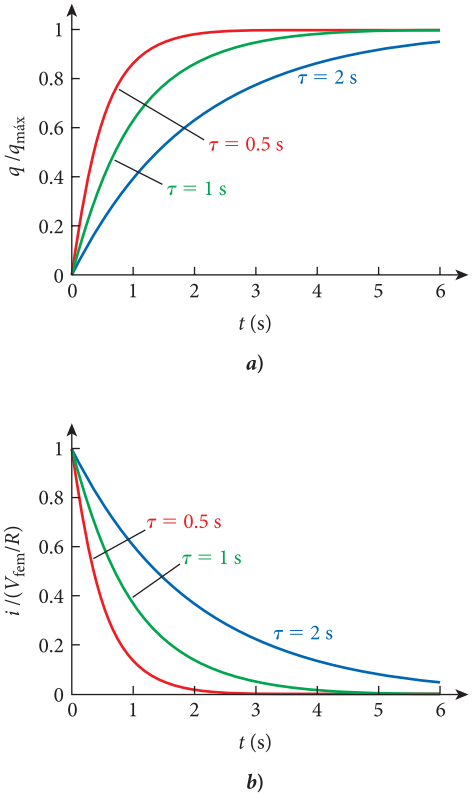


FIGURA 26.21 Carga de un capacitor: *a*) carga del capacitor como una función del tiempo; *b*) corriente que fluye a través del resistor como una función del tiempo.

Observe que en $t = 0$, $q = 0$, que es la condición inicial antes de que se conecten los componentes del circuito. En $t = \infty$, $q = q_{\text{máx}} = CV_{\text{fem}}$, que es la condición de estado estable en la que el capacitor está cargado por completo. La dependencia de la carga sobre el capacitor con respecto al tiempo se muestra en la figura 26.21*a*) para tres valores diferentes de la constante de tiempo τ.

La corriente que fluye por el circuito se obtiene al derivar la ecuación 26.5 con respecto al tiempo:

$$i = \frac{dq}{dt} = \left(\frac{V_{\text{fem}}}{R}\right)e^{-t/RC}. \tag{26.6}$$

A partir de la ecuación 26.6, en $t = 0$, la corriente en el circuito es V_{fem}/R y en $t = \infty$, la corriente es cero, como muestra la figura 26.21*b*).

¿Cómo sabemos que la solución que hemos encontrado para la ecuación 26.3 es la única? Esto no resulta evidente con base en el análisis precedente, pero la solución es única. (En un curso sobre ecuaciones diferenciales suele proporcionarse una demostración.)

Descarga de un capacitor

Ahora consideremos un circuito que contiene un solo resistor, R, y un capacitor cargado por completo, C, lo cual se obtiene al mover el interruptor en la figura 26.22 de la posición 1 a la posición 2. La carga del capacitor antes de que el interruptor se mueva es $q_{\text{máx}}$. En este caso, por el circuito fluye corriente hasta que el capacitor se descarga por completo. Mientras el capacitor se está descargando, podemos aplicar la ley de voltaje de Kirchhoff alrededor del bucle en dirección del movimiento de las manecillas del reloj y obtener

$$-i(t)R - V_C = -i(t)R - \frac{q(t)}{C} = 0.$$

Podemos volver a escribir esta ecuación usando la definición de corriente:

$$\frac{Rdq(t)}{dt} + \frac{q(t)}{C} = 0. \tag{26.7}$$

La solución de la ecuación 26.7 se obtiene usando el mismo método que para la ecuación 26.3, excepto que la ecuación 26.7 no tiene término constante y $q(0) > 0$. Así, intentamos una solución de la forma $q(t) = q_{máx}e^{-t/\tau}$, que conduce a

$$q(t) = q_{máx}e^{-t/RC}. \tag{26.8}$$

En $t = 0$, la carga en el capacitor es $q_{máx}$. En $t = \infty$, la carga en el capacitor es cero.

Podemos obtener la corriente al derivar la ecuación 26.8 como una función del tiempo:

$$i(t) = \frac{dq}{dt} = -\left(\frac{q_{máx}}{RC}\right)e^{-t/RC}. \tag{26.9}$$

En $t = 0$, la corriente en el circuito es $-q_{máx}/RC$. En $t = \infty$, la corriente en el circuito es cero. Al graficar la dependencia de la carga en el capacitor con respecto al tiempo y la corriente que fluye por el resistor para el proceso de descarga, deben obtenerse curvas que decrecen exponencialmente como las de la figura 26.21*b*).

Todas las ecuaciones que describen la dependencia con respecto al tiempo de la carga y la descarga de un capacitor implican el factor exponencial $e^{-t/RC}$. De nuevo, el producto de la resistencia y la capacitancia se define como la constante de tiempo en un circuito *RC*: $\tau = RC$. Según la ecuación 26.5, después de una cantidad de tiempo igual a la constante de tiempo, el capacitor se habrá cargado hasta 63% de su valor máximo. Así, un circuito *RC* puede caracterizarse al especificar la constante de tiempo. Una constante de tiempo grande significa que para cargar el capacitor se requiere mucho tiempo; una constante de tiempo pequeña significa que para cargar el capacitor se requiere menos tiempo.

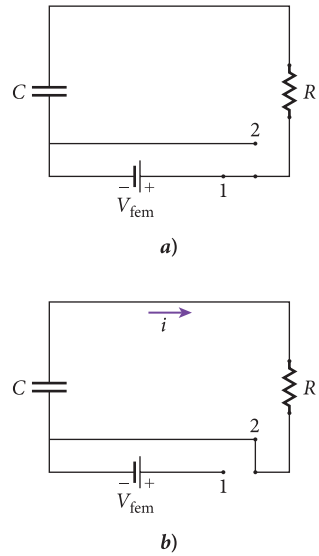


FIGURA 26.22 Circuito *RC* que contiene una fuente de fem, un resistor, un capacitor y un interruptor. El capacitor está *a*) cargado con el interruptor en la posición 1, y *b*) descargado con el interruptor en la posición 2.

EJEMPLO 26.3 Tiempo necesario para cargar un capacitor

Considere un circuito que consta de una batería de 12.0 V, un resistor de 50.0 Ω y un capacitor de 100.0 μF conectado en serie. Inicialmente, el capacitor está completamente descargado.

PROBLEMA

Después que se cierra el circuito, ¿cuánto tiempo es necesario para cargar el capacitor hasta el 90% de su carga máxima?

SOLUCIÓN

La carga del capacitor como una función del tiempo está dada por

$$q(t) = q_{máx}\left(1 - e^{-t/RC}\right),$$

donde $q_{máx}$ es la carga máxima del capacitor. Queremos conocer el tiempo hasta que $q(t)/q_{máx} = 0.90$, que puede obtenerse a partir de

$$\left(1 - e^{-t/RC}\right) = \frac{q(t)}{q_{máx}} = 0.90,$$

o bien,

$$0.10 = e^{-t/RC}. \tag{i}$$

Al tomar el logaritmo natural en ambos lados de la ecuación (i), obtenemos

$$\ln 0.10 = -\frac{t}{RC},$$

o bien,

$$t = -RC\ln 0.10 = -(50.0\ \Omega)\left(100 \cdot 10^{-6}\ \text{F}\right)(-2.30) = 0.0115\ \text{s} = 11.5\ \text{ms}.$$

26.5 Ejercicio en clase

Para descargar muy rápido un capacitor en un circuito *RC*, ¿cuáles deben ser los valores de la resistencia y la capacitancia?

a) Ambos deben ser lo más grandes posible.

b) La resistencia debe ser lo más grande posible, y la capacitancia, lo más pequeña posible.

c) La resistencia debe ser lo más pequeña posible, y la capacitancia, lo más grande posible.

d) Ambos deben ser lo más pequeños posible.

26.3 Oportunidad de autoevaluación

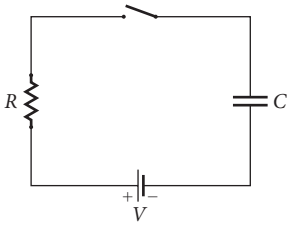
Un capacitor de 1.00 mF está cargado por completo y un resistor de 100.0 Ω está conectado a través del capacitor. ¿En cuánto tiempo se eliminará el 99.0% de la carga almacenada en el capacitor?

Marcapasos

El corazón humano sano late a intervalos regulares, enviando sangre a todo el cuerpo. Los latidos son regulados por las propias señales eléctricas del corazón. Estas señales eléctricas pueden medirse

26.6 Ejercicio en clase

Un capacitor descargado con C = 14.9 μF, un resistor con R = 24.3 kΩ, y una batería con V = 25.7 V están conectados en serie como se muestra en la figura. ¿Cuál es la carga en el capacitor en t = 0.3621 s tras cerrarse el interruptor?



a) $5.48 \cdot 10^{-5}$ C *d*) $1.66 \cdot 10^{-4}$ C

b) $7.94 \cdot 10^{-5}$ C *e*) $2.42 \cdot 10^{-4}$ C

c) $1.15 \cdot 10^{-5}$ C

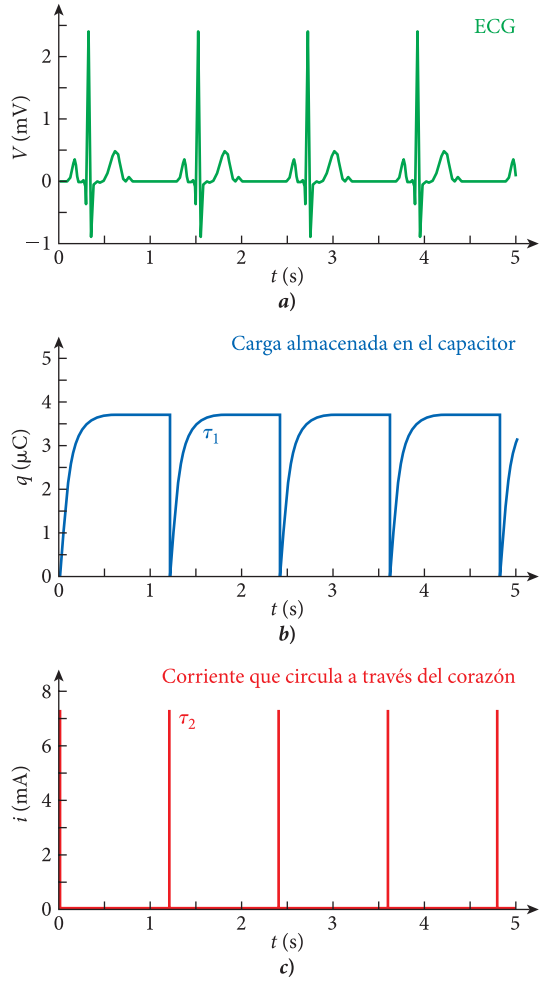


FIGURA 26.23 *a*) Electrocardiograma (ECG) que muestra cuatro latidos regulares. *b*) La carga almacenada en el capacitor del marcapasos como una función del tiempo. *c*) La corriente que circula a través del corazón debido a la descarga del capacitor del marcapasos.

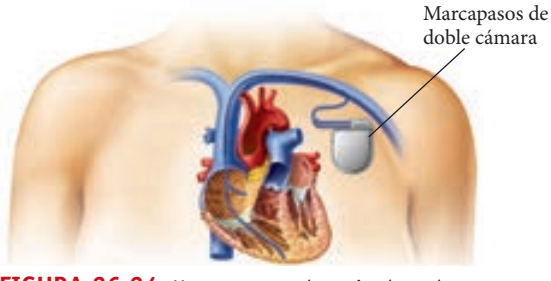


FIGURA 26.24 Marcapasos moderno implantado en un paciente. El marcapasos envía pulsos eléctricos a dos cámaras del corazón a fin de ayudarlo a latir con regularidad.

a través de la piel usando un electrocardiógrafo. Este aparato produce una gráfica de diferencia de potencial contra tiempo, denominada electrocardiograma o ECG (algunas veces, EKG, del alemán *electrokardiograph*). La figura 26.23*a*) muestra cómo un ECG representa cuatro latidos cardiacos regulares que ocurren a razón de 72 latidos por minuto. Los doctores y el personal médico pueden usar un ECG para diagnosticar el estado de salud del corazón.

Algunas veces el corazón no late regularmente y requiere ayuda para mantener su propio ritmo. Esta ayuda puede proporcionarse por medio de un marcapasos, que es un circuito eléctrico que envía pulsos eléctricos al corazón a intervalos regulares, sustituyendo las señales eléctricas normales del corazón y estimulándolo a latir a intervalos prescritos. En el paciente se implanta un marcapasos que se conecta directamente al corazón, como ilustra la figura 26.24.

EJEMPLO 26.4 Elementos de circuito de un marcapasos

Analicemos el circuito que muestra la figura 26.25, que simula la función de un marcapasos. Este circuito marcapasos funciona al cargar un capacitor, C, durante algún tiempo usando una batería con voltaje V_{fem} y un resistor R_1, como ilustra la figura 26.25*a*), donde el circuito está

abierto. Cuando se cierra el interruptor, como en la figura 26.25*b*), el capacitor a través del corazón se corta y el capacitor se descarga a través del corazón en un breve lapso para estimularlo y latir. Así, el circuito funciona como un marcapasos al mantener abierto el interruptor durante el tiempo entre latidos del corazón, cerrando el interruptor durante un breve lapso para estimular al corazón a latir y luego abriendo de nuevo el interruptor.

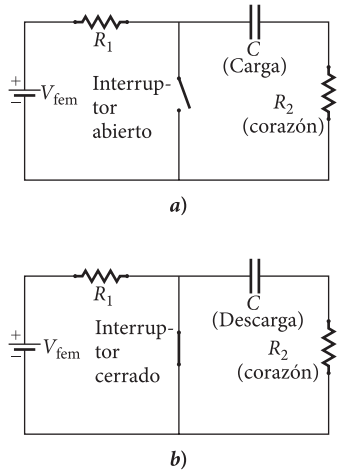


FIGURA 26.25 *a*) Circuito marcapasos simplificado en modo de carga. *b*) El circuito marcapasos en modo de descarga.

PROBLEMA

¿Qué valores de capacitancia, C, y resistencia, R_1, deben usarse en un marcapasos?

SOLUCIÓN

Suponemos que el corazón actúa como un resistor con valor $R_2 = 500\ \Omega$ y que la fuente de fem es una batería de ion de litio (analizada en el capítulo 23). Una batería de ion de litio tiene densidad de energía muy alta y voltaje de 3.7 V. Un ritmo cardiaco normal varía entre 60 y 100 latidos por minuto. No obstante, tal vez sea necesario que el marcapasos estimule al corazón a latir más rápido, a fin de que pueda funcionar a 180 latidos por minuto, lo que significa que el capacitor debe cargarse hasta 180 veces por minuto. Así, el tiempo mínimo entre descargas, $t_{mín}$, es

$$t_{mín} = \frac{1}{180\ \text{latidos/mín}} = \left(\frac{1\ \text{mín}}{180}\right)\left(\frac{60\ \text{s}}{1\ \text{mín}}\right) = 0.333\ \text{s}.$$

La ecuación 26.5 proporciona la carga, q, como una función del tiempo, t, para la carga máxima, $q_{máx}$, para una constante de tiempo dada, $\tau_1 = R_1C$:

$$q = q_{máx}\left(1 - e^{-t/\tau_1}\right).$$

Al reordenar esta ecuación, obtenemos

$$\frac{q}{q_{máx}} = f = 1 - e^{-t/\tau_1},$$

donde f es la fracción de capacidad de carga del capacitor. Supongamos que el capacitor debe cargarse a 95% de su carga máxima en el tiempo $t_{mín}$. Al despejar la constante de tiempo, obtenemos

$$\tau_1 = R_1C = -\frac{t_{mín}}{\ln(1-f)} = -\frac{0.333\ \text{s}}{\ln(1-0.95)} = 0.111\ \text{s}.$$

Así, la constante de tiempo para la carga debe ser $\tau_1 = R_1C = 100$ ms. La constante de tiempo para la descarga, τ_2, debe ser menor para producir pulsos cortos de una elevada corriente para estimular el corazón. Al hacer $\tau_2 = 0.500$ ms, que es del orden del estrecho pulso eléctrico en el ECG, obtenemos

$$\tau_2 = R_2C = 0.500\ \text{ms}.$$

Podemos despejar la capacitancia requerida y sustituir el valor de 500 Ω para R_2:

$$C = \frac{0.000500\ \text{s}}{500\ \Omega} = 1.00\ \mu\text{F}.$$

La resistencia requerida para el circuito de carga puede relacionarse ahora con la constante de tiempo para el proceso de carga y el valor de la capacitancia que acabamos de calcular:

$$\tau_1 = R_1C = 0.100\ \text{s} = R_1(1.00\ \mu\text{F}),$$

con lo que obtenemos

$$R_1 = \frac{0.100\ \text{s}}{1.00 \cdot 10^{-6}\ \text{F}} = 100\ \text{k}\Omega.$$

La figura 26.23*b*) muestra la carga del capacitor del marcapasos simulado como una función del tiempo para un ritmo cardiaco de 72 latidos por minuto. Puede ver que el capacitor carga a casi su capacidad total antes de ser descargado. La figura 26.23*c*) ilustra la corriente que circula por el corazón cuando el capacitor se descarga. El pulso de corriente es estrecho, con duración

menor a un milisegundo. Este pulso estimula al corazón a latir, como se ilustra en el ECG en la figura 26.23*a*). El ritmo al que late el corazón es controlado por el ritmo al que el interruptor del marcapasos se cierra y abre, lo cual es controlado por un microprocesador.

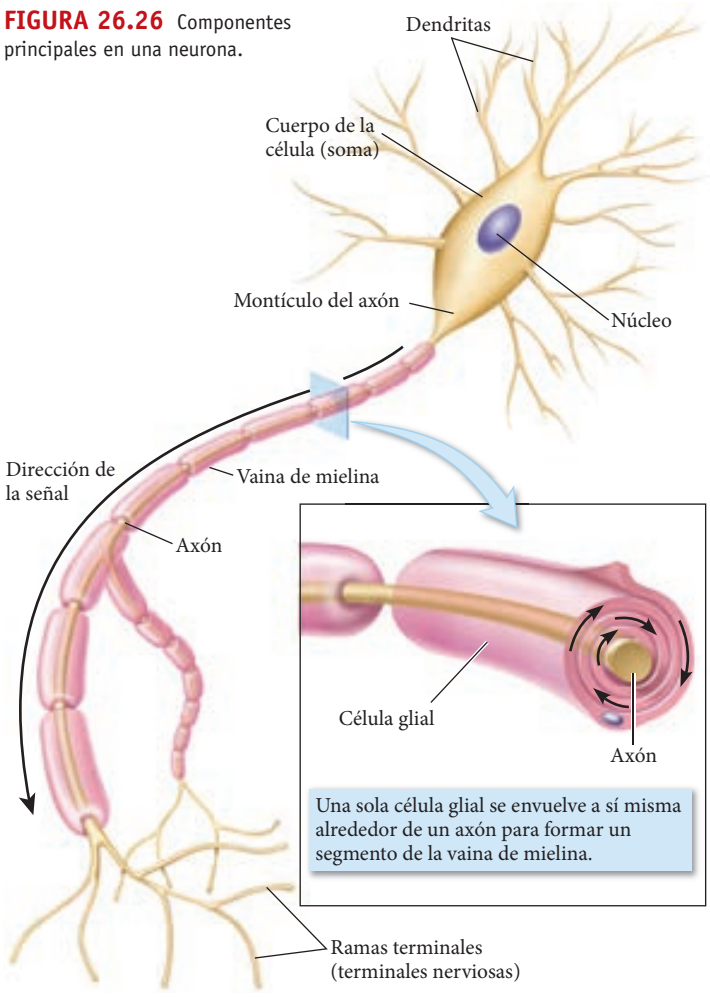


FIGURA 26.26 Componentes principales en una neurona.

Neurona

El tipo de célula responsable de transmitir y procesar señales en el sistema nervioso y cerebro humanos y otros animales es la neurona (figura 26.26). La neurona conduce las corrientes necesarias por medios electroquímicos, a través del movimiento de iones (principalmente Na^+, K^+ y Cl^-). Las neuronas reciben señales de otras neuronas a través de dendritas y envían señales a otras neuronas a través de un axón. Éste puede ser bastante largo (por ejemplo, en la médula espinal) y está cubierto con una vaina de mielina aislante. Las señales se reciben desde y son enviadas a otras neuronas o células en los órganos de los sentidos y otros tejidos. Todo esto, y mucho más, puede aprenderse en un curso introductorio de biología o fisiología. Aquí consideraremos que la neurona es un circuito básico que procesa señales.

Una señal de entrada debe ser suficientemente intensa para estimular una neurona; es decir, para enviar una señal de salida por el axón. Una aproximación burda pero razonable consiste en representar el cuerpo principal de la célula de una neurona, el soma, como un circuito *RC* básico que procesa estas señales. La figura 26.27 muestra un diagrama de este circuito *RC*. Un capacitor y un resistor están conectados en paralelo a un potencial de entrada y a un potencial de salida. Los valores de potencial típicos para las neuronas son del orden de ±50 mV con respecto al fondo del tejido circundante. Si $\Delta V = V_{ent} - V_{sal} \neq 0$, a través del circuito fluye una corriente. Parte de esta corriente circula a través del resistor, aunque parte de ella carga de manera simultánea el capacitor hasta que alcanza la diferencia de potencial entre los potenciales de entrada y salida. La diferencia de potencial entre las placas del capacitor crece exponencialmente, según $V_C(t) = (V_{ent} - V_{sal})(1 - e^{-t/RC})$, justo como para el proceso de carga de un capacitor en un circuito *RC*. (La constante de tiempo, $\tau = RC$ es del orden de 10 ms, suponiendo una capacitancia de 1 nF y una resistencia de 10 MΩ.) Si luego se retira la diferencia de potencial externa del circuito, el capacitor se descarga con la misma constante de tiempo, y el potencial a través del capacitor decae exponencialmente, según $V_C(t) = V_0 e^{-t/RC}$. Esta dependencia simple con respecto al tiempo captura la respuesta básica a una neurona. La figura 26.28 ilustra la diferencia de potencial a través del capacitor de este modelo de neurona, mientras está cargado durante 30 ms y luego se descarga.

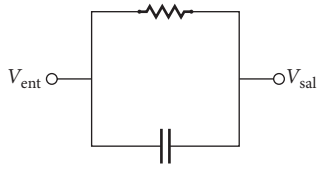


FIGURA 26.27 Modelo simplificado de una neurona como un circuito *RC*.

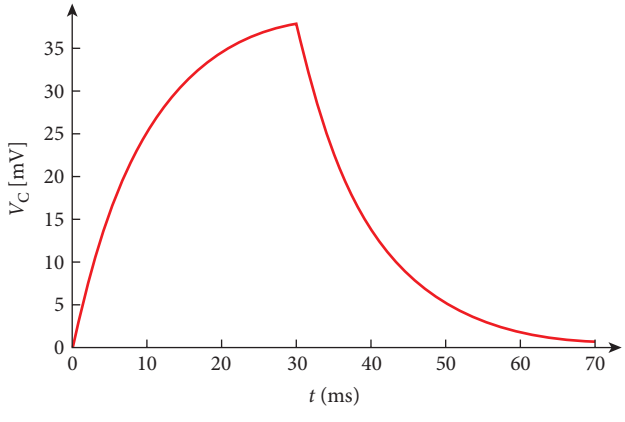


FIGURA 26.28 Diferencia de potencial en el capacitor en un modelo de neurona.

LO QUE HEMOS APRENDIDO | GUÍA DE ESTUDIO PARA EXAMEN

- Las leyes de Kirchhoff para analizar circuitos son las siguientes:
  - Ley de la corriente de Kirchhoff: la suma de las corrientes que entran a un nodo debe ser igual a la suma de las corrientes que salen de un nodo.
  - Ley de voltaje de Kirchhoff: la suma de la diferencia de potencial a través de un bucle completo debe ser cero.
- Para aplicar la ley de voltaje de Kirchhoff, el signo del cambio de potencial para cada elemento de circuito está determinado por la dirección de la corriente y la dirección del análisis. Las convenciones son:
  - Las fuentes de fem en la misma dirección del análisis son ganancias de potencial, mientras que fuentes opuestas a la dirección del análisis son caídas de potencial.
  - Para resistores, la magnitud del cambio de potencial es $|iR|$, donde i es la corriente supuesta y R es la resistencia. El signo del cambio de potencial depende de la dirección (supuesta o conocida) de la corriente, así como de la dirección del análisis. Si estas direcciones son las mismas, el resistor produce una caída de potencial. Si las direcciones son opuestas, el resistor produce una ganancia de potencial.
- Un circuito *RC* contiene un resistor de resistencia R y un capacitor de capacitancia C. La constante de tiempo, τ, está dada por $\tau = RC$.
- En un circuito *RC*, la carga, q, como una función del tiempo para un capacitor con capacitancia C que se está cargando, está dada por $q(t) = CV_{\text{fem}}(1 - e^{-t/RC})$, donde V_{fem} es el voltaje suministrado por la fuente de fem y R es la resistencia del resistor.
- En un circuito *RC*, la carga, q, como una función del tiempo para un capacitor con capacitancia C que se está descargando, está dada por $q(t) = q_{\text{máx}}e^{-t/RC}$, donde $q_{\text{máx}}$ es la cantidad de la carga sobre las placas del capacitor en $t = 0$ y R es la resistencia del resistor.

TÉRMINOS CLAVE

leyes de Kirchhoff, p. 839
nodo, p. 839
rama, p. 839
ley de la corriente de Kirchhoff, p. 839
bucle, p. 840
ley de voltaje de Kirchhoff, p. 840
amperímetro, p. 847
voltímetro, p. 847
óhmetro, p. 847
circuitos RC, p. 849
constante de tiempo, p. 850

NUEVOS SÍMBOLOS Y ECUACIONES

$\tau = RC$, constante de tiempo de un circuito RC

RESPUESTAS A LAS OPORTUNIDADES DE AUTOEVALUACIÓN

26.1 Los resistores R_l y R_u están en serie y tienen una resistencia equivalente de $R_{lu} = R_l + R_u$. Los resistores R_3 y R_v están en serie y tienen una resistencia equivalente de $R_{3v} = R_3 + R_v$. Las resistencias equivalentes R_{lu} y R_{3v}, están en paralelo. Así, podemos escribir

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_{lu}} + \frac{1}{R_{3v}},$$

o bien,

$$R_{eq} = \frac{R_{lu}R_{3v}}{R_{lu} + R_{3v}} = \frac{(R_l + R_u)(R_3 + R_v)}{R_l + R_u + R_3 + R_v}.$$

26.2 Cuando los faros están encendidos, la batería suministra una cantidad modesta de corriente a las luces, y la caída de potencial a través de la resistencia interna de la batería es pequeña. El arrancador del motor se conecta en paralelo con las luces. Cuando el arrancador se acciona, extrae gran cantidad de corriente, produciendo una caída de potencial visible a través de la resistencia interna de la batería, provocando que por los faros fluya menos corriente.

26.3 $q = q_{\text{máx}}e^{-t/RC}$

$$\frac{q}{q_{\text{máx}}} = 0.01 = e^{-t/RC} \Rightarrow \ln 0.01 = -\frac{t}{RC}$$

$$t = -RC\ln 0.01 = -(100\ \Omega)(1.00\cdot 10^{-3}\ \text{F})(\ln 0.01) = 0.461\ \text{s}.$$

PRÁCTICA PARA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Lineamientos para resolución de problemas

1. Siempre es de utilidad identificar todo en un diagrama de circuito, incluyendo toda la información dada y todas las incógnitas, así como las corrientes, ramas y nodos pertinentes. Vuelva a trazar el diagrama a mayor escala en caso de requerir más espacio para efectos de claridad.

2. Recuerde que las direcciones que escoja para las corrientes y para la ruta alrededor de un bucle de circuito son arbitrarias. Si resulta que su elección es incorrecta, obtendrá un valor negativo para la corriente.

3. Revise los signos de los cambios de potencial dados en la tabla 26.1. Moverse a través del bucle del circuito en la misma dirección que la corriente supuesta significa que un dispositivo de fem produce un cambio de potencial positivo en la dirección de negativo a positivo dentro del dispositivo y que el cambio de potencial a través de un resistor es negativo. Los errores de signo son comunes y resulta benéfico apegarse a las convenciones para evitar tales errores.

4. Las fuentes de fem o los resistores pueden ser partes de dos bucles por separado. Cuenta cada componente de circuito como una parte de cada bucle presente, según la convención de los signos que haya adoptado para ese bucle. Un resistor puede producir una caída de potencial en un bucle y una ganancia de potencial en el otro.

5. Siempre es posible usar las leyes de Kirchhoff para escribir más ecuaciones de las necesarias para resolver corrientes incógnitas en las ramas de un circuito. Escriba tantas ecuaciones como sea posible para los nodos, y luego auméntelas con ecuaciones que representen bucles. Pero no todos los bucles se crean igual; es necesario escogerlos con sumo cuidado. Como regla práctica, escoja bucles con menos elementos de circuito.

PROBLEMA RESUELTO 26.4 Razón de almacenamiento de energía en un capacitor

Un resistor con $R = 2.50\ \text{M}\Omega$ y un capacitor con $C = 1.25\ \mu\text{F}$ están conectados en serie con una batería para la cual $V_{\text{fem}} = 12.0$ V. En $t = 2.50$ s después de que se cierra el circuito, ¿cuál es la razón con la que se almacena energía en el capacitor?

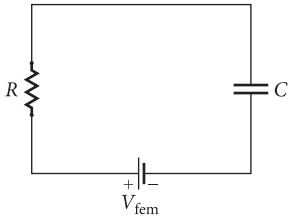


FIGURA 26.29 Circuito en serie que contiene una batería, un resistor y un capacitor.

PIENSE

Cuando el circuito está cerrado, el capacitor comienza a cargar. La razón a la que la energía se almacena en el capacitor está dada por la derivada con respecto al tiempo de la cantidad de energía almacenada en el capacitor, que es una función de la carga sobre el capacitor.

ESBOCE

La figura 26.29 muestra un diagrama del circuito en serie que contiene una batería, un resistor y un capacitor.

INVESTIGUE

La carga sobre el capacitor como una función del tiempo está dada por la ecuación 26.5:

$$q(t) = CV_{\text{fem}}\left(1 - e^{-t/RC}\right).$$

La energía almacenada en un capacitor que tiene una carga q está dada por (vea el capítulo 24)

$$U = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C}. \tag{i}$$

Así, la derivada con respecto al tiempo de la energía almacenada en el capacitor es

$$\frac{dU}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\frac{q^2(t)}{C}\right) = \frac{q(t)}{C}\frac{dq(t)}{dt}. \tag{ii}$$

La derivada con respecto al tiempo de la carga es la corriente, i. Por lo tanto, podemos sustituir dq/dt con la expresión dada por la ecuación 26.6:

$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt} = \left(\frac{V_{\text{fem}}}{R}\right)e^{-t/RC}. \tag{iii}$$

SIMPLIFIQUE

Podemos expresar la razón de cambio de la energía almacenada en el capacitor al combinar las ecuaciones (i) a (iii):

$$\frac{dU}{dt} = \frac{q(t)}{C}i(t) = \frac{CV_{\text{fem}}\left(1 - e^{-t/RC}\right)}{C}\left(\frac{V_{\text{fem}}}{R}\right)e^{-t/RC} = \frac{V_{\text{fem}}^2}{R}e^{-t/RC}\left(1 - e^{-t/RC}\right).$$

CALCULE

Primero calculamos el valor de la constante de tiempo, $\tau = RC$:

$$RC = \left(2.50 \cdot 10^6\ \Omega\right)\left(1.25 \cdot 10^{-6}\ \text{F}\right) = 3.125\ \text{s}.$$

Luego podemos calcular la razón de cambio de la energía almacenada en el capacitor:

$$\frac{dU}{dt}=\frac{(12.0\text{ V})^2}{2.50\cdot10^6\ \Omega}e^{-(2.50\text{ s})/(3.125\text{ s})}\left(1-e^{-(2.50\text{ s})/(3.125\text{ s})}\right)=1.42521\cdot10^{-5}\text{ W}.$$

REDONDEE

Mostramos nuestro resultado con tres cifras:

$$\frac{dU}{dt}=1.43\cdot10^{-5}\text{ W}.$$

VUELVA A REVISAR

La corriente en $t = 2.50$ s es

$$i(2.50\text{ s})=\left(\frac{12.0\text{ V}}{2.50\text{ M}\Omega}\right)e^{-(2.50\text{ s})/(3.125\text{ s})}=2.16\cdot10^{-6}\text{ A}.$$

La razón de disipación de energía en este instante en el resistor es

$$P=\frac{dU}{dt}=i^2R=\left(2.16\cdot10^{-6}\text{ A}\right)^2\left(2.50\cdot10^6\ \Omega\right)=1.16\cdot10^{-5}\text{ W}.$$

La razón a la que la batería suministra energía al circuito en este instante está dada por

$$P=\frac{dU}{dt}=iV_{\text{fem}}=\left(2.16\cdot10^{-6}\text{ A}\right)(12.0\text{ V})=2.59\cdot10^{-5}\text{ W}.$$

La conservación de la energía dicta que en cualquier instante la energía suministrada por la batería se disipa como calor en el resistor o se almacena en el capacitor. En este caso, la potencia proporcionada por la batería, $2.59\cdot10^{-5}$ W, es igual a la potencia disipada como calor en el resistor, $1.16\cdot10^{-5}$ W, más la razón a la que la energía se almacena en el capacitor, $1.43\cdot10^{-5}$ W. Así, nuestra respuesta es consistente.

PREGUNTAS DE OPCIÓN MÚLTIPLE

26.1 Un resistor y un capacitor están conectados en serie. Si un segundo capacitor idéntico se conecta en serie en el mismo circuito, la constante de tiempo para el circuito:

a) Disminuye. *b*) Aumenta. *c*) Permanece igual.

26.2 Un resistor y un capacitor están conectados en serie. Si un segundo resistor idéntico se conecta en serie en el mismo circuito, la constante de tiempo para el circuito:

a) Disminuye. *b*) Aumenta. *c*) Permanece igual.

26.3 Un circuito consta de una fuente de fem, un resistor y un capacitor, todos conectados en serie. El capacitor está cargado por completo. ¿Cuánta corriente circula por éste?

a) $i = V/R$ *b*) Cero *c*) Ni *a*) ni *b*)

26.4 ¿Cuál de las siguientes acciones reduce la constante de tiempo en un circuito *RC*?

a) Aumentar la constante dieléctrica del capacitor.

b) Agregar 20 m adicionales de alambre entre el capacitor y el resistor.

c) Aumentar el voltaje de la batería.

d) Agregar un resistor adicional en paralelo con el primer resistor.

e) Ninguna de las anteriores.

26.5 La ley de la corriente de Kirchhoff establece que:

a) La suma algebraica de las corrientes en cualquier nodo en un circuito debe ser cero.

b) La suma algebraica de los cambios de potencial alrededor de cualquier bucle en un circuito cerrado debe ser cero.

c) La corriente en un circuito con un resistor y un capacitor varía exponencialmente con el tiempo.

d) La corriente en un nodo está dada por el producto de la resistencia y la capacitancia.

e) El tiempo para el desarrollo de la corriente en un nodo está dado por el producto de la resistencia y la capacitancia.

26.6 ¿Cuánto tiempo se requiere, en múltiplos de la constante de tiempo, τ, para que el capacitor en un circuito *RC* se cargue hasta 98%?

a) 9τ *b*) 0.9τ *c*) 90τ *d*) 4τ *e*) 0.98τ

26.7 Inicialmente, un capacitor *C* está descargado. En el instante $t = 0$, el capacitor se conecta a través de un resistor *R* a una batería. La energía almacenada en el capacitor aumenta, llegando a un valor *U* cuando $t \to \infty$. Luego de algún tiempo igual a la constante de tiempo $\tau = RC$, la energía almacenada en el capacitor está dada por

a) U/e. *c*) $U(1 - 1/e)^2$.
b) U/e^2. *d*) $U(1 - 1/e)$.

26.8 ¿Cuál de las siguientes opciones tiene las mismas unidades que la fuerza electromotriz (fem)?

a) Corriente.

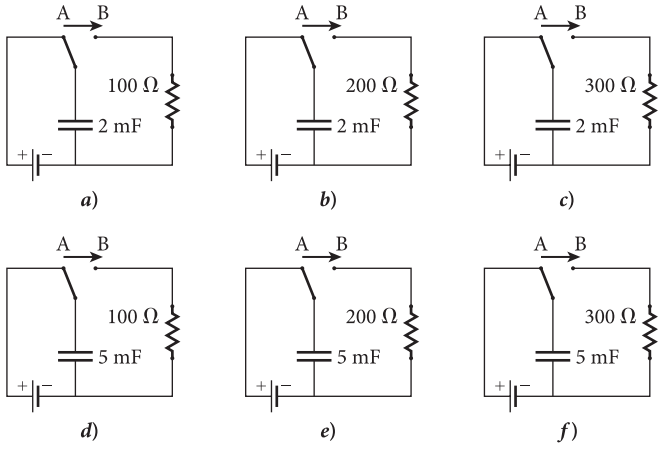
b) Potencial eléctrico.

c) Campo eléctrico.

d) Potencia eléctrica.

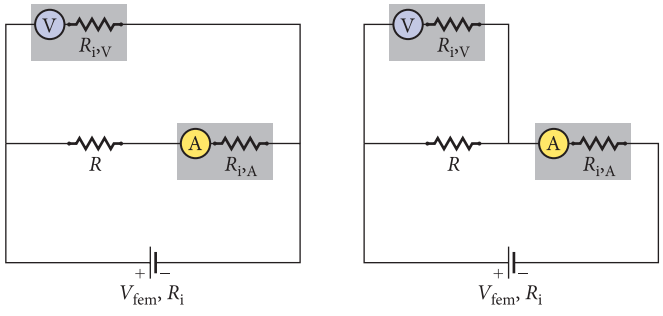
e) Ninguna de las anteriores.

26.9 El capacitor en cada circuito en la figura se carga primero por una batería de 10 V sin resistencia interna. Luego, el interruptor se cambia de la posición A a la posición B, y el capacitor se descarga a través de varios resistores. ¿Para qué circuito es máxima la energía total disipada por el resistor?



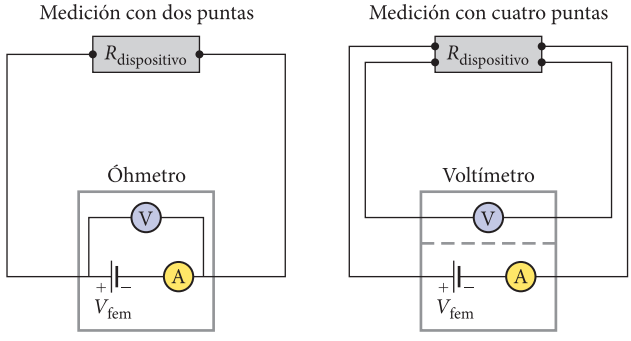
PREGUNTAS

26.10 Se quiere realizar una medición simultánea de la diferencia de potencial y la corriente a través de un resistor, *R*. Como se muestra en el diagrama de circuito, hay dos formas de conectar los dos instrumentos —amperímetro y voltímetro— en el circuito. Comente sobre el resultado de la medición usando cada configuración.



26.11 Si el capacitor en un circuito *RC* se sustituye por dos capacitores idénticos conectados en serie, ¿qué ocurre con la constante de tiempo para el circuito?

26.12 Usted quiere medir con precisión la resistencia, $R_{dispositivo}$, de un nuevo aparato. En la figura se muestran dos maneras para realizar lo anterior. A la izquierda, un óhmetro produce una corriente a través del dispositivo y mide la corriente, *i*, y la diferencia de potencial, ΔV, a través del dispositivo. La diferencia de potencial incluye las caídas de potencial a través de los alambres, que van hacia y desde el dispositivo y a través de los contactos que conectan los alambres con el dispositivo. Estas resistencias adicionales no siempre pueden ignorarse, especialmente si la resistencia del dispositivo es baja. Esta técnica se denomina *medición con dos puntas* porque al dispositivo se conectan dos alambres de sonda. La corriente resultante, *i*, se mide con un amperímetro. Luego, la resistencia total se determina al dividir ΔV entre *i*. Para esta configuración, ¿cuál es la resistencia que mide el óhmetro? En la configuración alternativa, mostrada a la derecha, se usa una fuente de corriente semejante para producir y medir la corriente por el dispositivo, pero la diferencia de potencial, ΔV, se mide directamente a través del dispositivo con un voltímetro casi ideal cuya resistencia interna es extremadamente grande. Esta técnica se denomina *medición con cuatro puntas* puesto que al dispositivo se conectan cuatro sondas. En esta configuración con cuatro puntas, ¿qué resistencia se mide? ¿Es diferente de lo que se evaluó con la medición con dos puntas? ¿Por qué? (*Sugerencia*: Los científicos y los ingenieros usan mucho las mediciones con cuatro puntas, ya que son especialmente útiles para realizar mediciones precisas de resistencia de materiales o dispositivos con baja resistencia.)



26.13 Explique por qué la constante de tiempo para un circuito RC aumenta con *R* y con *C*. (La respuesta "eso es lo que dice la fórmula" no es suficiente).

26.14 Una batería, un resistor y un capacitor están conectados en serie en un circuito RC. ¿Qué ocurre a la corriente que pasa por el resistor después de mucho tiempo? Explique usando las leyes de Kirchhoff.

26.15 ¿Cómo puede encender una bombilla de 1.0 W, 1.5 V, con una batería de automóvil de 12.0 V?

26.16 Un circuito multiloop contiene varios resistores y baterías. Si se duplican los valores de fem de todas las baterías, ¿qué ocurre en todos los componentes del circuito?

26.17 Un circuito multiloop de resistores, capacitores y baterías se enciende en $t = 0$, cuando todos los capacitores están descargados. La distribución inicial de corrientes y diferencias de potencial en el circuito pueden analizarse al tratar a los capacitores como si fuesen alambres de conexión o interruptores cerrados.

La distribución final de corrientes y diferencias de potencial, que ocurre después de que ha transcurrido bastante tiempo, puede analizarse al tratar los capacitores como segmentos o interruptores abiertos. Explique por qué funcionan estos trucos.

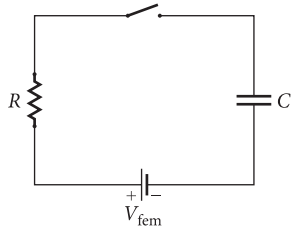
26.18 Los voltímetros siempre están conectados en paralelo con un componente del circuito, y los amperímetros siempre están conectados en serie. Explique por qué.

26.19 Se quiere medir tanto la corriente como la diferencia de potencial a través de algún componente de circuito. Esto no puede hacerse de manera simultánea y precisa con voltímetros y amperímetros normales. Explique por qué.

26.20 Dos bombillas para usar a 110 V están clasificadas a 60 W y 100 W, respectivamente. ¿Cuál tiene el filamento con menor resistencia?

26.21 Dos capacitores en serie se cargan a través de un resistor. En su lugar se conectan dos capacitores en paralelo y se cargan por medio del mismo resistor. ¿Cómo se comparan los tiempos requeridos para cargar por completo los dos conjuntos de capacitores?

26.22 La figura muestra un circuito que consta de una batería conectada en serie, con un interruptor, a un resistor y un capacitor, que está descargado por completo.



a) ¿Cuál es la corriente en el circuito en cualquier instante *t*?

b) Calcule la energía total suministrada por la batería desde $t = 0$ hasta $t = \infty$.

c) Calcule la energía total disipada en el resistor para el mismo lapso.

d) En este circuito, ¿se conserva la energía?

PROBLEMAS

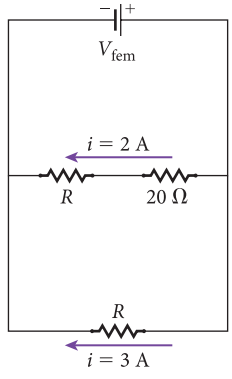
Una • y dos •• indican un nivel creciente de dificultad.

Secciones 26.1 a 26.3

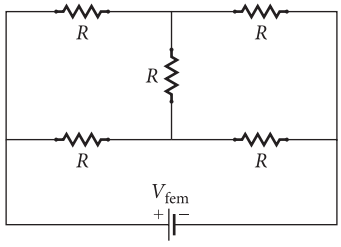
26.23 Dos resistores, R_1 y R_2, están conectados en serie a través de una diferencia de potencial, ΔV_0. Exprese la caída de potencial a través de cada resistor individualmente, en términos de estas cantidades. ¿Cuál es la importancia de este arreglo?

26.24 Una batería tiene $V_{fem} = 12.0$ V y resistencia interna $r = 1.00\ \Omega$. ¿Qué resistencia, R, puede colocarse a través de la batería para extraer 10.0 W de potencia de ésta?

26.25 A través de una batería están conectados tres resistores, como muestra la figura. ¿Qué valores de R y V_{fem} producen las corrientes indicadas?



•**26.26** Encuentre la resistencia equivalente para el circuito en la figura.

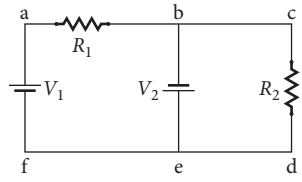


•**26.27** La batería descargada de un automóvil proporciona una diferencia de potencial de 9.950 V y tiene una resistencia interna de 1.100 Ω. Esta batería se carga con la batería cargada de otro automóvil. Esta última proporciona una diferencia de potencial de 12.00 V y tiene una resistencia interna de 0.0100 Ω, y la resistencia del arrancador es 0.0700 Ω.

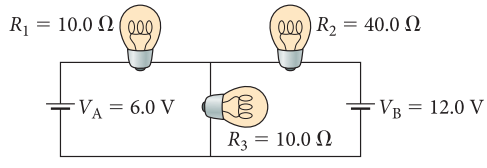
a) Dibuje el diagrama de circuito para las baterías conectadas.

b) Determine la corriente en la batería en buen estado, en la batería descargada y en el arrancador, inmediatamente después de que cierra el circuito.

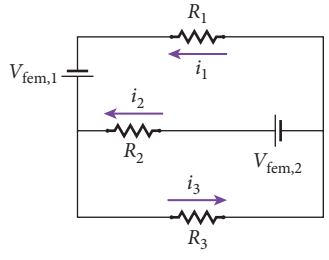
•**26.28** En el circuito que ilustra la figura, $V_1 = 1.5$ V, $V_2 = 2.5$ V, $R_1 = 4.0\ \Omega$ y $R_2 = 5.0\ \Omega$. ¿Cuál es la magnitud de la corriente, i_1, que fluye a través del resistor R_1?



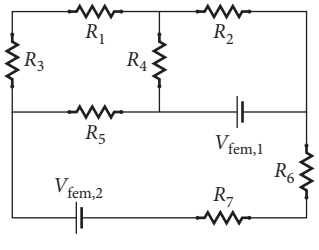
•**26.29** El circuito que se muestra en la figura consta de dos baterías con V_A y V_B y tres bombillas con resistencias R_1, R_2 y R_3. Calcule las magnitudes de las corrientes i_1, i_2 e i_3 que circulan por las bombillas. Indique las direcciones correctas del flujo de corriente en el diagrama. Calcule las potencias, P_A y P_B, suministradas por las baterías A y B.



•**26.30** En el circuito que muestra la figura, $R_1 = 5.0\ \Omega$, $R_2 = 10.0\ \Omega$, y $R_3 = 15.0\ \Omega$, $V_{fem,1} = 10.0$ V, y $V_{fem,2} = 15.0$ V. Use las leyes de la corriente y de voltaje de Kirchhoff para determinar las corrientes i_1, i_2 e i_3 que fluyen a través de R_1, R_2 y R_3, respectivamente, en la dirección indicada en la figura.

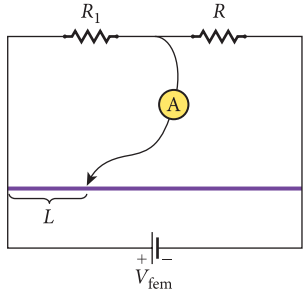


•**26.31** Para el circuito que se muestra en la figura, encuentre la magnitud y la dirección de la corriente a través de cada resistor y la potencia suministrada por cada batería, usando los siguientes valores: $R_1 =$

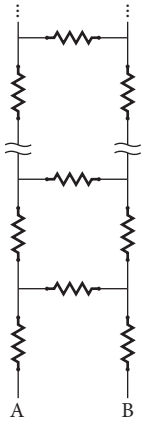


$4.00\,\Omega, R_2 = 6.00\,\Omega, R_3 = 8.00\,\Omega, R_4 = 6.00\,\Omega, R_5 = 5.00\,\Omega, R_6 = 10.0\,\Omega$, $R_7 = 3.0\ \Omega$, $V_{\text{fem},1} = 6.00$ V, y $V_{\text{fem},2} = 12.0$ V.

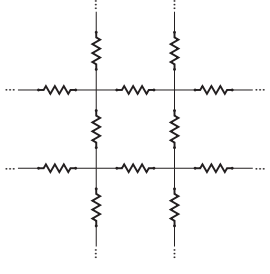
•**26.32** Se elabora un puente de Wheatstone usando un alambre de nicromo de 1.00 m de longitud (el morado en la figura) con un contacto conductor que puede deslizarse a lo largo del alambre. Un resistor, $R_1 = 100.\ \Omega$, se coloca en un lado del puente y otro resistor, R, de resistencia desconocida, se coloca en el otro lado. El contacto se desplaza a lo largo del alambre de nicromo y se encuentra que la lectura del amperímetro es cero para $L = 25.0$ cm. Si se sabe que el alambre tiene una sección transversal uniforme en toda su longitud, determine la resistencia desconocida.



••**26.33** Una "escalera resistiva" se construye con resistores idénticos, R, formando sus peldaños y descansos, como se muestra en la figura. La altura de la escalera es "infinita"; es decir, se extiende muy lejos en una dirección. Encuentre la resistencia equivalente de la escalera, medida entre sus "pies" (puntos A y B).

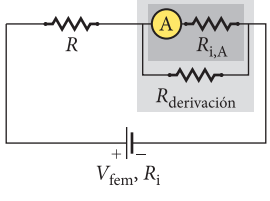


••**26.34** Considere una malla cuadrada "infinita"; es decir, muy grande, de resistores idénticos, R, como ilustra la figura. Encuentre la resistencia equivalente de la malla, según se mide a través de cualquier resistor individual. (*Sugerencia*: Para resolver este problema, son de mucha ayuda la simetría y la superposición.)

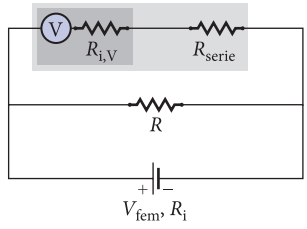


Sección 26.4

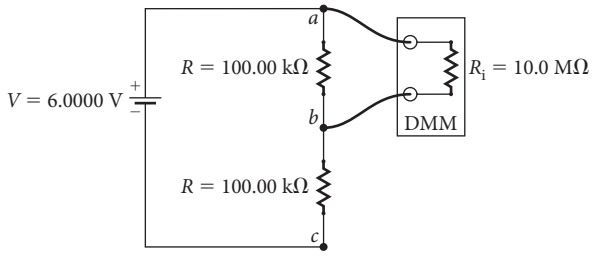
26.35 Para extender el rango útil de un amperímetro, un resistor de derivación, $R_{\text{derivación}}$, se conecta en paralelo con el amperímetro como muestra la figura. Si la resistencia interna del amperímetro es $R_{\text{i,A}}$, determine la resistencia que debe tener el resistor de derivación para extender el rango útil del amperímetro por un factor N. Luego, calcule la resistencia que debe tener el resistor de derivación para permitir que un amperímetro con resistencia interna de $1.00\ \Omega$ y rango máximo de 1.00 A mida corrientes hasta de 100. A. ¿Qué fracción de la corriente total de 100. A fluye por el amperímetro, y qué fracción lo hace por el resistor de derivación?



26.36 Para extender el rango útil de un voltímetro, un resistor, R_{serie}, se conecta en serie con el voltímetro como se muestra en la figura. Si la resistencia interna del voltímetro es $R_{\text{i,V}}$, determine la resistencia que debe tener el resistor en serie para extender el rango útil del voltímetro por un factor N. Luego, calcule la resistencia que debe tener el resistor en serie para permitir que un voltímetro con resistencia interna de $1.00\ \text{M}\Omega$ ($10^6\ \Omega$) y rango máximo de 1.00 V mida diferencias de potencial hasta de 100. V. ¿Qué fracción de la caída de potencial total de 100. V ocurre a través del voltímetro, y qué fracción de la caída de potencial ocurre a través del resistor en serie agregado?



26.37 Como se muestra en la figura, una batería de 6.0000 V se usa para producir una corriente a través de dos resistores idénticos, R, cada uno de los cuales tiene una resistencia de $100.00\ \text{k}\Omega$. Un multímetro digital (DMM) se usa para medir la diferencia de potencial a través del primer resistor. Los DMM suelen tener una resistencia interna de $10.0\ \text{M}\Omega$. Determine las diferencias de potencial V_{ab} (la diferencia de potencial entre los puntos a y b, que es la diferencia que mide el DMM) y V_{bc} (la diferencia de potencial entre los puntos b y c, que es la diferencia a través del segundo resistor). Nominalmente, $V_{ab} = V_{bc}$, aunque puede que esto no ocurra aquí. ¿Cómo es posible reducir este error de medición?



26.38 Se desea hacer un óhmetro para medir la resistencia de resistores desconocidos. Se cuenta con una batería con voltaje $V_{\text{fem}} = 9.00$ V, un resistor variable, R, y un amperímetro que mide corriente en una escala lineal de 0 a 10.0 mA.

a) ¿Qué resistencia debe tener el resistor variable para que el amperímetro proporcione su lectura a escala completa (máxima) cuando el óhmetro está en corto?

b) Use la resistencia en el inciso *a*) para encontrar la resistencia desconocida si la lectura del óhmetro es $\frac{1}{4}$ de su lectura a escala completa.

•**26.39** Un circuito consta de dos resistores de $1.00\ \text{k}\Omega$ en serie, con una batería ideal de 12.0 V.

a) Calcule la corriente que fluye por cada resistor.

b) Un estudiante que trata de medir la corriente que fluye por uno de los resistores, inadvertidamente conecta un amperímetro en paralelo con ese resistor, en lugar de conectarlo en serie. ¿Cuánta corriente fluye por el amperímetro, suponiendo que su resistencia interna es de $1.0\ \Omega$?

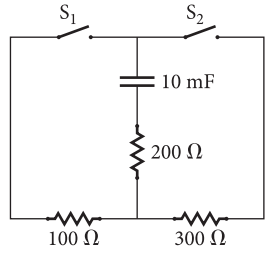
•**26.40** Un circuito consta de dos resistores de $100.\ \text{k}\Omega$ en serie, con una batería ideal de 12.0 V.

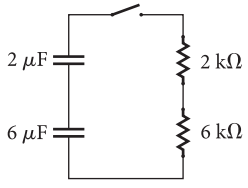
a) Calcule la diferencia de potencial a través de uno de los resistores.

b) Un voltímetro con resistencia interna de 10.0 MΩ se conecta en paralelo con uno de los dos resistores para medir la caída de potencial a través del resistor. ¿Por qué porcentaje se desviará la lectura del voltímetro del valor que usted determinó en el inciso *a*)? (*Sugerencia*: La diferencia es más bien pequeña, de modo que resulta útil resolver algebraicamente primero para evitar el error por redondeo.)

Sección 26.5

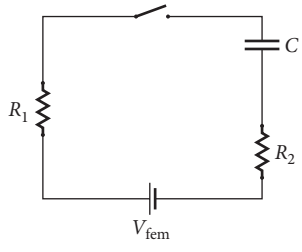
26.41 Inicialmente, los interruptores S_1 y S_2 en el circuito en la figura están abiertos y el capacitor tiene una carga de 100. mC. ¿Aproximadamente, cuánto tiempo se requiere después de que se cierra el interruptor S_1 para que la carga sobre el capacitor caiga a 5.00 mC?





26.42 ¿Cuál es la constante de tiempo para descargar los capacitores en el circuito que muestra la figura? Si el capacitor de 2.00 μF al principio tiene una diferencia de potencial de 10.0 V a través de sus placas, ¿cuánta carga queda en éste después de que se cierra el interruptor durante un tiempo igual a la mitad de la constante de tiempo?

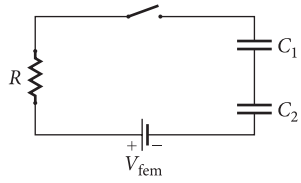
26.43 El circuito que ilustra la figura tiene un interruptor S, dos resistores, $R_1 = 1.00\ \Omega$ y $R_2 = 2.00\ \Omega$, una batería de 12 V y un capacitor con C = 20.0 μF. Después de que se cierra el interruptor, ¿cuál es la carga máxima sobre el capacitor? ¿Después de cuánto tiempo, luego de que se cierra el interruptor, el capacitor tendrá una carga de 50.0% de su carga máxima?



26.44 En la película *Volver al futuro* (*Back to the Future*), viajar en el tiempo es posible gracias a un capacitor de flujo que genera 1.21 GW de potencia. Suponiendo que un capacitor de 1.00 F se carga a su máxima capacidad con una batería de automóvil de 12.0 V y luego se descarga a través de un resistor, ¿qué resistencia se requiere para producir un pico de potencia de salida de 1.21 GW en el resistor? ¿Cuánto tiempo se requiere para que la batería de automóvil de 12.0 V cargue el capacitor a 90% de su capacidad máxima a través de este resistor?

26.45 Durante una exposición de física, un capacitor de 90.0 μF cargado por completo se descarga a través de un resistor de 60.0 Ω ¿Cuánto tiempo se requiere para que el capacitor pierda el 80.0% de su energía inicial?

•**26.46** Dos capacitores de placas paralelas, C_1 y C_2, se conectan en serie con una batería de 60.0 V y un resistor de 300. kΩ como se muestra en la figura. Ambos capacitores tienen placas de 2.00 cm^2 de área y una separación de 0.100 mm. El capacitor C_1 tiene aire entre sus placas y el capacitor C_2 tiene el espacio entre sus placas lleno con cierta porcelana (constante dieléctrica de 7.00 y resistencia dieléctrica de 5.70 kV/mm). El interruptor está cerrado y transcurre bastante tiempo.



a) ¿Cuál es la carga sobre el capacitor C_1?

b) ¿Cuál es la carga sobre el capacitor C_2?

c) ¿Cuál es la carga total almacenada en los dos capacitores?

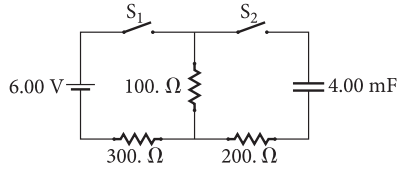
d) ¿Cuál es el campo eléctrico dentro del capacitor C_2?

•**26.47** Un capacitor de placas paralelas con $C = 0.050\ \mu F$ tiene una separación entre sus placas de $d = 50.0\ \mu m$. El dieléctrico que llena el espacio entre las placas tiene una constante dieléctrica $\kappa = 2.5$ y resistividad $\rho = 4.0 \cdot 10^{12}\ \Omega$ m. ¿Cuál es la constante de tiempo de este capacitor? (*Sugerencia*: Primero calcule el área de la placas para C y κ, dados y luego determine la resistencia del dieléctrico entre las placas.)

•**26.48** Una batería de 12.0 V está conectada a un capacitor de 2.00 mF y un resistor de 100. Ω. Una vez que el capacitor está cargado por completo, ¿cuál es la energía almacenada en él? ¿Cuál es la energía disipada como calor por el resistor cuando el capacitor se está cargando?

•**26.49** Un banco de capacitores se diseña para descargar 5.0 J de energía a través de un arreglo de resistores de 10.0 kΩ en menos de 2.0 ms. ¿Hasta qué diferencia de potencial debe cargarse el banco, y cuál debe ser su capacitancia?

•**26.50** El circuito en la figura tiene un capacitor conectado a una batería, dos interruptores y tres resistores. Al principio, el capacitor está descargado y los dos interruptores están abiertos.



a) El interruptor S_1 está cerrado. ¿Cuál es la corriente que fluye fuera de la batería inmediatamente después de que se cierra el interruptor S_1?

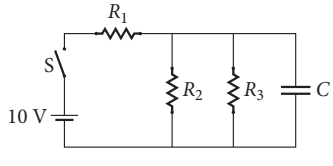
b) Luego de aproximadamente 10.0 minutos, el interruptor S_2 se cierra. ¿Cuál es la corriente que fluye fuera de la batería inmediatamente después de que se cierra el interruptor S_2?

c) ¿Cuál es la corriente que fluye fuera de la batería aproximadamente 10 minutos después de que se cierra el interruptor S_2?

d) Al cabo de otros 10.0 minutos se abre el interruptor S_1. ¿Cuánto tiempo es necesario hasta que la corriente en el resistor de 200. Ω sea menor que 1.00 mA?

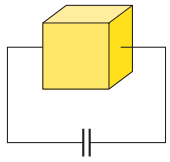
•**26.51** En el circuito que ilustra la figura, $R_1 = 10.0\ \Omega$, $R_2 = 4.00\ \Omega$, y $R_3 = 10\ \Omega$, y el capacitor tiene una capacitancia $C = 2.00\ \mu F$.

a) Determine la diferencia de potencial, ΔV_C, a través del capacitor después de que el interruptor S ha permanecido cerrado durante mucho tiempo.



b) Determine la energía almacenada en el capacitor cuando el interruptor S ha permanecido cerrado durante mucho tiempo.

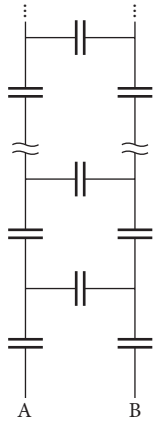
c) Después de que se abre el interruptor S, ¿cuánta energía se disipa a través de R_3?



••26.52 Un cubo de oro que mide 2.5 mm de arista está conectado a las terminales de un capacitor de 15 μF que inicialmente tiene una diferencia de potencial de 100.0 V entre sus placas.

a) ¿Cuánto tiempo se requiere para descargar por completo el capacitor?

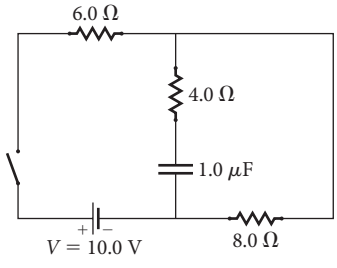
b) Cuando el capacitor está descargado por completo, ¿cuál es la temperatura del cubo de oro?



••26.53 Una "escalera capacitiva" se construye con capacitores idénticos, *C*, formando sus peldaños y descansos, como se muestra en la figura. La altura de la escalera es "infinita"; es decir, se extiende muy lejos en una dirección. Encuentre la capacitancia equivalente de la escalera, medida entre sus "pies" (puntos A y B).

Problemas adicionales

26.54 En el circuito en la figura, los capacitores están descargados por completo. Luego, el interruptor se cierra durante mucho tiempo.



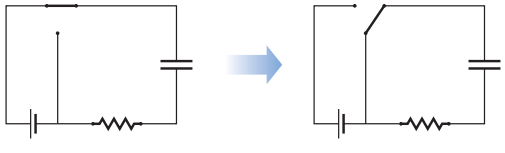
a) Calcule la corriente a través del resistor de 4.0 Ω.

b) Encuentre la diferencia de potencial a través de los resistores de 4.0 Ω, 6.0 Ω, y 8.0 Ω.

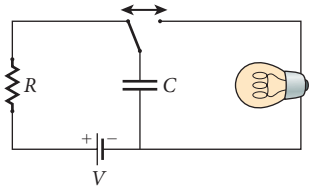
c) Encuentre la diferencia de potencial a través del capacitor de 1.0 μF.

26.55 El amperímetro que su instructor usa para demostraciones en el aula tiene una resistencia interna $R_i = 75\ \Omega$ y mide una corriente máxima de 1.5 mA. El mismo amperímetro puede usarse para medir corrientes de magnitudes mucho mayores al conectar un resistor de derivación de resistencia relativamente pequeña, $R_{\text{derivación}}$, en paralelo con el amperímetro. *a*) Esboce el diagrama de circuito y explique por qué el resistor de derivación conectado en paralelo con el amperímetro permite medir grandes corrientes. *b*) Calcule la resistencia que debe tener el resistor de derivación para permitir que el amperímetro mida una corriente máxima de 15 A.

26.56 Muchos aparatos electrónicos pueden ser peligrosos aún después de que se han apagado. Considere un circuito RC con un capacitor de 150. μF y un resistor de 1 MΩ conectados a una fuente de alimentación de 200. V durante mucho tiempo, que luego se desconecta y corta, como muestra la figura. ¿Cuánto tiempo transcurre hasta que la diferencia de potencial a través del capacitor cae por debajo de 50.0 V?

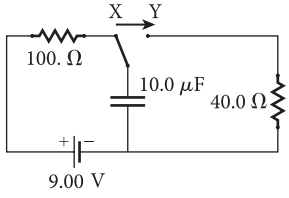


26.57 Diseñe un circuito como el de la figura para operar una luz estroboscópica. El capacitor descarga potencia a través del filamento de la bombilla (resistencia de 2.5 kΩ) en 0.20 ms y carga a través de un resistor *R*, con ciclo de repetición de 1 000 Hz. ¿Qué capacitor y resistor deben usarse?



26.58 Un amperímetro con resistencia interna de 53 Ω mide una corriente de 5.25 mA en un circuito que consta de una batería y una resistencia total de 1 130 Ω. La inserción del amperímetro altera la resistencia del circuito, de modo que la medición no proporciona el valor verdadero de la corriente en el circuito sin el amperímetro. Determine el valor verdadero de la corriente.

•26.59 En el circuito que ilustra la figura, un capacitor de 10.0 μF se carga por medio de una batería de 9.00 V con el interruptor de dos direcciones mantenido en la posición X durante mucho tiempo. Luego, el interruptor se mueve a la posición Y. ¿Qué corriente fluye a través del resistor de 40.0 Ω



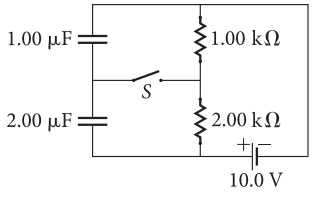
a) inmediatamente después de que el interruptor se mueve a la posición Y?

b) 1.00 ms después de que el interruptor se mueve a la posición Y?

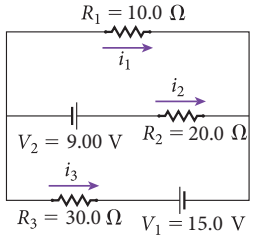
•26.60 ¿En cuánto tiempo la corriente en un circuito cae de su valor inicial a 1.50 mA si el circuito contiene dos capacitores de 3.8 μF que inicialmente están descargados, dos resistores de 2.2 kΩ y una batería de 12.0 V, todos conectados en serie?

26.61 La constante de tiempo de un circuito RC es 3.1 s. El proceso de carga del capacitor comienza en $t = 0$. ¿En qué instante la energía almacenada en el capacitor alcanza la mitad de su valor máximo?

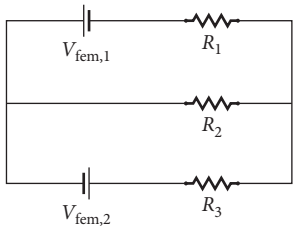
•26.62 Para el circuito de la figura, determine la carga sobre cada capacitor cuando *a*) el interruptor S ha permanecido cerrado durante mucho tiempo y *b*) el interruptor S ha permanecido abierto durante mucho tiempo.



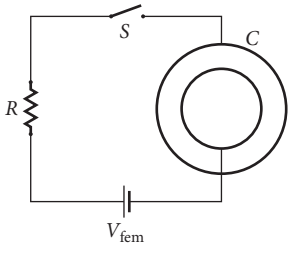
•26.63 Tres resistores, $R_1 = 10.0\ \Omega$, $R_2 = 20.0\ \Omega$ y $R_3 = 30.0\ \Omega$, están conectados en un circuito multiloop, como muestra la figura. Determine la cantidad de potencia disipada en los tres resistores.



•**26.64** La figura presenta un circuito que contiene dos baterías y tres resistores. Las baterías suministran $V_{fem,1} = 12.0$ V y $V_{fem,2} = 16.0$ V y no tienen resistencia interna. Los resistores tienen resistencias de $R_1 = 30.0\ \Omega$, $R_2 = 40.0\ \Omega$, y $R_3 = 20.0\ \Omega$. Encuentre la magnitud de la caída de potencial a través de R_2.



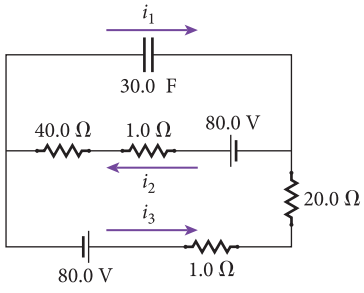
26.65 La figura ilustra un capacitor esférico. La esfera interior tiene un radio $a = 1.00$ cm, y la esfera exterior tiene un radio $b = 1.10$ cm. La batería tiene $V_{fem} = 10.0$ V y el resistor tiene un valor de $R = 10.0\ M\Omega$.



a) Determine la constante de tiempo del circuito RC.

b) Determine cuánta carga se ha acumulado sobre el capacitor después de que el interruptor S se cierra durante 0.1 ms.

•**26.66** Escriba el conjunto de ecuaciones que determinan las tres corrientes en el circuito mostrado en la figura. (Suponga que inicialmente el capacitor está descargado.)



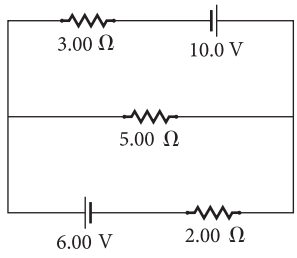
•**26.67** Considere un circuito RC en serie con $R = 10.0\ \Omega$, $C = 10.0\ \mu F$ y $V = 10.0$ V.

a) ¿En cuánto tiempo, expresado como un múltiplo de la constante de tiempo, el capacitor se carga hasta la mitad de su valor máximo?

b) En ese instante, ¿cuál es la razón de la energía almacenada en el capacitor hasta su máximo valor posible?

c) Ahora suponga que el capacitor está cargado por completo. En el instante $t = 0$, el circuito original se abre y se deja que el capacitor descargue a través de otro resistor, $R' = 1.00\ \Omega$, que está conectado a través del capacitor. ¿Cuál es la constante de tiempo para la descarga del capacitor?

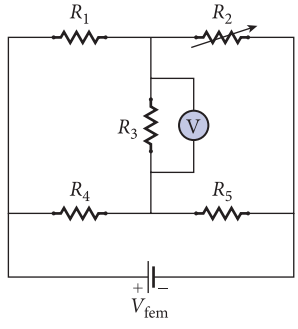
d) ¿En cuántos segundos se descarga el capacitor hasta la mitad de su máxima carga almacenada, Q?

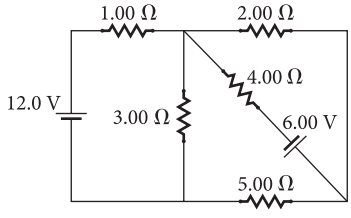


•**26.68** *a*) ¿Cuál es la corriente en el resistor de 5.00 Ω en el circuito que presenta la figura?

b) ¿Cuál es la potencia disipada en el resistor de 5.00 Ω?

•**26.69** En el puente de Wheatstone, ilustrado en la figura, las resistencias conocidas son $R_1 = 8.00\ \Omega$, $R_4 = 2.00\ \Omega$, y $R_5 = 6.00\ \Omega$, y la batería tiene $V_{fem} = 15.0$ V. La resistencia variable R_2 se ajusta hasta que la diferencia de potencial a través de R_3 es cero ($V = 0$). Encuentre i_2 (la corriente que pasa por el resistor R_2) en este punto.



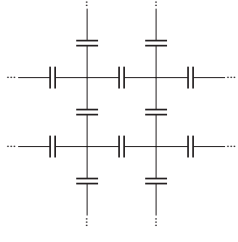


••**26.70** Considere el circuito con cinco resistores y dos baterías (sin resistencia interna) que se muestra en la figura.

a) Escriba un conjunto de ecuaciones que permita obtener la corriente en cada uno de los resistores.

b) En las ecuaciones del inciso *a*), obtenga la corriente que pasa por el resistor de 4.00 Ω.

••**26.71** Considere una malla cuadrada "infinita"; es decir, muy grande, de capacitores idénticos, C, como ilustra la figura. Encuentre la capacitancia equivalente de la malla, según se mide a través de cualquier capacitor individual.



PARTE 6 MAGNETISMO

27 Magnetismo

LO QUE APRENDEREMOS 865

27.1 Imanes permanentes 865
- Líneas de campo magnético 866
- Campo magnético de la Tierra 866
- Superposición de campos magnéticos 868

27.2 Fuerza magnética 868
- Fuerza magnética y trabajo 868
- Unidades de intensidad del campo magnético 869
- **Problema resuelto 27.1** Tubo de rayos catódicos 869

27.3 Movimiento de partículas cargadas en un campo magnético 871
- Trayectorias de partículas cargadas en movimiento en un campo magnético constante 871
- Cámara de proyección de tiempo 872
- **Ejemplo 27.1** Cantidad de movimiento transversal de una partícula en la TPC 872
- **Ejemplo 27.2** El viento solar y el campo magnético de la Tierra 873
- Frecuencia de un ciclotrón 874
- **Ejemplo 27.3** Energía de un ciclotrón 874
- Espectrómetro de masas 875
- **Problema resuelto 27.2** Selector de velocidades 876
- Levitación magnética 877

27.4 Fuerza magnética sobre un alambre conductor de corriente 878
- **Ejemplo 27.4** Fuerza sobre la bobina de voz de un altavoz 879

27.5 Momento de torsión sobre un bucle conductor de corriente 880

27.6 Momento dipolar magnético 881

27.7 Efecto Hall 881
- **Ejemplo 27.5** Efecto Hall 882

LO QUE HEMOS APRENDIDO/ GUÍA DE ESTUDIO PARA EXAMEN 883
- Práctica para resolución de problemas 884
- **Problema resuelto 27.3** Momento de torsión sobre un bucle conductor de corriente 884
- Preguntas de opción múltiple 885
- Preguntas 886
- Problemas 887

FIGURA 27.1 Gases calientes ionizados se desplazan a través de líneas de un campo magnético cerca de la superficie del Sol, formando arcos coronales. La imagen superpuesta de la Tierra está a escala correcta para dar una idea del tamaño de estos arcos coronales.

LO QUE APRENDEREMOS

- Los imanes permanentes existen en la naturaleza. Un imán siempre tiene un polo norte y un polo sur. Un único polo norte o polo sur magnético no puede existir aislado: los polos magnéticos siempre se presentan por pares.
- Polos opuestos se atraen, y polos iguales se repelen.
- Al romper a la mitad un imán de barra, se obtienen dos nuevos imanes, cada uno con un polo norte y un polo sur.
- Un campo magnético ejerce una fuerza sobre una partícula cargada en movimiento.
- La Tierra posee un campo magnético.
- La fuerza ejercida sobre una partícula cargada en movimiento en un campo magnético es perpendicular tanto al campo magnético como a la velocidad de la partícula.
- El momento de torsión sobre un bucle conductor de corriente puede expresarse en términos del producto vectorial del momento dipolar magnético del bucle y el campo magnético.
- El efecto Hall se usa para medir campos magnéticos.

Este capítulo es el primero que aborda el magnetismo, al describir campos magnéticos y fuerzas magnéticas y sus efectos sobre partículas cargadas y corrientes. Los campos magnéticos pueden ser enormes y poderosos, como muestra la imagen de la superficie del Sol en la figura 27.1. El Sol posee campos magnéticos enormes, y gases calientes que hacen erupción periódicamente en su superficie tienden a seguir las líneas de campo a medida que ascienden, formando arcos y bucles mucho más grandes que la Tierra. Los astrónomos creen que todas las estrellas tienen poderosos campos magnéticos, lo cual hace del magnetismo uno de los fenómenos más comunes e importantes del universo.

En los siguientes capítulos continuaremos estudiando el magnetismo, describiremos las causas de los campos magnéticos y su relación con los campos eléctricos. Verá que la electricidad y el magnetismo son en realidad partes de la misma fuerza universal, denominada fuerza electromagnética; su relación es uno de los eventos más importantes en la teoría de la física.

27.1 Imanes permanentes

En una región de Magnesia (en Grecia central), los antiguos griegos encontraron en la naturaleza varios tipos de minerales existentes que se atraen y repelen entre sí, y atraen ciertos tipos de metales, como hierro. También, si flotan libres, se alinean con los polos norte y sur de la Tierra. Estos minerales constituyen varias formas del óxido de hierro y se denominan **imanes permanentes**. Otros ejemplos de imanes permanentes son los que se adhieren a los refrigeradores y los pestillos de puertas magnéticas, que están hechos de compuestos de hierro, níquel o cobalto. Si usted pone en contacto una barra de hierro con una pieza del mineral piedra imán (magnetita magnética), la barra de hierro se magnetiza. Si deja flotar esta barra en agua, se alinea con los polos magnéticos de la Tierra. El extremo del imán que apunta hacia el polo norte se denomina **polo norte magnético** y el otro extremo, **polo sur magnético**.

Si dos imanes permanentes se aproximan entre sí de modo que los polos norte o los polos sur casi se toquen, los imanes se repelen mutuamente (figura 27.2*a*). Si un polo norte y un polo sur se acercan entre sí, los imanes se atraen mutuamente (figura 27.2*b*). Lo que se denomina polo norte terrestre es en realidad un polo sur magnético, por lo cual atrae al polo norte de los imanes permanentes.

Romper a la mitad un imán permanente no produce un polo norte y un polo sur. En lugar de ello, se obtienen dos imanes nuevos, cada uno con un polo norte y un polo sur (figura 27.3). A diferencia de la carga eléctrica, que existe como carga positiva (protones) y carga negativa (electrones), no existen monopolos magnéticos por separado (polos norte y sur aislados). Los científicos han buscado bastante monopolos magnéticos, pero sin éxito. El análisis de la fuente del magnetismo en este capítulo le ayudará a entender por qué no hay monopolos magnéticos.

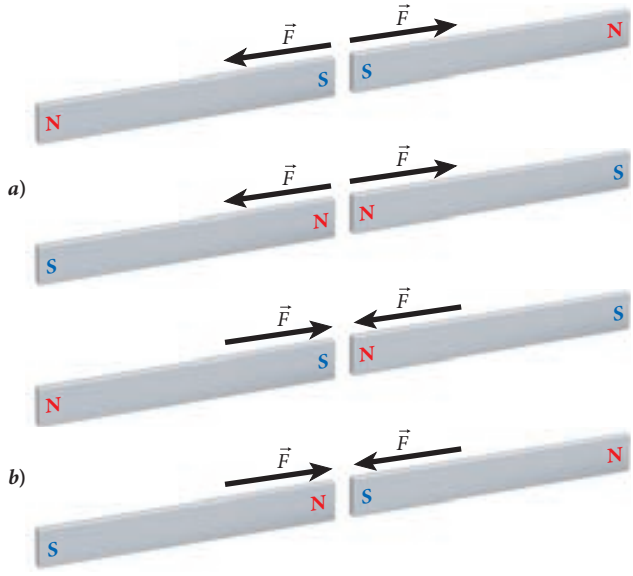


FIGURA 27.2 *a*) Polos magnéticos iguales se repelen; *b*) polos magnéticos diferentes se atraen.

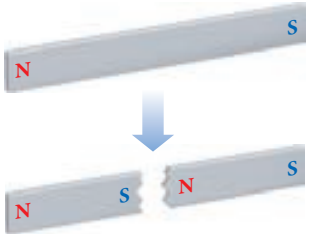


FIGURA 27.3 Cuando una barra imantada se rompe en dos partes, se obtienen dos imanes, cada uno con sus propios polo norte y polo sur.

Líneas de campo magnético

Los imanes permanentes interactúan entre sí a cierta distancia sin entrar en contacto. En analogía con el campo gravitacional y el campo eléctrico, el concepto de **campo magnético** se usa para describir la fuerza magnética. El vector $\vec{B}(\vec{r})$ denota el vector de campo magnético en cualquier punto en el espacio.

Como un campo eléctrico, un campo magnético se representa mediante líneas de campo. El vector de campo magnético siempre es tangente a las **líneas de campo magnético**. Las líneas de campo magnético de una barra imantada permanente se muestran en la figura 27.4*a*). Así como ocurre con las líneas de campo eléctrico, un menor espacio entre ellas indica mayor intensidad de campo. En un campo eléctrico, la fuerza eléctrica sobre una carga de prueba positiva apunta en la misma dirección que el vector de campo eléctrico. No obstante, debido a que no existen monopolos magnéticos, la fuerza magnética no puede describirse en forma análoga.

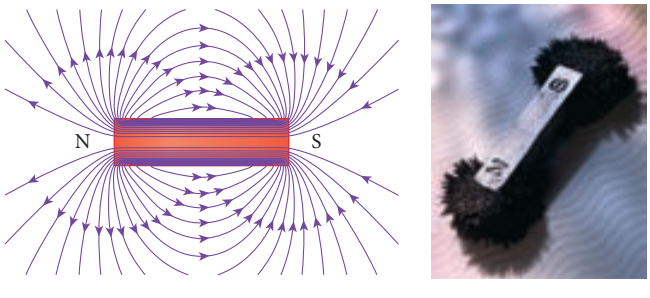
La dirección del campo magnético se establece en términos de la dirección en que apunta la aguja de una brújula. La aguja de una brújula, con un polo norte y un polo sur, se orienta a sí misma de modo que su polo norte apunta en la dirección del polo magnético. Por lo tanto, la dirección del campo puede determinarse en cualquier punto al observar la dirección en que apunta una aguja de una brújula colocada en ese sitio, como ilustra la figura 27.5 para una barra imantada.

Externamente, parece que las líneas de campo magnético se originan en polos norte y terminan en polos sur, aunque estas líneas de campo son en realidad bucles cerrados que penetran el imán mismo. Esta formación de bucles constituye una diferencia importante entre las líneas de campo eléctrico y las líneas de campo magnético (para campos estáticos, esta afirmación no es válida para campos independientes del tiempo, como veremos en capítulos subsecuentes). Recuerde que las líneas de campo eléctrico empiezan en cargas positivas y terminan en cargas negativas. No obstante, debido a que los monopolos magnéticos no existen, las líneas de campo magnético no pueden empezar o terminar en puntos particulares. En lugar de eso, forman bucles cerrados que no empiezan o terminan en cualquier sitio. Más tarde veremos que esta diferencia es importante para describir la interacción de los campos eléctrico y magnético. Si usted observa un patrón de campo y no sabe en primera instancia si se trata de un campo eléctrico o uno magnético, revise los bucles cerrados. Si encuentra alguno, se trata de un campo magnético; si las líneas de campo no forman bucles, se trata de un campo eléctrico.

Campo magnético de la Tierra

La Tierra misma es un imán, con un campo magnético semejante al campo magnético de una barra imantada (figura 27.4). Este campo magnético es importante porque nos protege de radiaciones de alta energía provenientes del espacio, denominadas *rayos cósmicos*. Estos rayos cósmicos constan principalmente de partículas cargadas que se desvían de la superficie de la Tierra debido al campo magnético de ésta. Los polos del campo magnético de la Tierra no coinciden con los polos geográficos, definidos como los puntos en los que el eje de rotación de la Tierra corta su superficie.

La figura 27.6 muestra una sección transversal de las líneas del campo magnético de la Tierra. Las líneas del campo están próximas entre sí, formando una superficie que se envuelve alrededor



a) *b*)

FIGURA 27.4 *a*) Líneas de campo magnético generadas por computadora a partir de una barra imantada permanente. *b*) Limaduras de hierro se alinean con las líneas de campo magnético, haciéndolo visible.

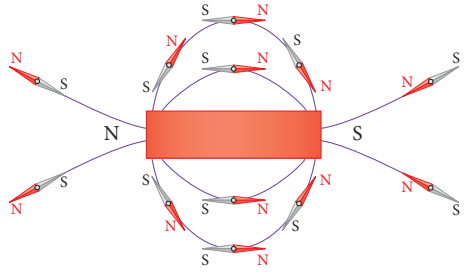


FIGURA 27.5 Uso de la aguja de una brújula para determinar la dirección del campo magnético a partir de una barra imantada.

de la Tierra como una rosquilla. El campo magnético de la Tierra es distorsionado por el viento solar, un flujo de partículas ionizadas, principalmente protones, emitido por el Sol y que se mueve hacia fuera de éste aproximadamente a 400 km/s. Alrededor de la Tierra hay dos bandas de partículas cargadas tomadas del viento solar. Estas bandas se denominan **cinturones de Van Allen** (figura 27.6), en honor de James A. Van Allen (1914-2006), quien los descubrió en los primeros días de los vuelos espaciales al colocar contadores de radiación en los satélites. La radiación de los cinturones de Van Allen se aproxima más a la Tierra cerca de los polos magnéticos norte y sur, donde las partículas cargadas atrapadas en los cinturones chocan con átomos en la atmósfera, excitándolos. Estos átomos excitados emiten luz de colores diferentes cuando chocan y pierden energía; el resultado son las magníficas **auroras boreales** (luces del norte) en las latitudes del norte (vea la figura 27.7) y las **auroras australes** (luces del sur) en las latitudes del sur. Las auroras no son exclusivas de la Tierra; se han visto en otros planetas con intensos campos magnéticos, como Júpiter y Saturno (mostradas en la figura 27.8).

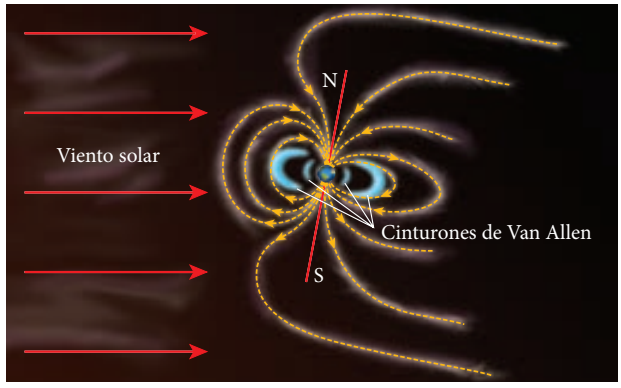


FIGURA 27.6 Sección transversal a través del campo magnético de la Tierra. Las líneas discontinuas representan las líneas de campo magnético. Los ejes definidos por los polos norte y sur magnéticos (línea roja) realmente forman un ángulo de aproximadamente 11° con el eje de rotación.

Los polos norte y sur magnéticos de la Tierra se mueven a una razón hasta de 40 km en un solo año. Justo ahora, el polo norte magnético está situado aproximadamente a 2 800 km del polo sur geográfico, en la orilla de la Antártida, y se desplaza hacia Australia. El polo sur magnético está situado en el ártico canadiense y si su razón de movimiento actual continúa, llegará a Siberia en 2050. El campo magnético de la Tierra ha disminuido en forma estable a razón aproximada de 7% por siglo desde que fue medido con precisión por primera vez alrededor de 1840. A ese ritmo, el campo magnético de la Tierra desaparecerá en unos cuantos miles de años. No obstante, algunas evidencias geológicas indican que el campo magnético de la Tierra se ha invertido con respecto a sí mismo aproximadamente 170 veces en los últimos 100 millones de años. La última inversión ocurrió hace aproximadamente 770 000 años. Así, en lugar de desaparecer, el campo magnético de la Tierra podría invertir su dirección. ¿Cuál es la causa del campo magnético de la Tierra? De manera sorprendente, la respuesta a esta pregunta no se conoce exactamente y es motivo de intensa investigación. Lo más probable es que sea provocado por fuertes corrientes eléctricas en el interior de la Tierra, originadas por el núcleo giratorio de hierro-níquel. Este movimiento rotacional a menudo se denomina *efecto dinamo*. (En el capítulo 28 veremos la forma en la que las corrientes crean campos magnéticos.)

FIGURA 27.7 Aurora boreal sobre Finlandia, fotografiada desde la Estación Espacial Internacional.

FIGURA 27.8 Aurora sobre Saturno, fotografiada por el Telescopio Espacial Hubble.

Debido a que el polo norte geográfico y el polo norte magnético no están en el mismo sitio, la aguja de una brújula en general no apunta hacia el polo norte geográfico. Esta diferencia se denomina **declinación magnética**, que se considera positiva cuando el norte magnético está al este del norte real y negativa cuando el norte magnético está al oeste del norte real. El polo norte magnético se encuentra actualmente sobre una línea que pasa por Missouri central, Illinois oriental, Iowa occidental y Wisconsin oriental. A lo largo de esta línea, la declinación magnética es cero.

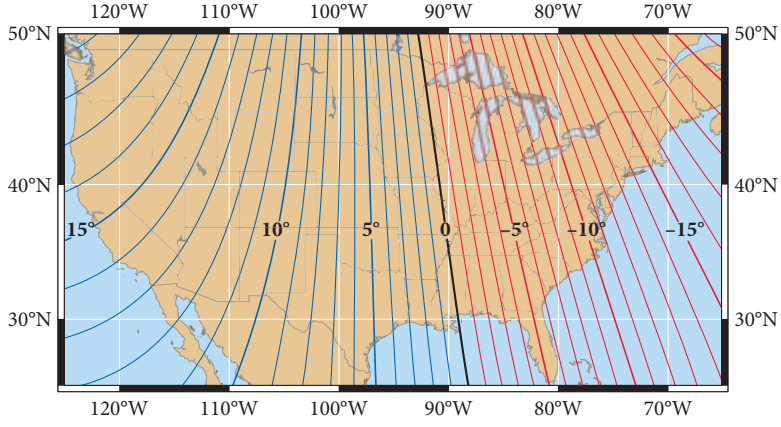


FIGURA 27.9 Declinaciones magnéticas en Estados Unidos en 2004, medidas en grados. Las líneas rojas representan declinaciones magnéticas negativas y las líneas azules significan declinaciones magnéticas positivas. La separación de las líneas de declinación magnética es de un grado.

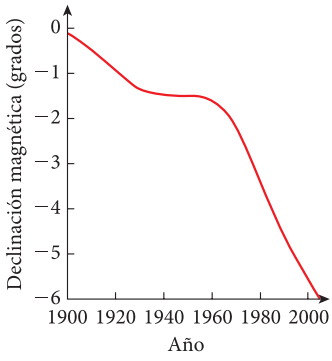


FIGURA 27.10 Declinación magnética en Lansing, Michigan, de 1900 a 2004.

Al oeste de esta línea, la declinación magnética es positiva y llega a 18° en Seattle. Al este de esta línea, la declinación es negativa, llegando hasta −18° en Maine. La figura 27.9 muestra un mapa con las declinaciones magnéticas en Estados Unidos hasta 2004.

Debido a que las posiciones de los polos magnéticos de la Tierra se mueven con el tiempo, las declinaciones magnéticas para todas las ubicaciones sobre la superficie terrestre también cambian con el tiempo. Por ejemplo, la figura 27.10 ilustra la declinación magnética para Lansing, Michigan, durante el periodo 1900-2004. Es posible trazar una gráfica semejante para cada punto de la Tierra.

Superposición de campos magnéticos

Si varias fuentes de campo magnético, como varios imanes permanentes, están próximas entre sí, el campo magnético en cualquier punto dado en el espacio está dado por la superposición de campos magnéticos de todas las fuentes. Esta superposición de los campos es igual a la superposición de fuerzas introducida en el capítulo 4. El principio de superposición establece que para el campo magnético total, $\vec{B}_{\text{total}}(\vec{r})$, debido a n fuentes de campo magnético, puede plantearse como

$$\vec{B}_{\text{total}}(\vec{r}) = \vec{B}_1(\vec{r}) + \vec{B}_1(\vec{r}) + \cdots + \vec{B}_n(\vec{r}). \tag{27.1}$$

Este principio de superposición para campos magnéticos es exactamente análogo al principio de superposición para campos eléctricos, presentado en el capítulo 22.

27.2 Fuerza magnética

FIGURA 27.11 Un haz de electrones (azul gris), hecho visible por una pequeña cantidad de gas en un tubo al vacío, es flexionado por un imán (en el lado derecho de la fotografía).

El análisis cualitativo en la sección precedente indicó que un campo magnético tiene una dirección a lo largo de las líneas del mismo. La magnitud de un campo magnético se determina al analizar su efecto sobre una partícula cargada en movimiento. Empezaremos con un campo magnético constante y estudiaremos su efecto en una sola carga. Como recordatorio, en el capítulo 22 vimos que el campo eléctrico ejerce una fuerza sobre una carga dada por $\vec{F}_E = q\vec{E}$. Experimentos como el de la figura 27.11 muestran que un campo magnético no ejerce una fuerza sobre una carga en reposo, sino sólo sobre una carga *en movimiento*.

Un campo magnético se define en términos de la fuerza ejercida por el campo sobre una partícula cargada en movimiento. La fuerza magnética ejercida por un campo magnético sobre una partícula cargada q que se mueve a velocidad $\vec{v}$ está dada por

$$\vec{F}_B = q\vec{v} \times \vec{B}. \tag{27.2}$$

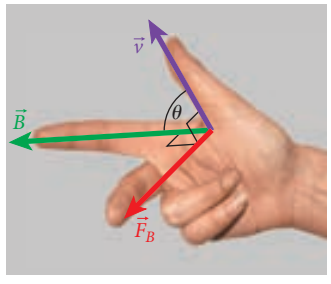


FIGURA 27.12 Regla de la mano derecha 1 para la fuerza ejercida por un campo magnético, $\vec{B}$, sobre una partícula con carga q que se desplaza a velocidad $\vec{v}$. Para encontrar la dirección de la fuerza magnética, apunte su pulgar en la dirección de la velocidad de la partícula cargada en movimiento y el índice en la dirección del campo magnético; así, el dedo medio proporciona la dirección de la fuerza magnética.

La dirección de la fuerza es perpendicular tanto a la velocidad de la partícula cargada en movimiento como al campo magnético (figura 27.12). Esta afirmación es la regla de la mano derecha 1. La regla de la mano derecha proporciona la dirección de la fuerza sobre una carga positiva dadas las direcciones de la velocidad y del campo conocidas. No obstante, para una carga negativa, la fuerza es en dirección opuesta.

La magnitud de la fuerza magnética sobre una partícula cargada en movimiento es

$$F_B = |q| vB \operatorname{sen}\theta, \tag{27.3}$$

donde θ es el ángulo entre la velocidad de la partícula cargada y el campo magnético. (El ángulo θ siempre está entre 0 y 180° y, en consecuencia, $\operatorname{sen}\theta \geq 0$.) Usted puede ver que ninguna fuerza magnética actúa sobre una partícula cargada que se mueve en dirección paralela a un campo magnético porque en ese caso $\theta = 0°$. Si una partícula cargada se mueve perpendicularmente al campo magnético, $\theta = 90°$ y (para valores fijos de v y B) la magnitud de la fuerza magnética tiene su valor máximo de

$$F_B = |q| vB \qquad \left(\text{para } \vec{v} \perp \vec{B}\right). \tag{27.4}$$

Fuerza magnética y trabajo

La ecuación 27.2 estableció que la fuerza magnética es el producto vectorial del vector velocidad y el vector campo magnético, de modo que es perpendicular a ambos vectores. Esto implica que $\vec{F}_B \bullet \vec{v} = 0$ y, puesto que la fuerza es el producto de la masa y la aceleración, también que $\vec{a} \bullet \vec{v} = 0$. En el capítulo 9 sobre movimiento circular, vimos que esta condición significa que la dirección del vector velocidad puede cambiar, pero que la magnitud del vector velocidad, la rapidez, permanece igual. En consecuencia, la energía cinética, $\frac{1}{2}mv^2$, permanece constante para una partícula sujeta a una fuerza magnética, y ésta *no realiza trabajo* sobre la partícula en movimiento.

Este resultado es crucial: un campo magnético constante no puede usarse para realizar trabajo sobre una partícula. La energía cinética de una partícula en movimiento en un campo magnético constante permanece constante, incluso si la dirección del vector velocidad de la partícula puede variar como una función del tiempo mientras la partícula se mueve a través del campo magnético. Un campo eléctrico, por otra parte, puede usarse fácilmente para realizar trabajo sobre una partícula.

Unidades de intensidad del campo magnético

Para analizar el movimiento de cargas en campos magnéticos, necesitamos conocer qué unidades se usan para medir la intensidad del campo magnético. Al despejar la intensidad del campo magnético en la ecuación 27.4 y escribir las unidades de las otras cantidades, se obtiene

$$[F_B]=[q][v][B]\Rightarrow[B]=\frac{[F_B]}{[q][v]}=\frac{\text{N s}}{\text{C m}}.$$

Debido a que un amperio (A) se define como 1 C/s, (N s)/(C m) = N/(A m). La unidad de intensidad del campo magnético se denomina **tesla** (T), en honor del físico e inventor estadounidense de origen croata Nikola Tesla (1856-1943):

$$1\ \text{T}=1\ \frac{\text{N s}}{\text{C m}}=1\ \frac{\text{N}}{\text{A m}}.$$

Una tesla es una cantidad más bien grande de intensidad de campo magnético. Algunas veces, la intensidad de un campo magnético se proporciona en gauss (G), que no es una unidad SI:

$$1\ \text{G}=10^{-4}\ \text{T}.$$

Por ejemplo, la intensidad del campo magnético en la superficie de la Tierra es del orden de 0.5 G ($5\cdot10^{-5}$ T). Varía con la ubicación desde 0.2 G hasta 0.6 G, como ilustra la figura 27.13.

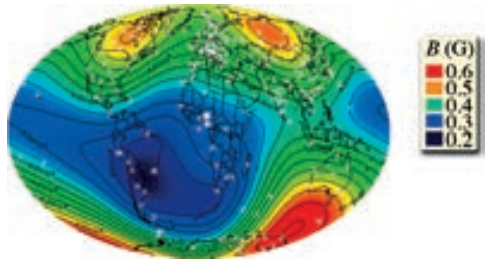


FIGURA 27.13 Mapa global de la intensidad del campo magnético de la Tierra.

PROBLEMA RESUELTO 27.1 Tubo de rayos catódicos

PROBLEMA

Considere un tubo de rayos catódicos semejante al que se muestra en la figura 27.11. En este tubo, una diferencia de potencial ΔV = 111 V acelera horizontalmente los electrones (que esencialmente parten del reposo) en un cañón de electrones, como muestra la figura 27.14*a*). El cañón de electrones tiene un filamento especialmente recubierto que emite electrones cuando está caliente. Un cátodo con carga negativa controla el número de electrones emitidos. Ánodos con carga positiva enfocan y aceleran los electrones en el haz. La corriente desde los ánodos es desviada por medio de placas horizontales y verticales. Más allá del cañón de electrones hay un campo magnético constante con magnitud $B = 3.40\cdot10^{-4}$ T. La dirección del campo magnético es hacia arriba, perpendicular a la velocidad inicial de los electrones. ¿Cuál es la magnitud de la aceleración de los electrones debido al campo magnético? (La masa de un electrón es $9.11\cdot10^{-31}$ kg.)

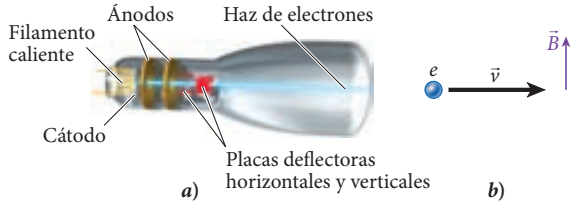


FIGURA 27.14 *a*) Tubo de rayos catódicos. *b*) Electrones en movimiento a velocidad $\vec{v}$ penetran en un campo magnético constante.

SOLUCIÓN

PIENSE

Los electrones adquieren energía cinética en el cañón de electrones del tubo de rayos catódicos. La ganancia de energía cinética de cada electrón es igual a la carga del electrón multiplicada por la diferencia de potencial. La velocidad de los electrones puede encontrarse a partir de la definición de energía cinética. La fuerza magnética de un electrón puede encontrarse a partir de la carga del electrón, su velocidad y la intensidad del campo magnético, y es igual a la masa del electrón multiplicada por su aceleración.

ESBOCE

La figura 27.14*b*) muestra un electrón, que se mueve a velocidad $\vec{v}$, y penetra en un campo magnético perpendicular a la trayectoria del electrón.

(*continúa*)

(*continuación*)

INVESTIGUE

El cambio en energía cinética, ΔK, de los electrones más el cambio en energía potencial de los electrones es igual a cero:

$$\Delta K + \Delta U = \tfrac{1}{2}mv^2 + q\Delta V = 0.$$

Puesto que, en este caso, $q = -e$, vemos que

$$e\Delta V = \tfrac{1}{2}mv^2, \tag{i}$$

donde ΔV es la magnitud de la diferencia de potencial a través de la cual fueron acelerados los electrones y m es la masa de un electrón. Podemos despejar la velocidad de los electrones en la ecuación (i):

$$v = \sqrt{\frac{2e\Delta V}{m}}. \tag{ii}$$

La magnitud de la fuerza ejercida por el campo magnético sobre los electrones está dada por la ecuación 27.3:

$$F_B = evB \operatorname{sen} 90° = evB,$$

donde $-e$ es la carga de un electrón y B es la magnitud del campo magnético. Según la segunda ley de Newton, $F_{\text{neta}} = ma$. Puesto que la única fuerza presente es la magnética, tenemos

$$F_B = ma = evB, \tag{iii}$$

donde a es la magnitud de la aceleración de los electrones.

SIMPLIFIQUE

Podemos reordenar la ecuación (iii) y sustituir la expresión para la velocidad de los electrones de la ecuación (ii) y obtener la aceleración de los electrones:

$$a = \frac{evB}{m} = \frac{eB\sqrt{\dfrac{2e\Delta V}{m}}}{m} = B\sqrt{2\Delta V\frac{e^3}{m^3}}.$$

CALCULE

Al escribir los valores numéricos, obtenemos:

$$a = \left(3.40\cdot10^{-4}\ \text{T}\right)\sqrt{2(111\ \text{V})\frac{\left(1.602\cdot10^{-19}\ \text{C}\right)^3}{\left(9.11\cdot10^{-31}\ \text{kg}\right)^3}} = 3.7357\cdot10^{14}\ \text{m/s}^2.$$

REDONDEE

Mostramos nuestro resultado con tres cifras:

$$a = 3.74\cdot10^{14}\ \text{m/s}^2.$$

VUELVA A REVISAR

La aceleración calculada es tremendamente grande; casi 40 millones de millones (4×10^{14}) de veces la aceleración gravitacional de la Tierra. Con estas cifras, por supuesto que deseamos revisar de nuevo. Primero calculamos la aceleración de los electrones:

$$v = \sqrt{\frac{2e\Delta V}{m}} = \sqrt{\frac{2\left(1.602\cdot10^{-19}\ \text{C}\right)(111\ \text{V})}{9.11\cdot10^{-31}\ \text{kg}}} = 6.25\cdot10^{6}\ \text{m/s}.$$

Una velocidad de 6 250 km/s puede parecer grande, pero es razonable para los electrones porque sólo es 2% de la velocidad de la luz. Entonces, la fuerza magnética sobre cada electrón es

$$F_B = evB = \left(1.602\cdot10^{-19}\ \text{C}\right)\left(6.25\cdot10^{6}\ \text{m/s}\right)\left(3.40\cdot10^{-4}\ \text{T}\right) = 3.40\cdot10^{-16}\ \text{N}.$$

La aceleración es muy grande debido a que la masa de un electrón es muy pequeña.

27.1 Ejercicio en clase

¿En qué dirección se desvía el electrón en la figura 27.14*b*) cuando entra en contacto con el campo magnético constante?

a) Hacia dentro de la página.

b) Hacia fuera de la página.

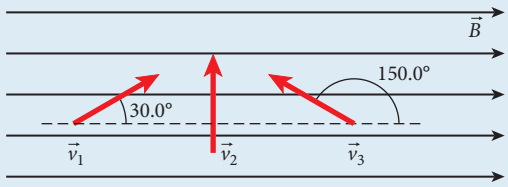
c) Hacia arriba.

d) Hacia abajo.

e) No se desvía.

27.1 Oportunidad de autoevaluación

Tres partículas, cada una con carga $q = 6.15\ \mu C$ y velocidad $v = 465$ m/s, entran en un campo magnético uniforme de magnitud $B = 0.165$ T (vea la figura). ¿Cuál es la magnitud de la fuerza magnética sobre cada una de las partículas?



27.3 Movimiento de partículas cargadas en un campo magnético

El hecho de que la fuerza debida a un campo magnético que actúa sobre una partícula cargada en movimiento es perpendicular tanto al campo como a la velocidad de la partícula hace que esta fuerza sea diferente de cualquier otra considerada hasta la fecha. No obstante, las herramientas que usamos para analizar esta fuerza —las leyes de Newton y las leyes de conservación de energía, cantidad de movimiento y cantidad de movimiento angular— son las mismas.

Trayectorias de partículas cargadas en movimiento en un campo magnético constante

Suponga que conduce un automóvil a velocidad constante en una trayectoria circular. La fricción entre los neumáticos y la carretera proporciona la fuerza centrípeta que mantiene el automóvil en movimiento alrededor de un círculo. Esta fuerza siempre apunta hacia el centro del círculo y crea una aceleración centrípeta (analizada en el capítulo 9). Una situación física semejante ocurre cuando una partícula con carga q y masa m se mueve con velocidad $\vec{v}$ perpendicular a un campo magnético uniforme, $\vec{B}$, como ilustra la figura 27.15.

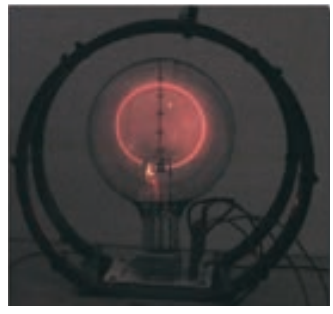


FIGURA 27.15 Haz de electrones desviado en una trayectoria circular por el campo magnético generado por dos bobinas.

En esta situación, la partícula se mueve en círculo con velocidad constante v y la fuerza magnética de magnitud $F_B = |q|vB$ proporciona la fuerza centrípeta que mantiene a la partícula moviéndose en un círculo. Las partículas con cargas opuestas y la misma masa orbitan en direcciones opuestas al mismo radio orbital. Por ejemplo, los electrones y los positrones son partículas elementales con la misma masa; el electrón tiene carga negativa, y el positrón, carga positiva. La figura 27.16 es una fotografía de una cámara de burbujas que muestra dos pares electrón-positrón. Una cámara de burbujas es un aparato que puede rastrear partículas cargadas en movimiento en un campo magnético constante. (Los pares de electrones y positrones fueron creados por interacciones de partículas elementales, que serán abordadas con más detalle en el capítulo 39.) El par 1 tiene un electrón y un positrón con la misma velocidad relativamente baja. Estas partículas inicialmente se desplazan en un círculo. No obstante, a medida que se mueven por la cámara de burbujas, aminoran su velocidad. (Este aminoramiento de velocidad no se debe a la fuerza magnética, sino a las colisiones de las partículas con las moléculas del gas en la cámara de burbujas.) Así, el radio del círculo se vuelve cada vez más pequeño, creando una espiral. El electrón y el positrón en el par 2 tienen una velocidad mucho más alta. Sus trazas son curvas, pero no forman un círculo completo antes de que las partículas salgan de la cámara de burbujas.

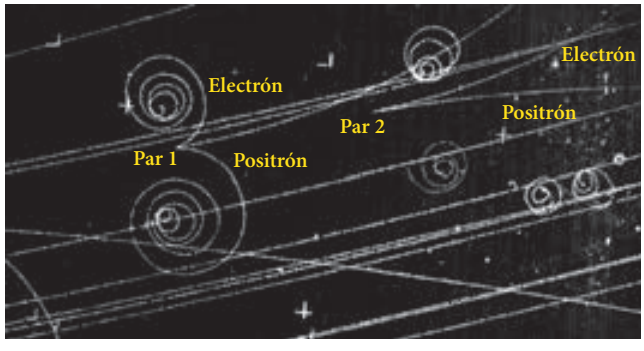


FIGURA 27.16 Fotografía de una cámara de burbujas que muestra dos pares electrón-positrón. La cámara de burbujas está ubicada en un campo magnético constante que apunta directamente fuera de la página.

Si la velocidad de una partícula cargada es paralela (o antiparalela) al campo magnético, la partícula no experimenta ninguna fuerza magnética y continúa moviéndose en línea recta.

Para movimiento perpendicular a un campo magnético, como en la figura 27.15, la fuerza requerida para mantener una partícula en movimiento con velocidad v en un círculo de radio r es la fuerza centrípeta:

$$F = \frac{mv^2}{r}.$$

Al igualar esta expresión para la fuerza centrípeta a la de la fuerza magnética, obtenemos

$$vB|q| = \frac{mv^2}{r}.$$

Al reordenar se obtiene una expresión para el radio del círculo en el que se desplaza la partícula:

$$r = \frac{mv}{|q|B}. \tag{27.5}$$

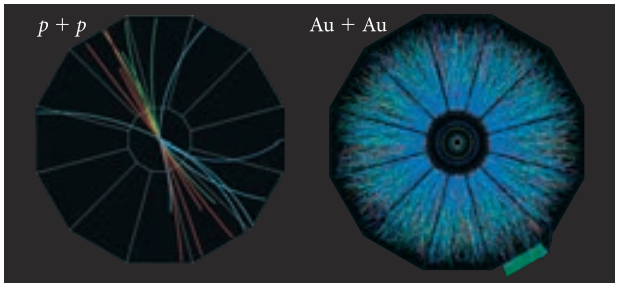
Una forma común de expresar esta relación es en términos de la magnitud de la cantidad de movimiento de la partícula:

$$Br = \frac{p}{|q|}. \tag{27.6}$$

Si la velocidad $\vec{v}$ no es perpendicular a $\vec{B}$, entonces la componente de velocidad perpendicular a $\vec{B}$ provoca el movimiento circular, mientras la componente paralela de $\vec{v}$ no se ve afectada por $\vec{B}$ y hace que esta órbita adquiera una forma helicoidal.

Cámara de proyección de tiempo

Los físicos expertos en partículas crearon nuevas partículas elementales al hacer colisionar partículas más grandes a energías más elevadas. En estas colisiones, muchas partículas se alejan del punto de interacción a gran velocidad. Un simple detector de partículas no es suficiente para identificarlas. Un aparato que puede ayudar a los físicos a estudiar estas colisiones es una cámara de proyección de tiempo (TPC por sus siglas en inglés). El STAR TPC se describió en el ejemplo 22.4 y se muestra en la figura 3 de la gran fotografía al principio del libro.



a) *b*)

FIGURA 27.17 Trayectorias curvas dejadas por el movimiento de partículas cargadas producidas por colisiones de *a*) dos protones, cada uno con energía cinética de 100 GeV, y *b*) dos núcleos de oro, cada uno con energía cinética de 100 GeV.

La figura 27.17 muestra colisiones de dos protones y dos núcleos de oro que ocurrieron en el STAR TPC. La colisión protón-protón crea docenas de partículas; la colisión oro-oro crea miles de partículas. Cada partícula cargada deja un rastro en la TPC. El color asignado por una computadora a la trayectoria representa la densidad de ionización de la misma, cuando las partículas pasan por el gas de la TPC. A medida que pasan por el gas, las partículas ionizan los átomos del gas, liberando electrones libres. El gas permite que los electrones libres deriven sin recombinarse con iones positivos. Campos eléctricos aplicados entre el centro de la TPC y los extremos del cilindro ejercen una fuerza eléctrica sobre los electrones libres, haciéndolos derivar hacia los extremos del cilindro, donde son registrados electrónicamente. Al usar el tiempo de deriva y las posiciones registradas, software de computadora reproduce las trayectorias tomadas por las partículas a través de la TPC. Las partículas producidas en las colisiones tienen una componente de velocidad que es perpendicular al campo magnético de la TPC, por lo que sus trayectorias son circulares.

EJEMPLO 27.1 Cantidad de movimiento transversal de una partícula en la TPC

Una trayectoria de una partícula cargada en movimiento de la figura 27.17*a*) se muestra en la figura 27.18. El radio de la trayectoria circular seguida por esta partícula es r = 2.3 m. La magnitud del campo magnético en la TPC es B = 0.50 T. Podemos suponer que la partícula tiene carga $|q| = 1.602 \cdot 10^{-19}$ C.

PROBLEMA

¿Cuál es la componente de la cantidad de movimiento de la partícula que es perpendicular al campo magnético?

SOLUCIÓN

Esta componente se denomina cantidad de movimiento transversal de una partícula, p_t. Usamos la ecuación 27.6, sustituyendo p con p_t, porque la fuerza magnética depende sólo de p_t y no de la componente de la cantidad de movimiento que es paralela a $\vec{B}$:

$$Br = \frac{p_t}{|q|}.$$

Podemos expresar la magnitud de la cantidad de movimiento transversal de la partícula en términos de la magnitud del campo magnético de la TPC y el valor absoluto de la carga de la partícula:

$$p_t = |q|Br = \left(1.602 \cdot 10^{-19}\ \text{C}\right)\left(0.50\ \text{T}\right)\left(2.3\ \text{m}\right) = 1.842 \cdot 10^{-19}\ \text{kg m/s}.$$

En lugar de estas unidades SI de la cantidad de movimiento, los físicos de partículas usan MeV/c (recuerde el ejemplo 7.5). Puesto que 1 MeV $= 1.602 \cdot 10^{-13}$ J, tenemos

$$p_t c = \left(1.842 \cdot 10^{-19}\ \text{kg m/s}\right)\left(3.0 \cdot 10^{8}\ \text{m/s}\right) = 5.53 \cdot 10^{-11}\ \text{J},$$

o bien,

$$p_t = \left(5.53 \cdot 10^{-11}\ \text{J}\right)/c = 345\ \text{MeV}/c.$$

El análisis de la cantidad de movimiento transversal de una partícula que aquí se presenta puede llevarse a cabo por medio de algoritmos computacionales automatizados hasta con las aproximadamente 5 000 partículas cargadas creadas en una sola colisión de dos núcleos de oro. Esta tarea tan complicada requiere alrededor de 30 segundos para que una computadora la efectúe por completo (con procesador de 3 GHz). En contraste, la TPC puede registrar hasta 1 000 eventos por segundo, lo cual corresponde a un milisegundo por evento.

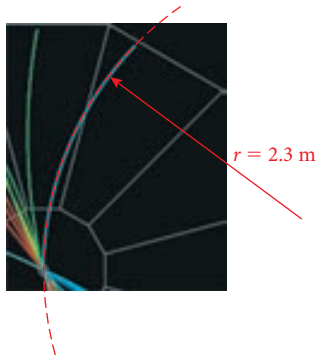


FIGURA 27.18 Círculo ajustado a la trayectoria de una de las partículas cargadas, producidas por la colisión protón-protón en el STAR TPC mostrada en la figura 27.17*a*).

EJEMPLO 27.2 El viento solar y el campo magnético de la Tierra

En la sección 27.1 se analizó la radiación de los cinturones de Van Allen que atrapan partículas emitidas por el Sol. Éste arroja aproximadamente 1 millón de toneladas de materia al espacio cada segundo. Esta materia está esencialmente constituida de protones que se desplazan a una velocidad de alrededor de 400 km/s.

PROBLEMA

Si estos protones inciden perpendicularmente con el campo magnético de la Tierra (cuya magnitud es de 50 μT en el Ecuador), ¿cuál es el radio de la órbita de los protones? La masa de un protón es $1.67 \cdot 10^{-27}$ kg.

SOLUCIÓN

La ecuación 27.5 relaciona la magnitud del campo magnético, B, el radio de una órbita circular, r, y la velocidad, v, de una partícula con masa m y carga q que se desplaza perpendicularmente a un campo magnético:

$$r = \frac{mv}{|q|B}.$$

Al escribir los valores numéricos, obtenemos

$$r = \frac{\left(1.67 \cdot 10^{-27}\ \text{kg}\right)\left(400 \cdot 10^{3}\ \text{m/s}\right)}{\left(1.602 \cdot 10^{-19}\ \text{C}\right)\left(50 \cdot 10^{-6}\ \text{T}\right)} = 83.5\ \text{m}.$$

Así, los protones del viento solar orbitan alrededor de las líneas del campo magnético de la Tierra en el Ecuador en círculos de 83.5 m de radio. Los protones que inciden sobre el campo magnético

(*continúa*)

(*continuación*)

de la Tierra lejos del Ecuador no se desplazan en dirección perpendicular al campo magnético, de modo que su radio orbital es mayor. No obstante, las líneas del campo magnético están más próximas entre sí, lo cual significa que el campo es más intenso hacia los polos. Así, los protones describen una trayectoria en espiral a lo largo de las líneas de campo cuando se aproximan a los polos. La forma del campo magnético de la Tierra obliga a estos protones que se dirigen a los polos a invertir su dirección y desplazarse de vuelta hacia el Ecuador, atrapando los protones en los cinturones de radiación Van Allen. Por lo tanto, el campo magnético de la Tierra impide por completo que el viento solar llegue a la superficie terrestre. Esto es vital, ya que de otra forma la radiación cósmica bloqueada impediría la existencia de organismos superiores en la Tierra al ionizar (retirar electrones de) átomos y destruir grandes moléculas, por ejemplo, ADN.

Frecuencia de un ciclotrón

Si una partícula realiza una órbita circular completa dentro de un campo magnético uniforme, por ejemplo, como el electrón en el haz que se muestra en la figura 27.15, entonces el periodo de revolución, T, de la partícula es la circunferencia del círculo dividida entre la velocidad:

$$T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi m}{|q|B}. \tag{27.7}$$

La frecuencia, f, del movimiento de la partícula cargada es el inverso del periodo:

$$f = \frac{1}{T} = \frac{|q|B}{2\pi m}. \tag{27.8}$$

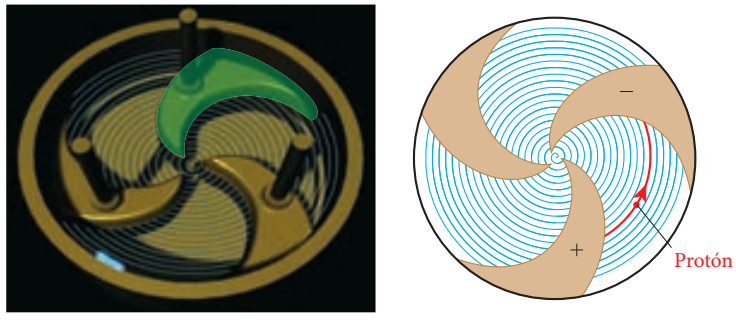
La velocidad angular, ω, del movimiento es

$$\omega = 2\pi f = \frac{|q|B}{m}. \tag{27.9}$$

De esta manera, la frecuencia y la velocidad angular del movimiento de la partícula son independientes de la velocidad de la partícula y, por lo tanto, son independientes de la energía cinética de la misma. Este hecho se usa en los ciclotrones, razón por la cual ω según se proporciona en la ecuación 27.9, se denomina **frecuencia del ciclotrón**. En un ciclotrón, las partículas son aceleradas a energías cinéticas cada vez mayores, y el hecho de que la frecuencia del ciclotrón sea independiente de la energía cinética facilita mucho más el diseño de un ciclotrón.

EJEMPLO 27.3 Energía de un ciclotrón

Un ciclotrón es un acelerador de partículas (figura 27.19). A las piezas metálicas en forma de cuerno de oro mostradas en la figura (históricamente denominadas *des*) se aplican potenciales eléctrico alternos, de modo que adelante de una partícula con carga positiva siempre hay una *de* con carga negativa cuando emerge desde cualquier *de*, que ahora tiene carga positiva. El campo magnético resultante acelera la partícula. Debido a que el ciclotrón se encuentra en un intenso campo magnético, la trayectoria de la partícula es curva. El radio de la trayectoria es proporcional a la magnitud de la cantidad de movimiento de la partícula, según la ecuación



a) *b*)

FIGURA 27.19 *a*) Esquema generado por computadora de la sección central del ciclotrón superconductor K500 en el laboratorio de la Universidad Estatal de Michigan, con la trayectoria espiral de una partícula acelerada superpuesta. Una de las tres *des* del ciclotrón se resalta en verde. *b*) Vista superior del K500, mostrando un protón sujeto a aceleración entre dos *des*.

27.6, de modo que la partícula acelerada se mueve en espiral hacia fuera hasta que alcanza la orilla del campo magnético (donde su trayectoria ya no es desviada por el campo) y sale de ahí. Según la ecuación 27.9, la frecuencia angular es independiente de la cantidad de movimiento o de la energía de la partícula, así que la frecuencia con la que cambia la polaridad de las *des* no tiene que ajustarse a medida que la partícula es acelerada. (Esto es cierto sólo si la velocidad de las partículas aceleradas no tiende a una fracción considerable de la velocidad de la luz, como veremos en el capítulo 35 sobre relatividad. Para compensar efectos relativistas, el campo magnético de un ciclotrón aumenta con el radio orbital de las partículas aceleradas.)

PROBLEMA

¿Cuál es la energía cinética, en mega electrón voltios (MeV) de un protón que se extrae de un ciclotrón con radio r = 1.81 m, si el campo magnético del ciclotrón es uniforme y tiene una magnitud B = 0.851 T? La masa del protón es $1.67 \cdot 10^{-27}$ kg.

SOLUCIÓN

En la ecuación 27.5 podemos despejar la velocidad, v, del protón:

$$v = \frac{r|q|B}{m}.$$

Sustituimos esta expresión para v en la ecuación para la energía cinética:

$$K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\left(\frac{r|q|B}{m}\right)^2 = \frac{r^2q^2B^2}{2m}.$$

Al escribir los números dados, obtenemos la energía cinética en joules:

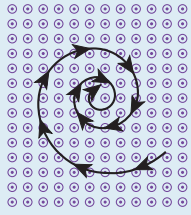
$$K = \frac{(1.81\ \text{m})^2\left(1.602\cdot10^{-19}\ \text{C}\right)^2(0.851\ \text{T})^2}{2\left(1.67\cdot10^{-27}\ \text{kg}\right)} = 1.82\cdot10^{-11}\ \text{J}.$$

Puesto que 1 eV = $1.602 \cdot 10^{-19}$ J y 1 MeV = 10^6 eV, tenemos

$$K = 1.82\cdot10^{-11}\ \text{J}\left(\frac{1\ \text{eV}}{1.602\cdot10^{-19}\ \text{J}}\right)\left(\frac{1\ \text{MeV}}{10^6\ \text{eV}}\right) = 114\ \text{MeV}.$$

27.2 Oportunidad de autoevaluación

Un campo magnético uniforme está dirigido hacia fuera de la página (indicado con la notación normal "punto encerrado en un círculo" para ver la punta de flecha que representa las líneas de campo). Una partícula cargada cruza el plano de la página, como muestran las flechas en la figura.



a) ¿Es positiva o negativa la carga de la partícula?

b) ¿La partícula está desacelerando, acelerando o se mueve a velocidad constante?

c) ¿El campo magnético realiza trabajo sobre la partícula?

27.2 Ejercicio en clase

Los protones en el viento solar provenientes del Sol llegan al campo magnético de la Tierra con una velocidad de 400 km/s. Si la magnitud del campo magnético de la Tierra es $5.0 \cdot 10^{-5}$ T y la velocidad de los protones es perpendicular a este campo magnético, ¿cuál es la frecuencia del ciclotrón de los protones en el campo magnético?

a) 122 Hz *d*) 432 Hz

b) 233 Hz *e*) 763 Hz

c) 321 Hz

Espectrómetro de masas

Una aplicación del movimiento de partículas cargadas en un campo magnético es un **espectrómetro de masas**, que permite la determinación precisa de masas atómicas y moleculares, y puede ser útil para determinar la edad por medio de C^{14} y el análisis de compuestos químicos desconocidos. Un espectrómetro de masas opera al ionizar los átomos o las moléculas a estudiar y acelerarlos a través de un potencial eléctrico. Luego, los iones pasan por un selector de velocidades (que se describe con más detalle en el problema resuelto 27.2) que sólo permite que iones con una velocidad dada pasen y bloqueen los iones restantes. Luego, los iones entran en una región de campo magnético constante. En el campo magnético, el radio de curvatura de la órbita de cada ion está dado por la ecuación 27.5: $r = mv/|q|B$. En el supuesto de que todos los átomos o las moléculas estén ionizadas (que tienen carga de +1 o –1), el radio de curvatura es proporcional a la masa del ion. La figura 27.20 ilustra un esquema de un espectrómetro de masas.

Iones con masas diferentes tienen radios orbitales distintos en el campo magnético constante. Por ejemplo, en la figura 27.20, iones con radio orbital r_1 tienen menor masa que iones con radio orbital r_2. El detector de partículas mide las distancias al punto de entrada, d_1 y d_2, que pueden relacionarse con los radios orbitales y, por lo tanto, con la masa de los iones.

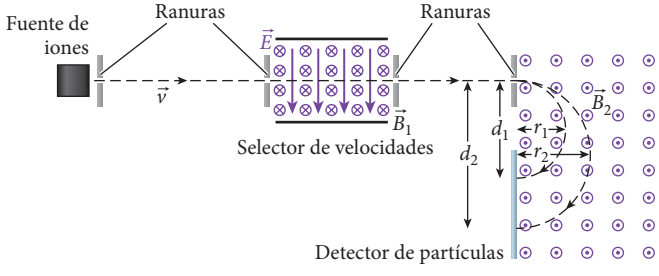


FIGURA 27.20 Esquema de un espectrómetro de masas que muestra una fuente de iones, un selector de velocidades que consta de campos eléctrico y magnético perpendiculares (vea el problema resuelto 27.2), una región de campo magnético constante y un detector de partículas.

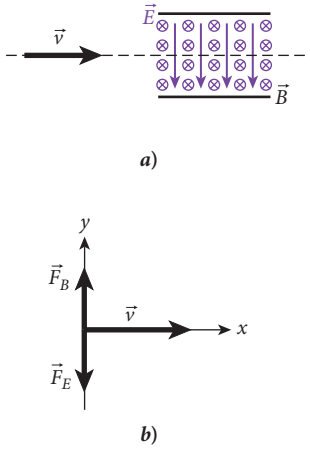


FIGURA 27.21 *a*) Un protón que entra en un selector de velocidades que consta de campos eléctrico y magnético perpendiculares. *b*) Fuerzas eléctrica y magnética sobre un protón que pasa por los campos combinados.

PROBLEMA RESUELTO 27.2 Selector de velocidades

Protones son acelerados a partir del reposo por medio de una diferencia de potencial de ΔV = 14.0 kV. Los protones entran en un selector de velocidades que consta de un capacitor de placas paralelas en un campo magnético constante, dirigido perpendicularmente hacia el plano de la página en la figura 27.21*a*). El campo eléctrico entre las placas del capacitor es $\vec{E} = 4.30 \cdot 10^5$ V/m, dirigido a lo largo del plano de la página y hacia abajo en la figura 27.21*a*). Esta disposición de campos eléctrico y magnético perpendiculares se denomina *campos cruzados*.

PROBLEMA

¿Qué campo magnético se requiere para que los protones se muevan a través del selector de velocidades sin desviarse?

SOLUCIÓN

PIENSE

Para que un protón se mueva en línea recta sin desviarse es necesario que la fuerza neta sobre el protón sea cero. Puesto que el protón tiene cierta velocidad y la fuerza magnética depende de ésta, es creíble que esta condición de fuerza neta cero no pueda lograrse para velocidades arbitrarias del protón; de ahí el nombre *selector de velocidades*.

ESBOCE

La figura 27.21*b*) muestra las fuerzas eléctrica y magnética sobre los protones conforme pasan por el selector de velocidades. Observe que las dos fuerzas apuntan en direcciones opuestas.

INVESTIGUE

El cambio en energía cinética de los protones más el cambio en energía potencial es igual a cero, lo cual puede expresarse como

$$K = -U = \tfrac{1}{2}mv^2 = e\Delta V,$$

donde m es la masa de un protón, v es la velocidad del protón después de la aceleración, e es la carga del protón y ΔV es la diferencia de potencial eléctrico a través de la cual los protones fueron acelerados. La velocidad del protón después de la aceleración es

$$v = \sqrt{\frac{2e\Delta V}{m}}. \tag{i}$$

Cuando los protones entran en el selector de velocidades, la dirección de la fuerza eléctrica es en dirección del campo eléctrico, que es hacia abajo (dirección y negativa). La magnitud de la fuerza eléctrica es

$$F_E = eE, \tag{ii}$$

donde E es la magnitud del campo eléctrico en el selector de velocidades. Con la regla de la mano derecha 1 se obtiene la dirección de la fuerza magnética: con el pulgar en dirección de la velocidad de los protones (dirección x positiva) y el índice en dirección del campo magnético (hacia la página), el dedo medio apunta hacia arriba (dirección y positiva). Así, la dirección de la fuerza magnética sobre los protones es hacia arriba. La magnitud de la fuerza magnética está dada por

$$F_B = evB, \tag{iii}$$

donde B es la magnitud del campo magnético en el selector de velocidades.

SIMPLIFIQUE

La condición que permite que los protones pasen a través del selector de velocidades sin desviarse es que la fuerza eléctrica equilibra la fuerza magnética, o $F_E = F_B$. Al usar las ecuaciones (ii) y (iii), podemos expresar esta condición como

$$eE = evB.$$

Al despejar el campo magnético, B, y sustituir v en la ecuación (i), obtenemos

$$B = \frac{E}{\sqrt{\dfrac{2e\Delta V}{m}}} = E\sqrt{\frac{m}{2e\Delta V}}.$$

CALCULE

Al escribir los valores numéricos, obtenemos

$$B=\left(4.30\cdot10^{5}\ \text{V/m}\right)\sqrt{\frac{1.67\cdot10^{-27}\ \text{kg}}{2\left(1.602\cdot10^{-19}\ \text{C}\right)\left(14.0\cdot10^{3}\ \text{V}\right)}}=0.262371\ \text{T}.$$

REDONDEE

Mostramos nuestro resultado con tres cifras:

$$B=0.262\ \text{T}.$$

VUELVA A REVISAR

Comprobamos que la fuerza eléctrica es igual a la fuerza magnética. La fuerza eléctrica es

$$F_E=eE=\left(1.602\cdot10^{-19}\ \text{C}\right)\left(4.30\cdot10^{5}\ \text{V/m}\right)=6.89\cdot10^{-14}\ \text{N}.$$

Para calcular la magnitud de la fuerza magnética es necesario encontrar la velocidad de los protones:

$$v=\sqrt{\frac{2e\Delta V}{m}}=\sqrt{\frac{2\left(1.602\cdot10^{-19}\ \text{C}\right)\left(14.0\cdot10^{3}\ \text{V}\right)}{1.67\cdot10^{-27}\ \text{kg}}}=1.64\cdot10^{6}\ \text{m/s}.$$

Esta velocidad es 0.55% de la velocidad de la luz, lo cual no es del todo imposible. Entonces, la magnitud de la fuerza magnética es

$$F_B=evB=\left(1.602\cdot10^{-19}\ \text{C}\right)\left(1.64\cdot10^{6}\ \text{m/s}\right)\left(0.262\ \text{T}\right)=6.88\cdot10^{-14}\ \text{N},$$

lo cual coincide con el valor de la fuerza eléctrica dentro del error por redondeo. Así, nuestro resultado parece razonable.

Levitación magnética

Una aplicación interesante de la fuerza magnética es la **levitación magnética**, situación en la que una fuerza magnética hacia arriba sobre un objeto equilibra la fuerza gravitacional hacia abajo, logrando un equilibrio estático sin necesidad de que entre las superficies haya contacto directo. Pero si se intenta equilibrar un imán sobre otro al orientar los polos norte (o los polos sur) entre sí, de inmediato se observa que esto no es posible. En lugar de ello, uno de los imanes da la vuelta y entonces los polos opuestos apuntan uno hacia el otro, y la fuerza de atracción entre ellos hace que los dos imanes se adhieran entre sí. Como vimos en el capítulo 11, para que haya un equilibrio estable se requiere un mínimo local de la energía potencial, lo cual no existe para la interacción puramente de repulsión de dos polos magnéticos iguales.

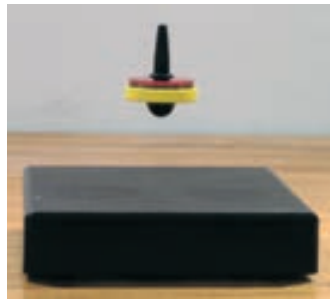
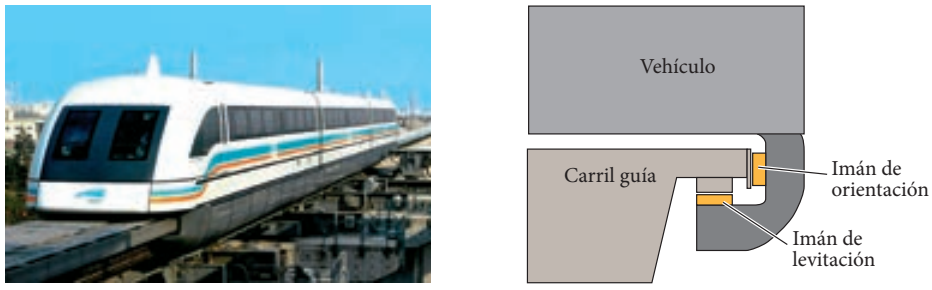


FIGURA 27.22 El Levitrón, un juguete comercial que demuestra la levitación magnética de un imán giratorio por arriba de una base imantada.

La figura 27.22 muestra un juguete comercial denominado Levitrón que demuestra el principio de levitación magnética. La parte superior magnética gira sobre un plato y luego se eleva a la altura idónea y se suelta. La parte superior puede permanecer suspendida durante varios minutos. ¿Cómo funciona este juguete, considerando el requerimiento de equilibrio estable que acaba de mencionarse? La respuesta es que la rápida rotación de la parte superior proporciona una cantidad de movimiento angular suficientemente grande y crea una barrera de energía potencial que evita que el imán se dé vuelta.

Por supuesto, hay otras formas de crear sistemas de levitación magnética estable, todas las cuales implican varios imanes unidos estrechamente. La levitación magnética tiene aplicaciones en el mundo real en trenes de suspensión magnética (maglev). Estos trenes tienen varias ventajas sobre los trenes que se mueven sobre rieles de acero. No hay elementos móviles que se desgasten, hay menos vibración, y fricción reducida significa que es posible alcanzar grandes velocidades. Varios trenes maglev ya están en servicio en el mundo y se han planificado más. Un ejemplo es el Tren Maglev de Shanghai [figura 27.23*a*)], que opera entre el aeropuerto Pudong y el centro de Shanghai y alcanza velocidades hasta de 120 m/s (268 mph).

El Tren Maglev de Shanghai opera usando imanes conectados a los vagones [figura 27.23*b*)]. Los vagones son bobinas normales magnéticas no conductoras, con retroalimentación electrónica



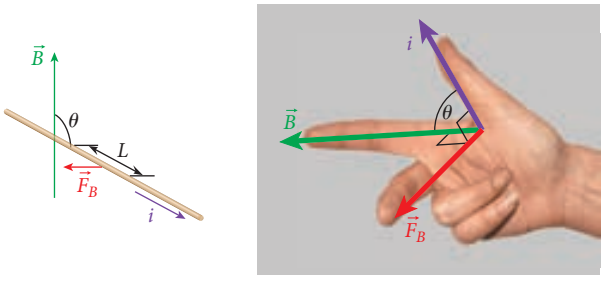
a) b)

FIGURA 27.23 *a*) El tren Maglev de Shanghai. *b*) Sección transversal de uno de los vagones del tren. Los imanes de levitación mantienen los vagones a 15 cm por arriba del carril guía, y los imanes de orientación mantienen centrados los vagones sobre el carril guía. Todos los imanes están montados sobre el vehículo móvil.

para producir levitación y guía estables. Los vagones están a 15 cm por arriba del carril guía a fin de permitir una separación con cualquier objeto que pudiera estar presente. Los imanes de levitación y guía se mantienen a una distancia de 10 mm del carril guía, que está hecho de algún material magnético. La propulsión del tren es suministrada por los campos magnéticos en el carril guía. El sistema de propulsión del tren opera como un motor eléctrico (vea la sección 27.5) cuyas espiras circulares se han desenvuelto para mostrar una configuración lineal.

Se han probado trenes maglev que usan imanes superconductores, aunque todavía quedan algunos problemas técnicos por resolver, incluyendo el mantenimiento de las bobinas superconductoras y la exposición de los pasajeros a altos campos magnéticos.

27.4 Fuerza magnética sobre un alambre conductor de corriente



a) b)

FIGURA 27.24 *a*) Fuerza magnética sobre un alambre conductor de corriente. *b*) Variante de la regla de la mano derecha 1 que proporciona la dirección de la fuerza magnética sobre un alambre conductor de corriente. Para determinar la dirección de la fuerza sobre un alambre conductor de corriente usando la mano derecha, apunte su pulgar en dirección de la corriente y el índice en la dirección del campo magnético; así, su dedo medio apunta en la dirección de la fuerza.

Considere un alambre conductor de corriente, i, en un campo magnético constante, $\vec{B}$ [figura 27.24*a*)]. El campo magnético ejerce una fuerza sobre las cargas que se mueven en el alambre. La carga, q, que fluye por un punto en el alambre en un instante dado, t, es $q = ti$. Durante este tiempo, la carga ocupa una longitud, L, del alambre dada por $L = v_d t$, donde v_d es la velocidad de deriva (la magnitud de la velocidad de deriva) de los portadores de carga en el alambre. Así, obtenemos

$$q = ti = \frac{L}{v_d} i. \tag{27.10}$$

Entonces, la magnitud de la fuerza magnética es

$$F_B = q v_d B \operatorname{sen}\theta = \left(\frac{L}{v_d} i\right) v_d B \operatorname{sen}\theta = iLB \operatorname{sen}\theta, \tag{27.11}$$

donde θ es el ángulo entre la dirección del flujo de corriente y la dirección del campo magnético. La dirección de la fuerza es perpendicular tanto a la corriente como al campo magnético y está dada por una variante de la regla de la mano derecha 1, con la corriente en la dirección de la velocidad de una partícula cargada, como se ilustra en la figura 27.24*b*). Esta variante de la regla de la mano derecha 1 aprovecha el hecho de que puede considerarse que la corriente son cargas en movimiento.

La ecuación 27.11 puede expresarse como un producto

$$\vec{F}_B = i\vec{L} \times \vec{B}, \tag{27.12}$$

donde la notación $i\vec{L}$ representa la corriente en una longitud del alambre. La ecuación 27.12 es simplemente un replanteamiento de la ecuación 27.2 para el caso en el que las cargas en movimiento constituyan una corriente que fluye en un alambre. Puesto que las situaciones físicas que implican corrientes son mucho más comunes que las que implican el movimiento de una partícula cargada aislada, la ecuación 27.12 es la forma más útil para determinar la fuerza magnética en aplicaciones prácticas.

EJEMPLO 27.4 Fuerza sobre la bobina de voz de un altavoz

Un altavoz produce sonido al ejercer una fuerza magnética sobre una bobina de voz en un campo magnético, como muestra la figura 27.25. Esta bobina está conectada a un cono de altavoz que en realidad produce los sonidos. El campo magnético es producido por los dos imanes permanentes como ilustra la figura 27.25. La magnitud del campo magnético es $B = 1.50$ T. La bobina de voz está compuesta por $n = 100$ vueltas de alambre que conduce una corriente, $i = 1.00$ mA. El diámetro de esta bobina es $d = 2.50$ cm.

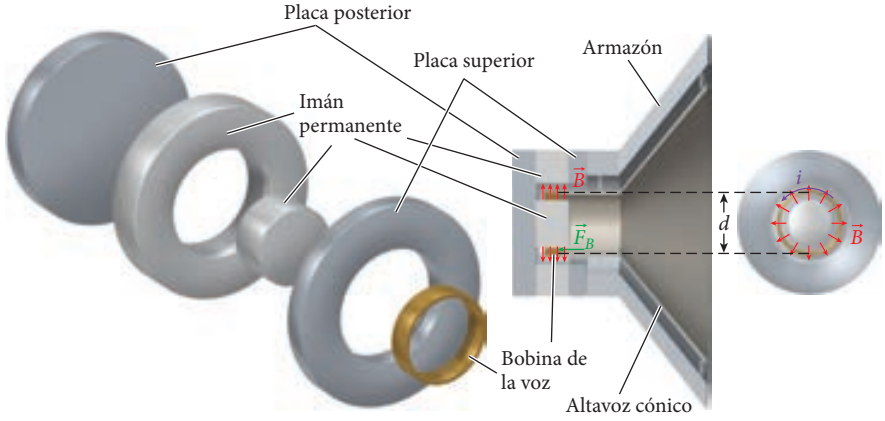


FIGURA 27.25 Diagrama de un altavoz: *a*) vista tridimensional detallada del controlador del altavoz; *b*) vista de la sección transversal del altavoz; *c*) vista frontal del controlador del altavoz.

PROBLEMA

¿Cuál es la fuerza magnética ejercida por el campo magnético sobre la bobina de voz del altavoz?

SOLUCIÓN

La magnitud de la fuerza magnética sobre la bobina de voz del altavoz está dada por la ecuación 27.11:

$$F = iLB \operatorname{sen}\theta,$$

donde L es la longitud del alambre que conduce una corriente i en el campo magnético con magnitud B. El alambre forma un ángulo θ con el campo magnético. En este caso, el alambre siempre es perpendicular al campo magnético, de modo que $\theta = 90°$. La longitud del alambre en la bobina de voz está dada por el número de vueltas, n, multiplicado por la circunferencia, πd, de cada vuelta

$$L = n\pi d.$$

Así, la fuerza sobre la bobina de voz es

$$F = i(n\pi d)B(\operatorname{sen} 90°) = n\pi idB.$$

Al escribir los valores numéricos, obtenemos

$$F = n\pi idB = (100)(\pi)\left(1.00\cdot10^{-3}\ \text{A}\right)\left(2.50\cdot10^{-2}\ \text{m}\right)(1.50\ \text{T}) = 0.01178\ \text{N} \equiv 0.0118\ \text{N}.$$

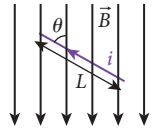
A partir de la regla de la mano derecha 1 ilustrada en la figura 27.24*b*), la dirección de la fuerza ejercida por el campo magnético sobre la bobina de voz es hacia la izquierda en la figura 27.25*b*) y perpendicular hacia la página en la figura 27.25*c*).

Si la corriente en esta bobina se invierte, la fuerza es en dirección opuesta. Si la corriente es proporcional a la amplitud de una onda sonora, las ondas sonoras pueden reproducirse en el cono del altavoz. Esta idea básica se usa en la mayor parte de los altavoces y auriculares.

27.3 Ejercicio en clase

Un segmento aislado de alambre de longitud $L = 4.50$ m lleva una corriente de magnitud $i = 35.0$ A, con un ángulo $\theta = 50.3°$ respecto al campo magnético constante con magnitud $B = 6.70 \cdot 10^{-2}$ T (vea la figura). ¿Cuál es la magnitud de la fuerza magnética sobre el alambre?

a) 2.66 N
b) 3.86 N
c) 5.60 N
d) 8.12 N
e) 11.8 N



27.5 Momento de torsión sobre un bucle conductor de corriente

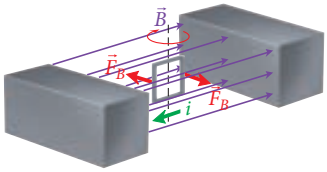


FIGURA 27.26 Elemento primitivo de un motor eléctrico que consta de un bucle conductor de corriente en un campo magnético.

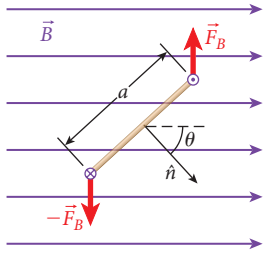


FIGURA 27.27 Vista superior de un bucle conductor de corriente en un campo magnético, que muestra las fuerzas que actúan sobre él.

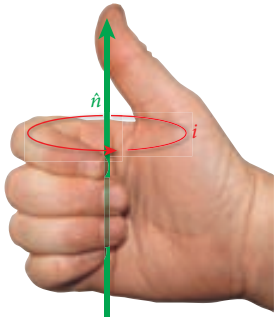


FIGURA 27.28 La regla de la mano derecha 2 proporciona la dirección del vector normal unitario para un bucle conductor de corriente. Según la regla, si los dedos de la mano derecha se flexionan en la dirección de la corriente en el bucle, el pulgar apunta en la dirección del vector normal unitario.

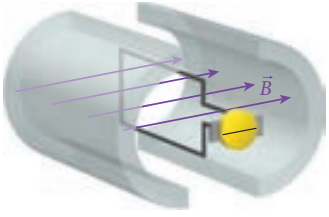


FIGURA 27.29 Bucle de alambre conectado a una fuente de corriente a través de un anillo conmutador.

Los motores eléctricos dependen de la fuerza magnética ejercida sobre un alambre conductor de corriente. Esta fuerza se usa para crear un momento de torsión que hace girar el eje. Consideremos un simple motor eléctrico que consta de un bucle cuadrado único que conduce una corriente, i, en un campo magnético constante, $\vec{B}$. El bucle está orientado de modo que sus secciones horizontales son paralelas al campo magnético y sus secciones verticales son perpendiculares al campo magnético, como se muestra en la figura 27.26. La magnitud de la fuerza magnética sobre las dos secciones verticales del bucle está dada por la ecuación 27.11 con $\theta = 90°$:

$$F = iLB.$$

La dirección de la fuerza magnética está dada por la variante de la regla de la mano derecha 1 ilustrada en la figura 27.24*b*). Las dos fuerzas magnéticas, $\vec{F}_B$ y $-\vec{F}_B$, mostradas en la figura 27.26, tienen las mismas magnitudes y direcciones opuestas. Estas fuerzas crean un momento de torsión que tiende a rotar el bucle alrededor de un eje vertical de rotación. La suma de estas dos fuerzas es cero. Las dos secciones horizontales del bucle son paralelas al campo magnético y entonces no experimentan fuerza magnética. Entonces, sobre la bobina no actúa ninguna fuerza magnética, aunque se produzca un momento de torsión.

Ahora consideraremos el caso en el que el bucle rota alrededor de su centro. A medida que gira en el campo magnético, las fuerzas sobre los lados verticales, perpendiculares a la dirección del campo, no cambian. Las fuerzas sobre el bucle cuadrado, con lado de longitud a, se ilustran en la figura 27.27, que muestra una vista superior de la bobina móvil. En la figura 27.27, θ es el ángulo entre un vector unitario, $\hat{n}$, normal al plano de la bobina, y el campo magnético, $\vec{B}$. El vector normal unitario es perpendicular al plano del bucle de alambre y apunta en una dirección dada por la regla de la mano derecha 2 (figura 27.28), con base en la corriente que fluye por él.

En la figura 27.27, la corriente fluye hacia fuera de la página en el lado derecho del bucle, indicado por el punto en un círculo (que representa la punta de una flecha), y fluye hacia la página en el lado izquierdo del bucle, indicado por la cruz en un círculo (que representa la cola de una flecha). La magnitud de la fuerza sobre cada uno de estos segmentos verticales es

$$F = iaB.$$

Las fuerzas sobre los dos segmentos horizontales del bucle son paralelas o antiparalelas al eje de rotación y no provocan ningún momento de torsión, y la suma de estas dos fuerzas es cero. En consecuencia, sobre el bucle no hay ninguna fuerza neta.

La suma de los momentos de torsión sobre los dos segmentos verticales del bucle proporciona el momento de torsión neto ejercido sobre éste alrededor de su centro:

$$\tau_1 = (iaB)\left(\frac{a}{2}\right)\operatorname{sen}\theta + (iaB)\left(\frac{a}{2}\right)\operatorname{sen}\theta = ia^2B\operatorname{sen}\theta = iAB\operatorname{sen}\theta, \tag{27.13}$$

donde el índice 1 en τ_1 indica que se trata del momento de torsión sobre un solo bucle y $A = a^2$ es el área del bucle. La razón por la que éste continúa rotando sin detenerse en $\theta = 0°$ es que está conectado a un aparato denominado **conmutador**, que provoca que la corriente cambie de dirección y que la bobina rote. Este conmutador consta de un anillo dividido, con un extremo del bucle conectado a cada mitad del mismo, como muestra la figura 27.29. La corriente en el bucle cambia dos veces de dirección por cada rotación completa.

Si el bucle único se sustituye con una bobina que consta de muchos bucles estrechamente devanados, el momento de torsión sobre la bobina se encuentra al multiplicar el momento de torsión sobre un bucle, τ_1 de la ecuación 27.13, por el número de vueltas (bucles en la bobina), N:

$$\tau = N\tau_1 = NiAB\operatorname{sen}\theta. \tag{27.14}$$

¿Se cumple esta expresión para el momento de torsión para otras formas con área A que no sean cuadradas? La respuesta es sí.

27.4 Ejercicio en clase

Una bobina consta de un bucle circular de radio $r = 5.13$ cm y tiene $N = 47$ vueltas. Una corriente, $i = 1.27$ A, fluye por la bobina, que está dentro de un campo magnético homogéneo de intensidad 0.911 T. ¿Cuál es el momento de torsión máximo sobre la bobina debido al campo magnético?

a) 0.148 N m *b*) 0.211 N m *c*) 0.350 N m *d*) 0.450 N m *e*) 0.622 N m

27.6 Momento dipolar magnético

Un bucle conductor de corriente puede describirse con un parámetro, que contiene información sobre una característica fundamental del bucle en un campo magnético. La magnitud del **momento dipolar magnético**, $\vec{\mu}$, de un bucle de alambre conductor de corriente se define como

$$\mu = NiA \tag{27.15}$$

donde N es el número de vueltas, i es la corriente por el alambre y A es al área de los bucles. La dirección del momento dipolar magnético está dada por la regla de la mano derecha 2 y es la dirección del vector normal unitario, $\hat{n}$. Al usar la ecuación 27.15, podemos volver a escribir la ecuación 27.14 como

$$\tau = (NiA)B \operatorname{sen}\theta = \mu B \operatorname{sen}\theta. \tag{27.16}$$

El momento de torsión sobre un momento dipolar magnético está dado por

$$\vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{B}. \tag{27.17}$$

Es decir, el momento de torsión sobre una bobina de alambre conductor de corriente es el producto vectorial del momento dipolar magnético de la bobina y el campo magnético.

Un dipolo magnético tiene energía potencial en un campo magnético externo. Si el momento dipolar se alinea con el campo magnético, el dipolo tiene su mínima energía potencial. Si el momento dipolar se orienta en dirección opuesta al campo externo, el dipolo tiene su máxima energía potencial. A partir del capítulo 10, el trabajo realizado por un momento de torsión es

$$W = \int_{\theta_0}^{\theta} \tau(\theta')\, d\theta'. \tag{27.18}$$

Al usar el teorema del trabajo y la energía y la ecuación 27.16, y haciendo $\theta_0 = 90°$, podemos expresar la energía potencial magnética, U, de un dipolo magnético en un campo magnético externo, $\vec{B}$, como

$$W = \int_{\theta_0}^{\theta} \tau(\theta')\, d\theta' = \int_{\theta_0}^{\theta} \mu B \operatorname{sen}\theta'\, d\theta' = -\mu B \cos\theta' \Big|_{\theta_0}^{\theta} = U(\theta) - U(90°),$$

o bien,

$$U(\theta) = -\mu B \cos\theta = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}, \tag{27.19}$$

donde θ es el ángulo entre el momento dipolar magnético y el campo magnético externo.

El valor mínimo, $-\mu B$, de la energía potencial de un dipolo magnético en un campo magnético externo se alcanza cuando el vector del momento dipolar magnético es paralelo al vector del campo magnético externo, y el valor máximo, $+\mu B$, resulta cuando los dos vectores son antiparalelos (vea la figura 27.30). Esta dependencia de la energía potencial con respecto a la orientación ocurre en diversas situaciones físicas, de las cuales los dipolos magnéticos en campos magnéticos externos son un modelo simple. Hasta el momento, los únicos dipolos magnéticos que hemos analizado son bucles conductores de corriente. No obstante, existen otros tipos de dipolos magnéticos, incluyendo barras imantadas e incluso la Tierra. Además, partículas elementales cargadas como los protones tienen momentos dipolares magnéticos intrínsecos.

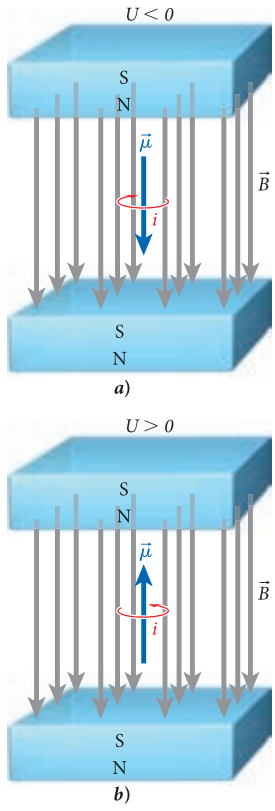


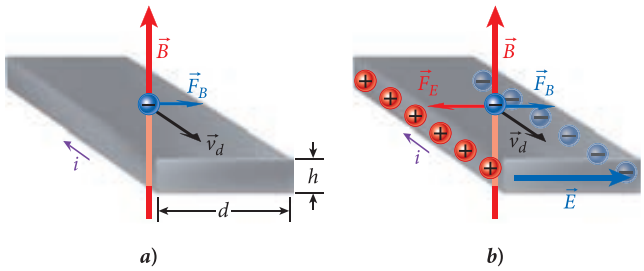
FIGURA 27.30 Vector del momento dipolar magnético en un campo magnético externo: *a*) el dipolo magnético y el campo magnético externo son paralelos, resultando en una energía potencial negativa; *b*) el dipolo magnético y el campo magnético externo son antiparalelos, resultando en una energía potencial positiva.

27.3 Oportunidad de autoevaluación

¿Cuál es la diferencia máxima en energía potencial magnética entre dos orientaciones de un bucle con área 0.100 m^2 que conduce una corriente de 2.00 A en un campo magnético constante de 0.500 T de magnitud?

27.7 Efecto Hall

Considere un alambre que conduce una corriente, i, que fluye en dirección perpendicular a un campo magnético, $\vec{B}$ [figura 27.31*a*)]. Los electrones en el conductor se mueven con una velocidad $\vec{v}_d$ en dirección opuesta a la corriente. Los electrones en movimiento experimentan una fuerza perpendicular a su velocidad, haciendo que se muevan hacia un borde del conductor. Al cabo de algún tiempo, muchos electrones se han movido hacia un borde del conductor, creando una carga negativa neta en ese borde y dejando una carga positiva neta sobre el borde opuesto del conductor. Esta distribución de carga crea un campo eléctrico, $\vec{E}$, que ejerce una fuerza sobre los electrones en dirección opuesta a la ejercida por el campo magnético. Cuando la magnitud



a) *b*)

FIGURA 27.31 *a*) Conductor que lleva una corriente en un campo magnético. Los portadores de carga son electrones. *b*) Los electrones se han movido hacia un lado del conductor, dejando una carga positiva neta en el lado opuesto. Esta distribución de carga crea un campo eléctrico. La diferencia de potencial a través del conductor es la diferencia de potencial Hall.

de la fuerza ejercida sobre los electrones por el campo eléctrico es igual a la magnitud de la fuerza ejercida sobre éstos por el campo magnético, el número de electrones neto sobre los bordes del conductor ya no cambia con el tiempo. Este resultado se denomina **efecto Hall**. La diferencia de potencial, ΔV_H, entre los bordes del conductor cuando se alcanza el equilibrio se denomina **diferencia de potencial Hall**, dada por

$$\Delta V_H = Ed, \tag{27.20}$$

donde d es el ancho del conductor y E es la magnitud del campo eléctrico creado. (Vea el capítulo 23 para la relación entre la diferencia de potencial eléctrica y el campo eléctrico constante.)

El efecto Hall puede usarse para demostrar que los portadores de carga en metales tienen carga negativa. Si estos portadores fueran positivos y se movieran en dirección de la corriente mostrada en la figura 27.31*a*), estas cargas positivas se acumularían sobre el mismo borde del conductor, al igual que los electrones en la figura 27.31*b*), dando un campo eléctrico con signo opuesto. Así, los portadores de carga en conductores tienen carga negativa y deben ser electrones. El efecto Hall también establece que en algunos semiconductores los portadores de carga son huecos de electrones (electrones faltantes), que parecen ser portadores de carga positiva.

El efecto Hall también puede usarse para determinar un campo magnético al medir la corriente que fluye a través del conductor y el campo eléctrico resultante a través del conductor. Para obtener la fórmula del campo magnético, empezamos con la condición de equilibrio del efecto Hall; es decir, que las magnitudes de las fuerzas magnética y eléctrica son iguales:

$$F_E = F_B \Rightarrow eE = v_d Be \Rightarrow B = \frac{E}{v_d} = \frac{\Delta V_H}{v_d d}, \tag{27.21}$$

donde en el último paso se sustituye E de la ecuación 27.20. En el capítulo 25 vimos que la velocidad de deriva, v_d, de un electrón en un conductor puede relacionarse con la magnitud de la densidad de corriente, J, en el conductor:

$$J = \frac{i}{A} = nev_d,$$

donde A es el área de la sección transversal del conductor y n es el número de electrones por unidad de volumen en el conductor. Como muestra la figura 27.31*a*), el área de la sección transversal está dada por $A = dh$, donde d es el ancho y h es la altura del conductor. Al despejar la velocidad de deriva y sustituir hd por A en $i/A = nev_d$ se obtiene

$$v_d = \frac{i}{Ane} = \frac{i}{hdne}.$$

Al sustituir esta expresión para v_d en la ecuación 27.21, tenemos

$$B = \frac{\Delta V_H}{v_d d} = \frac{\Delta V_H dhne}{id} = \frac{\Delta V_H hne}{i}. \tag{27.22}$$

Por lo tanto, la ecuación 27.22 proporciona la intensidad del campo magnético (magnitud) a partir de un valor medido de la diferencia de potencial Hall, ΔV_H, y la altura conocida, h, y la densidad de los portadores de carga, n, del conductor. De manera equivalente, una forma reordenada de la ecuación 27.22 puede usarse para encontrar el voltaje Hall si se conoce la intensidad del campo magnético:

$$\Delta V_H = \frac{iB}{neh}. \tag{27.23}$$

EJEMPLO 27.5 Efecto Hall

Suponga que usamos una sonda Hall para medir la magnitud de un campo magnético constante. La sonda Hall es una cinta de cobre de altura, h, igual a 2.00 mm. Medimos un voltaje de 0.250 μV a través de la sonda cuando por ésta circula una corriente de 1.25 A.

PROBLEMA

¿Cuál es la magnitud del campo magnético?

SOLUCIÓN

El campo magnético está dado por la ecuación 27.22:

$$B = \frac{\Delta V_H hne}{i}.$$

Nos proporcionaron los valores de V_H, h e i, y se conoce e. La densidad de los electrones, n, se define como el número de electrones por unidad de volumen:

$$n = \frac{\text{número de electrones}}{\text{volumen}}.$$

La densidad del cobre es $\rho_{Cu} = 8.96\ \text{g/cm}^3 = 8\,960\ \text{kg/m}^3$, y 1 mol de cobre tiene una masa de 63.5 g y $6.02 \cdot 10^{23}$ átomos. Cada átomo de cobre tiene un electrón de conducción. Así, la densidad de los electrones es

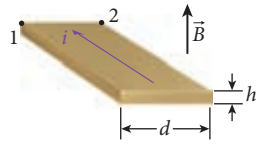
$$n = \left(\frac{1\ \text{electrón}}{1\ \text{átomo}}\right)\left(\frac{6.02\cdot 10^{23}\ \text{átomos}}{63.5\ \text{g}}\right)\left(\frac{8.96\ \text{g}}{1\ \text{cm}^3}\right)\left(\frac{1.0\cdot 10^{6}\ \text{cm}^3}{1\ \text{m}^3}\right) = 8.49\cdot 10^{28}\ \frac{\text{electrones}}{\text{m}^3}.$$

Ahora podemos calcular la magnitud del campo magnético:

$$B = \frac{\left(0.250\cdot 10^{-6}\ \text{V}\right)(0.002\ \text{m})\left(8.49\cdot 10^{28}\ \frac{\text{electrones}}{\text{m}^3}\right)\left(1.602\cdot 10^{-19}\ \text{C}\right)}{1.25\ \text{A}} = 5.44\ \text{T}.$$

27.5 Ejercicio en clase

Por un conductor de cobre circula una corriente, i = 1.41 A, perpendicular a un campo magnético constante B = 4.94 T. El conductor mide d = 0.100 m de ancho y h = 2.00 mm de altura. ¿Cuál es la diferencia de potencial eléctrico entre los puntos 1 y 2?



a) $2.56 \cdot 10^{-9}$ V

b) $5.12 \cdot 10^{-9}$ V

c) $7.50 \cdot 10^{-8}$ V

d) $2.56 \cdot 10^{-7}$ V

e) $9.66 \cdot 10^{-7}$ V

LO QUE HEMOS APRENDIDO | GUÍA DE ESTUDIO PARA EXAMEN

- Las líneas de campo magnético indican la dirección de un campo magnético en el espacio. Las líneas de campo magnético no terminan en los polos magnéticos, sino que forman bucles cerrados.
- La fuerza magnética sobre una partícula con carga q que se mueve con velocidad $\vec{v}$ en un campo magnético, $\vec{B}$, está dada por $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$. La regla de la mano derecha 1 proporciona la dirección de la fuerza.
- Para una partícula con carga q que se mueve con velocidad v perpendicular a un campo magnético de magnitud B, la magnitud de la fuerza magnética sobre la partícula cargada en movimiento es $F = |q|vB$.
- La unidad del campo magnético es la tesla, abreviada T.
- La magnitud media del campo magnético de la Tierra en la superficie es aproximadamente $0.5 \cdot 10^{-4}$ T.
- Una partícula con masa m y carga q, que se mueve con velocidad v perpendicular a un campo magnético con magnitud B, tiene una trayectoria circular con radio $r = mv/|q|B$.
- La frecuencia de un ciclotrón, ω, de una partícula con carga q y masa m que se mueve en una órbita circular en un campo magnético constante de magnitud B está dada por $\omega = |q|B/m$.
- La fuerza ejercida por un campo magnético, $\vec{B}$, sobre una longitud de alambre, $\vec{L}$, que conduce corriente, i, está dada por $\vec{F} = i\vec{L} \times \vec{B}$. La magnitud de esta fuerza es $F = iLB$ sen θ, donde θ es el ángulo entre la dirección de la corriente y la dirección del campo magnético.
- La magnitud del momento de torsión sobre un bucle que conduce corriente, i, en un campo magnético con magnitud B es $\tau = iAB$ sen θ, donde A es el área del bucle y θ es el ángulo entre un vector normal unitario del bucle y la dirección del campo magnético. La regla de la mano derecha 2 proporciona la dirección del vector normal unitario del bucle.
- La magnitud del momento dipolar magnético de una bobina que conduce corriente, i, está dada por $\mu = NiA$, donde N es el número de bucles (vueltas) y A es el área de un bucle. La dirección del momento dipolar magnético está dada por la regla de la mano derecha 2 y es la dirección en la que apunta el vector normal unitario.
- El efecto Hall resulta cuando una corriente, i, que fluye por un conductor con altura h en un campo magnético con magnitud B, produce una diferencia de potencial a través del conductor (la diferencia de potencial Hall), dada por $\Delta V_H = iB/neh$, donde n es la densidad de electrones por unidad de volumen y e es la magnitud de la carga de un electrón.

TÉRMINOS CLAVE

imanes permanentes, p. 865
polo norte magnético, p. 865
polo sur magnético, p. 865
campo magnético, p. 866
líneas de campo magnético, p. 866
cinturones de Van Allen, p. 867
auroras boreales, p. 867
auroras australes, p. 867
declinación magnética, p. 867
tesla, p. 869
frecuencia del ciclotrón, p. 874
espectrómetro de masas, p. 875
levitación magnética, p. 877
conmutador, p. 880
momento dipolar magnético, p. 881
efecto Hall, p. 882
diferencia de potencial Hall, p. 882

NUEVOS SÍMBOLOS Y ECUACIONES

$\vec{B}$, campo magnético

$\vec{F}_B = q\vec{v} \times \vec{B}$, fuerza magnética sobre una partícula cargada

$\vec{F}_B = i\vec{L} \times \vec{B}$, fuerza magnética sobre un alambre conductor de corriente

$\vec{\mu}$, momento dipolar magnético

$\Delta V_H = iB/neh$, diferencia de potencial Hall

RESPUESTAS A LAS OPORTUNIDADES DE AUTOEVALUACIÓN

27.1 Partícula 1: $F_B = qvB \operatorname{sen}\theta = (6.15 \cdot 10^{-6}\ \text{C})(465\ \text{m/s})(0.165\ \text{T})(\operatorname{sen} 30.0°) = 2.36 \cdot 10^{-4}\ \text{N}$.

Partícula 2: $F_B = qvB \operatorname{sen}\theta = (6.15 \cdot 10^{-6}\ \text{C})(465\ \text{m/s})(0.165\ \text{T})(\operatorname{sen} 90.0°) = 4.72 \cdot 10^{-4}\ \text{N}$.

Partícula 3: $F_B = qvB \operatorname{sen}\theta = (6.15 \cdot 10^{-6}\ \text{C})(465\ \text{m/s})(0.165\ \text{T})(\operatorname{sen} 150.0°) = 2.36 \cdot 10^{-4}\ \text{N}$

27.2 *a*) positiva

b) desacelerando

c) no (en consecuencia, otra fuerza debe estar actuando sobre la partícula para desacelerarla).

27.3 $\Delta U = U_{\text{máx}} - U_{\text{mín}} = 2\mu B = 2iAB = 2(2.00\ \text{A})(0.100\ \text{m}^2)(0.500\ \text{T}) = 0.200\ \text{J}$.

PRÁCTICA PARA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

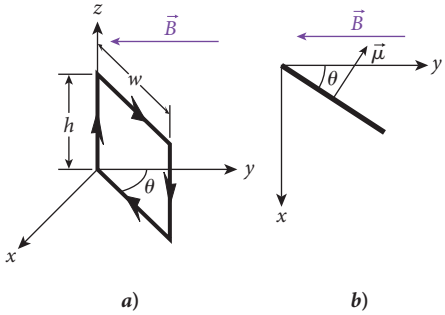
Lineamientos para resolución de problemas

1. Cuando trabaje con campos y fuerzas magnéticas, debe trazar un diagrama claro de la situación del problema en tres dimensiones. A menudo, un dibujo por separado de los vectores velocidad y de campo magnético (o de los vectores longitud y de campo) es útil para visualizar el plano en el que están, puesto que la fuerza magnética es perpendicular a ese plano.

2. Recuerde que las reglas de la mano derecha se aplican a cargas y corrientes positivas. Si una carga o una corriente es negativa, puede usar la regla de la mano derecha, pero entonces la fuerza es en dirección opuesta.

3. Una partícula que está tanto en un campo eléctrico como en un campo magnético experimenta una fuerza eléctrica, $\vec{F}_E = q\vec{E}$, y una fuerza magnética, $\vec{F}_B = q\vec{v} \times \vec{B}$. Asegúrese de tomar la suma vectorial de las fuerzas individuales.

PROBLEMA RESUELTO 27.3 Momento de torsión sobre un bucle conductor de corriente



a) *b*)

FIGURA 27.32 *a*) Bucle rectangular que transporta una corriente en un campo magnético. *b*) Vista del bucle rectangular viendo hacia el plano *xy*. El momento dipolar magnético es perpendicular al plano del bucle, con una dirección determinada por la regla de la mano derecha 2.

Un bucle rectangular, de altura $h = 6.50$ cm y ancho $w = 4.50$ cm, está en un campo magnético uniforme de magnitud $B = 0.250$ T, que apunta en la dirección y negativa [figura 27.32*a*)]. El bucle forma un ángulo de $\theta = 33.0°$ con el eje y, como muestra la figura. El bucle transporta una corriente de magnitud $i = 9.00$ A en la dirección indicada por las flechas.

PROBLEMA

¿Cuál es la magnitud del momento de torsión sobre el bucle alrededor del eje z?

SOLUCIÓN

PIENSE

El momento de torsión sobre el bucle es igual al producto cruz vectorial del momento dipolar magnético y el campo magnético. El momento dipolar magnético es perpendicular al plano del bucle, con la dirección dada por la regla de la mano derecha 2.

ESBOCE

La figura 27.32*b*) es una vista del bucle viendo hacia el plano *xy*.

INVESTIGUE

La magnitud del momento dipolar magnético del bucle es

$$\mu = NiA = iwh. \tag{i}$$

La magnitud del momento de torsión sobre el bucle es

$$\tau = \mu B \operatorname{sen} \theta_{\mu B}, \tag{ii}$$

donde $\theta_{\mu B}$ es el ángulo entre el momento dipolar magnético y el campo magnético. A partir de la figura 27.32*b*) podemos ver que

$$\theta_{\mu B} = \theta + 90°. \tag{iii}$$

SIMPLIFIQUE

Podemos combinar las ecuaciones (i), (ii) y (iii) para obtener

$$\tau = iwhB \operatorname{sen}(\theta + 90°).$$

CALCULE

Al escribir los valores numéricos, obtenemos

$$\begin{aligned}\tau &= (9.00\ \text{A})(4.50\cdot 10^{-2}\ \text{m})(6.50\cdot 10^{-2}\ \text{m})(0.250\ \text{T})\ \operatorname{sen}(33.0° + 90°)\\ &= 0.0055195\ \text{N m}.\end{aligned}$$

REDONDEE

Mostramos nuestro resultado con tres cifras:

$$\tau = 5.52\cdot 10^{-3}\ \text{N m}.$$

VUELVA A REVISAR

La magnitud de la fuerza sobre cada uno de los segmentos verticales del bucle es

$$F_B = ihB = (9.00\ \text{A})(6.50\cdot 10^{-2}\ \text{m})(0.250\ \text{T}) = 0.146\ \text{N}.$$

Entonces, la magnitud del momento de torsión es la magnitud de la fuerza sobre el segmento vertical que no está a lo largo del eje z multiplicada por el brazo de momento (que es w) multiplicado por el seno del ángulo entre la fuerza y el brazo de momento:

$$\tau = Fw \operatorname{sen}(33.0° + 90°) = 0.146\ \text{N}(4.5\cdot 10^{-2}\ \text{m})\ \operatorname{sen}(33.0° + 90°) = 5.52\cdot 10^{-3}\ \text{N m}.$$

Esto es igual que el resultado calculado antes.

PREGUNTAS DE OPCIÓN MÚLTIPLE

27.1 Un campo magnético está orientado en cierta dirección en un plano horizontal. Un electrón se mueve en cierta dirección en este plano. Para esta situación, hay

a) una dirección posible para la fuerza magnética sobre el electrón.

b) hay dos direcciones posibles para la fuerza magnética sobre el electrón.

c) hay una infinidad de direcciones posibles para la fuerza magnética sobre el electrón.

27.2 Una partícula con carga q está en reposo cuando repentinamente se enciende un campo magnético. El campo apunta en la dirección z. ¿Cuál es la dirección de la fuerza neta que actúa sobre la partícula cargada?

a) En la dirección x.
b) En la dirección y.
c) La fuerza neta es cero.
d) En la dirección z.

27.3 ¿Qué opción presenta una situación con la mayor frecuencia de un ciclotrón?

a) Un electrón con velocidad v en un campo magnético con magnitud B.

b) Un electrón con velocidad $2v$ en un campo magnético con magnitud B.

c) Un electrón con velocidad $v/2$ en un campo magnético con magnitud B.

d) Un electrón con velocidad $2v$ en un campo magnético con magnitud $B/2$.

e) Un electrón con velocidad $v/2$ en un campo magnético con magnitud $2B$.

27.4 En el efecto Hall, una diferencia de potencial producida a través de un conductor de grosor finito en un campo magnético por una corriente que circula por el conductor está dada por

a) el producto de la densidad de electrones, la carga de un electrón y el grosor del conductor dividido entre el producto de las magnitudes de la corriente y el campo magnético;

b) el recíproco de la expresión descrita en la opción *a*);

c) el producto de la carga de un electrón y el grosor del conductor dividido entre el producto de la densidad de electrones y las magnitudes de la corriente y el campo magnético;

d) el recíproco de la expresión descrita en la opción *c*);

e) ninguna de las anteriores.

27.5 Un electrón (con carga $-e$ y masa m_e) que se mueve en la dirección x positiva entra en un selector de velocidades, que consta de campos eléctrico y magnético cruzados: $\vec{E}$ está dirigido en la dirección y positiva y $\vec{B}$ está dirigido en la dirección z positiva. Para una velocidad v (en la dirección x positiva), la fuerza neta sobre el electrón es cero, y el electrón se mueve en línea recta a través del selector de velocidades. ¿Con qué velocidad se mueve un protón (con carga $+e$ y masa $m_p = 1\,836\,m_e$) en línea recta a través del selector de velocidades?

a) v *b*) $-v$ *c*) $v/1\,836$ *d*) $-v/1\,836$

27.6 ¿En qué dirección actúa una fuerza magnética sobre un electrón que se mueve en la dirección x positiva en un campo magnético que apunta en la dirección z positiva?

a) En la dirección y positiva.
b) En la dirección y negativa.
c) En la dirección x negativa.
d) En cualquier dirección en el plano xy.

27.7 Una partícula cargada se mueve en un campo magnético constante. Establezca si cada una de las siguientes afirmaciones relacionada con la fuerza magnética ejercida sobre la partícula es falsa o verdadera. (Suponga que el campo magnético no es paralelo ni antiparalelo a la velocidad.)

a) No realiza trabajo sobre la partícula.

b) Puede incrementar la velocidad de la partícula.

c) Puede cambiar la velocidad de la partícula.

d) Sólo puede actuar sobre la partícula cuando ésta se encuentra en movimiento.

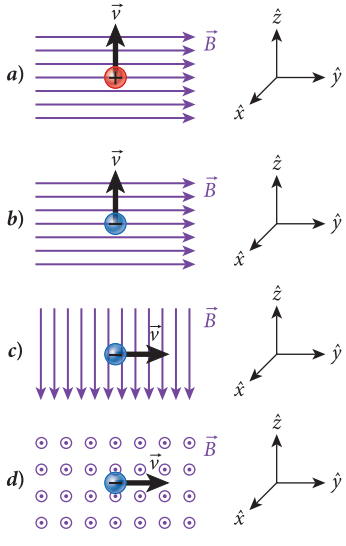
e) No modifica la energía cinética de la partícula.

27.8 Un electrón se mueve en trayectoria circular con radio r_i en un campo magnético constante. ¿Cuál es el radio final de la trayectoria cuando el campo magnético se duplica?

a) $\frac{r_i}{4}$ *b*) $\frac{r_i}{2}$ *c*) r_i *d*) $2r_i$ *e*) $4r_i$

PREGUNTAS

27.9 En el sistema de coordenadas xyz, trace y especifique (en términos de los vectores unitarios $\hat{x}$, $\hat{y}$ y $\hat{z}$) la dirección de la fuerza magnética sobre cada una de las partículas en movimiento que muestra la figura. *Nota*: El eje y positivo es hacia la derecha; el eje z positivo es hacia la parte superior de la página y el eje x positivo está dirigido hacia fuera de la página.



27.10 Una partícula cargada con masa m, carga q y velocidad v entra en un campo magnético de magnitud B y dirección perpendicular a la velocidad inicial de la partícula. ¿Cuál es el trabajo realizado por el campo magnético sobre la partícula? ¿Cómo afecta esto el movimiento de la partícula?

27.11 Un electrón se mueve con velocidad constante. Cuando entra en un campo eléctrico perpendicular a su velocidad, el electrón sigue una trayectoria _____ . Cuando el electrón entra en un campo magnético perpendicular a su velocidad, sigue una trayectoria _____ .

27.12 Un protón, que se mueve en la dirección y negativa en un campo magnético, experimenta una fuerza de magnitud F, que actúa en la dirección x negativa.

a) ¿Cuál es la dirección del campo magnético que produce esta fuerza?

b) ¿Su respuesta cambia si en el planteamiento del problema sustituye la palabra "protón" por "electrón"?

27.13 Para una región con densidad de corriente cero, sería matemáticamente posible definir un potencial magnético escalar análogo al potencial electrostático: $V_B(\vec{r}) = -\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{B}\cdot d\vec{s}$, o bien, $\vec{B}(\vec{r}) = -\nabla V_B(\vec{r})$. Sin embargo, esto aún no se ha hecho. Explique por qué no.

27.14 Un alambre conductor de corriente se coloca en un gran campo magnético uniforme, $\vec{B}$. No obstante, el alambre no experimenta ninguna fuerza. Explique cómo es posible esto.

27.15 Una partícula cargada se mueve sólo bajo la influencia de un campo eléctrico. ¿Es posible que la partícula se mueva con velocidad constante? ¿Qué ocurre si el campo eléctrico se sustituye por un campo magnético?

27.16 Una partícula cargada se mueve con velocidad v, a un ángulo θ con respecto al eje z. En el instante $t = 0$, entra en una región del espacio en la que hay un campo magnético de magnitud B en la dirección z positiva. ¿Cuándo sale de esta región en el espacio?

27.17 Una partícula cargada se mueve horizontalmente desde el noroeste hacia el sureste en una región del espacio en la que el campo magnético de la Tierra está dirigido horizontalmente hacia el norte. ¿Cuál es la dirección de la fuerza magnética sobre el electrón?

27.18 En la superficie terrestre hay un campo eléctrico que apunta aproximadamente en dirección vertical hacia abajo y tiene una magnitud de 150 N/m. Suponga que tiene un cañón de electrones ajustable (puede liberar electrones con energía cinética arbitraria) y un detector para determinar la dirección de movimiento de los electrones cuando salen del cañón. Explique cómo podría usar el cañón para encontrar la dirección hacia el polo norte magnético. Específicamente, ¿qué energía cinética deben tener los electrones? (*Sugerencia*: Tal vez sea más fácil pensar en encontrar en qué dirección está el este o el oeste.)

27.19 El trabajo realizado por el campo magnético sobre una partícula cargada en movimiento en un ciclotrón es cero. ¿Cómo, entonces, puede usarse el ciclotrón como acelerador de partículas, y qué característica esencial del movimiento de la partícula hace posible lo anterior?

PROBLEMAS

Una • y dos •• indican un nivel creciente de dificultad.

Sección 27.2

27.20 Un protón que se mueve con una velocidad de $4.0 \cdot 10^5$ m/s en la dirección y positiva entra en un campo magnético uniforme de 0.40 T que apunta en la dirección x positiva. Calcule la magnitud de la fuerza sobre el protón.

27.21 La magnitud de la fuerza eléctrica sobre una partícula con carga $-2e$ que se mueve con velocidad $v = 1.0 \cdot 10^5$ m/s es $3.0 \cdot 10^{-18}$ N. ¿Cuál es la magnitud de la componente del campo magnético perpendicular a la dirección de movimiento de la partícula?

•**27.22** Una partícula con una carga de +10.0 μC se mueve a 300. m/s en la dirección z positiva.

a) Encuentre el campo magnético mínimo requerido para mantener la partícula en movimiento rectilíneo a velocidad constante si hay un campo eléctrico uniforme de magnitud 100. V/m que apunta en la dirección y positiva.

b) Encuentre el campo magnético mínimo requerido para mantener la partícula en movimiento rectilíneo a velocidad constante si hay un campo eléctrico uniforme de magnitud 100. V/m que apunta en la dirección z positiva.

•**27.23** Una partícula con carga de 20.0 μC se mueve a lo largo del eje x con una velocidad de 50.0 m/s. Entra en un campo magnético dado por $\vec{B} = 0.300\,\hat{y} + 0.700\,\hat{z}$, en teslas. Determine la magnitud y la dirección de la fuerza magnética sobre la partícula.

••**27.24** El campo magnético en una región del espacio (donde $x > 0$ y $y > 0$) está dado por $\vec{B} = (x - az)\hat{y} + (xy - b)\hat{z}$, donde a y b son constantes positivas. Un electrón que se mueve a velocidad constante, $\vec{v} = v_0\hat{x}$, entra en esta región. ¿Cuáles son las coordenadas de los puntos en los que la fuerza neta que actúa sobre el electrón es cero?

Sección 27.3

27.25 Un protón es acelerado desde el reposo por una diferencia de potencial de 400. V. El protón entra en un campo magnético uniforme y sigue una trayectoria circular de 20.0 cm de radio. Determine la magnitud del campo magnético.

27.26 Un electrón con velocidad de $4.0 \cdot 10^5$ m/s entra en un campo magnético uniforme de magnitud 0.040 T a un ángulo de 35° con las líneas de campo magnético. El electrón sigue una trayectoria helicoidal.

a) Determine el radio de la trayectoria helicoidal.

b) ¿Cuánto más se mueve el electrón después de completar un círculo?

27.27 Una partícula con masa m y carga q se mueve tanto en un campo eléctrico como en un campo magnético, $\vec{E}$ y $\vec{B}$. La partícula tiene una velocidad $\vec{v}$, cantidad de movimiento $\vec{p}$, y energía cinética K. Encuentre expresiones generales para $d\vec{p}/dt$ y dK/dt, en términos de estas siete cantidades.

27.28 La Tierra es bombardeada por partículas provenientes del espacio exterior denominadas muones, cuya carga es idéntica a la de un electrón, pero son mucho más pesadas que éste ($m = 1.88 \cdot 10^{-28}$ kg). Suponga que en un laboratorio se establece un intenso campo magnético ($B = 0.50$ T) y que muones entran en este campo con una velocidad de $3.0 \cdot 10^6$ m/s formando un ángulo recto con el campo. ¿Cuál es el radio de la órbita resultante del muón?

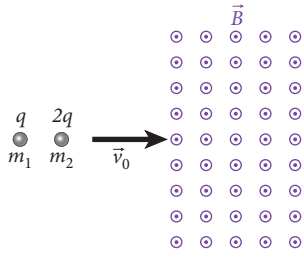
27.29 Un electrón en un campo magnético se mueve en contra del movimiento de las manecillas del reloj sobre un círculo en el plano xy, con una frecuencia del ciclotrón de $\omega = 1.2 \cdot 10^{12}$ Hz. ¿Cuál es el campo magnético, $\vec{B}$?

27.30 Un electrón con energía igual a $4.00 \cdot 10^2$ eV y un electrón con energía igual a $2.00 \cdot 10^2$ eV están atrapados en un campo magnético uniforme y se mueven en trayectorias circulares en un plano perpendicular al campo magnético. ¿Cuál es la razón de los radios de sus órbitas?

•**27.31** Un protón con una velocidad inicial dada por $(1.0\hat{x} + 2.0\hat{y} + 3.0\hat{z})(10^5$ m/s) entra en un campo magnético dado por $(0.50\text{ T})\hat{z}$. Describa el movimiento del protón.

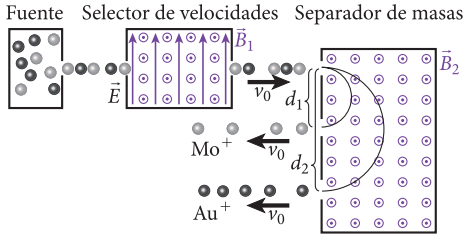
•**27.32** Inicialmente en reposo, una pequeña esfera de cobre con masa de $3.00 \cdot 10^{-6}$ kg y una carga de $5.00 \cdot 10^{-4}$ C es acelerada a través de una diferencia de potencial de 7 000. V antes de entrar en un campo magnético de magnitud 4.00 T, dirigido perpendicularmente a su velocidad. ¿Cuál es el radio de curvatura del movimiento de la esfera en el campo magnético?

•**27.33** Dos partículas con masas m_1 y m_2 y cargas q y $2q$ se mueven con la misma velocidad, v, y entran por el mismo punto en un campo magnético de intensidad B, como ilustra la figura. En el campo magnético se mueven en semicírculos con radios R y $2R$. ¿Cuál es la razón de sus masas? ¿Es posible aplicar un campo eléctrico que haga que las partículas se mueven en línea recta en el campo magné-



tico? En caso afirmativo, ¿cuáles deben ser la magnitud y la dirección del campo?

•**27.34** La figura muestra un esquema de un espectrómetro de masas simple, que consta de un selector de velocidades y un detector de partículas, que se usa para separar átomos ionizados ($q = +e = 1.60 \cdot 10^{-19}$ C) de oro (Au) y molibdeno (Mo). El campo eléctrico dentro del selector de velocidades tiene una magnitud de $E = 1.789 \cdot 10^4$ V/m y apunta hacia la parte superior de la página, y el campo magnético tiene magnitud $B_1 = 1.00$ T y apunta fuera de la página.



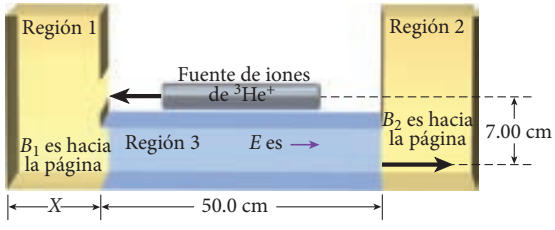
a) Trace el vector de fuerza eléctrica, $\vec{F}_E$, y el vector de fuerza magnética, $\vec{F}_B$, que actúan sobre los iones dentro del selector de velocidades.

b) Calcule la velocidad, v_0, de los iones que pasan a través del selector de velocidades (los que se desplazan en línea recta). ¿Depende v_0 del tipo de ion (oro contra molibdeno) o es la misma para ambos tipos de iones?

c) Escriba la ecuación para el radio de la trayectoria semicircular de un ion en el detector de partículas: $R = R(m, v_0, q, B_2)$.

d) Los iones de oro (representados por los círculos negros) salen del detector de partículas a una distancia $d_2 = 40.00$ cm de la ranura de entrada, mientras que los iones de molibdeno (representados por los círculos grises) salen del detector de partículas a una distancia $d_1 = 19.81$ cm de la ranura de entrada. La masa de un ion de oro es $m_{oro} = 3.27 \cdot 10^{-25}$ kg. Calcule la masa de un ion de molibdeno.

••**27.35** En la figura se muestra un pequeño acelerador de partículas para acelerar iones de $^3He^+$ Los iones de $^3He^+$ salen de la fuente de iones con una energía cinética de 4.00 keV. Las regiones 1 y 2 contienen campos magnéticos dirigidos hacia la página, y la región 3 contiene un campo eléctrico dirigido de izquierda a derecha. El haz de iones de $^3He^+$ sale del acelerador desde un orificio a la derecha que está 7.00 cm por debajo de la fuente, como ilustra la figura.



a) Si $B_1 = 1.00$ T y la región 3 mide 50.0 cm de largo con $E = 60.0$ kV/m, ¿qué valor debe tener B_2 para que los iones se muevan directamente a través del orificio de salida después de ser acelerados en la región 3?

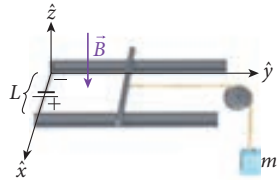
b) ¿Cuál debe ser el ancho mínimo X de la región 1?

c) ¿Cuál es la velocidad de los iones cuando salen del acelerador?

Sección 27.4

27.36 Un alambre recto de 2.00 m de longitud conduce una corriente de 24.0 A. Se coloca sobre una mesa horizontal en un campo magnético horizontal uniforme. El alambre forma un ángulo de 30.0° con las líneas de campo magnético. Si la magnitud de la fuerza sobre el alambre es 0.500 N, ¿cuál es la magnitud del campo magnético?

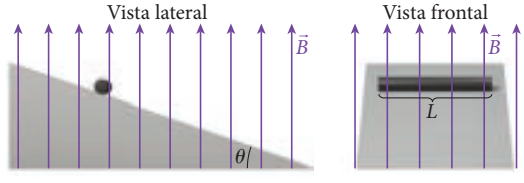
27.37 Como se muestra en la figura, un conductor recto paralelo al eje x puede deslizarse sin fricción en la parte superior de dos rieles conductores horizontales que son paralelos al eje y y a una distancia de $L = 0.200$ m de separación, en un campo magnético vertical de 1.00 T. A través del conductor se mantiene una corriente 20.0 A. Si una cuerda se ata exactamente en el centro del conductor y pasa por una polea sin fricción, ¿qué masa m suspendida de la cuerda permite que el conductor esté en reposo?



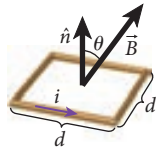
27.38 Un alambre de cobre de 0.500 mm de radio conduce una corriente en el Ecuador de la Tierra. En el supuesto de que el campo magnético de la Tierra tiene una magnitud de 0.500 G en el Ecuador y es paralelo a la superficie terrestre y que la corriente en el alambre fluye hacia el este, ¿qué corriente es necesaria para que el alambre levite?

•**27.39** Una lámina de cobre, de 1.0 m de largo por 0.50 m de ancho y grosor 1.0 mm, está orientada de modo que su mayor área superficial es perpendicular a un campo magnético de intensidad 5.0 T. La lámina conduce una corriente de 3.0 A a lo largo de su longitud. ¿Cuál es la magnitud de la fuerza sobre esta lámina? ¿Cómo se compara esta magnitud con la de la fuerza sobre un delgado alambre de cobre que conduce la misma corriente y está orientado perpendicularmente al mismo campo magnético?

•**27.40** Una barra conductora de longitud L se desliza libremente por un plano inclinado, como se muestra en la figura. El plano está inclinado a un ángulo θ con respecto a la horizontal. Un campo magnético uniforme de intensidad B actúa en la dirección y positiva. Determine la magnitud y la dirección de la corriente que debe haber pasado por la barra a fin de mantener su posición en el plano inclinado.



•**27.41** Un bucle cuadrado de alambre, cuyo lado mide $d = 8.0$ cm, transporta una corriente de magnitud $i = 0.15$ A y tiene libertad de rotar. Está colocado entre los polos de un electroimán que produce un campo magnético uniforme de 1.0 T. El bucle está inicial-



mente colocado de modo que su vector normal, $\hat{n}$, está a un ángulo de 35.0° con respecto a la dirección del vector de campo magnético, donde el ángulo θ está definido como ilustra la figura. El alambre es de cobre (con una densidad de $\rho = 8\,960$ kg/m^3), y su diámetro mide 0.50 mm. ¿Cuál es la magnitud de la aceleración angular inicial del bucle cuando se libera?

•**27.42** Un cañón de riel acelera un proyectil a partir del reposo usando la fuerza magnética sobre un alambre conductor de corriente. El alambre tiene un radio $r = 5.1 \cdot 10^{-4}$ m y está hecho de cobre, cuya densidad es $\rho = 8\,960$ kg/m^3. El cañón consta de rieles de longitud $L = 1.0$ m en un campo magnético constante de magnitud $B = 2.0$ T, orientado perpendicularmente al plano definido por los rieles. El alambre forma una conexión eléctrica a través de los rieles en un extremo de éstos. Cuando se dispara, una corriente de $1.00 \cdot 10^4$ A fluye por el alambre, que lo acelera a lo largo de los rieles. Calcule la velocidad final del alambre cuando sale de los rieles. (Ignore la fricción.)

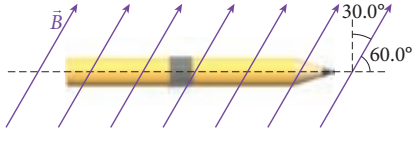
Secciones 27.5 y 27.6

•**27.43** Un bucle cuadrado de alambre de longitud ℓ está en el plano xy, con su centro en el origen y sus lados paralelos a los ejes x y y. Conduce una corriente, i, en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj, según se observa desde el eje z desde la dirección positiva. El bucle está en un campo magnético dado por $\vec{B} = (B_0/a)(z\hat{x} + x\hat{z})$, donde B_0 es la intensidad del campo constante, a es una constante con la dimensión de longitud, y $\hat{x}$ y $\hat{z}$ son vectores unitarios en las direcciones positivas x y z. Calcule la fuerza neta sobre el bucle.

27.44 Una bobina rectangular con 20 vueltas conduce una corriente de 2.00 mA que fluye en dirección contraria al movimiento de las manecillas del reloj. Tiene dos lados que son paralelos al eje y, con longitud de 8.00 cm, y dos lados que son paralelos al eje x, con longitud de 6.00 cm. Un campo magnético uniforme de 50.0 μT actúa en la dirección x positiva. ¿Qué momento de torsión debe aplicarse al bucle para mantenerlo estable?

27.45 Una bobina consta de 120 bucles circulares de alambre de radio 4.8 cm. Una corriente de 0.49 A fluye por la bobina, que está orientada verticalmente y tiene libertad de rotación alrededor de un eje vertical (paralelo al eje z). Experimenta un campo magnético horizontal uniforme en la dirección x positiva. Cuando la bobina se orienta paralela al eje x, una fuerza de 1.2 N aplicada al borde de la bobina en la dirección y positiva puede evitar que rote. Calcule la intensidad del campo magnético.

27.46 Veinte bucles de alambre están enrollados estrechamente alrededor de un lápiz redondo de 6.00 mm de diámetro. Luego, el lápiz se coloca en un campo magnético uniforme de 5.00 T, como presenta la figura. Si una corriente de 3.00 A está presente en la bobina de alambre, ¿cuál es la magnitud del momento de torsión del lápiz?

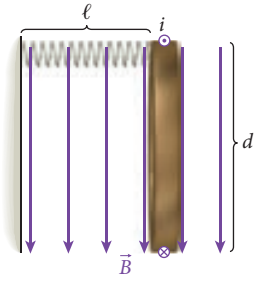


•**27.47** Un alambre de cobre con densidad $\rho = 8\,960$ kg/m^3 se elabora en forma de bucle circular de radio 50.0 cm. El área de la sección transversal es $1.00 \cdot 10^{-5}$ m^2, y al alambre se aplica una diferencia de potencial de 0.012 V. ¿Cuál es la aceleración angular máxima del bucle cuando se coloca en un campo magnético de magnitud 0.25 T? El bucle rota alrededor de un eje a través del diámetro.

27.48 Un galvanómetro simple se elabora de una bobina que consta de N vueltas de alambre de área A. La bobina se conecta a una masa, M, por medio de una barra rígida de longitud L. Sin corriente en la bobina, la masa está suspendida verticalmente y la bobina está en un plano horizontal. La bobina está en un campo magnético uniforme de magnitud B orientado horizontalmente. Calcule el ángulo con respecto a la vertical de la barra rígida como una función de la corriente, i, en la bobina.

27.49 Demuestre que el momento dipolar magnético de un electrón en órbita en un átomo de hidrógeno es proporcional a su cantidad de movimiento angular, L: $\mu = -eL/2m$, donde $-e$ es la carga del electrón y m es su masa.

•**27.50** La figura muestra una vista de un anillo de alambre que conduce corriente cuyo diámetro es $d = 8.00$ cm. Por el anillo circula una corriente de 1.00 A en la dirección indicada en la figura. El anillo está conectado a un extremo de un resorte con constante del resorte de 100. N/m. Cuando el anillo está como en la figura, el resorte está en su longitud de equilibrio, ℓ. Determine la extensión del resorte cuando un campo magnético de magnitud $B = 2.00$ T se aplica paralelo al plano del anillo, como en la figura.



•**27.51** Una bobina de alambre que consta de 40 bucles rectangulares, con ancho 16.0 cm y altura 30.0 cm, está colocada en un campo magnético constante dado por $\vec{B} = 0.065\text{T}\hat{x} + 0.250\text{T}\hat{z}$. La bobina está articulada a una barra delgada a lo largo del eje y (a lo largo del segmento da en la figura) y originalmente está ubicada en el plano xy. Por el alambre circula una corriente de 0.200 A.

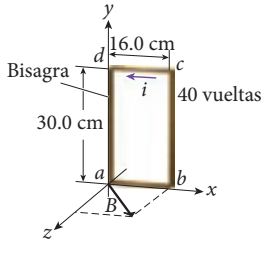
a) ¿Cuáles son la magnitud y la dirección de la fuerza, $\vec{F}_{ab}$, que $\vec{B}$ ejerce sobre el segmento ab de la bobina?

b) ¿Cuáles son la magnitud y la dirección de la fuerza, $\vec{F}_{bc}$, que $\vec{B}$ ejerce sobre el segmento bc de la bobina?

c) ¿Cuál es la magnitud de la fuerza neta, F_{neta}, que $\vec{B}$ ejerce sobre la bobina?

d) ¿Cuáles son la magnitud y la dirección del momento de torsión, $\vec{\tau}$, que $\vec{B}$ ejerce sobre la bobina?

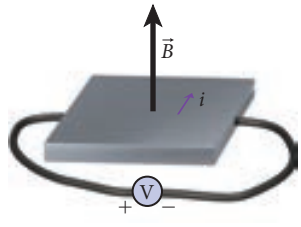
e) ¿En qué dirección, en caso de haber alguna, rota la bobina alrededor del eje y (visto desde arriba y mirando hacia abajo del eje x)?



Sección 27.7

27.52 Un transistor de electrón de alta movilidad (HEMT) controla grandes corrientes al aplicar un pequeño voltaje a una lámina delgada de electrones. La densidad y la movilidad de los electrones en la lámina son cruciales para la operación del HEMT. Los HEMT, que constan de AlGaN/GaN/Si, están en estudio porque prometen mejor rendimiento a potencias, temperaturas y frecuencias superiores a las que pueden alcanzar los HMET convencionales de silicio. En un estudio, se usó el efecto Hall para medir la densidad de electrones en uno de estos nuevos HEMT. Cuando una corriente de 10.0 μA circula por la longitud del alambre de la lámina de electrones, que mide 1.00 mm de largo, 0.300 mm de ancho y 10.0 nm de grosor, un campo magnético de 1.00 T perpendicular a la lámina produce un voltaje de 0.680 mV a través del ancho de la lámina. ¿Cuál es la densidad de electrones en la lámina?

•**27.53** La figura muestra el esquema de una instalación para una medición del efecto Hall usando una película delgada de óxido de cinc de 1.50 μm. La corriente, i, a través de la película de cinc es de 12.3 mA y el potencial Hall, V_H, es –20.1 mV cuando el campo magnético de magnitud $B = 0.90$ T se aplica perpendicularmente al flujo de la corriente.



a) ¿Cuáles son los portadores de carga en la película delgada? [*Sugerencia*: Pueden ser electrones con carga $-e$ o huecos de electrones (electrones faltantes) con carga $+e$.]

b) Calcule la densidad de portadores de carga en la película delgada.

Problemas adicionales

27.54 Un ciclotrón en un campo magnético de 9 T se usa para acelerar protones hasta 50% de la velocidad de la luz. ¿Cuál es la frecuencia del ciclotrón de estos protones? ¿Cuál es el radio de la trayectoria en el ciclotrón? ¿Cuál es la frecuencia del ciclotrón y el radio de la trayectoria de los mismos protones en el campo magnético de la Tierra? Suponga que el campo magnético de la Tierra es alrededor de 0.5 G.

27.55 Un alambre recto que conduce una corriente de 3.41 A se coloca a un ángulo de 10.0° con la horizontal entre las puntas de los polos de un imán, produciendo un campo de 0.220 T hacia arriba. Cada una de las puntas de los polos mide 10.0 cm de diámetro. La fuerza magnética hace que el alambre se mueva fuera del espacio entre los polos. ¿Cuál es la magnitud de la fuerza?

27.56 Un electrón se mueve a $v = 6.00 \cdot 10^7$ m/s perpendicular al campo magnético de la Tierra. Si la intensidad del campo es $0.500 \cdot 10^{-4}$ T, ¿cuál es el radio de la órbita circular de los electrones?

27.57 Un alambre recto con una corriente constante que circula a través de él, está en el campo magnético de la Tierra, en una ubicación cuya magnitud es 0.43 G. ¿Cuál es la corriente mínima que debe circular a través del alambre para que una longitud de 10.0 cm de éste experimente una fuerza de 1.0 N?

27.58 Una pequeña bola de aluminio con masa de 5.00 g y carga de 15.0 C se mueve hacia el norte a 3 000. m/s. Se quiere que la bola se desplace en un círculo horizontal de 2.00 m de radio, en sentido del movimiento de las manecillas del reloj visto desde arriba. Si se ignora la gravedad, ¿cuáles son la magnitud y la dirección del campo magnético que debe aplicarse a la bola de aluminio para hacer que se mueva como se ha descrito?

27.59 El selector de velocidades descrito en el problema resuelto 27.2 se usa en una variedad de aparatos para producir un haz de partículas cargadas de velocidad uniforme. Suponga que los campos en este selector están dados por $\vec{E} = (1.00 \cdot 10^4 \text{ V/m})\hat{x}$ y $\vec{B} = (50.0 \text{ mT})\hat{y}$. Encuentre la velocidad en la dirección z con la que la partícula cargada puede desplazarse a través del selector de velocidades sin desviarse.

27.60 Una bobina circular de 10.0 cm de radio tiene 100. vueltas de alambre y conduce una corriente, $i = 100.$ mA. Tiene libertad de rotación en una región con un campo magnético constante horizontal dado por $\vec{B} = (0.100 \text{ T})\hat{x}$. Si el vector normal unitario al plano de la bobina forma un ángulo de 30.0° con la horizontal, ¿cuál es la magnitud del momento de torsión magnético neto que actúa sobre la bobina?

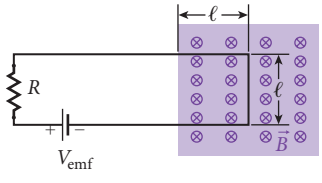
27.61 En $t = 0$, un electrón cruza el eje y positivo (de modo que $x = 0$) a 60.0 cm del origen con una velocidad $2.00 \cdot 10^5$ m/s en la dirección x positiva. Está en un campo magnético uniforme.

a) Encuentre la magnitud y la dirección del campo magnético que hace que el electrón cruce el eje x en $x = 60.0$ cm.

b) ¿Qué trabajo se realiza sobe el electrón durante este movimiento?

c) ¿En cuánto tiempo se efectúa el recorrido del eje y al eje x?

•**27.62** Una batería de 12.0 V está conectada a un resistor de 3.00 Ω en un bucle rectangular rígido que mide 3.00 m por 1.00 m. Como muestra la figura, una longitud $\ell = 1.00$ m de alambre al final del bucle se extiende en una región de 2.00 m por 2.00 m con un campo magnético de magnitud 5.00 T, dirigido hacia la página. ¿Cuál es la fuerza neta sobre el bucle?



27.63 Una partícula alfa ($m = 6.6 \cdot 10^{-27}$ kg, $q = +2e$) es acelerada por una diferencia de potencial de 2 700 V y se mueve en un plano perpendicular a un campo magnético constante de magnitud 0.340 T, que curva la trayectoria de la partícula alfa. Determine el radio de curvatura y el periodo de revolución.

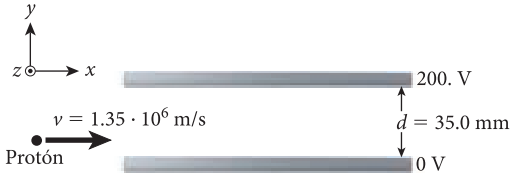
•**27.64** En cierta zona, el campo eléctrico cerca de la superficie de la Tierra está dado por $\vec{E} = (-150 \text{ N/C})\hat{z}$, y el campo magnético de la Tierra está dado por $\vec{B} = (50.0 \text{ μT})\hat{r}_N - (20.0 \text{ μT})\hat{z}$, donde $\hat{z}$ es un vector unitario que apunta verticalmente hacia arriba y $\hat{r}_N$ es un vector unitario horizontal que apunta hacia el norte. ¿Qué velocidad, $\vec{v}$, permite que un electrón en esta región se mueva en línea recta a velocidad constante?

•**27.65** Un detector de fugas de helio usa un espectrómetro de masas para detectar pequeñas fugas en una cámara de vacío. La cámara es evacuada con una bomba de vacío y

luego rociada por la parte externa con gas helio. Si hay alguna fuga, las moléculas de helio pasan por ella hacia la cámara, cuyo volumen es muestreado por el detector de fugas. En el espectrómetro, iones de helio son acelerados y liberados en un tubo, donde su movimiento es perpendicular a un campo magnético aplicado, $\vec{B}$, y siguen una órbita circular de radio r y luego chocan contra un detector. Estime la velocidad requerida si el radio orbital de los iones no debe ser mayor que 5 cm, el campo magnético es 0.15 T y la masa de un átomo de helio-4 es alrededor de $6.6 \cdot 10^{-27}$ kg. Suponga que cada ion está ionizado (que tiene un electrón menos que el átomo neutro). ¿Por qué factor cambia la velocidad necesaria si se usan átomos de helio-3, que tienen alrededor de $\frac{3}{4}$ de la masa de los átomos de helio-4?

•**27.66** En el laboratorio, usted realiza un experimento con un cañón de electrones que emite electrones con energía de 7.50 keV hacia un blanco atómico. ¿Qué desviación (magnitud y dirección) produce el campo magnético de la Tierra (0.300 G) en el haz de electrones si inicialmente el haz está dirigido hacia el este y cubre una distancia de 1.00 m del cañón al blanco? (*Sugerencia*: Primero calcule el radio de curvatura y luego determine la desviación en línea recta del haz de electrones luego de 1.00 m.)

•**27.67** Un protón entra en una región entre las dos placas que aparecen en la figura al moverse en la dirección x con una velocidad $v = 1.35 \cdot 10^6$ m/s. El potencial de la placa superior es 200. V, y el potencial de la placa inferior es 0 V. ¿Cuáles son la dirección y la magnitud del campo magnético, $\vec{B}$, que se requiere entre las placas para que el protón continúe moviéndose en línea recta a lo largo de la dirección x?



•**27.68** Un electrón que se mueve a velocidad constante, $\vec{v} = v_0\hat{x}$, entra en una región en el espacio donde está presente un campo magnético. Este campo, $\vec{B}$, es constante en puntos en la dirección z. ¿Cuáles son la magnitud y la dirección de la fuerza magnética que actúan sobre el electrón? Si el ancho de la región en la que está el campo magnético es d, ¿cuál es la velocidad mínima que debe tener el electrón para escapar de la región?

•**27.69** Una bobina cuadrada con 30 vueltas, masa de 0.250 kg y longitud por lado de 0.200 m, está articulada a lo largo de un lado horizontal y conduce una corriente de 5.00 A. Se coloca en un campo magnético que apunta verticalmente hacia abajo y tiene una magnitud de 0.00500 T. Determine el ángulo que el plano de la bobina forma con la vertical cuando la bobina está en equilibrio. Use $g = 9.81$ m/s^2.

•**27.70** Un bucle semicircular de alambre de radio R está en el plano xy, centrado en el origen. El alambre conduce una corriente, i, en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj, alrededor de un semicírculo, desde $x = -R$ hasta $x = +R$ sobre el eje x. Un campo magnético, $\vec{B}$, apunta hacia fuera del plano, en la dirección z positiva. Calcule la fuerza neta sobre el bucle semicircular.

•**27.71** Un protón que se mueve con velocidad $v = 1.00 \cdot 10^6$ m/s entra en una región del espacio donde existe un campo magnético dado por $\vec{B} = (-0.500\ \text{T})\hat{z}$. El vector velocidad del protón forma un ángulo $\theta = 60.0°$ con respecto al eje z positivo.

a) Analice el movimiento del protón y describa su trayectoria (sólo en términos cualitativos).

b) Calcule el radio, r, de la trayectoria proyectada sobre un plano perpendicular al campo magnético (en el plano xy).

c) Calcule el periodo, T, y la frecuencia, f, del movimiento en ese plano.

d) Calcule la inclinación del movimiento (la distancia recorrida por el protón en la dirección del campo magnético en 1 periodo).

28 Campos magnéticos de cargas en movimiento

LO QUE APRENDEREMOS 893

28.1 Ley de Biot-Savart 893

28.2 Campos magnéticos debidos a distribuciones de corriente 894

Campo magnético de un alambre recto largo 894

Dos alambres paralelos 896

Definición del amperio 897

Ejemplo 28.1 Fuerza sobre un bucle 897

Problema resuelto 28.1 Acelerador de riel electromagnético 898

Campo magnético debido a un bucle de alambre 900

Problema resuelto 28.2 Campo de un alambre que contiene un bucle 902

28.3 Ley de Ampère 903

Campo magnético dentro de un alambre recto largo 904

28.4 Campos magnéticos de solenoides y toroides 904

Ejemplo 28.2 Solenoide 906

Problema resuelto 28.3 Campo de un imán toroidal 907

28.5 Átomos como imanes 909

Ejemplo 28.3 Momento magnético orbital del átomo de hidrógeno 909

Espín 910

28.6 Propiedades magnéticas de la materia 910

Diamagnetismo y paramagnetismo 911

Ferromagnetismo 912

28.7 Magnetismo y superconductividad 913

LO QUE HEMOS APRENDIDO/ GUÍA DE ESTUDIO PARA EXAMEN 914

Práctica para resolución de problemas 916

Problema resuelto 28.4 Campo magnético de cuatro alambres 916

Problema resuelto 28.5 Movimiento de un electrón en un solenoide 917

Preguntas de opción múltiple 918

Preguntas 919

Problemas 920

FIGURA 28.1 Imanes enormes pueden usarse para levantar grandes objetos metálicos.

LO QUE APRENDEREMOS

- Las cargas en movimiento (corrientes) crean campos magnéticos.
- El campo magnético creado por una corriente que fluye en un alambre recto largo varía inversamente con la distancia al alambre.
- Dos alambres paralelos que conducen corriente en la misma dirección se atraen entre sí. Dos alambres paralelos que conducen corriente en direcciones opuestas se repelen entre sí.
- La ley de Ampère se usa para calcular el campo magnético provocado por ciertas distribuciones de corriente simétricas, justo como la ley de Gauss es de utilidad para calcular campos eléctricos en situaciones que presentan simetría de carga espacial.
- El campo magnético dentro de un alambre recto largo varía linealmente con la distancia al centro del alambre.
- Un solenoide es un electroimán que puede usarse para producir un campo magnético constante con un gran volumen.
- Algunos átomos pueden considerarse imanes pequeños creados por el movimiento de los electrones en el átomo.
- Los materiales pueden presentar tres tipos de magnetismo intrínseco: diamagnetismo, paramagnetismo y ferromagnetismo.
- Para producir campos magnéticos muy intensos se usan imanes superconductores.

Imanes enormes como el que muestra la figura 28.1 se usan en muchas instalaciones industriales para mover grandes objetos metálicos. No obstante, estos imanes no son permanentes, sino electroimanes, que pueden encenderse y apagarse. Pero, ¿qué es exactamente un electroimán? En el capítulo 27 vimos que un campo magnético puede afectar la trayectoria de una partícula cargada o el flujo de una corriente. En este capítulo consideramos campos magnéticos *originados* por corrientes eléctricas. Cualquier partícula cargada genera un campo magnético, si está en movimiento. Varios campos magnéticos son originados por diferentes distribuciones de corriente. Los poderosos electroimanes usados en la industria, en investigación física, en diagnósticos médicos y en otras aplicaciones son primordialmente solenoides: bobinas de alambre conductor de corriente con cientos o miles de bucles. En este capítulo veremos por qué los solenoides generan campos magnéticos particularmente útiles, y en el siguiente capítulo analizaremos otros fenómenos importantes provocados por el movimiento de una bobina en un campo magnético.

El capítulo 27 introdujo los campos magnéticos y las líneas de campo al mostrar cómo la aguja de una brújula se orienta en la proximidad de un imán permanente. En una demostración semejante, una corriente intensa se hace circular por un alambre (recto, muy largo) aislado o sin aislar. Si a continuación la aguja de una brújula se aproxima al alambre, ésta se orienta con respecto al alambre, como ilustra la figura 28.2. El primero en observar este hecho fue el físico danés Hans Oersted (1777-1851) en 1819 mientras dirigía una demostración para estudiantes durante una conferencia. Concluimos que la corriente en el alambre produce un campo magnético. Puesto que la dirección de la aguja de la brújula indica la dirección del campo magnético, concluimos además que las líneas de campo magnético forman círculos alrededor del alambre conductor de corriente. Note la diferencia entre los incisos *a*) y *b*) de la figura 28.2: cuando se invierte la dirección de la corriente, la orientación de la aguja de la brújula también se invierte. Aunque la figura no muestra esto, si la aguja se aleja cada vez más del alambre, termina por orientarse en la dirección del campo magnético de la Tierra. Esto indica que el campo magnético por el alambre se debilita como una función del incremento en la distancia al alambre.

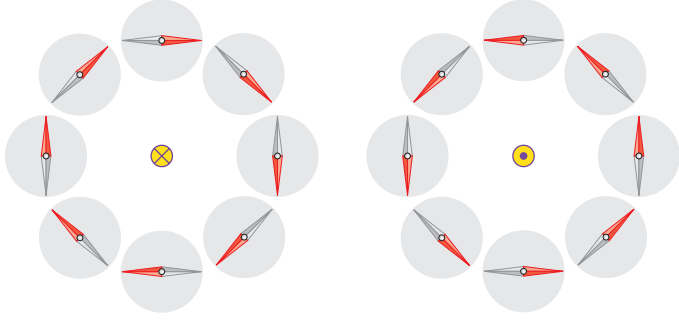
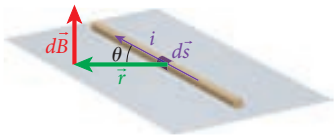


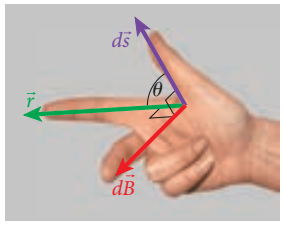
FIGURA 28.2 Alambre (círculo amarillo) que conduce corriente: *a*) hacia la página (indicado por una cruz); *b*) hacia fuera de la página (indicado por el punto). La orientación de la aguja de una brújula colocada cerca del alambre se muestra en ubicaciones diferentes alrededor del alambre.

28.1 Ley de Biot-Savart

En el capítulo 17 vimos que los campos magnéticos pueden cambiar la trayectoria de cargas en movimiento. No obstante, por medio de experimentos es posible mostrar que esta interacción también funciona en la dirección opuesta: cargas en movimiento pueden generar campos magnéticos. ¿Cómo podemos determinar el campo magnético producido por una carga en movimiento?



a)



b)

FIGURA 28.3 *a*) Descripción tridimensional de la ley de Biot-Savart. El campo magnético diferencial es perpendicular tanto al elemento diferencial de corriente como al vector de posición. *b*) Regla de la mano derecha 1 aplicada a las cantidades implicadas en la ley de Biot-Savart.

Para describir el campo eléctrico en términos de la carga eléctrica, demostramos que (vea el capítulo 22):

$$dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{|dq|}{r^2},$$

donde dq es un elemento de carga. El campo eléctrico apunta en dirección radial (hacia dentro o hacia fuera de la carga eléctrica, dependiendo del signo de la carga), de modo que

$$d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{dq}{r^3}\vec{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{dq}{r^2}\hat{r}.$$

Esta situación es ligeramente más complicada para un campo magnético porque un elemento de carga, $i\,d\vec{s}$, que produce un campo magnético tiene una dirección, a diferencia de una carga puntual no direccional que produce un campo eléctrico. Como resultado de una gran serie de experimentos que implican pruebas semejantes a la que muestra la figura 28.2, realizadas a principios del siglo XIX, los científicos franceses Jean-Baptiste Biot (1774-1862) y Félix Savart (1791-1841) establecieron que el campo magnético producido por un elemento de corriente, $i\,d\vec{s}$, está dado por

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{i\,d\vec{s}\times\vec{r}}{r^3} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{i\,d\vec{s}\times\hat{r}}{r^2}. \qquad (28.1)$$

Aquí $d\vec{s}$, es un vector de longitud diferencial ds que apunta en la dirección en la que circula la corriente a lo largo del conductor y $\vec{r}$ es el vector de posición medido *desde* el elemento de corriente *hasta el* punto en el que debe encontrarse el campo. La figura 28.3 ilustra la situación física descrita por esta fórmula, que se denomina **ley de Biot-Savart**.

La constante μ_0 en la ecuación 28.1 se denomina **permeabilidad magnética del espacio libre** y tiene un valor de

$$\mu_0 = 4\pi\cdot 10^{-7}\ \frac{\text{T m}}{\text{A}}. \qquad (28.2)$$

A partir de la ecuación (28.1) y la figura 28.3 puede ver que la dirección del campo magnético producido por el elemento de corriente es perpendicular al vector de posición y al elemento de corriente, $i\,d\vec{s}$. La magnitud del campo magnético está dada por

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{i\,ds\,\text{sen}\,\theta}{r^2}, \qquad (28.3)$$

donde θ (con valores posibles entre 0° y 180°) es el ángulo entre la dirección del vector de posición y el elemento de corriente. La dirección del campo magnético está dada por una variante de la regla de la mano derecha 1, introducida en el capítulo 27. Para determinar la dirección del campo magnético usando la mano derecha, apunte el pulgar en la dirección del elemento diferencial de corriente y el índice en la dirección del vector de posición, y el dedo medio apuntará en la dirección del campo magnético diferencial.

28.2 Campos magnéticos debidos a distribuciones de corriente

En el capítulo 27 se abordó el principio de superposición para campos magnéticos. Al usar este principio de superposición podemos calcular el campo magnético en cualquier punto en el espacio como la suma de los campos magnéticos diferenciales descritos por la ley de Biot-Savart. En esta sección examinamos los campos magnéticos generados por las configuraciones más comunes de alambres conductores de corriente.

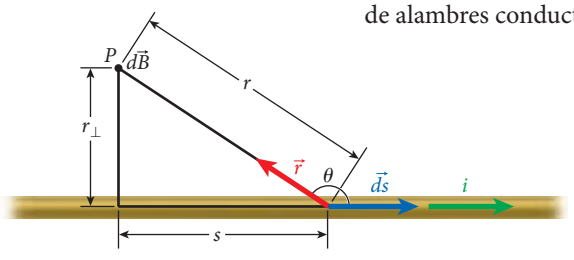


FIGURA 28.4 Campo magnético de un alambre recto largo, conductor de corriente.

Campo magnético de un alambre recto largo

Analicemos primero el campo magnético de un alambre recto infinitamente largo, conductor de una corriente, i. Consideramos el campo magnético, $d\vec{B}$, en un punto P a una distancia perpendicular $r_\perp$ del alambre (figura 28.4). La magnitud del campo dB en ese punto debido al elemento de corriente $i\,ds$ está dada por la ecuación 28.3, la dirección del campo está dada por $d\vec{s}\times\vec{r}$, y es hacia fuera de la página. Encontramos el campo magnético de la mitad derecha del alambre y multiplicamos por 2 para obtener el

campo magnético de todo el alambre. Así, la magnitud del campo magnético a una distancia perpendicular $r_\perp$ del alambre está dada por

$$B = 2\int_0^\infty dB = 2\int_0^\infty \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{i\,ds\,\operatorname{sen}\theta}{r^2} = \frac{\mu_0 i}{2\pi}\int_0^\infty \frac{ds\,\operatorname{sen}\theta}{r^2}.$$

Podemos relacionar r y θ con $r_\perp$ y s (r, s y θ) por $r = \sqrt{s^2 + r_\perp^2}$ y $\operatorname{sen}\theta = \operatorname{sen}(\pi - \theta) = r_\perp/\sqrt{s^2 + r_\perp^2}$ (vea la figura 28.4). Al sustituir r y sen θ por B en la expresión precedente se obtiene

$$B = \frac{\mu_0 i}{2\pi}\int_0^\infty \frac{r_\perp\,ds}{(s^2 + r_\perp^2)^{3/2}}.$$

Al evaluar esta integral definida, encontramos

$$B = \frac{\mu_0 i}{2\pi}\left[\frac{1}{r_\perp^2}\frac{r_\perp s}{(s^2 + r_\perp^2)^{1/2}}\right]_0^\infty = \frac{\mu_0 i}{2\pi r_\perp}\left[\frac{s}{(s^2 + r_\perp^2)^{1/2}}\right]_{s\to\infty} - 0.$$

Para $s \gg r_\perp$, el término entre corchetes tiende al valor 1. En consecuencia, la magnitud del campo magnético a una distancia perpendicular $r_\perp$ de un alambre recto largo, que conduce una corriente, i, es

$$B = \frac{\mu_0 i}{2\pi r_\perp}. \tag{28.4}$$

La dirección del campo magnético en cualquier punto se encuentra al aplicar la regla de la mano derecha 1 al elemento de corriente y los vectores de posición mostrados en la figura 28.4. Esto resulta en una nueva regla de la mano derecha, denominada *regla de la mano derecha 3*, que puede usarse para determinar la dirección del campo magnético de un alambre conductor de corriente. Si sujeta el alambre con su mano derecha, de modo que el pulgar apunte en la dirección de la corriente, sus dedos se curvan en la dirección del campo magnético (figura 28.5).

Si observáramos a través de un cable que conduce corriente podríamos ver que las líneas del campo magnético forman círculos concéntricos (figura 28.6). Note a partir de la distancia entre las líneas del campo que éste es más fuerte cerca del cable y cae su intensidad en proporción a $1/r_\perp$, como indica la ecuación 28.4.

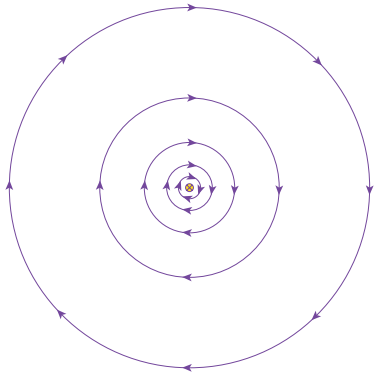
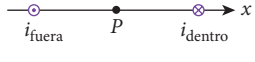


FIGURA 28.6 Líneas de campo magnético alrededor de un alambre recto largo (círculo amarillo en el centro), que conduce una corriente perpendicular a la página y que apunta hacia la página, lo cual se indica con la cruz.

28.3 Ejercicio en clase

El alambre 1 conduce una corriente, i_{fuera}, que fluye hacia fuera de la página, como ilustra la figura. El alambre 2 conduce una corriente, i_{dentro}, que fluye hacia dentro de la página. ¿Cuál es la dirección del campo magnético en el punto P?



a) Hacia arriba en el plano de la página.

b) Hacia la derecha.

c) Hacia abajo en el plano de la página.

d) Hacia la izquierda.

e) El campo magnético en el punto P es cero.

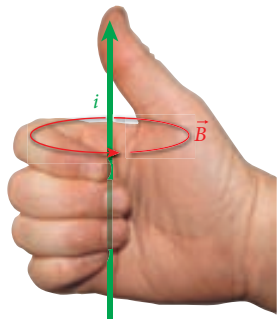
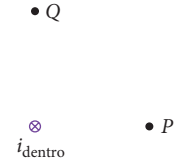


FIGURA 28.5 Regla de la mano derecha 3 para el campo magnético de un alambre conductor de corriente.

28.1 Ejercicio en clase

Un alambre conduce corriente, i_{dentro}, hacia la página como se muestra en la figura. ¿En qué dirección apunta el campo magnético en los puntos P y Q?



a) Hacia la derecha en P y hacia arriba (hacia la parte superior de la página) en Q.

b) Hacia arriba en P y hacia la derecha en Q.

c) Hacia abajo en P y hacia la derecha en Q.

d) Hacia arriba en P y hacia la izquierda en Q.

28.2 Ejercicio en clase

Suponga que un rayo puede modelarse como una línea recta larga de corriente. Si por un punto pasan 15.0 C de carga en $1.50 \cdot 10^{-3}$ s, ¿cuál es la magnitud del campo magnético a una distancia perpendicular a 26.0 m del rayo?

a) $7.69 \cdot 10^{-5}$ T

b) $9.22 \cdot 10^{-3}$ T

c) $4.21 \cdot 10^{-2}$ T

d) $1.11 \cdot 10^{-1}$ T

e) $2.22 \cdot 10^{2}$ T

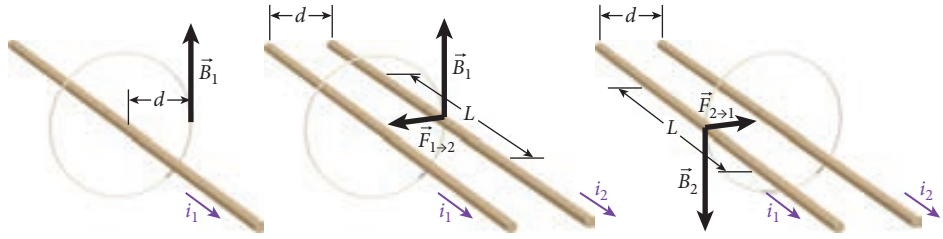


FIGURA 28.7 *a*) Línea de campo magnético de un alambre que conduce una corriente. *b*) Campo magnético creado por la corriente en un alambre que ejerce una fuerza sobre un segundo alambre conductor de corriente. *c*) Campo magnético creado por la corriente en el segundo alambre que ejerce una fuerza sobre el primer alambre conductor de corriente.

28.4 Ejercicio en clase

En la figura 28.2, agujas de brújula muestran el campo magnético alrededor de un alambre que conduce una corriente. En la figura, el extremo de la aguja de la brújula que apunta al norte corresponde al:

a) Extremo rojo.

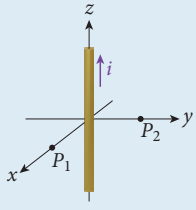
b) Extremo azul claro.

c) Extremo rojo o al extremo azul claro, dependiendo de cómo se mueva la brújula hacia el alambre.

d) No es posible identificar el extremo a partir de la información que aparece en la figura.

28.1 Oportunidad de autoevaluación

El alambre en la figura conduce una corriente i en la dirección z positiva. ¿Cuál es la dirección del campo magnético resultante en el punto P_1? ¿Cuál es la dirección del campo magnético resultante en el punto P_2?



28.2 Oportunidad de autoevaluación

Considere dos alambres paralelos que conducen la misma corriente en las mismas direcciones. ¿Es la fuerza entre los dos alambres de atracción o de repulsión? Ahora considere dos alambres paralelos que conducen corriente en direcciones opuestas. ¿Cuál es la fuerza entre los dos alambres?

Dos alambres paralelos

Consideremos el caso en el que dos alambres paralelos conducen corriente. Los dos alambres ejercen fuerzas entre sí porque el campo magnético de un alambre ejerce una fuerza sobre las cargas en movimiento en el segundo alambre. La magnitud del campo magnético creado por un alambre conductor de corriente está dada por la ecuación 28.4. Este campo magnético siempre es perpendicular al alambre, con una dirección dada por la regla de la mano derecha 3 (figura 28.5).

Primero consideraremos el alambre 1 que conduce una corriente, i_1, hacia la derecha, como muestra la figura 28.7*a*). La magnitud del campo magnético a una distancia perpendicular d del alambre 1 es

$$B_1 = \frac{\mu_0 i_1}{2\pi d}. \tag{28.5}$$

La dirección de $\vec{B}_1$ está dada por la regla de la mano derecha 3 y se muestra para un punto en particular en la figura 28.7*a*).

Ahora consideremos el alambre 2 que conduce una corriente, i_2, en la misma dirección que i_1, y está colocado en posición paralela al alambre 1 a una distancia d de éste (figura 28.7*b*). El campo magnético debido al alambre 1 ejerce una fuerza magnética sobre las cargas en movimiento en la corriente que circula en el alambre 2. En el capítulo 27 vimos que la fuerza magnética sobre un alambre conductor de corriente está dada por

$$\vec{F} = i\vec{L} \times \vec{B}.$$

Entonces, la magnitud de la fuerza magnética sobre una longitud, L, del alambre 2 es

$$F = iLB \operatorname{sen}\theta = i_2 L B_1, \tag{28.6}$$

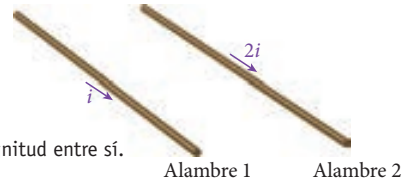
debido a que $\vec{B}_1$ es perpendicular al alambre 2 y así $\theta = 90°$. Al sustituir B_1 de la ecuación 28.5 en la ecuación 28.6, encontramos la magnitud de la fuerza ejercida por el alambre 1 sobre una longitud L del alambre 2:

$$F_{1\to2} = i_2 L\left(\frac{\mu_0 i_1}{2\pi d}\right) = \frac{\mu_0 i_1 i_2 L}{2\pi d}. \tag{28.7}$$

Según la regla de la mano derecha 1, $\vec{F}_{1\to2}$ apunta hacia el alambre 1 y es perpendicular a ambos alambres. Un cálculo semejante nos permite deducir que la fuerza del alambre 2 sobre una longitud, L, del alambre 1 tiene la misma magnitud y dirección opuesta: $\vec{F}_{2\to1} = -\vec{F}_{1\to2}$. Este resultado se muestra en la figura 28.7*c*) y es una consecuencia simple de la tercera ley de Newton.

28.5 Ejercicio en clase

Dos alambres paralelos están próximos entre sí, como muestra la figura. El alambre 1 conduce una corriente i, y el alambre 2, una corriente $2i$. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones sobre las fuerzas magnéticas que los dos alambres ejercen entre sí es correcta?



a) Los alambres no ejercen ninguna fuerza entre sí.

b) Los dos alambres ejercen fuerzas de atracción de la misma magnitud entre sí.

c) Los dos alambres ejercen fuerzas de repulsión de la misma magnitud entre sí.

d) El alambre 1 ejerce una fuerza más intensa sobre el alambre 2 que la fuerza ejercida por el alambre 2 sobre el alambre 1.

e) El alambre 2 ejerce una fuerza más intensa sobre el alambre 1 que la fuerza ejercida por el alambre 1 sobre el alambre 2.

Definición del amperio

La fuerza $F_{1\to 2}$ descrita por la ecuación 28.7 se usó en la definición del amperio: un *amperio* (A) es la corriente constante que, si se mantiene en dos conductores paralelos rectos de longitud infinita y sección transversal circular despreciable, situados en el vacío a una distancia de 1 entre ellos, produce entre estos conductores una fuerza de $2\cdot 10^{-7}$ N por metro de longitud. Esta situación física se describe por la ecuación 28.7 por la fuerza entre dos alambres paralelos conductores de corriente con $i_1 = i_2$ = exactamente 1 A, d = exactamente 1 m, y fuerza $F_{1\to 2}$ = exactamente $2\cdot 10^{-7}$ N. Podemos despejar μ_0 de esa ecuación:

$$\mu_0 = \frac{(2\pi d)F_{1\to 2}}{i_1 i_2 L} = \frac{2\pi(1\text{ m})\left(2\cdot 10^{-7}\text{ N}\right)}{(1\text{ A})(1\text{ A})(1\text{ m})} = \text{exactamente } 4\pi\cdot 10^{-7}\ \frac{\text{T m}}{\text{A}},$$

que indica que la permeabilidad magnética del espacio *se define* exactamente como $\mu_0 = 4\pi\cdot 10^{-7}$ T m/A (vea la ecuación 28.2).

En el capítulo 21, cuando se introdujo la ley de Coulomb, se proporcionó el valor de la permitividad eléctrica del espacio libre, ϵ_0, $\epsilon_0 = 8.85\cdot 10^{-12}\ \text{C}^2/(\text{N m}^2)$. Puesto que 1 A =1 C/s y 1 T = 1 (N s)/(C m) (vea el capítulo 27), el producto de las dos constantes ϵ_0, y μ_0 es

$$\mu_0\epsilon_0 = \left(4\pi\cdot 10^{-7}\ \frac{\text{T m}}{\text{A}}\right)\left(8.85\cdot 10^{-12}\ \frac{\text{C}^2}{\text{N m}^2}\right) = 1.11\cdot 10^{-17}\ \frac{\text{s}^2}{\text{m}^2},$$

cuyas unidades son el inverso del cuadrado de la velocidad. Así, $1/\sqrt{\mu_0\epsilon_0}$ proporciona el valor de esta velocidad como la velocidad de la luz, $c = 3.00\cdot 10^8$ m/s. Esto no es un accidente en absoluto, como veremos en capítulos posteriores. Por ahora, es suficiente plantear el descubrimiento empírico:

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\epsilon_0}}.$$

Puesto que la permitividad eléctrica del espacio libre se define exactamente como $\mu_0 = 4\pi\cdot 10^{-7}$ T m/A y la velocidad de la luz se define exactamente como c = 299 792 458 m/s (vea el análisis en el capítulo 1), la expresión $c = 1/\sqrt{\mu_0\epsilon_0}$ también establece el valor de la permitividad eléctrica del espacio libre.

EJEMPLO 28.1 Fuerza sobre un bucle

Un alambre recto largo conduce una corriente de magnitud i_1 = 5.00 A hacia la derecha (figura 28.8). Un bucle cuadrado de lado a = 0.250 m se coloca con sus lados paralelos y perpendiculares al alambre a una distancia d = 0.100 m del alambre. El bucle cuadrado conduce una corriente de magnitud i_2 = 2.20 A en dirección contraria al movimiento de las manecillas del reloj.

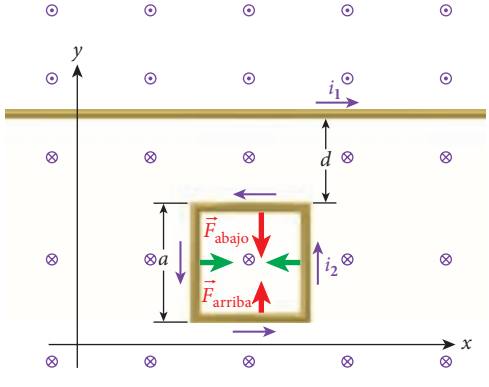


FIGURA 28.8 Alambre conductor de corriente y un bucle cuadrado.

PROBLEMA

¿Cuál es la fuerza magnética neta sobre el bucle cuadrado?

SOLUCIÓN

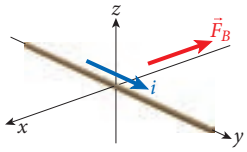
La fuerza sobre el bucle cuadrado se debe al campo magnético creado por la corriente que circula en el alambre recto. La regla de la mano derecha 3 establece que el campo magnético de la corriente que fluye por el alambre está dirigido hacia la página en la región en la que se encuentra el bucle (vea la figura 28.8). La regla de la mano derecha y la ecuación 28.4 indican que la fuerza resultante sobre el lado izquierdo del bucle es hacia la derecha, y la fuerza sobre el lado derecho del bucle es hacia la izquierda. En la figura 28.8, estas dos fuerzas están representadas por flechas verdes y son iguales en magnitud y opuestas en dirección, de modo que la suma es cero. La fuerza sobre el lado superior del bucle es hacia abajo (flecha roja en la figura 28.8, que apunta en la dirección y negativa) y su magnitud está dada por la ecuación 28.7.

$$F_{\text{abajo}} = \frac{\mu_0 i_1 i_2 a}{2\pi d},$$

(*continúa*)

28.6 Ejercicio en clase

Un alambre conduce una corriente, i, en la dirección y positiva, como ilustra la figura. El alambre está ubicado en un campo magnético uniforme, $\vec{B}$, orientado de modo que la fuerza magnética sobre el alambre se maximiza. La fuerza magnética que actúa sobre el alambre, $\vec{F}_B$, es en la dirección x negativa. ¿Cuál es la dirección del campo magnético?



a) En la dirección x positiva.

b) En la dirección x negativa.

c) En la dirección y negativa.

d) En la dirección z positiva.

e) En la dirección z negativa.

FIGURA 28.9 Cañón de riel de la Marina de Estados Unidos.

(*continuación*)

donde a es la longitud del lado superior del bucle. La fuerza sobre el lado inferior del bucle es hacia arriba (la otra flecha roja en la figura 28.8, que apunta en la dirección y positiva), y su magnitud está dada por

$$F_{\text{arriba}} = \frac{\mu_0 i_1 i_2 a}{2\pi(d+a)}.$$

Por lo tanto, podemos expresar la fuerza magnética sobre el bucle como

$$\vec{F} = (F_{\text{arriba}} - F_{\text{abajo}})\hat{y}.$$

Al escribir los números, se obtiene

$$\vec{F} = \frac{(4\pi\cdot 10^{-7}\ \text{T m/A})(5.00\ \text{A})(2.20\ \text{A})(0.250\ \text{m})}{2\pi}\left(\frac{1}{0.350\ \text{m}} - \frac{1}{0.100\ \text{m}}\right)\hat{y} = (-3.93\cdot 10^{-6})\,\hat{y}\ \text{N}.$$

PROBLEMA RESUELTO 28.1 Acelerador de riel electromagnético

Los aceleradores de riel electromagnéticos se han usado para acelerar perdigones de combustible en experimentos de fusión y para lanzar y poner en órbita naves espaciales. La Marina de Estados Unidos está llevando a cabo experimentos con aceleradores de riel electromagnéticos que pueden lanzar proyectiles a velocidades muy elevadas, como el cañón de riel que muestra la figura 28.9. Este cañón opera al hacer fluir una corriente por dos rieles conductores paralelos que están conectados por medio de un conductor móvil orientado perpendicularmente a los rieles. El proyectil se conecta al conductor móvil. Para este ejemplo supondremos que el cañón de riel consta de dos rieles paralelos de radio en la sección transversal $r = 5.00$ cm, cuyos centros están separados por una distancia $d = 25.0$ cm y cuya longitud es $L = 5.00$ m, y que el cañón acelera el proyectil a una energía cinética de $K = 32.0$ MJ. El proyectil también funciona como el conductor móvil.

PROBLEMA

¿Cuánta corriente se requiere para acelerar el proyectil?

SOLUCIÓN

PIENSE

Las corrientes en los dos rieles paralelos están en direcciones opuestas. La corriente que fluye por el conductor móvil es perpendicular a las dos corrientes en los rieles. Los campos magnéticos de los dos rieles están en la misma dirección y ejercen fuerzas sobre el conductor móvil en la misma dirección. La fuerza del campo magnético de cada riel depende de la distancia al riel. Así, para obtener la fuerza total debemos integrar la fuerza a lo largo de la distancia entre los dos rieles. La fuerza total sobre el conductor móvil es el doble de la fuerza del campo magnético de un riel. La energía cinética ganada por el proyectil es la fuerza total que los campos magnéticos ejercen sobre los dos rieles multiplicada por la distancia sobre la que actúa la fuerza.

ESBOCE

La figura 28.10 muestra vistas superior y de la sección transversal de los rieles y el conductor móvil.

INVESTIGUE

El conductor móvil que conduce corriente, que completa el circuito entre los dos rieles, es también el proyectil y es acelerado por las fuerzas magnéticas producidas por los dos rieles. La fuerza ejercida sobre el proyectil depende de la distancia, x, al centro de un riel, como ilustra la figura 28.10*b*). Así, para calcular la fuerza total sobre el proyectil, debemos integrar sobre la longitud del proyectil. Usamos la ecuación 28.4 para encontrar la magnitud del campo magnético, B_1, de la corriente i que fluye en el riel 1 a una distancia x al centro del riel:

$$B_1 = \frac{\mu_0 i}{2\pi x}.$$

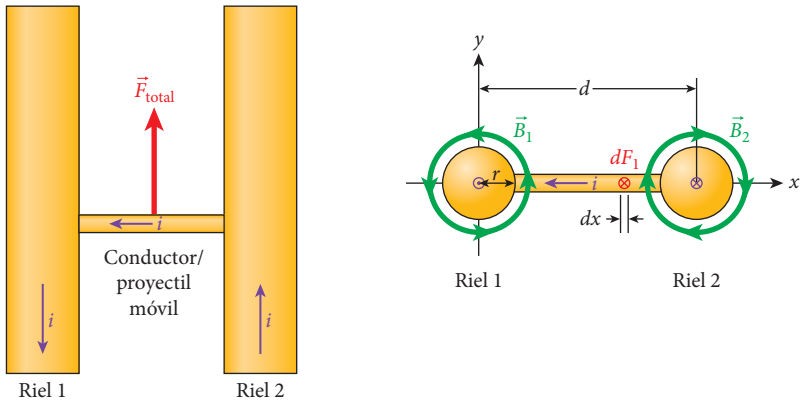


FIGURA 28.10 Diagrama de un cañón de riel: *a*) vista superior; *b*) vista de la sección transversal.

Según la ecuación 28.6, la magnitud de la fuerza diferencial, dF_1, ejercida sobre una longitud diferencial, dx, del proyectil por el campo magnético del riel 1 es

$$dF_1 = i(dx)B_1 = i(dx)\left(\frac{\mu_0 i}{2\pi x}\right).$$

La dirección de la fuerza está dada por la regla de la mano derecha 3, que establece que la fuerza es hacia arriba en el plano de la página en la figura 28.10*a*) y hacia la página en la figura 28.10*b*). La magnitud de la fuerza sobre el proyectil está dada al integrar dF_1 sobre la longitud del proyectil:

$$F_1 = \int_r^{d-r} dF_1 = \int_r^{d-r} \frac{\mu_0 i^2}{2\pi}\frac{dx}{x} = \frac{\mu_0 i^2}{2\pi}\left[\ln x\right]_r^{d-r} = \frac{\mu_0 i^2}{2\pi}\left(\ln(d-r) - \ln r\right) = \frac{\mu_0 i^2}{2\pi}\ln\left(\frac{d-r}{r}\right) \qquad \text{(i)}$$

Debido a que el campo magnético del riel 2 está en la misma dirección que el campo magnético del riel 1, la fuerza ejercida por el campo magnético del riel 2 sobre el proyectil es la misma que la del riel 1. Por lo que la magnitud de la fuerza total ejercida sobre el proyectil es

$$F_{\text{total}} = 2F_1. \qquad \text{(ii)}$$

La energía cinética ganada por el proyectil es igual (por el teorema trabajo-energía introducido en los capítulos 5 y 6) a la magnitud de la fuerza ejercida multiplicada por la distancia sobre la que actúa la fuerza

$$K = F_{\text{total}}L. \qquad \text{(iii)}$$

SIMPLIFIQUE

Podemos combinar las ecuaciones (i), (ii) y (iii) para obtener

$$K = 2F_1L = 2\left[\frac{\mu_0 i^2}{2\pi}\ln\left(\frac{d-r}{r}\right)\right]L = \frac{\mu_0 L i^2}{\pi}\ln\left(\frac{d-r}{r}\right).$$

Al despejar la corriente en esta ecuación, obtenemos

$$i = \sqrt{\frac{K\pi}{\mu_0 L\ln\left(\frac{d-r}{r}\right)}}.$$

CALCULE

Al escribir los valores numéricos, obtenemos

$$i = \sqrt{\frac{K\pi}{\mu_0 L\ln\left(\frac{d-r}{r}\right)}} = \sqrt{\frac{\left(32.0\cdot 10^6\ \text{J}\right)\pi}{\left(4\pi\cdot 10^{-7}\ \frac{\text{T m}}{\text{A}}\right)(5.00\ \text{m})\ln\left(\frac{25.0\ \text{cm} - 5.00\ \text{cm}}{5.00\ \text{cm}}\right)}} = 3\,397\,287\ \text{A}.$$

(*continúa*)

(*continuación*)

REDONDEE

Mostramos nuestro resultado con tres cifras:

$$i = 3.40 \cdot 10^6 \text{ A} = 3.40 \text{ MA}.$$

VUELVA A REVISAR

Volvemos a revisar nuestro resultado al considerar la fuerza ejercida sobre el proyectil. Al poner nuestro resultado para la corriente en la ecuación (i) para la magnitud de la fuerza ejercida por el campo magnético del riel 1, obtenemos

$$F_1 = \frac{\mu_0 i^2}{2\pi} \ln\left(\frac{d-r}{r}\right) = \frac{\left(4\pi \cdot 10^{-7} \ \frac{\text{T m}}{\text{A}}\right)\left(3.15 \cdot 10^6 \text{ A}\right)^2}{2\pi} \ln\left(\frac{25.0 \text{ cm} - 5.00 \text{ cm}}{5.00 \text{ cm}}\right) = 3.20 \cdot 10^6 \text{ N}.$$

Podemos aproximar la magnitud de esta fuerza al suponer que la fuerza es constante a lo largo del conductor y que es igual al valor en $x = d/2$:

$$F_1 = i(d-2r)B = id\left(\frac{\mu_0 i(d-2r)}{2\pi\left(\frac{d}{2}\right)}\right) = \frac{\mu_0 i^2}{\pi}\frac{d-2r}{d}$$

$$= \frac{\left(4\pi \cdot 10^{-7} \ \frac{\text{T m}}{\text{A}}\right)\left(3.40 \cdot 10^6 \text{ A}\right)^2}{\pi} \frac{\left[25.0 \text{ cm} - 2(5.00 \text{ cm})\right]}{25.0 \text{ cm}} = 2.77 \cdot 10^6 \text{ N}.$$

Este valor es menor por un factor de 2 que nuestro valor calculado para la fuerza, lo cual parece razonable. No obstante, sólo para asegurarnos, calculemos la energía cinética del proyectil usando el valor calculado de la fuerza:

$$K = F_{\text{total}} L = 2F_1 L = 2\left(3.20 \cdot 10^6 \text{ N}\right)\left(5.00 \text{ m}\right) = 3.20 \cdot 10^6 \text{ J}.$$

Este resultado coincide con el valor especificado 3.20 MJ.

Observe que si el cañón de riel imprimiera una energía cinética de 32.0 MJ a un proyectil de masa $m = 5.00$ kg, su velocidad sería

$$v = \sqrt{\frac{2K}{m}} = \sqrt{\frac{2\left(32.0 \cdot 10^6 \text{ J}\right)}{5.00 \text{ kg}}} = 3\,580 \text{ m/s}.$$

El cañón de riel sería capaz de lanzar un proyectil a 10 veces la velocidad del sonido, que es mucho mayor que la velocidad normal de una bala, de aproximadamente 3 veces la velocidad del sonido.

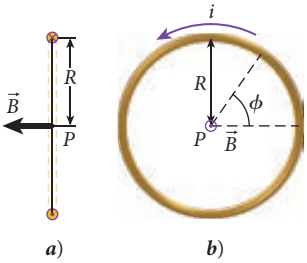


FIGURA 28.11 Bucle circular de radio R que conduce una corriente, i: *a*) vista lateral; *b*) vista frontal. La cruz sobre el círculo amarillo superior en el inciso *a*) significa que la corriente en la parte superior del bucle es hacia la página, y el punto sobre el círculo amarillo inferior en el inciso *a*) significa que la corriente en la parte superior del bucle es hacia fuera de la página. El punto P está ubicado en el centro del bucle.

Campo magnético debido a un bucle de alambre

Ahora encontremos el campo magnético en el centro de un alambre circular conductor de corriente. La figura 28.11*a*) muestra una sección transversal de un bucle circular de radio R que conduce una corriente, i. Al aplicar la ecuación 28.3, $dB = \mu_0 i\, ds \operatorname{sen}\theta/(4\pi r^2)$, a este caso, podemos ver que $r = R$ y $\theta = 90°$ para todo elemento de corriente $i\, ds$ a lo largo del bucle. Para la magnitud del campo magnético en el centro del bucle proveniente de cada elemento de corriente, obtenemos

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{i\, ds \operatorname{sen} 90°}{R^2} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{i\, ds}{R^2}.$$

Al seguir la dirección del bucle en la figura 28.11*b*), podemos relacionar el ángulo ϕ con el elemento de corriente $ds = R\, d\phi$, lo cual nos permite calcular la magnitud del campo magnético en el centro del bucle:

$$B = \int dB = \int_0^{2\pi} \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{iR\, d\phi}{R^2} = \frac{\mu_0 i}{2R}. \qquad (28.8)$$

Tenga en cuenta que la ecuación 28.8 sólo proporciona la magnitud del campo magnético en el centro del bucle, donde la magnitud es $B(r = 0) = \frac{1}{2}\mu_0 i/R$. Para determinar la dirección del campo magnético, de nuevo usamos una variante de la regla de la mano derecha 1. Si usa su mano derecha, apunte su pulgar en la dirección del elemento de corriente (hacia la página para el círculo superior en la figura 28.11*a*) marcado con una cruz) y su índice en la dirección del vector radial del elemento de corriente (hacia abajo); su dedo medio apunta entonces hacia la izquierda. Al usar la regla de la mano derecha 3 (figura 28.5), también encontramos que la corriente mostrada en la figura 28.11 produce un campo magnético $\vec{B}$ dirigido hacia la izquierda.

Encontremos ahora el campo magnético del bucle a lo largo de su eje, en lugar de en su centro (figura 28.12). Establecemos un sistema de coordenadas tal que el eje del bucle esté a lo largo del eje x y el centro del bucle esté en $x = 0$, $y = 0$, y $z = 0$. El vector radial $\vec{r}$ es el desplazamiento hacia cualquier punto a lo largo del eje x desde un elemento de corriente, $i\,d\vec{s}$, a lo largo del bucle. El elemento de corriente mostrado en la figura 28.12 está en la dirección z negativa. El vector radial $\vec{r}$ está en el plano xy y entonces es perpendicular al elemento de corriente. Esta situación es la misma para cualquier elemento de corriente alrededor del bucle. En consecuencia, podemos aplicar la ecuación 28.3 con $\theta = 90°$ y obtener una expresión para la magnitud del campo magnético diferencial en cualquier punto a lo largo del eje x:

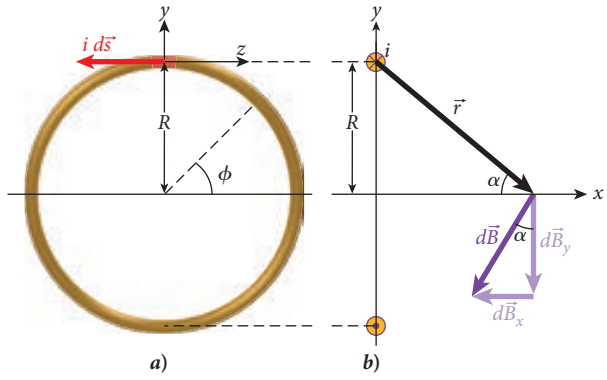


FIGURA 28.12 Geometría para calcular el campo magnético a lo largo del eje de un bucle conductor de corriente: *a*) vista frontal, *b*) vista lateral.

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{i\,ds\,\text{sen}\,90°}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{i\,ds}{r^2}.$$

Una variante de la regla de la mano derecha 1 proporciona la dirección del campo magnético diferencial: si usa su mano derecha, apunte el pulgar en la dirección del elemento diferencial de corriente (dirección z negativa) y el índice en la dirección del vector radial (dirección x positiva y dirección y negativa); la dirección del campo magnético diferencial está dada por el dedo medio (dirección x negativa y dirección y negativa). El campo magnético diferencial se muestra en la figura 28.12. Para obtener todo el campo magnético, necesitamos integrar sobre el elemento diferencial de corriente. A partir de la simetría de la situación, podemos ver que la integral de la componente y del campo magnético diferencial, dB_y, es cero. La componente x del campo magnético diferencial, dB_x, está dada por

$$dB_x = dB\,\text{sen}\,\alpha = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{i\,ds}{r^2}\,\text{sen}\,\alpha,$$

donde α es el ángulo entre $\vec{r}$ y el eje x (vea la figura 28.12*b*). Podemos expresar la magnitud de $\vec{r}$ en términos de x y R como $r = \sqrt{x^2 + R^2}$ y $\text{sen}\,\alpha$ en términos de x y el radio R del bucle como $\text{sen}\,\alpha = R/\sqrt{x^2 + R^2}$. Así, podemos volver a escribir la expresión para la componente x del campo magnético diferencial como

$$dB_x = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{i\,ds}{x^2 + R^2}\frac{R}{\sqrt{x^2 + R^2}} = \frac{\mu_0 i\,ds}{4\pi}\frac{R}{\left(x^2 + R^2\right)^{3/2}}.$$

Esta expresión para B_x es independiente de la ubicación del elemento de corriente, de modo que la integral para encontrar la magnitud de todo el campo puede simplificarse a

$$B_x = \int dB_x = \frac{\mu_0 iR}{4\pi\left(x^2 + R^2\right)^{3/2}}\int ds.$$

Al recorrer el bucle, podemos relacionar el ángulo ϕ con el elemento de corriente por $ds = R\,d\phi$ (vea la figura 28.12*a*), lo cual nos permite calcular el campo magnético a lo largo del eje del bucle:

$$B_x = \frac{\mu_0 iR}{4\pi\left(x^2 + R^2\right)^{3/2}}\int_0^{2\pi} R\,d\phi = \frac{\mu_0 i 2\pi}{4\pi}\frac{R^2}{\left(x^2 + R^2\right)^{3/2}},$$

o bien,

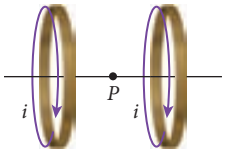
$$B_x = \frac{\mu_0 i}{2}\frac{R^2}{\left(x^2 + R^2\right)^{3/2}}. \qquad (28.9)$$

28.3 Oportunidad de autoevaluación

Demuestre que la ecuación 28.9 para la magnitud del campo magnético a lo largo del eje de un bucle conductor de corriente se reduce a la ecuación 28.8 para la magnitud del campo magnético en el centro del bucle conductor de corriente.

28.7 Ejercicio en clase

Dos alambres conductores de corriente idénticos conducen la misma corriente, i, como ilustra la figura. ¿Cuál es la dirección del campo magnético en el punto P?



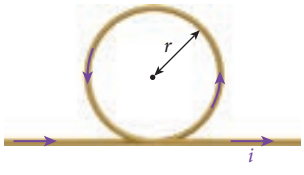
a) Hacia arriba (hacia la parte superior de la página).

b) Hacia la derecha.

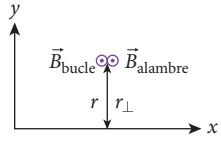
c) Hacia abajo.

d) Hacia la izquierda.

e) El campo magnético en P es cero.



a)



b)

FIGURA 28.14 *a*) Un bucle con radio r en un alambre conductor recto, largo y aislado que conduce una corriente, i. *b*) El campo magnético del alambre y el campo magnético del bucle, desplazados ligeramente para efectos de claridad.

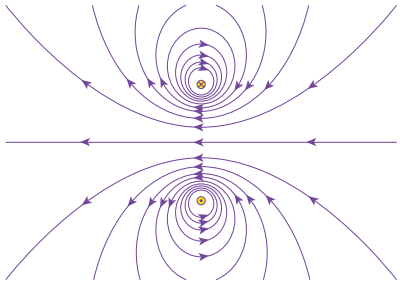


FIGURA 28.13 Líneas de campo magnético de un bucle de alambre conductor de corriente, viendo hacia el borde del bucle. El círculo amarillo superior con una cruz indica corriente dirigida hacia la página, y el círculo amarillo inferior con un punto indica corriente dirigida hacia fuera de la página.

A partir de nuestra aplicación anterior de la variante de la regla de la mano derecha 1, sabemos que el campo magnético a lo largo del eje del bucle es en la dirección x negativa, como muestra la figura 28.12. También podemos aplicar la regla de la mano derecha 3 para obtener la dirección del campo magnético: en cualquier punto sobre el bucle, apunte su pulgar tangente al bucle en la dirección de la corriente y sus dedos se curvan en una dirección que muestra que el campo dentro del bucle es en la dirección x negativa.

Al usar técnicas más avanzadas y con ayuda de una computadora, podemos determinar el campo magnético producido por un bucle conductor de corriente en otros puntos en el espacio. Las líneas de campo magnético de un bucle de alambre se muestran en la figura 28.13. El valor del campo magnético dado por la ecuación 28.8 sólo es válido en el punto central de la figura 28.13. El valor del campo magnético dado por la ecuación 28.9 sólo es válido a lo largo del eje del bucle.

PROBLEMA RESUELTO 28.2 Campo de un alambre que contiene un bucle

Un bucle de radio $r = 8.30$ mm se forma en medio de un alambre conductor recto, largo y aislado que conduce una corriente de magnitud $i = 26.5$ mA (figura 28.14*a*).

PROBLEMA

¿Cuál es la magnitud del campo magnético en el centro del bucle?

SOLUCIÓN

PIENSE

El campo magnético en el centro del bucle es igual a la suma vectorial de los campos magnéticos del alambre recto largo y del bucle.

ESBOCE

El campo magnético del alambre recto largo, $\vec{B}_{\text{alambre}}$, y el campo magnético del bucle, $\vec{B}_{\text{bucle}}$, se muestran en la figura 28.14*b*).

INVESTIGUE

Al usar la regla de la mano derecha 3, encontramos que ambos campos magnéticos apuntan hacia fuera de la página en el centro del bucle, como ilustra la figura 28.14*b*). Así, podemos sumar las magnitudes del campo magnético producido por el alambre y el campo magnético producido por el bucle. La magnitud del campo magnético producido por el alambre en el centro del bucle está dada por la ecuación 28.4:

$$B_{\text{alambre}} = \frac{\mu_0 i}{2\pi r_\perp},$$

donde $r_\perp$ es la distancia perpendicular al alambre, que es igual a r, el radio del bucle. La magnitud del campo magnético producido por el bucle en su centro está dada por la ecuación 28.8:

$$B_{\text{bucle}} = \frac{\mu_0 i}{2r}.$$

SIMPLIFIQUE

Puesto que los vectores están en la misma dirección, sumamos las magnitudes de los dos campos magnéticos:

$$B = B_{\text{alambre}} + B_{\text{bucle}} = \frac{\mu_0 i}{2\pi r} + \frac{\mu_0 i}{2r} = \frac{\mu_0 i}{2r}\left(\frac{1}{\pi} + 1\right).$$

CALCULE

Al escribir los valores numéricos, obtenemos

$$B = \frac{\mu_0 i}{2r}\left(\frac{1}{\pi} + 1\right) = \frac{\left(4\pi \cdot 10^{-7}\ \text{T m/A}\right)\left(26.5 \cdot 10^{-3}\ \text{A}\right)}{2\left(8.30 \cdot 10^{-3}\ \text{m}\right)}\left(\frac{1}{\pi} + 1\right) = 2.64463 \cdot 10^{-6}\ \text{T}.$$

REDONDEE

Mostramos nuestro resultado con tres cifras y observamos la dirección del campo:

$$\vec{B} = 2.64 \cdot 10^{-6}\ \text{T, hacia fuera de la página.}$$

VUELVA A REVISAR

Para corroborar nuestro resultado, calculamos por separado las magnitudes de los campos magnéticos del alambre y del bucle. La magnitud del campo magnético del alambre es

$$B_{\text{alambre}} = \frac{\mu_0 i}{2\pi r} = \frac{\left(4\pi \cdot 10^{-7}\ \text{T m/A}\right)\left(26.5 \cdot 10^{-3}\ \text{A}\right)}{2\pi\left(8.30 \cdot 10^{-3}\ \text{m}\right)} = 6.385 \cdot 10^{-7}\ \text{T}.$$

La magnitud del campo magnético del bucle es

$$B_{\text{bucle}} = \frac{\mu_0 i}{2r} = \frac{\left(4\pi \cdot 10^{-7}\ \text{T m/A}\right)\left(26.5 \cdot 10^{-3}\ \text{A}\right)}{2\left(8.30 \cdot 10^{-3}\ \text{m}\right)} = 2.006 \cdot 10^{-6}\ \text{T}.$$

La suma de estas dos magnitudes coincide con nuestro resultado:

$$6.385 \cdot 10^{-7}\ \text{T} + 2.006 \cdot 10^{-6}\ \text{T} = 2.64 \cdot 10^{-6}\ \text{T}.$$

28.3 Ley de Ampère

Recuerde por el capítulo 22 que calcular el campo eléctrico resultante de una distribución de carga eléctrica puede requerir la evaluación de una integral difícil. No obstante, si la distribución de carga presenta simetría cilíndrica, esférica o plana, podemos aplicar la ley de Gauss y obtener el campo eléctrico de manera elegante. De forma semejante, calcular el campo magnético debido a una distribución arbitraria de elementos de corriente usando la ley de Biot-Savart (ecuación 28.1), puede implicar la evaluación de una integral difícil. De manera alternativa, podemos evitar la ley de Biot-Savart y en su lugar aplicar la **ley de Ampère** para calcular el campo magnético de una distribución de elementos de corriente cuando la distribución tiene simetría cilíndrica o esférica. A menudo, los problemas pueden resolverse con mucho menos esfuerzo de esta forma que usando una integración directa. El planteamiento matemático de la ley de Ampère es

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 i_{\text{enc}}. \tag{28.10}$$

El símbolo $\oint$ significa que el integrando, $\vec{B} \cdot d\vec{s}$, se integra sobre un bucle cerrado, denominado **bucle amperiano**. Este bucle se escoge de modo que la integral en la ecuación 28.10 no sea difícil de evaluar, un procedimiento semejante al utilizado al aplicar la ley de Gauss. La corriente total encerrada en este bucle es i_{enc}, que también es semejante a la ley de Gauss, donde la superficie cerrada escogida encierra una carga neta total.

Como ejemplo de cómo se usa la ley de Ampère, considere las cinco corrientes mostradas en la figura 28.15, todas perpendiculares al plano. Un bucle amperiano, representado por la línea roja, encierra las corrientes i_1, i_2 e i_3 y excluye las corrientes i_4 e i_5. Por la ley de Ampère, la integral de

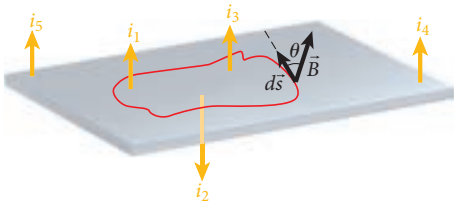


FIGURA 28.15 Cinco corrientes y un bucle amperiano.

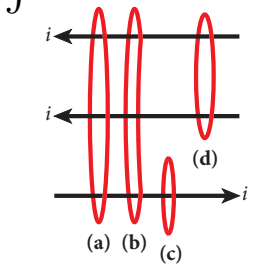
bucle cerrado sobre el campo magnético resultante a partir de estas tres corrientes esta dada por

$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{s} = \oint B\cos\theta\, ds = \mu_0\left(i_1 - i_2 + i_3\right),$$

donde θ es el ángulo entre la dirección del campo magnético, $\vec{B}$, y la dirección del elemento de longitud, $d\vec{s}$, en cada punto a lo largo del bucle amperiano. La integración sobre el bucle amperiano puede realizarse en cualquier dirección. La figura 28.15 indica una dirección de integración de la dirección de $d\vec{s}$, junto con el campo magnético resultante. El signo de las corrientes contribuyentes puede determinarse usando la regla de la mano derecha: curve sus dedos en la dirección de integración y entonces las corrientes en la dirección de su pulgar son positivas. Dos de las tres corrientes en el bucle amperiano son positivas, y una, negativa. La suma de estas tres corrientes es fácil, pero la integral $\oint B\cos\theta\, ds$ no puede evaluarse fácilmente. No obstante, analicemos algunas situaciones especiales en las que el ciclo amperiano contiene distribuciones de corriente simétricas que es posible aprovechar para llevar a cabo la integral.

28.8 Ejercicio en clase

Tres alambres conducen corrientes de la misma magnitud, i, en las direcciones descritas en la figura. Se muestran cuatro bucles amperianos, (a), (b), (c) y (d). ¿Para cuál bucle amperiano es máxima la magnitud de $\oint \vec{B}\cdot d\vec{s}$?



a) Bucle (a).
b) Bucle (b).
c) Bucle (c).
d) Bucle (d).
e) Todos los bucles producen el mismo valor de $\oint \vec{B}\cdot d\vec{s}$.

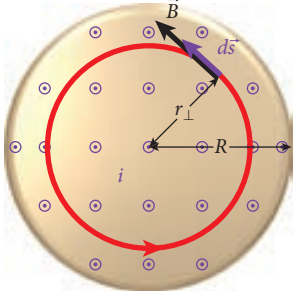


FIGURA 28.16 Uso de la ley de Ampère para encontrar el campo magnético producido dentro de un alambre recto largo.

Campo magnético dentro de un alambre recto largo

La figura 28.16 ilustra una corriente, i, que circula hacia fuera de la página en un alambre de sección transversal circular de radio R. Esta corriente está distribuida de manera uniforme sobre el área de la sección transversal del alambre. Para encontrar el campo magnético debido a esta corriente, usamos un bucle amperiano con radio $r_\perp$, representado por el círculo rojo. Si $\vec{B}$ tuviera una componente hacia fuera (o hacia dentro), por simetría, tendría una componente hacia fuera (o hacia dentro) en todos los puntos alrededor del bucle, y la línea de campo magnético correspondiente podría no estar cerrada nunca. En consecuencia, $\vec{B}$ debe ser tangente al bucle amperiano. Así, podemos volver a escribir la integral de la ley de Ampère como

$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{s} = B\oint d\vec{s} = B2\pi r_\perp .$$

Podemos calcular la corriente encerrada a partir de la razón del área del bucle amperiano al área de la sección transversal del alambre:

$$i_{\text{enc}} = i\frac{A_{\text{bucle}}}{A_{\text{alambre}}} = i\frac{\pi r_\perp^2}{\pi R^2}.$$

Por lo que obtenemos

$$2\pi B r_\perp = \mu_0 i\frac{\pi r_\perp^2}{\pi R^2},$$

o bien,

$$B = \left(\frac{\mu_0 i}{2\pi R^2}\right) r_\perp . \qquad (28.11)$$

Comparemos las expresiones para las magnitudes del campo magnético fuera y dentro del alambre: ecuaciones 28.4 y 28.11. Primero, al sustituir R por $r_\perp$ en ambas expresiones, obtenemos el mismo resultado para la magnitud del campo magnético en la superficie del alambre en ambos casos: $B(R) = \mu_0 i/2\pi R$. Las dos ecuaciones proporcionan la misma solución en la superficie del alambre. Dentro del alambre, encontramos que la magnitud del campo magnético aumenta linealmente con $r_\perp$ hasta el valor de $B(R) = \mu_0 i/(2\pi R)$ y a partir de ahí desciende con el inverso de $r_\perp$. La figura 28.17 muestra esta dependencia en la gráfica. La parte superior de la figura muestra la sección transversal a través del alambre (zona dorada), las líneas de campo magnético (círculos negros, espaciados para indicar la intensidad del campo magnético) y los vectores de campo magnético en puntos seleccionados en el espacio (flechas rojas).

28.4 Campos magnéticos de solenoides y toroides

Hemos visto que la corriente que fluye por un único bucle de alambre produce un campo magnético que no es uniforme, como indica la figura 28.13. Sin embargo, las aplicaciones en el mundo real a menudo requieren un campo magnético uniforme. Un dispositivo de uso común empleado para producir un campo magnético uniforme es la **bobina de Helmholtz** (figura 28.18*a*). Una bobina de Helmholtz consta de dos bucles de alambre coaxial. Cada uno consta de múltiples

bucles (vueltas) de un alambre único, que entonces actúa magnéticamente como un bucle único.

La figura 28.18*b*) muestra las líneas de campo magnético de una bobina de Helmholtz. Puede ver que en el centro entre los bucles hay una región de un campo magnético uniforme (caracterizada por segmentos de recta horizontales paralelos de las líneas de campo) en contraste con el campo de un bucle único mostrado en la figura 28.13. De nuevo, estas líneas de campo fueron calculadas con ayuda de una computadora para obtener un entendimiento cualitativo de la geometría de los campos magnéticos.

Al llevar los bucles múltiples un paso adelante, la figura 28.19 muestra las líneas de campo magnético de cuatro bucles de alambre coaxial. La región de campo magnético uniforme en el centro de los bucles está ampliada, pero observe que el campo no es uniforme cerca de los alambres y cerca de los dos extremos.

En un **solenoide** se produce un intenso campo magnético uniforme, que consta de muchos bucles de un alambre devanados estrechamente. En la figura 28.20 se muestran las líneas de campo magnético de un solenoide con 600 vueltas, o bucles. Puede ver que las líneas de campo magnético están muy próxi-

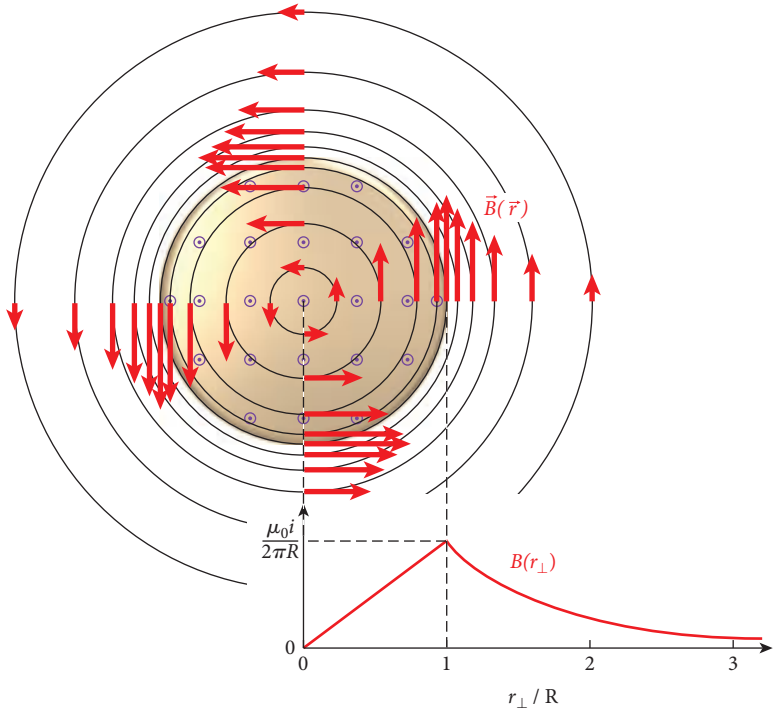
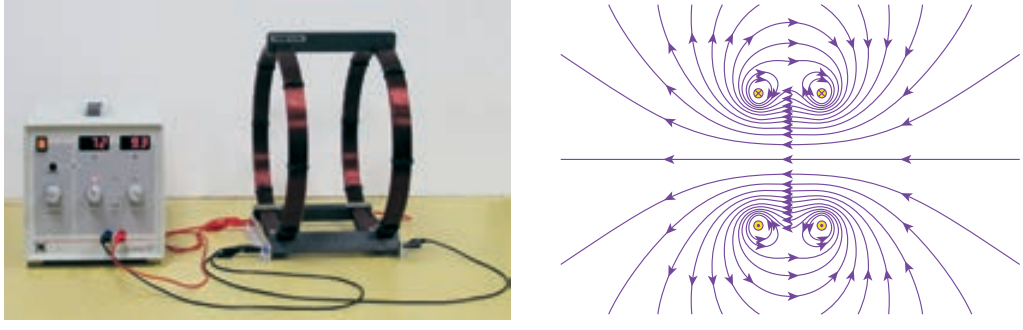


FIGURA 28.17 Dependencia radial del campo magnético para un alambre cuya corriente fluye hacia fuera de la página.



a) *b*)

FIGURA 28.18 *a*) Una bobina de Helmholtz típica usada en laboratorios de física para generar un campo magnético casi constante en el interior. *b*) Líneas de campo magnético para una bobina de Helmholtz.

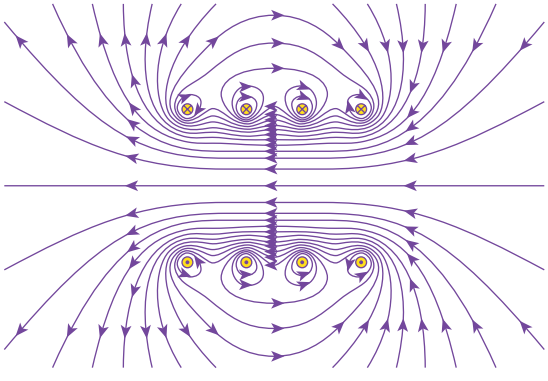


FIGURA 28.19 Líneas de campo magnético resultantes de cuatro bucles de alambre coaxial con muchas vueltas.

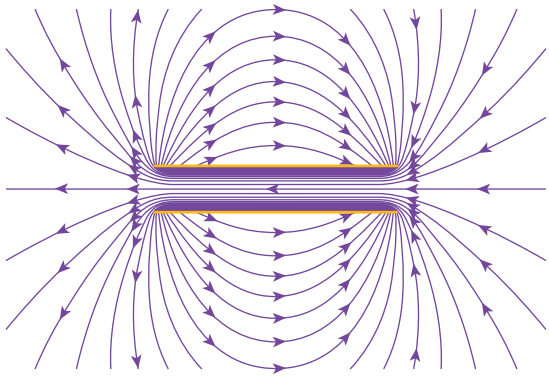


FIGURA 28.20 Líneas de campo magnético para un solenoide con 600 vueltas. La corriente a lo largo de la parte superior del solenoide está dirigida hacia la página, y la corriente a lo largo de la parte inferior del solenoide está dirigida hacia fuera de la página.

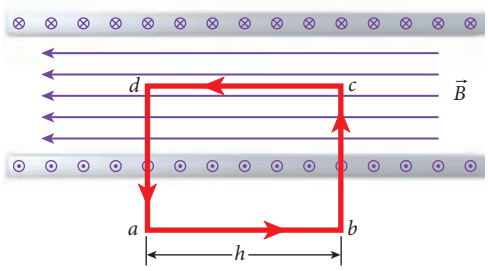


FIGURA 28.21 Bucle amperiano para determinar la magnitud del campo magnético de un solenoide ideal.

mas entre sí dentro del solenoide y alejadas en el exterior. Así como ocurre en el campo magnético de una bobina de Helmholtz (figura 28.18*b*), el campo magnético es uniforme dentro de la bobina del solenoide. La separación de las líneas de campo es una medida de la intensidad del campo magnético y usted puede ver que éste es mucho más intenso dentro del solenoide que fuera de éste.

Un solenoide *ideal* tiene un campo magnético igual a cero en el exterior y uno constante uniforme cuyo valor es finito en el interior. Para determinar la magnitud del campo magnético en el interior de un solenoide ideal podemos aplicar la ley de Ampère (ecuación 28.10) a una sección de un solenoide lejos de sus extremos (figura 28.21). Para hacerlo, primero escogemos un bucle amperiano sobre el cual llevar a cabo la integración. Una elección prudente, mostrada por el rectángulo rojo en la figura 28.21, encierra algo de corriente y aprovecha la simetría del solenoide, a la vez que simplifica la evaluación de la integral:

$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{s} = \int_a^b \vec{B}\cdot d\vec{s} + \int_b^c \vec{B}\cdot d\vec{s} + \int_c^d \vec{B}\cdot d\vec{s} + \int_d^a \vec{B}\cdot d\vec{s}.$$

El valor de la tercera integral en el miembro derecho, entre los puntos *c* y *d* en el interior del solenoide, es *Bh*. Los valores de las integrales segunda y cuarta son cero, porque el campo magnético es perpendicular a la dirección de integración. La primera integral, entre los puntos *a* y *b* en el exterior del solenoide ideal, es cero, porque el campo magnético fuera de un solenoide ideal es cero. De esta manera, el valor de la integral sobre todo el bucle amperiano es *Bh*.

El bucle encerrado es la corriente en las vueltas del solenoide que están dentro del bucle amperiano. La corriente es la misma en cada vuelta porque el solenoide está hecho de un alambre y la misma corriente circula por cada vuelta. Así, la corriente encerrada es justo el número de vueltas multiplicado por la corriente:

$$i_{\text{enc}} = nhi,$$

donde *n* es el número de vueltas por unidad de longitud. En consecuencia, según la ley de Ampère, tenemos

$$Bh = \mu_0 nhi.$$

Por lo tanto, la magnitud del campo magnético dentro de un solenoide ideal es

$$B = \mu_0 ni. \tag{28.12}$$

La ecuación 28.12 es válida sólo lejos de los extremos del solenoide. Observe que *B* no depende de la posición dentro del solenoide, de modo que un solenoide ideal crea un campo magnético constante y uniforme dentro del solenoide y ningún campo fuera de éste. Un solenoide del mundo real, como el que muestra la figura 28.20, tiene campos marginales cerca de sus extremos, aunque es capaz de producir un campo magnético uniforme de alta calidad.

EJEMPLO 28.2 Solenoide

El solenoide del detector STAR en el Brookhaven National Laboratory de Nueva York, analizado en el capítulo 27 tiene un campo magnético de magnitud 0.50 T cuando conduce una corriente de 400 A. El solenoide mide 8.0 m de longitud.

PROBLEMA

¿Cuál es el número de vueltas en este solenoide, en el supuesto de que es ideal?

SOLUCIÓN

Usamos la ecuación 28.12 para calcular la magnitud del campo magnético de un solenoide ideal:

$$B = \mu_0 ni. \tag{i}$$

El número de vueltas por unidad de longitud está dado por

$$n = \frac{N}{L}, \tag{ii}$$

donde *N* es el número de vueltas y *L* es la longitud del solenoide. Al sustituir *n* de la ecuación (ii) en la ecuación (i), obtenemos

$$B = \mu_0 i \frac{N}{L}. \tag{iii}$$

Al despejar el número de vueltas en la ecuación (iii), obtenemos

$$N = \frac{BL}{\mu_0 i} = \frac{(0.50\ \text{T})(8.0\ \text{m})}{\left(4\pi \cdot 10^{-7}\ \frac{\text{T m}}{\text{A}}\right)(400\ \text{A})} = 8\,000 \text{ vueltas.}$$

Si un solenoide se flexiona de modo que ambos extremos estén en contacto (figura 28.22), adquiere la forma de una rosquilla (un toro), donde el alambre forma una serie de bucles, cada uno con el mismo flujo de corriente a través de él. Este dispositivo se denomina *imán toroidal*, o **toroide**. Así como ocurre para un solenoide ideal, el campo magnético fuera de las bobinas de un imán toroidal ideal es cero. La magnitud del campo magnético dentro de la bobina del toroide puede calcularse usando la ley de Ampère y suponiendo que un bucle amperiano en forma de círculo con radio r, con $r_1 < r < r_2$, donde r_1 y r_2 son los radios interior y exterior del toroide. El campo magnético siempre está dirigido tangencialmente al bucle amperiano, de modo que tenemos

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = 2\pi r B.$$

La corriente encerrada es el número de bucles (o vueltas), N, en el toroide multiplicado por la corriente, i, en el alambre (en cada bucle), de modo que la ley de Ampère proporciona

$$2\pi r B = \mu_0 N i.$$

En consecuencia, la magnitud del campo magnético dentro de un imán toroidal está dada por

$$B = \frac{\mu_0 N i}{2\pi r}. \tag{28.13}$$

Observe que, a diferencia de lo que ocurre con el campo magnético dentro de un solenoide, la magnitud del campo magnético dentro de un toroide no depende del radio. A medida que el radio crece, la magnitud del campo magnético decrece. La dirección del campo magnético puede obtenerse usando la *regla de la mano derecha 4*: si usted cierra los dedos de su mano derecha alrededor del toroide en dirección de la corriente, como ilustra la figura 28.22, su pulgar apunta en la dirección del campo magnético dentro del toroide.

28.9 Ejercicio en clase

Dos solenoides tienen la misma longitud, pero el solenoide 1 tiene 15 veces el número de vueltas, $\frac{1}{9}$ del radio y 7 veces la corriente del solenoide 2. Calcule la razón del campo magnético dentro del solenoide 1 al campo magnético dentro del solenoide 2.

a) 105 *d*) 168

b) 123 *e*) 197

c) 144

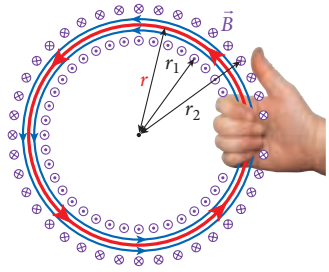


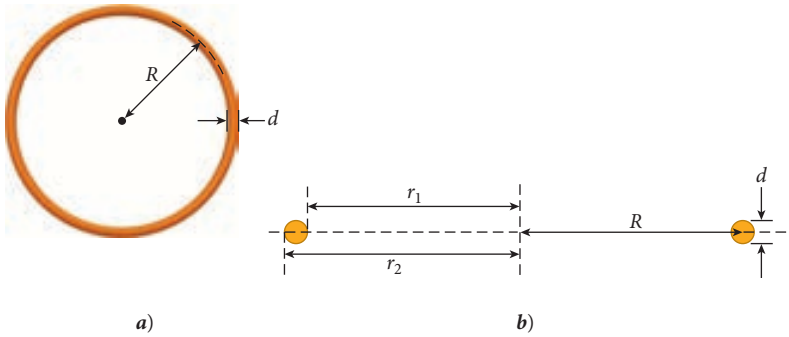
FIGURA 28.22 Imán toroidal con bucle amperiano (rojo) en forma de círculo con radio r. La regla de la mano derecha 4 establece que si los dedos de la mano derecha se colocan en la dirección del flujo de la corriente, el pulgar muestra la dirección del campo magnético dentro del toroide.

PROBLEMA RESUELTO 28.3 Campo de un imán toroidal

Un imán toroidal hecho con 202 m de alambre de cobre es capaz de conducir una corriente de magnitud i = 2.40 A. El toroide tiene un radio medio R = 15.0 cm y el diámetro de su sección transversal es d = 1.60 cm (figura 28.23*a*).

PROBLEMA

¿Cuál es el mayor campo magnético que puede producirse en el radio medio del toroide, R?



a) *b*)

FIGURA 28.23 *a*) Imán toroidal. *b*) Sección transversal de imán toroidal.

(*continúa*)

(*continuación*)

SOLUCIÓN

PIENSE

El número de vueltas en el imán toroidal está dado por la longitud del alambre dividida entre la circunferencia del área de la sección transversal de la bobina. Con estos parámetros es posible calcular el campo magnético del imán toroidal en $r = R$.

ESBOCE

La figura 28.23*b*) muestra un corte de la sección transversal del imán toroidal.

INVESTIGUE

La magnitud del campo magnético de un imán toroidal está dada por la ecuación 28.13:

$$B = \frac{\mu_0 N i}{2\pi R}, \tag{i}$$

donde N es el número de vueltas y R es el radio al que se mide el campo magnético. El número de vueltas, N, está dado por la longitud, L, del alambre dividida entre la circunferencia del área de la sección transversal:

$$N = \frac{L}{\pi d}, \tag{ii}$$

donde d es el diámetro del área de la sección transversal del toroide.

SIMPLIFIQUE

Podemos combinar las ecuaciones (i) e (ii) para obtener una expresión para B:

$$B = \frac{\mu_0 (L/\pi d) i}{2\pi R} = \frac{\mu_0 L i}{2\pi^2 R d}.$$

CALCULE

Al escribir los valores numéricos, obtenemos

$$B = \frac{\mu_0 L i}{2\pi^2 R d} = \frac{\left(4\pi \cdot 10^{-7}\ \text{T m/A}\right)(202\ \text{m})(2.40\ \text{A})}{2\pi^2 \left(15.0 \cdot 10^{-2}\ \text{m}\right)\left(1.60 \cdot 10^{-2}\ \text{m}\right)} = 0.0128597\ \text{T}.$$

REDONDEE

Mostramos nuestro resultado con tres cifras:

$$B = 1.29 \cdot 10^{-2}\ \text{T}.$$

VUELVA A REVISAR

Como otra revisión, calculamos la magnitud del campo dentro del solenoide que tiene la misma longitud que la circunferencia del imán toroidal. El número de vueltas por unidad de longitud es

$$n = \frac{L/\pi d}{2\pi R} = \frac{L}{2\pi^2 R d} = \frac{(202\ \text{m})}{2\pi^2 \left(15.0 \cdot 10^{-2}\ \text{m}\right)\left(1.60 \cdot 10^{-2}\ \text{m}\right)} = 4\,264\ \text{vueltas/m}.$$

La magnitud del campo magnético de un solenoide con ese número de vueltas por unidad de longitud es

$$B = \mu_0 n i = \left(4\pi \cdot 10^{-7}\ \text{T m/A}\right)\left(4\,264\ \text{m}^{-1}\right)(2.40\ \text{A}) = 1.29 \cdot 10^{-2}\ \text{T}.$$

Así, nuestra respuesta para el campo magnético dentro del toroide parece razonable.

28.5 Átomos como imanes

Los átomos que constituyen toda la materia contienen electrones en movimiento, que forman bucles de corriente que producen campos magnéticos. En la mayor parte de los materiales, estos bucles de corriente están orientados aleatoriamente y no producen campo magnético neto. En algunos materiales, una fracción de estos bucles de corriente están alineados. Estos materiales, denominados *materiales magnéticos* (sección 28.6), producen un campo magnético neto. Otros materiales pueden tener sus bucles de corriente alineados por un campo magnético externo, por lo que se magnetizan.

Consideremos un modelo del átomo bastante simplificado: un electrón que se mueve a velocidad constante v en una órbita circular de radio r (figura 28.24). Podemos considerar que la carga en movimiento del electrón es una corriente, i. La corriente se define como la carga por unidad de tiempo que pasa por un punto en particular. Para este caso, la carga es la carga del electrón, con magnitud e, y el tiempo está relacionado con el periodo, T, de la órbita del electrón. Así, la magnitud de la corriente está dada por

$$i = \frac{e}{T} = \frac{e}{2\pi r/v} = \frac{ve}{2\pi r}.$$

La magnitud del momento dipolar magnético del electrón en órbita está dado por

$$\mu_{\text{orb}} = iA = \frac{ve}{2\pi r}\left(\pi r^2\right) = \frac{ver}{2}. \tag{28.14}$$

La magnitud de la cantidad de movimiento angular orbital del electrón es

$$L_{\text{orb}} = rp = rmv,$$

donde m es la masa del electrón. Al despejar v en la ecuación 28.14 y sustituir esa expresión en la expresión para la cantidad de movimiento angular orbital, obtenemos

$$L_{\text{orb}} = rm\left(\frac{2\mu_{\text{orb}}}{er}\right) = \frac{2m\mu_{\text{orb}}}{e}.$$

Debido a que el momento dipolar magnético y la cantidad de movimiento angular orbital son cantidades vectoriales, podemos escribir

$$\vec{\mu}_{\text{orb}} = -\frac{e}{2m}\vec{L}_{\text{orb}}, \tag{28.15}$$

donde el signo negativo se requiere debido a la definición de la corriente como la dirección de flujo de carga positiva.

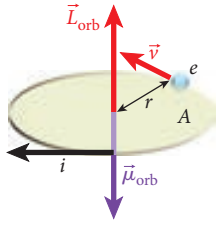


FIGURA 28.24 Un electrón en movimiento con velocidad constante en una órbita circular alrededor de un átomo.

EJEMPLO 28.3 Momento magnético orbital del átomo de hidrógeno

Suponga que el átomo de hidrógeno consta de un electrón que se mueve con velocidad v en una órbita circular de radio r alrededor de un protón estacionario. También suponga que la fuerza centrípeta que mantiene al electrón moviéndose en círculo es la fuerza electrostática entre el protón y el electrón. El radio de la órbita del electrón es $r = 5.29 \cdot 10^{-11}$ m. (Este radio se obtiene al usar conceptos analizados en el capítulo 38 sobre física atómica.)

PROBLEMA

¿Cuál es la magnitud del momento magnético orbital del átomo de hidrógeno?

SOLUCIÓN

La magnitud del momento magnético orbital es

$$\left|\mu_{\text{orb}}\right| = \frac{e}{2m}L_{\text{orb}} = \frac{e}{2m}(rmv) = \frac{erv}{2}. \tag{i}$$

Al igualar la magnitud de la fuerza centrípeta que mantiene al electrón moviéndose en círculo con la fuerza electrostática entre el protón y el electrón, obtenemos

$$\frac{mv^2}{r} = k\frac{e^2}{r^2},$$

(*continúa*)

(*continuación*)

donde k es la constante de Coulomb. En esta ecuación podemos despejar la velocidad del electrón

$$v = e\sqrt{\frac{k}{mr}}. \tag{ii}$$

Al sustituir v de la ecuación (ii) en la ecuación (i), obtenemos

$$|\mu_{\text{orb}}| = \frac{er}{2}\left(e\sqrt{\frac{k}{mr}}\right) = \frac{e^2}{2}\sqrt{\frac{kr}{m}}.$$

Al escribir los valores numéricos, obtenemos

$$|\mu_{\text{orb}}| = \frac{\left(1.602\cdot10^{-19}\,\text{C}\right)^2}{2}\sqrt{\frac{\left(8.99\cdot10^{9}\,\text{N m}^2/\text{C}^2\right)\left(5.29\cdot10^{-11}\,\text{m}\right)}{9.11\cdot10^{-31}\,\text{kg}}} = 9.27\cdot10^{-24}\,\text{A m}^2.$$

Este resultado coincide con mediciones experimentales del momento magnético orbital del átomo de hidrógeno. No obstante, otras predicciones sobre las propiedades de los átomos de hidrógeno y otros átomos, basadas en la idea de que los electrones en los átomos siguen órbitas circulares, están en desacuerdo con observaciones experimentales. Así, una descripción detallada de las propiedades magnéticas de los átomos debe contemplar fenómenos descritos por la física cuántica, lo cual se abordará en el capítulo 38.

Espín

El momento dipolar magnético del movimiento orbital de los electrones no es la única contribución al momento magnético de los átomos. Los electrones y otras partículas elementales tienen sus propios momentos magnéticos intrínsecos debidos al espín. El fenómeno del espín se abordará con todo detalle durante el análisis de física cuántica de los capítulos 36 a 40, aunque algunos hechos relacionados con el espín y su conexión con la cantidad de movimiento intrínseca de la partícula han sido descubiertos experimentalmente y no requieren conocimientos de física cuántica. Electrones, protones y neutrones, todos, tienen un espín de magnitud $s = \frac{1}{2}$. La magnitud de la cantidad de movimiento angular de estas partículas es $S = \hbar\sqrt{s(s+1)}$, y la componente z de la cantidad de movimiento angular puede tener un valor de $S_z = -\frac{1}{2}\hbar$ o $S_z = +\frac{1}{2}\hbar$. $\hbar$ es la constante de Planck dividida entre 2π. Este espín no puede explicarse por el movimiento orbital de alguna subestructura de las partículas. Los electrones, por ejemplo, aparentemente son verdaderas partículas puntuales. Así, el espín es una propiedad intrínseca, semejante a la masa o a la carga eléctrica.

El carácter magnético de materia a granel es determinado en gran medida por los momentos magnéticos del espín del electrón. El momento magnético de una partícula con espín, $\vec{\mu}_s$, está relacionado con la cantidad de movimiento angular de su espín, $\vec{S}$, por medio de

$$\vec{\mu}_s = g\frac{q}{2m}\vec{S}, \tag{28.16}$$

donde q es la carga de la partícula elemental y m es su masa. La cantidad g es adimensional y se denomina *factor g*. Para el electrón, su valor numérico es $g = -2.0023193043622(15)$, una de las cantidades de la naturaleza que se han medido con más precisión. Si usted compara esta ecuación con la ecuación 28.15 para el momento dipolar magnético debido a la cantidad de movimiento angular orbital, se percatará de que son muy semejantes.

28.6 Propiedades magnéticas de la materia

En el capítulo 27 vimos que los dipolos magnéticos no experimentan una fuerza neta en un campo magnético externo homogéneo, aunque sí experimentan un momento de torsión. Este momento de torsión activa un dipolo libre único hacia una orientación en la que es antiparalelo al campo externo, porque éste es el estado con menor energía potencial magnética. En la sección 28.5 vimos que los átomos pueden tener dipolos magnéticos. ¿Qué ocurre cuando la materia (que está compuesta por átomos) se expone a un campo magnético externo?

Los momentos dipolares de los átomos en un material pueden apuntar en direcciones diferentes o en la misma dirección. La **magnetización**, $\vec{M}$, de un material se define como el momento

dipolar magnético neto creado por los momentos dipolares de los átomos en el material por unidad de volumen. Entonces, el campo magnético, $\vec{B}$, dentro del material depende del campo magnético externo, $\vec{B}_0$, y de la magnetización, $\vec{M}$:

$$\vec{B} = \vec{B}_0 + \mu_0 \vec{M}, \tag{28.17}$$

donde μ_0 es de nuevo la permeabilidad magnética del espacio libre. En lugar de incluir el campo magnético externo, $\vec{B}_0$, suele acostumbrarse usar la **intensidad del campo magnético**, $\vec{H}$:

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}_0}{\mu_0}. \tag{28.18}$$

Con esta definición de la intensidad del campo magnético, la ecuación 28.17 puede escribirse como

$$\vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{M}). \tag{28.19}$$

Puesto que la unidad del campo magnético es $[B]$ = T y la unidad de la permeabilidad magnética es $[\mu_0]$ = T m/A, las unidades de magnetización y de intensidad de campo magnético son $[M] = [H]$ = A/m.

Diamagnetismo y paramagnetismo

La pregunta aún sin responder es cómo la magnetización depende del campo magnético externo, $\vec{B}_0$, o bien, en forma equivalente, de la intensidad del campo magnético, $\vec{H}$. Para la mayor parte de los materiales (¡pero no todos!) esta relación es lineal:

$$\vec{M} = \chi_m \vec{H}, \tag{28.20}$$

donde la constante de proporcionalidad χ_m se denomina **susceptibilidad magnética** del material (tabla 28.1). Pero hay materiales que no cumplen la simple relación lineal de la ecuación 28.20, de los cuales los más destacados son los ferromagnetos, que analizaremos en la siguiente subsección. Primero abordaremos materiales diamagnéticos y paramagnéticos para los cuales se cumple la ecuación 28.20.

Si $\chi_m < 0$, los dipolos dentro del material tienden a ordenarse a sí mismos en forma opuesta a la dirección del campo magnético, justo como dipolos libres. En este caso, el vector de magnetización apunta en dirección opuesta al vector de intensidad de campo magnético. Se dice que los

Tabla 28.1 Susceptibilidad magnética de algunos materiales diamagnéticos y paramagnéticos comunes

Material	Susceptibilidad magnética ($\chi_m \cdot 10^5$)
Aluminio	+2.2
Bismuto	−16.6
Diamante (carbono)	−2.1
Grafito (carbono)	−1.6
Hidrógeno	−0.00022
Plomo	−1.8
Litio	1.4
Mercurio	−2.9
Oxígeno	+0.19
Platino	+26.5
Silicio	−0.37
Sodio	+0.72
Cloruro de sodio (NaCl)	−1.4
Tungsteno	+6.8
Uranio	+40
Agua	−0.9

FIGURA 28.25 Un sapo vivo levita a causa de un campo magnético intenso en el High Field Magnet Laboratory, Radboud University Nijmegen, Países Bajos.

materiales con $\chi_m < 0$ son *diamagnéticos*. La mayor parte de los materiales presentan **diamagnetismo**. En materiales diamagnéticos, un momento dipolar magnético débil es inducido por un campo magnético externo en una dirección opuesta a la dirección del campo externo. El campo magnético inducido desaparece cuando se retira el campo externo. Si el campo externo es no uniforme, la interacción del momento dipolar inducido del material diamagnético con el campo externo crea una fuerza dirigida desde una región de mayor intensidad de campo magnético hasta una región de menor intensidad de campo magnético.

La figura 28.25 muestra un ejemplo de material biológico que presenta diamagnetismo. Las fuerzas diamagnéticas inducidas por un campo magnético externo no uniforme de 16 T hacen levitar un sapo vivo. (Aparentemente, este experimento no molestó al sapo.) La fuerza diamagnética normalmente despreciable es suficientemente grande en este caso para superar la fuerza de gravedad.

Si la susceptibilidad magnética en la ecuación 28.20 es mayor que cero, $\chi_m > 0$, la magnetización del material apunta en la misma dirección que la intensidad del campo magnético. Observe que χ_m para el vacío es 0. Esta propiedad es el **paramagnetismo**, y se dice que los materiales que lo presentan son *paramagnéticos*. Los materiales que contienen ciertos elementos de transición (incluyendo actínidos y tierras raras) presentan paramagnetismo. Cada átomo de estos elementos tiene un dipolo magnético permanente, aunque normalmente estos momentos dipolares están orientados aleatoriamente y no producen ningún campo magnético neto. Sin embargo, en presencia de un campo magnético externo, algunos de estos momentos dipolares magnéticos se alinean en la misma dirección que el campo externo. Una vez que se retira el campo externo, el momento dipolar magnético inducido desaparece. Si el campo externo es no uniforme, este momento dipolar magnético inducido interactúa con el campo externo para producir una fuerza dirigida desde una región de menor intensidad de campo magnético hasta una región de mayor intensidad de campo magnético: justo lo opuesto al efecto del diamagnetismo.

Al sustituir la expresión para $\vec{M}$ de la ecuación 28.20 en la ecuación 28.19 para el campo magnético, $\vec{B}$, dentro de un material, se obtiene

$$\vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{M}) = \mu_0(\vec{H} + \chi_m\vec{H}) = \mu_0(1 + \chi_m)\vec{H}. \tag{28.21}$$

En analogía con la permitividad eléctrica que se introdujo en el capítulo 24, la **permeabilidad magnética relativa**, κ_m, suele definirse como

$$\kappa_m = 1 + \chi_m. \tag{28.22}$$

Entonces, la permitividad magnética, μ, de un material puede expresarse como

$$\mu = (1 + \chi_m)\mu_0 = \kappa_m\mu_0. \tag{28.23}$$

Al sustituir μ_0 por μ en la ley de Biot-Savart (ecuación 28.1) y en la ley de Ampére (ecuación 28.10), podemos usar estas leyes para calcular el campo magnético en un material en particular.

Finalmente, para materiales paramagnéticos hay una dependencia de la magnitud de la magnetización con respecto a la temperatura. Convencionalmente, esta dependencia con respecto a la temperatura se expresa por medio de la *ley de Curie*:

$$M = \frac{cB}{T}, \tag{28.24}$$

donde c es la constante de Curie, B es la magnitud del campo magnético y T es la temperatura en Kelvins.

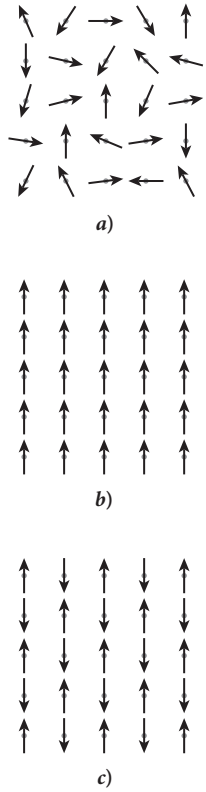


FIGURA 28.26 Dominios magnéticos: *a*) orientados aleatoriamente; *b*) orden ferromagnético perfecto; *c*) orden antiferromagnético perfecto.

Ferromagnetismo

Los elementos hierro, níquel, cobalto, gadolinio y disprosio, así como aleaciones que los contienen, presentan **ferromagnetismo**. Un material ferromagnético presenta orden de largo alcance a nivel atómico, lo cual ocasiona que los momentos dipolares de los átomos se alineen entre sí en una región limitada denominada **dominio**. Dentro de un dominio, el campo magnético puede ser intenso. Sin embargo, en muestras a granel de material, los dominios están orientados aleatoriamente, sin dejar campo magnético neto alguno. La figura 28.26*a*) ilustra momentos dipolares magnéticos orientados aleatoriamente en un dominio, y la figura 28.26*b*) muestra orden ferromagnético perfecto. La figura 28.26*c*) presenta el caso interesante de orden antiferromagnético perfecto, en el que la interacción entre momentos dipolares magnéticos vecinos los hace orientarse en direcciones opuestas. Este orden puede realizarse sólo a temperaturas muy bajas.

Un campo magnético externo también puede alinear dominios como muestra la figura 28.26*b*), como resultado de la interacción entre los momentos dipolares magnéticos del dominio y el campo magnético externo. Como resultado, un material ferromagnético retiene todo o parte de su magnetismo inducido cuando se retira el campo magnético externo, puesto que los dominios permanecen alineados. Además, el campo magnético producido por una corriente en un solenoide o en un toroide es más grande si en el dispositivo está presente un material ferromagnético. Pero en contraste con los materiales diamagnéticos y paramagnéticos, los materiales ferromagnéticos no obedecen la simple relación lineal dada en la ecuación 28.20. Los dominios retienen sus orientaciones y, así, el material presenta una magnetización diferente de cero incluso en ausencia de un campo magnético externo. (Ésta es la razón por la cual los imanes permanentes existen.)

La figura 28.27 ilustra la dependencia de la magnetización sobre la intensidad del campo magnético para los tres tipos de materiales que se han analizado. En las figuras 28.27*a*) y 28.27*b*) se muestran la dependencia lineal según la ecuación 28.20 para materiales diamagnéticos y paramagnéticos, respectivamente. La figura 28.27*c*) describe el ciclo de histéresis típico obtenido para materiales ferromagnéticos. Las flechas sobre la curva roja muestran la dirección en la que se desarrolla el proceso de ferromagnetización, y las líneas discontinuas representan la máxima magnetización posible (negativa y positiva). Para cualquier punto en este ciclo de histéresis, la magnetización puede expresarse en términos de un valor eficaz de la permeabilidad magnética, μ, del material ferromagnético, semejante a lo que se proporciona en la ecuación 28.23; no obstante, esta permeabilidad *no* es una constante, sino que depende de la intensidad del campo magnético aplicado e incluso de la trayectoria para la cual se alcanza ese valor de intensidad de campo. A pesar de lo anterior, los valores de la permeabilidad efectiva, μ, para materiales ferromagnéticos pueden ser muy grandes en comparación con los medidos para materiales paramagnéticos (mayores por un factor hasta de 10^4).

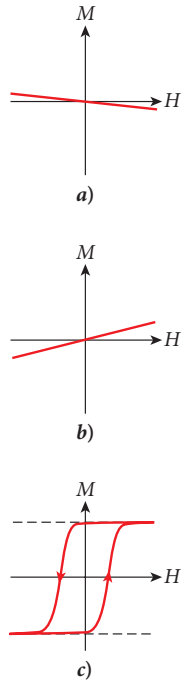


FIGURA 28.27 Magnetización como una función de la intensidad del campo magnético: *a*) para materiales diamagnéticos; *b*) para materiales paramagnéticos; *c*) para ciclo de histéresis para materiales ferromagnéticos.

El ferromagnetismo presenta dependencia con respecto a la temperatura. A cierta temperatura, denominada *temperatura de Curie*, los materiales ferromagnéticos dejan de presentar ferromagnetismo. En este punto, el orden ferromagnético debido a la interacción de los momentos dipolares en estos materiales es superado por el movimiento térmico. Para el hierro, la temperatura de Curie es 768 °C. La figura 28.28 ilustra una simple demostración en la que el calentamiento de un ferroimán permanente por arriba de su temperatura de Curie (figura 28.28*b*) destruye la atracción entre éste y otro imán permanente (figura 28.28*c*). Cuando el imán se va enfriando por debajo de su temperatura de Curie (figura 28.28*d*), de nuevo se vuelve un imán permanente (figura 28.28*e*).

a) *b*) *c*) *d*) *e*)

FIGURA 28.28 Demostración de la temperatura de Curie: *a*) un imán permanente forma el disco de un péndulo y es desviado de la vertical y mantenido ahí por otro imán permanente (ángulo inferior izquierdo de cada recuadro); *b*) el imán es calentado, empieza a brillar con un color rojo y se acerca a su temperatura de Curie; *c*) el imán está por arriba de su temperatura de Curie y está suspendido en posición vertical, lo cual muestra que ya no es magnético a esta temperatura; *d*) a medida que el imán se enfría por debajo de su temperatura de Curie, empieza a volver a ser un imán permanente, y *e*) vuelve a su posición de equilibrio original.

28.7 Magnetismo y superconductividad

Para aplicaciones industriales e investigaciones científicas pueden construirse imanes usando alambre resistivo normal conductor de corriente. Un imán típico de este tipo es un gran solenoide. La corriente que circula por el alambre del imán produce calor resistivo, y el calor suele retirarse por medio de agua de baja conductividad que fluye por conductores huecos. (El agua de baja conductividad se ha purificado, de modo que no conduce electricidad.) Estos imanes a temperatura ambiente no suelen producir campos magnéticos con intensidades por arriba de 1.5 T y su costo de construcción suele ser relativamente bajo, aunque su operación es costosa debido al alto precio de la electricidad.

Algunas aplicaciones, como imágenes de resonancia magnética (MRI, del inglés *magnetic resonance imaging*), requieren campos magnéticos de la magnitud más alta posible a fin de ase-

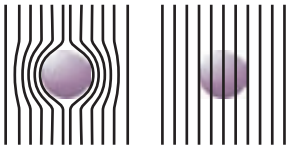


FIGURA 28.29 El efecto Meissner, donde un superconductor expulsa campos magnéticos externos de su interior, por debajo de la temperatura crítica a la que el material se vuelve superconductor.

gurar la mejor relación señal a ruido en las mediciones. Para lograr estos campos se usan imanes construidos mediante bobinas superconductoras en lugar de resistivas. Un imán así puede producir un campo más intenso que un imán a temperatura ambiente, con una magnitud de 10 T o más. Materiales como mercurio y plomo presentan superconductividad a temperatura del helio líquido, pero algunos metales que son buenos conductores a temperatura ambiente, como el cobre y el oro, jamás se vuelven superconductores. La desventaja de los imanes superconductores es que el conductor debe mantenerse a la temperatura del helio líquido, que es aproximadamente 4 K (aunque descubrimientos recientes que se describen después en esta sección están facilitando esta limitación). Así, el imán debe encerrarse en un criostato lleno con helio líquido para mantenerlo frío. Una ventaja de un imán superconductor es el hecho de que una vez que una corriente se establece en la bobina del imán, continúa fluyendo hasta que se retira usando medios externos. No obstante, la energía ahorrada al no tener pérdida resistiva en la bobina es compensada por lo menos parcialmente por el gasto de energía requerida para mantener fría la bobina superconductora.

Cuando por un superconductor de mercurio o plomo circula una corriente, el material se vuelve casi perfectamente diamagnético ($\chi_m \approx -1$). Según la ecuación 28.21, esto significa que el campo magnético dentro del material se hace cero. Por lo que el campo magnético es expulsado del material superconductor, y sólo es posible lograr densidades de corriente pequeñas. El campo magnético cero dentro de un material que se enfrió lo suficiente, al grado de volverse superconductor, se denomina efecto Meissner. Por arriba de la temperatura crítica, T_c, para la transición hacia superconductividad, el efecto Meissner desaparece y el material se vuelve un conductor normal (figura 28.29).

FIGURA 28.30 Por el efecto Meissner, un superconductor expulsa el campo magnético de un imán permanente, que permanece suspendido sobre de éste.

La figura 28.30 muestra una demostración impresionante del efecto Meissner: una pieza de un superconductor (enfriado a una temperatura por debajo de su temperatura crítica) hace que un imán permanente flote encima del superconductor al expulsar el campo magnético intrínseco del imán. Esto es posible porque las corrientes superconductoras sobre su superficie producen un campo magnético opuesto al campo aplicado, que produce un campo neto igual a cero dentro del superconductor y repulsión entre los campos arriba del superconductor.

El conductor usado en un imán superconductor se diseña especialmente para superar el efecto Meissner. Superconductores modernos se construyen a partir de filamentos de aleaciones de niobio-titanio incrustadas en cobre sólido. Los filamentos de niobio-titanio poseen dominios microscópicos en los que puede existir un campo magnético sin ser expulsado. El cobre sirve como soporte mecánico y puede hacerse cargo de la carga de corriente que hace que el superconductor se vuelva un conductor normal. Este tipo de superconductor puede producir campos magnéticos con magnitudes tan altas como 15 T.

Durante las dos últimas décadas, físicos e ingenieros han descubierto nuevos materiales que son superconductores a temperaturas bastante superiores a 4 K. Se han reportado temperaturas críticas hasta 160 K para estos *superconductores de alta temperatura*, lo cual significa que es posible hacerlos superconductores al enfriarlos con nitrógeno líquido. Muchos investigadores en todo el mundo están buscando materiales que sean superconductores a temperatura ambiente. Estos materiales revolucionarían muchas áreas de la industria; en particular, transporte y redes eléctricas.

LO QUE HEMOS APRENDIDO | GUÍA DE ESTUDIO PARA EXAMEN

- La permeabilidad magnética del espacio libre, μ_0, está dada por $4\pi \cdot 10^{-7}$ T m/A.
- La ley de Biot-Savart, $d\vec{B} = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\dfrac{i\,d\vec{s}\times\hat{r}}{r^2}$, describe el campo magnético diferencial, $d\vec{B}$, originado por un elemento de corriente $i\,d\vec{s}$, en la posición $\vec{r}$ con respecto al elemento de corriente.
- La magnitud del campo magnético a una distancia $r_\perp$ de un alambre recto largo conductor de corriente es $B = \mu_0 i/2\pi r_\perp$.
- La magnitud del campo magnético en el centro de un bucle con radio R que conduce corriente i es $B = \mu_0 i/2R$.
- La ley de Ampère está dada por $\oint \vec{B}\cdot d\vec{s} = \mu_0 i_{enc}$, donde $d\vec{s}$ es la ruta de integración e i_{enc} es la corriente encerrada en un bucle amperiano escogido.
- La magnitud del campo magnético dentro de un solenoide conductor de corriente i y que tiene n vueltas por unidad de longitud es $B = \mu_0 ni$.
- La magnitud del campo magnético dentro de un toroide que tiene N vueltas y conduce corriente i en el radio r está dada por $B = \mu_0 Ni/2\pi r$.
- Para un electrón con carga $-e$ y masa m que se mueve en órbita circular, el momento dipolar magnético puede relacionarse con la cantidad de movimiento angular orbital a través de $\vec{\mu}_{orb} = -\dfrac{e}{2m}\vec{L}_{orb}$.

- Para materiales diamagnéticos y paramagnéticos, la magnetización es proporcional a la intensidad del campo magnético: $\vec{M} = \chi_m \vec{H}$. Los materiales ferromagnéticos obedecen un ciclo de histéresis, por lo que se apartan de esta relación lineal.
- El campo magnético dentro de un material diamagnético o paramagnético se debe a la intensidad del campo magnético externo y a la magnetización: $\vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{M}) = \mu_0(\vec{H} + \chi_m \vec{H}) = \mu_0(1 + \chi_m)\vec{H} = \mu_0 \kappa_m \vec{H} = \mu \vec{H}$, donde κ_m es la permeabilidad magnética relativa.
- Las cuatro reglas de la mano derecha relacionadas con campos magnéticos se muestran en la figura 28.31. La regla de la mano derecha 1 proporciona la dirección de la intensidad magnética sobre una partícula cargada que se mueve en un campo magnético. La regla de la mano derecha 2 proporciona la dirección del vector normal unitario para un alambre conductor de corriente. La regla de la mano derecha 3 proporciona la dirección del campo magnético a partir de un alambre conductor de corriente. La regla de la mano derecha 4 proporciona la dirección del campo magnético dentro de un imán toroidal.

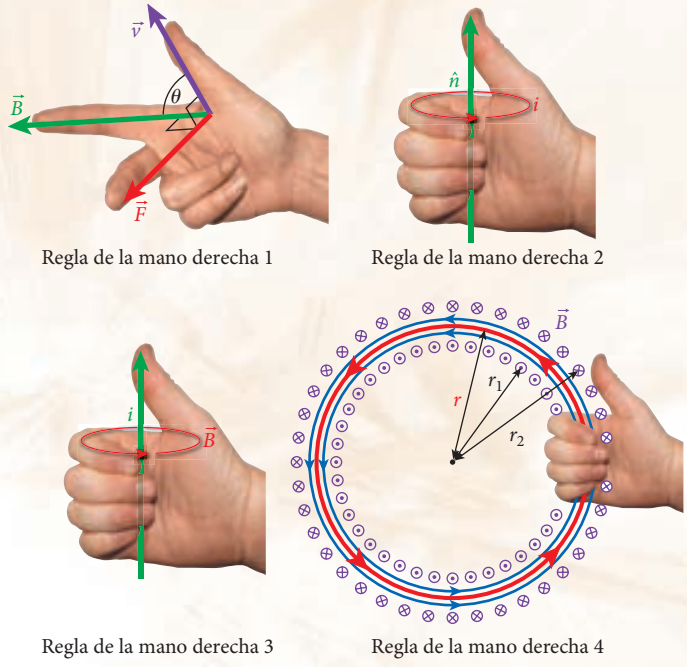


FIGURA 28.31 Cuatro reglas de la mano derecha relacionadas con campos magnéticos.

TÉRMINOS CLAVE

ley de Biot-Savart, p. 894
permeabilidad magnética del espacio libre, p. 894
ley de Ampère, p. 903
bucle amperiano, p. 903
bobina de Helmholtz, p. 904
solenoide, p. 905
toroide, p. 907
magnetización, p. 910
intensidad del campo magnético, p. 911
susceptibilidad magnética, p. 911
diamagnetismo, p. 912
paramagnetismo, p. 912
permeabilidad magnética relativa, p. 912
ferromagnetismo, p. 912
dominio, p. 912

NUEVOS SÍMBOLOS Y ECUACIONES

$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ T m/A, permeabilidad magnética del espacio libre

$d\vec{s}$, dirección vectorial de la integración en la ley de Ampère

i_{enc}, corriente encerrada dentro de un bucle amperiano

$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 i_{enc}$, ley de Ampère

$\vec{\mu}_{orb}$, momento dipolar magnético para un electrón en órbita circular

$\vec{L}_{orb}$, cantidad de movimiento angular orbital para un electrón que se mueve en órbita circular en un átomo

$\vec{M}$, magnetización

$\vec{H} = \vec{B}_0/\mu_0$, intensidad de campo magnético

χ_m, susceptibilidad magnética

κ_m, permeabilidad magnética relativa

RESPUESTAS A LAS OPORTUNIDADES DE AUTOEVALUACIÓN

28.1 El campo magnético en el punto P_1 apunta hacia la dirección y positiva. El campo magnético en el punto P_2 apunta hacia la dirección x negativa.

28.2 Dos alambres paralelos que llevan corriente en la misma dirección se atraen entre sí. Dos alambres paralelos que llevan corriente en la dirección opuesta se repelen entre sí.

28.3 $B_x = \dfrac{\mu_0 i}{2} \dfrac{R^2}{\left(0^2 + R^2\right)^{3/2}} = \dfrac{\mu_0 i}{2} \dfrac{R^2}{R^3} = \dfrac{\mu_0 i}{2R}$.

PRÁCTICA PARA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Lineamientos para resolver problemas

1. Cuando use la ley de Biot-Savart, siempre debe trazar un diagrama de la situación, destacando el elemento de corriente. Revise las simetrías que puede simplificar antes de proceder a realizar cualquier cálculo; puede ahorrarse una cantidad importante de trabajo.

2. Cuando use la ley de Ampère, escoja un bucle amperiano que presente simetría geométrica, a fin de simplificar la evaluación de la integral. A menudo es posible usar la regla de la mano derecha 3 para escoger la dirección de integración a lo largo del bucle: apunte su pulgar en la dirección de la corriente neta a través del bucle y sus dedos se curvan en la dirección de integración. Este método también le recuerda sumar las corrientes por el bucle amperiano para determinar la corriente encerrada.

3. Recuerde el principio de superposición para campos magnéticos: el campo magnético neto en cualquier punto del espacio es la suma vectorial de los campos magnéticos individuales generados por objetos diferentes. Asegúrese de no sumar simplemente las magnitudes. En lugar de eso, en general deberá sumar las componentes espaciales de las diversas fuentes de campo magnético por separado.

4. Todos los principios que rigen el movimiento de partículas cargadas en campos magnéticos y todos los lineamientos para resolver problemas presentados en el capítulo 27 siguen siendo válidos. No importa si el campo magnético se debe a un imán permanente o a un electroimán.

5. Para calcular el campo magnético en un material, puede usar fórmulas deducidas a partir de las leyes de Ampère y Biot-Savart, aunque debe sustituir μ_0 por $\mu \equiv \kappa_m \mu_0 \equiv (1+\chi_m)\mu_0$.

PROBLEMA RESUELTO 28.4 Campo magnético de cuatro alambres

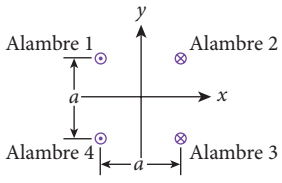


FIGURA 28.32 Cuatro alambres colocados en los vértices de un cuadrado. Dos de los alambres conducen corriente hacia la página y los otros dos conducen corriente hacia fuera de la página.

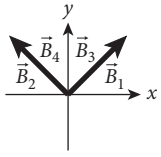


FIGURA 28.33 Los campos magnéticos de los cuatro alambres conductores de corriente.

Cada uno de cuatro alambres conduce una corriente de magnitud $i = 1.00$ A. Los alambres están colocados en los cuatro vértices de un cuadrado de lado $a = 3.70$ cm. La corriente que fluye por dos de los alambres es hacia la página, y la corriente de los otros dos alambres es hacia fuera de la página (figura 28.32).

PROBLEMA

¿Cuál es la componente y del campo magnético en el centro del cuadrado?

SOLUCIÓN

PIENSE

El campo magnético en el centro del cuadrado es la suma vectorial de los campos magnéticos de los cuatro alambres conductores de corriente. La magnitud del campo magnético de cada uno de los cuatro alambres es la misma. La dirección del campo magnético de cada alambre se determina usando la regla de la mano derecha 3.

ESBOCE

La figura 28.33 muestra los campos magnéticos de los cuatro alambres: $\vec{B}_1$ es el campo magnético del alambre 1, $\vec{B}_2$ es el campo magnético del alambre 2, $\vec{B}_3$ es el campo magnético del alambre 3, y $\vec{B}_4$ es el campo magnético del alambre 4. $\vec{B}_2$ y $\vec{B}_4$ son iguales, y $\vec{B}_1$ y $\vec{B}_3$ son iguales.

INVESTIGUE

La magnitud del campo magnético de cada uno de los cuatro alambres está dada por

$$B = \frac{\mu_0 i}{2\pi r} = \frac{\mu_0 i}{2\pi\left(a/\sqrt{2}\right)},$$

donde $a/\sqrt{2}$ es la distancia de cada alambre al centro del cuadrado.
La regla de la mano derecha 3 proporciona las direcciones de los campos magnéticos, que se muestran en la figura 28.33. La componente y de cada uno de los campos magnéticos está dada por

$$B_y = B \operatorname{sen} 45°.$$

SIMPLIFIQUE

La suma de las componentes y de los cuatro campos magnéticos es

$$B_{y,\text{suma}} = 4B_y = 4B \operatorname{sen} 45° = 4\frac{\mu_0 i}{2\pi\left(a/\sqrt{2}\right)}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{2\mu_0 i}{\pi a},$$

donde hemos usado $\operatorname{sen} 45° = 1/\sqrt{2}$.

CALCULE

Al escribir los valores numéricos, obtenemos

$$B_{y,\text{suma}} = \frac{2\mu_0 i}{\pi a} = \frac{2\left(4\pi\cdot 10^{-7}\ \text{T m/A}\right)(1.00\ \text{A})}{\pi\left(3.70\cdot 10^{-2}\ \text{m}\right)} = 2.16216\cdot 10^{-5}\ \text{T}.$$

REDONDEE

Mostramos nuestro resultado con tres cifras:

$$B_{y,\text{suma}} = 2.16\cdot 10^{-5}\ \text{T}.$$

VUELVA A REVISAR

Para corroborar nuestro resultado, calculamos la magnitud del campo magnético de un alambre en el centro del cuadrado:

$$B = \frac{\mu_0 i}{2\pi\left(a/\sqrt{2}\right)} = \frac{\left(4\pi\cdot 10^{-7}\ \text{T m/A}\right)(1.00\ \text{A})\sqrt{2}}{2\pi\left(3.70\cdot 10^{-2}\ \text{m}\right)} = 7.64\cdot 10^{-6}\ \text{T}.$$

Entonces, la suma de las componentes y es

$$B_{\text{suma}} = \frac{4\left(7.64\cdot 10^{-6}\ \text{T}\right)}{\sqrt{2}} = 2.16\cdot 10^{-5}\ \text{T},$$

que coincide con nuestro resultado.

PROBLEMA RESUELTO 28.5 Movimiento de un electrón en un solenoide

Un solenoide ideal tiene 200.0 vueltas/cm. Un electrón dentro de la bobina se mueve en un círculo de radio r = 3.00 cm perpendicular al eje del solenoide. El electrón se mueve con una velocidad $v = 0.0500c$, donde c es la velocidad de la luz.

PROBLEMA

¿Cuál es la corriente en el solenoide?

SOLUCIÓN

PIENSE

El solenoide produce un campo magnético uniforme, que es proporcional a la corriente que circula por el solenoide. El radio del movimiento circular del electrón está relacionado con la velocidad del electrón y el campo magnético dentro del solenoide.

ESBOCE

La figura 28.34 muestra la trayectoria circular del electrón en el campo magnético uniforme del solenoide.

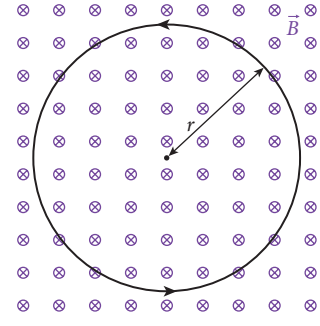


FIGURA 28.34 Electrón que se mueve en trayectoria circular dentro de un solenoide.

INVESTIGUE

La magnitud del campo magnético dentro del solenoide está dada por

$$B = \mu_0 n i, \tag{i}$$

donde i es la corriente en el solenoide y n es el número de vueltas por unidad de longitud. La fuerza magnética proporciona la fuerza centrípeta necesaria para que el electrón se mueva en círculo y así el radio de la trayectoria del electrón pueda relacionarse con B:

$$r = \frac{mv}{eB}, \tag{ii}$$

donde m es la masa del electrón, v es su velocidad y e es la magnitud de la carga del electrón.

(*continúa*)

(*continuación*)

SIMPLIFIQUE

Al combinar las ecuaciones (i) y (ii), tenemos

$$r = \frac{mv}{e(\mu_0 ni)}.$$

Al despejar en esta ecuación la corriente en el solenoide, obtenemos

$$i = \frac{mv}{er\mu_0 n}. \qquad \text{(iii)}$$

CALCULE

La velocidad del electrón se especificó en términos de la velocidad de la luz:

$$v = 0.0500c = 0.0500\left(3.00\cdot 10^{8}\ \text{m/s}\right) = 1.50\cdot 10^{7}\ \text{m/s}.$$

Al escribir éste y los demás valores numéricos en la ecuación (iii), obtenemos

$$i = \frac{mv}{er\mu_0 n} = \frac{\left(9.11\cdot 10^{-31}\ \text{kg}\right)\left(1.50\cdot 10^{7}\ \text{m/s}\right)}{\left(1.602\cdot 10^{-19}\ \text{C}\right)\left(3.00\cdot 10^{-2}\ \text{m}\right)\left(4\pi\cdot 10^{-7}\ \text{T m/A}\right)\left(200\cdot 10^{2}\ \text{m}^{-1}\right)}$$
$$= 0.113132\ \text{A}.$$

REDONDEE

Mostramos nuestro resultado con tres cifras:

$$i = 0.113\ \text{A}.$$

VUELVA A REVISAR

Para corroborar nuestro resultado, lo usamos para calcular la magnitud del campo magnético dentro del solenoide:

$$B = \mu_0 ni = \left(4\pi\cdot 10^{-7}\ \text{T m/A}\right)\left(200\cdot 10^{2}\ \text{m}^{-1}\right)(0.113\ \text{A}) = 0.00284\ \text{T}.$$

Esta magnitud del campo magnético parece razonable. Así, nuestro valor calculado para la corriente en el solenoide parece razonable.

PREGUNTAS DE OPCIÓN MÚLTIPLE

28.1 Dos alambres rectos largos son paralelos entre sí. Los alambres conducen corrientes de magnitudes diferentes. Si la cantidad de corriente que circula por cada alambre se duplica, la magnitud de la fuerza entre los alambres es:

a) El doble de la magnitud de la fuerza original.

b) Cuatro veces la magnitud de la fuerza original.

c) Igual a la magnitud de la fuerza original.

d) La mitad de la magnitud de la fuerza original.

28.2 Un elemento de corriente produce un campo magnético en la región que lo rodea. En cualquier punto en el espacio, el campo magnético producido por este elemento de corriente apunta en una dirección que es:

a) Radial desde el elemento de corriente hasta el punto en el espacio.

b) Paralela al elemento de corriente.

c) Perpendicular al elemento de corriente y a la dirección radial.

28.3 El número de vueltas en un solenoide se duplica, y su longitud se reduce a la mitad. ¿Cómo cambia su campo magnético?

a) Se duplica.

b) Se reduce a la mitad.

c) Se cuadruplica.

d) Permanece sin cambio.

28.4 La fuerza magnética no puede realizar trabajo sobre una partícula cargada, puesto que la fuerza siempre es perpendicular a la velocidad. ¿Cómo es posible que los imanes puedan detectar uñas? Considere dos alambres paralelos conductores de corriente. Los campos magnéticos producen fuerzas de atracción entre los alambres, de modo que parece que el campo magnético debido a un alambre realiza trabajo sobre el otro alambre. ¿Cómo explica este hecho?

a) La fuerza magnética no puede realizar trabajo sobre cargas aisladas; esto no dice nada respecto al trabajo que la fuerza magnética puede realizar sobre cargas confinadas en un conductor.

b) Puesto que sólo un campo eléctrico puede realizar trabajo sobre las cargas, en realidad son los campos eléctricos los que realizan trabajo aquí.

c) Este trabajo aparente se debe a cualquier otro tipo de fuerza.

28.5 En un solenoide en el que los alambres están envueltos de modo que cada bucle toca los bucles adyacentes, ¿cuál de los siguientes hechos incrementa el campo magnético dentro del imán?

a) Hacer más pequeño el radio de los bucles.

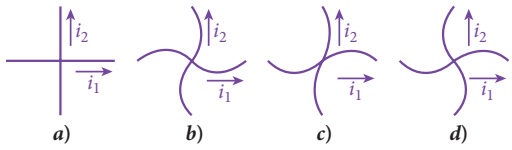
b) Aumentar el radio del alambre.

c) Aumentar el radio del solenoide.

d) Disminuir el radio del alambre.

e) Sumergir el solenoide en gasolina.

28.6 Dos alambres aislados se cruzan a un ángulo de 90°, y por ambos se envían corrientes. ¿Cuál de las siguientes figuras ilustra mejor la configuración de los alambres, si la corriente en el alambre horizontal fluye en la dirección *x* positiva y la corriente en el alambre vertical fluye en la dirección *y* positiva?



28.7 ¿Cuál es una buena regla práctica para diseñar una bobina magnética simple? Específicamente, dada una bobina circular de radio ~1 cm, ¿cuál es la magnitud aproximada del campo magnético, en gauss por amperio por vuelta? (*Nota*: 1 G = 0.0001 T.)

a) 0.0001 G/(A-vuelta) *c*) 1 G/(A-vuelta)

b) 0.01 G/(A-vuelta) *d*) 100 G/(A-vuelta)

28.8 Un cilindro sólido conduce una corriente uniforme sobre su sección transversal. ¿Dónde es máxima la magnitud del campo magnético?

a) En el centro de la sección transversal del cilindro.

b) En medio del cilindro.

c) En la superficie.

d) Ninguna de las anteriores.

28.9 Dos alambres rectos largos conducen corrientes que circulan en la misma dirección como muestra la figura. La fuerza entre los alambres es:

a) De atracción. *b*) De repulsión. *c*) Cero.

28.10 En un experimento magneto-óptico, una muestra líquida en un frasco esférico de 10 mL se coloca en un campo magnético uniforme, y hacia la muestra se dirige un rayo láser. ¿En cuál de las siguientes opciones se muestra lo necesario para crear el campo magnético uniforme requerido por el experimento?

a) Una bobina plana de 5 cm de diámetro que consta de una vuelta de alambre calibre 4.

b) Una bobina estrechamente devanada con una sola capa de 10 cm de diámetro con 20 vueltas de alambre calibre 18.

c) Una bobina estrechamente envuelta con una sola capa de 2 cm de diámetro y 10 cm de longitud de alambre calibre 18.

d) Un conjunto de dos bobinas de 10 cm de diámetro de dos alambres coaxiales, separadas por una distancia de 5 cm, donde cada una consta de una vuelta de alambre calibre 4.

PREGUNTAS

28.11 En muchas aplicaciones prácticas se usan pares trenzados de cables donde los alambres de tierra y de la señal están enrollados entre sí. ¿Por qué?

28.12 Analice cómo la precisión de la aguja de una brújula para mostrar la verdadera dirección de norte puede verse afectada por el campo magnético debido a las corrientes en alambres y aparatos electrodomésticos en una casa.

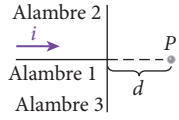
28.13 ¿Puede existir un solenoide ideal, uno sin campo magnético fuera del solenoide? En caso negativo, ¿lo anterior hace inútil la deducción del campo magnético dentro del solenoide (sección 28.4)?

28.14 Las fuerzas conservativas tienden a actuar sobre los objetos de modo que minimizan la energía potencial del sistema. Use este principio para explicar la dirección de la fuerza sobre el bucle conductor de corriente descrito en el ejemplo 28.1.

28.15 Dos partículas, cada una con carga q y masa m, se desplazan en el vacío en trayectorias paralelas separadas por una distancia d, ambas a una velocidad v (mucho menor que la velocidad de la luz). Calcule la razón de la magnitud de la fuerza magnética que cada partícula ejerce sobre la otra a la magnitud de la fuerza eléctrica que las partículas ejercen entre sí: F_m/F_e.

28.16 Un largo tubo cilíndrico recto de radio interior a y radio exterior b conduce una corriente total i uniformemente por su sección transversal. Determine la magnitud del campo magnético del tubo en el punto medio entre los radios interior y exterior.

28.17 Tres alambres idénticos están conectados en una *T*, como muestra la figura.



Si la corriente i fluye hacia el nodo, ¿cuál es el campo magnético en el punto *P*, a una distancia d del nodo?

28.18 En cierta región hay un campo magnético constante y uniforme, $\vec{B}$. Cualquier campo eléctrico en la región también es invariable con el tiempo. Encuentre la densidad de la corriente, $\vec{J}$, en esta región.

28.19 El carácter magnético de la materia a granel es determinado en gran medida por los momentos magnéticos del espín del electrón, en lugar de por los momentos dipolares orbitales. (Las contribuciones nucleares son despreciables, ya que el momento magnético del espín del protón es aproximadamente 658 veces menor que el del electrón.) Si los átomos o las moléculas de una sustancia tienen espines de electrones sin par, los momentos magnéticos asociados originan el comportamiento paramagnético o el comportamiento ferromagnético si la interacción entre los átomos o las moléculas es suficientemente intensa para alinearlos en sus dominios. Si los átomos o las moléculas no tienen espines sin par, entonces las perturbaciones magnéticas de las órbitas de los electrones originan el comportamiento diamagnético.

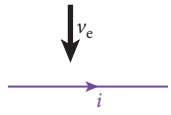
a) El gas hidrógeno molecular (H_2) es débilmente diamagnético. ¿Qué implica esto sobre los espines de los dos electrones en la molécula de hidrógeno?

b) ¿Cómo esperaría que fuese el comportamiento magnético del gas hidrógeno atómico (H)?

28.20 Cuando los materiales se exponen a campos magnéticos suficientemente altos *se saturan*, o tienden a una magnetización máxima. ¿Esperaría que la magnetización de sa-

turación (máxima) de materiales paramagnéticos sea mucho menor que, aproximadamente igual, o mucho mayor que la de los materiales ferromagnéticos? Explique por qué.

28.21 Un alambre recto largo conduce una corriente, como ilustra la figura. Un electrón se dispara directamente hacia el alambre desde arriba. La trayectoria del electrón y el alambre están en el mismo plano. ¿El electrón se desvía de su trayectoria inicial? En caso afirmativo, ¿en qué dirección?



PROBLEMAS

Una • y dos •• indican un nivel creciente de dificultad.

Secciones 28.1 y 28.2

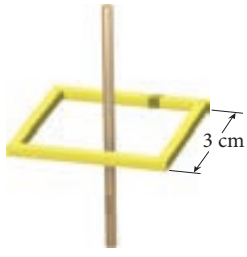
28.22 Dos alambres paralelos largos están separados por una distancia de 3.0 mm. La corriente que circula en uno de los alambres es el doble de la que fluye en el otro. Si la magnitud de la fuerza sobre 1.0 m de longitud de uno de los alambres es 7.0 μN, ¿cuáles son los valores de las dos corrientes?

28.23 Un electrón se dispara desde un cañón de electrones con una velocidad de $4.0 \cdot 10^5$ m/s y se mueve paralelo a y a una distancia de 5.0 cm de un alambre recto largo que conduce una corriente de 15 A. Determine la magnitud y la dirección de la aceleración del electrón en el instante en el que abandona el cañón de electrones.

28.24 Un electrón se mueve en línea recta a una velocidad de $5 \cdot 10^6$ m/s. ¿Cuáles son la magnitud y la dirección del campo magnético creado por el electrón en movimiento a una distancia d = 5 m adelante de su línea de movimiento? ¿Cambia la respuesta si la partícula en movimiento es un protón?

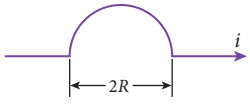
28.25 Suponga que el campo magnético de la Tierra se debe a una sola corriente que se mueve en un círculo de radio $2.00 \cdot 10^3$ km a través del núcleo fundido de la Tierra. La intensidad del campo magnético de la Tierra sobre la superficie cerca del polo es alrededor de $6.00 \cdot 10^{-5}$ T. ¿Aproximadamente cuánta corriente se requiere para producir un campo así?

28.26 Un amperímetro cuadrado tiene lados de longitud 3.00 cm. Sus lados son capaces de medir el campo magnético al que están sujetos. Cuando el amperímetro se abraza alrededor de un alambre conductor de una corriente CD, como describe la figura, el valor medio del campo magnético medido en los lados es 3.00 G. ¿Cuál es la corriente en el alambre?

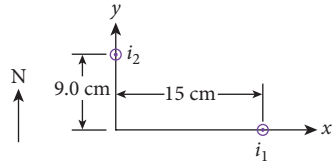


•**28.27** Un alambre recto largo conductor de una corriente de 2.00 A está colocado a lo largo del eje x. Una partícula con carga q = –3.00 μC pasa paralela al eje z por el punto $(x,y,z) = (0,2,0)$. ¿Dónde en el plano xy debe colocarse otro alambre recto largo de modo que no haya fuerza magnética sobre la partícula en el punto en el que cruza el plano?

•**28.28** Encuentre el campo magnético en el centro del alambre en forma de semicírculo como el que se muestra en la figura, con radio R = 10.0 cm, si la corriente es i = 12.0 A.



•**28.29** Dos alambres muy largos son paralelos al eje z, como muestra la figura. Cada uno conduce una corriente, $i_1 = i_2 = 25.0$ A en dirección del eje z positivo. El campo magnético de la Tierra está dado por $\vec{B} = (2.6 \cdot 10^{-5})\hat{y}$ T (en el plano xy y apuntando hacia el norte). La aguja de una brújula se coloca en el origen. Determine el ángulo θ entre la aguja de la brújula y el eje x. (*Sugerencia*: la aguja de la brújula alinea su eje a lo largo del campo magnético neto.)

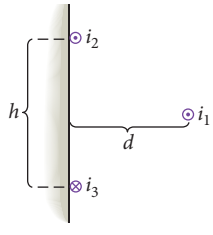


•**28.30** Dos bobinas coaxiales idénticas de radio 20.0 cm están directamente una arriba de la otra, separadas por un entrehierro de 2.00 mm. La bobina inferior está sobre una mesa plana y conduce una corriente i en dirección del movimiento de las manecillas del reloj; la bobina superior conduce una corriente idéntica y tiene una masa de 0.0500 kg. Determine la magnitud y la dirección que debe tener la bobina superior para mantener suspendida la bobina a la altura de su corriente.

•**28.31** Un alambre recto largo colocado a lo largo del eje x conduce una corriente, i, que fluye en la dirección x positiva. Un segundo alambre recto largo está colocado a lo largo del eje y y conduce una corriente, i, en la dirección y positiva. ¿Cuáles son la magnitud y la dirección del campo magnético en el punto $z = b$ sobre el eje x?

•**28.32** Un bucle cuadrado de alambre con lado de longitud 10.0 cm conduce una corriente de 0.300 A. ¿Cuál es el campo magnético en el centro del bucle cuadrado?

•**28.33** La figura muestra la sección transversal a través de tres alambres largos con una distribución de masa lineal de 100. g/m. Los alambres conducen corrientes i_1, i_2 e i_3 en las direcciones mostradas. Los alambres 2 y 3 están separados por una distancia de 10.0 cm y cada uno conduce una corriente de 600. A. ¿Qué corriente, i_1, permite que el alambre 1 "flote" a una distancia perpendicular d de la superficie vertical de 10.0 cm? (Ignore el grosor de los alambres.)



•**28.34** Una configuración en forma de pinza para el cabello se hace con dos alambres rectos semiinfinitos, separados por una distancia de 2.00 cm y unidos por una pieza semicircular de alambre (cuyo radio debe ser 1.00 cm y cuyo centro está en el origen de coordenadas xyz). El alambre de arriba está dispuesto a lo largo de la recta y = 1.00 cm y el alambre de abajo está dispuesto a lo largo de la recta $y = -1.00$ cm; estos dos alambres están en el lado izquierdo ($x < 0$) del plano xy. La corriente en la pinza es 3.00 A y está dirigida hacia la derecha en el alambre de arriba, en dirección del movimiento de

las manecillas del reloj alrededor del semicírculo, y hacia la izquierda en el alambre de abajo. Encuentre el campo magnético en el origen del sistema de coordenadas.

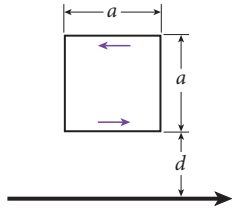
•**28.35** Un alambre recto largo está colocado a lo largo del eje x ($y = 0$ y $z = 0$). El alambre conduce una corriente de 7.00 A en la dirección x positiva. ¿Cuáles son la magnitud y la dirección de la fuerza sobre una partícula de carga 9.00 C colocada en (+1.00 m,+2.00 m,0), cuando tiene una velocidad de 3 000. m/s en cada una de las siguientes direcciones?

a) Dirección x positiva.

b) Dirección y positiva.

c) Dirección z negativa.

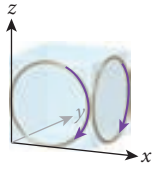
•**28.36** Un alambre largo recto conduce una corriente de 10.0 A en la dirección x positiva, como se muestra en la figura. Cerca del alambre está un bucle cuadrado de cobre que conduce una corriente de 2.00 A en la dirección que se muestra. El lado próximo del bucle está a $d = 0.50$ m separado del alambre. La longitud de cada lado del cuadrado mide $d = 1.00$ m.



a) Encuentre la fuerza neta entre los dos objetos conductores de corriente.

b) Encuentre el momento de torsión neto sobre el bucle.

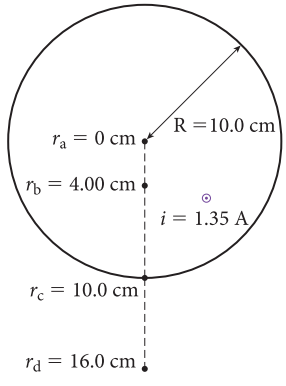
28.37 Una caja cuadrada de arista que mide 1.00 m de longitud tiene un vértice en el origen de un sistema de coordenadas, como ilustra la figura. Dos bobinas se sujetan a la parte externa de la caja. Una bobina está en la cara de la caja que se encuentra en el plano xy en $y = 0$ y la otra está en la cara de la caja en el plano yz en $x = 1$ m. Cada una de las dos bobinas tiene un diámetro de 1 m y contiene 30.0 vueltas de alambre conductor de una corriente de 5.00 A en cada vuelta. La corriente en cada bobina es en dirección del movimiento de las manecillas del reloj cuando la bobina se observa desde fuera de la caja. ¿Cuáles son la magnitud y la dirección del campo magnético en el centro de la caja?



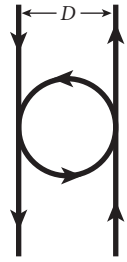
Sección 28.3

28.38 Un bucle cuadrado, con lados de longitud L, conduce una corriente i. Encuentre la magnitud del campo magnético del bucle en el centro del bucle, como una función de i y L.

28.39 La figura muestra una sección transversal a través del diámetro de un conductor cilíndrico sólido largo. El radio del cilindro es $R = 10.0$ cm. Una corriente de 1.35 A está distribuida uniformemente por el conductor y circula hacia fuera de la página. Calcule la magnitud y la dirección del campo magnético en las posiciones $r_a = 0.0$ cm, $r_b = 4.00$ cm, $r_c = 10.00$ cm, y $r_d = 16.0$ cm.



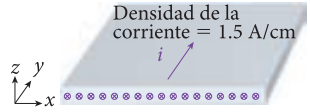
28.40 Dos alambres paralelos, separados por una distancia D, conducen una corriente, i, en direcciones opuestas como describe la figura. Un bucle circular, de radio $R = D/2$, conduce la misma corriente en dirección contraria al movimiento de las manecillas del reloj. Determine la magnitud y la dirección del campo magnético del bucle y los alambres paralelos en el centro del bucle como una función de i y R.



28.41 Una corriente de densidad constante, J_0, circula por una carcasa cilíndrica muy larga con radio interior a y radio exterior b. ¿Cuál es el campo magnético en las regiones $r < a$, $a < r < b$, y $r > b$? ¿Acaso $B_{a<r<b} = B_{r>b}$ para $r = b$?

28.42 La densidad de corriente en un conductor cilíndrico de radio R varía como $J(r) = J_0 r/R$ (en la región desde cero hasta R). Exprese la magnitud del campo magnético en las regiones $r < R$ y $r > R$. Elabore un esquema de la dependencia radial, $B(r)$.

•**28.43** Una lámina muy larga de un conductor ubicada en el plano xy, como se muestra en la figura, tiene una corriente uniforme que fluye en la dirección y. La densidad de la corriente es 1.5 A/cm. Use la ley de Ampère para calcular la dirección y la magnitud del campo magnético justo arriba del centro de la lámina (no cerca de ningún extremo).



••**28.44** Un alambre coaxial consta de un núcleo de cobre de radio 1.00 mm rodeado por una vaina de radio interior 1.50 mm y radio exterior 2.00 mm. Una corriente, i, circula en una dirección en el núcleo y en la dirección opuesta en la vaina. Grafique la magnitud del campo magnético como una función de la distancia al centro del alambre.

••**28.45** La densidad de la corriente de un conductor cilíndrico de radio R varía como $J(r) = J_0 e^{-r/R}$ (en la región desde cero hasta R). Exprese la magnitud del campo magnético en las regiones $r < R$ y $r > R$. Elabore un esquema de la dependencia radial, $B(r)$.

Sección 28.4

28.46 Una corriente de 2.00 A circula por un solenoide de 1 000 vueltas de longitud $L = 40.0$ cm. ¿Cuál es la magnitud del campo magnético dentro del solenoide?

28.47 El solenoide A tiene el doble del diámetro, tres veces la longitud y cuatro veces el número de vueltas del solenoide B. Por los dos solenoides circulan corrientes de la misma magnitud. Encuentre la razón de la magnitud del campo magnético en el interior del solenoide A a la del solenoide B.

28.48 Un solenoide largo (diámetro de 6.00 cm) se enrolla con 1 000 vueltas por metro de alambre delgado donde se mantiene una corriente de 0.250 A. Un alambre conductor de una corriente de 10.0 A se inserta a lo largo del eje del solenoide. ¿Cuál es la magnitud del campo magnético en un punto a 1.00 cm del eje?

28.49 Un alambre recto largo conduce una corriente de 2.5 A.

a) ¿Cuál es la intensidad del campo magnético a una distancia de 3.9 cm del alambre?

b) Si el alambre conduce 2.5 A, pero se usa para formar un solenoide largo con 32 vueltas por centímetro y radio de 3.9 cm, ¿cuál es la intensidad del campo magnético en el centro del solenoide?

28.50 La figura 28.18*a*) muestra una bobina de Helmholtz usada para generar campos magnéticos. Suponga que la bobina consta de dos conjuntos de bucles de alambre coaxial con 15 vueltas de radio $R = 75.0$ cm, que están separados por una distancia R, y cada bucle de alambre coaxial conduce una corriente de 0.123 A que circula en la misma dirección. Calcule la magnitud y la dirección del campo magnético en el centro de la bobina.

•**28.51** Un detector de partículas utiliza un solenoide que tiene 550 vueltas de alambre por centímetro. El alambre conduce una corriente de 22 A. Un detector cilíndrico que está dentro del solenoide tiene un radio interior de 0.80 m. Haces de electrones y positrones se dirigen hacia el solenoide paralelos a su eje. ¿Cuál es la cantidad de movimiento mínima perpendicular al solenoide que debe tener una partícula si debe poder entrar al detector?

Secciones 28.5 a 28.7

28.52 Un electrón tiene un momento magnético de espín $\mu = 9.285 \cdot 10^{-24}$A m^2. En consecuencia, tiene una energía asociada con su orientación en un campo magnético. Si la diferencia entre la energía de un electrón que "gira hacia arriba" en un campo magnético de magnitud B y la energía de uno que "gira hacia abajo" en el mismo campo magnético (donde "arriba" y "abajo" se refieren a la dirección del campo magnético) es $9.460 \cdot 10^{-25}$ J, ¿cuál es la magnitud del campo, B?

28.53 Cuando un dipolo magnético se coloca en un campo magnético, tiene una tendencia natural a minimizar su energía potencial al alinearse a sí mismo con el campo. No obstante, si hay suficiente energía térmica presente, el dipolo puede rotar de modo que ya no esté alineado con el campo. Al usar $k_B T$ como una medida de la energía térmica, donde k_B es la constante de Boltzmann y T es la temperatura en kelvins, determine la temperatura a la que hay suficiente energía térmica para rotar el dipolo magnético asociado con un átomo de hidrógeno desde una orientación paralela a un campo magnético aplicado hasta una que es antiparalela al campo aplicado. Suponga que la intensidad del campo es 0.15 T.

28.54 El aluminio se vuelve superconductor a una temperatura aproximada de 1.00 K si se expone a un campo magnético de magnitud menor que 0.0105 T. Determine la corriente máxima que puede circular en un alambre superconductor de aluminio con radio $R = 1.00$ mm.

28.55 Si usted quiere construir un electroimán al aplicar una corriente de 3.0 A en un solenoide con 500 vueltas y 3.5 cm de longitud, y desea que el campo magnético dentro del solenoide tenga una magnitud $B = 2.96$ T, puede insertar un núcleo de ferrita en el solenoide. ¿Qué valor de permeabilidad magnética relativa debe tener este núcleo de ferrita para lograr lo anterior?

28.56 ¿Cuál es la magnitud del campo magnético dentro de un alambre recto largo de tungsteno cuya sección transversal tiene un diámetro de 2.4 mm y que conduce una corriente de 3.5 A, a una distancia de 0.60 mm de su eje central?

•**28.57** Usted carga de energía una pequeña pelota de caucho de 200. g de masa al frotarla contra su cabello. La pelota adquiere una carga de 2.00 μC. Luego, la ata con una cuerda de 1.00 m de longitud y la hace girar en círculo horizontal, imprimiéndole una fuerza centrípeta de 25.0 N. ¿Cuál es el momento magnético del sistema?

•**28.58** Considere un modelo de un átomo de hidrógeno donde el electrón orbita alrededor de un protón en el plano perpendicular a la cantidad de movimiento angular del espín del protón (y momento dipolar) a una distancia igual al radio de Bohr, $a_0 = 5.292 \cdot 10^{-11}$ m. (Éste es un modelo clásico bastante simplificado.) Se permite que el espín del electrón sea paralelo o antiparalelo al espín del protón; la órbita es la misma en cualquier caso. Pero puesto que el protón produce un campo magnético en la ubicación del electrón y el electrón tiene su propio momento dipolar magnético intrínseco, la energía del electrón difiere dependiendo de su espín. El campo magnético producido por el espín del protón puede modelarse como un campo dipolar, como el campo eléctrico debido a un dipolo eléctrico analizado en el capítulo 22. Calcule la diferencia de energía entre las dos configuraciones del espín del electrón. Considere sólo la interacción entre el momento dipolar magnético asociado con el espín del electrón y el campo producido por el espín del protón.

••**28.59** Considere que un electrón es un esfera de carga densa uniforme, con una carga total de $-e = -1.60 \cdot 10^{-19}$ C, que gira a una frecuencia angular, ω.

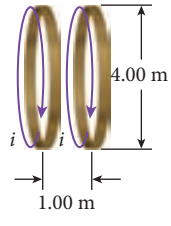
a) Escriba una expresión para su cantidad de movimiento angular de rotación clásica, L.

b) Escriba una expresión para su momento dipolar magnético, μ.

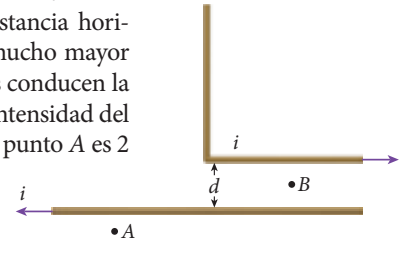
c) Encuentre la razón, $\gamma_e = \mu/L$, denominada *razón giromagnética*.

Problemas adicionales

28.60 Dos bobinas de 50 vueltas, cada una con un diámetro de 4.00 m, están separadas por una distancia de 1.00 m, como muestra la figura. Una corriente de 7.00 A circula por los alambres de ambas bobinas; la dirección de la corriente es en el sentido del movimiento de las manecillas del reloj cuando se ve desde la izquierda. ¿Cuál es la magnitud del campo magnético en el centro entre las dos bobinas?



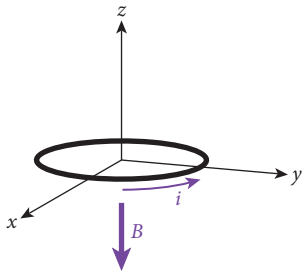
28.61 Los alambres de la figura están separados por una distancia vertical d. El punto B está a la mitad entre los dos alambres; el punto A es la distancia $d/2.00$ al alambre inferior. La distancia horizontal entre A y B es mucho mayor que d. Ambos alambres conducen la misma corriente, i. La intensidad del campo magnético en el punto A es 2 mT. ¿Cuál es la intensidad del campo en el punto B?



28.62 Usted está parado en un punto donde el campo magnético de la Tierra es horizontal, apunta hacia el norte y tiene una magnitud de 40.0 μT. Directamente arriba de su cabeza, a una altura de 12.0 m, un largo cable horizontal conduce una corriente de CD de 500.0 A en dirección al norte. Calcule el ángulo θ que se desvía la aguja de su brújula con respecto al verdadero norte magnético por el efecto del cable. No olvide el *signo* de θ: ¿la desviación es hacia el este o hacia el oeste?

28.63 El momento dipolar magnético de la Tierra es aproximadamente $8.0 \cdot 10^{22}$ A m^2. Se desconoce la fuente del campo magnético de la Tierra: una posibilidad podría ser la circulación de iones en el núcleo exterior fundido de la Tierra. Suponga que la circulación de iones es en un bucle circular de radio igual a 2 500 km. ¿Qué "corriente" debe generar para producir el campo observado?

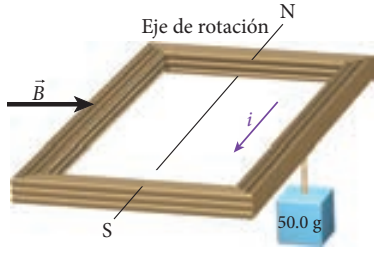
28.64 Un bucle circular de alambre tiene un radio R = 0.12 m y conduce una corriente i = 0.10 A. El bucle está colocado en el plano xy en un campo magnético uniforme dado por $\vec{B} = -1.5\hat{z}$ T, como ilustra la figura. Determine la dirección y la magnitud del momento magnético del bucle y calcule su energía potencial en la posición que se muestra. Si el bucle de alambre puede moverse libremente, ¿cómo se orienta a sí mismo a fin de minimizar su energía potencial, y cuál es el valor de la energía potencial mínima?



28.65 Un solenoide largo de 0.90 m de longitud tiene un radio de 5.0 mm. Cuándo el alambre conduce una corriente de 0.20 A, el campo magnético en el solenoide es 5.0 mT. ¿Cuántas vueltas de alambre hay en el solenoide?

28.66 En un cable coaxial, el núcleo sólido conduce una corriente i. La vaina también conduce una corriente i, pero en dirección opuesta y tiene un radio interior a y un radio exterior b. La densidad de corriente está distribuida igualmente sobre cada conductor. Encuentre una expresión para el campo magnético a una distancia $a < r < b$ del centro del núcleo.

•**28.67** Una bobina rectangular de alambre con 50.0 vueltas que mide 10.0 cm por 20.0 cm está en un plano horizontal, como se muestra en la figura. El eje de rotación de la bobina está alineado hacia el norte y el sur. Conduce una corriente i = 1.00 A, y está en un campo magnético que apunta del oeste al este. Una masa de 50 g está suspendida de uno de los lados del bucle. Determine la intensidad que debe tener el campo magnético para mantener el bucle en la orientación horizontal.



•**28.68** Dos alambres rectos largos paralelos están separados por una distancia de 20.0 cm. Cada alambre conduce una corriente de 10.0 A en la misma dirección. ¿Cuál es la magnitud del campo magnético resultante en un punto situado a 12.0 cm de cada alambre?

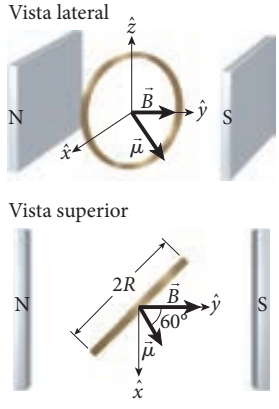
•**28.69** Una partícula con masa 1.00 mg y carga q se mueve a velocidad de 1 000. m/s a lo largo de una trayectoria horizontal 10.0 cm abajo y paralela a un alambre conductor de corriente. Determine q si la magnitud de la corriente en el alambre es 10.0 A.

•**28.70** Una bobina conductora que consta de n vueltas de alambre está colocada en un campo magnético uniforme dado por $\vec{B} = 2\,\hat{y}$ T, como presenta la figura. El radio de la bobina es R = 5.00 cm, y el ángulo entre el vector del campo magnético y el vector normal unitario es θ = 60.0°. La corriente por la bobina es i = 5.00 A.

a) Especifique la dirección de la corriente en la bobina, dada la dirección del momento dipolar magnético, $\vec{\mu}$, en la figura.

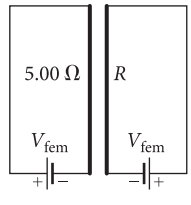
b) Calcule el número de vueltas, n, que debe tener la bobina para que el momento de torsión sobre el bucle sea 3.40 N m.

c) Si el radio del bucle se disminuye a R = 2.50 cm, ¿cuál debe ser el número de vueltas, N, para que el momento de torsión permanezca sin cambio? Suponga que i, B y θ permanecen igual.

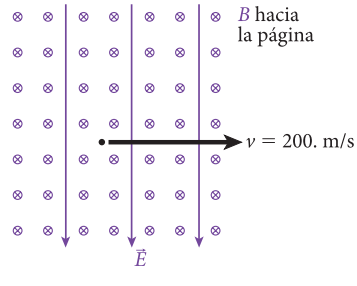


•**28.71** Un bucle de alambre de radio R = 25.0 cm tiene un bucle más pequeño de radio R = 0.900 cm en su centro, de modo que los planos de los dos bucles son perpendiculares entre sí. Cuando una corriente de 14.0 A pasa por ambos bucles, el bucle más chico experimenta un momento de torsión debido al campo magnético producido por el bucle más grande. Determine este momento de torsión en el supuesto de que el bucle más chico es suficientemente pequeño para que el campo magnético debido al bucle más grande sea el mismo a través de toda la superficie.

•**28.72** Dos alambres, cada uno de 25.0 cm de longitud, están conectados por separado a dos baterías de 9.00 V, como muestra la figura. La resistencia del primer alambre es 5.00 Ω, y la del otro alambre se ignora (R). Si la separación entre los alambres es 4.00 mm, ¿qué valor de R produce una magnitud $4.00 \cdot 10^{-5}$ N entre ellos? ¿La fuerza es de atracción o repulsión?



•**28.73** Un protón se mueve bajo la influencia combinada de un campo eléctrico (E = 1 000. V/m) y un campo magnético (B = 1.20 T), como ilustra la figura.

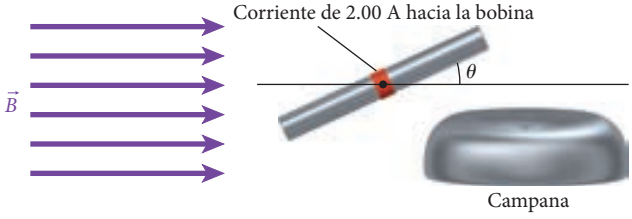


a) ¿Cuál es la aceleración del protón en el instante en el que penetra los campos cruzados?

b) ¿Cuál debe ser la aceleración si se invierte la dirección del movimiento del protón?

•**28.74** Un avión de juguete de masa 0.175 kg, con una carga de 36 mC, vuela a una velocidad de 2.8 m/s a una altura de 17.2 cm por arriba y paralelo a un alambre que conduce una corriente de 25 A; el avión experimenta algo de aceleración. Determine esta aceleración.

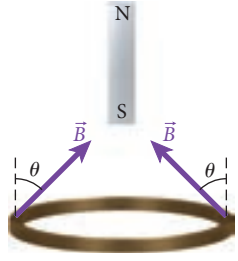
•**28.75** Un timbre de puerta electromagnético se elabora envolviendo 70 vueltas de alambre alrededor de una barra delgada y larga, como describe la figura. La barra tiene una masa de 30.0 g, una longitud de 8.00 cm y el área de su sección transversal es 0.200 cm^2. La barra tiene libertad de girar alrededor de un eje por su centro, que también es el centro de la bobina. Inicialmente, la barra forma un ángulo de $\theta = 25.0°$ con la horizontal. Cuando $\theta = 0.00°$, la barra golpea una campana. Hay un campo magnético uniforme de 900 G dirigido a lo largo de $\theta = 0.00°$.



a) Si una corriente de 2.00 A circula hacia la bobina, ¿cuál es el momento de torsión sobre la barra cuando $\theta = 25.0°$?

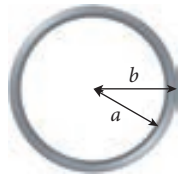
b) ¿Cuál es la velocidad angular de la barra cuando golpea la campana?

•**28.76** Dos largos alambres paralelos, separados por una distancia *d*, conducen corrientes en direcciones opuestas. Si el alambre izquierdo conduce una corriente *i*/2 y el derecho conduce una corriente *i*, determine dónde es cero el campo magnético.



•**28.77** Una bobina de alambre de radio 5.00 cm y orientada horizontalmente, que conduce una corriente *i*, está siendo levitada por el polo sur de una barra imantada orientada verticalmente que está suspendida por arriba del centro de la bobina. Si el campo magnético de la bobina en todas partes forma un ángulo θ de 45.0° con la vertical, determine la magnitud y la dirección de la corriente necesaria para mantener flotando la barra en el aire. La magnitud del campo magnético es $B = 0.0100$ T, el número de vueltas en la bobina es $N = 10.0$ y la masa total de la bobina es 10.0 g.

•**28.78** Como se muestra en la figura, un largo cilindro conductor hueco de radio interior *a* y radio exterior *b* conduce una corriente que fluye hacia fuera de la página. Suponga que $a = 5.00$ cm, $b = 7.00$ cm y que la corriente $i = 100.$ mA está distribuida uniformemente sobre la pared del cilindro (entre *a* y *b*). Encuentre la magnitud del campo magnético en cada una de las siguientes distancias *r* del centro del cilindro:



a) $r = 4.00$ cm

b) $r = 6.50$ cm

c) $r = 9.00$ cm

•**28.79** Un alambre de radio *R* conduce una corriente *i*. La densidad de la corriente está dada por $J = J_0(1 - r/R)$, donde *r* se mide desde el centro del alambre y J_0 es una constante. Use la ley de Ampère para encontrar el campo magnético dentro del alambre a una distancia $r < R$ desde el eje central.

•**28.80** Por un alambre circular de radio 5.0 cm circula una corriente de 3.0 A. El alambre está colocado en un campo magnético uniforme de 5.0 mT.

a) Determine el momento de torsión máximo sobre el alambre.

b) Determine el rango de la energía potencial magnética del alambre.

29 Inducción electromagnética

FIGURA 29.1 La presa Grand Coulee en el río Columbia en el estado de Washington es el productor más grande de electricidad en Estados Unidos. Aquí se muestran los generadores gigantes, donde se aplica el principio físico de inducción para producir electricidad.

LO QUE APRENDEREMOS 926

29.1 Experimentos de Faraday 926

29.2 Ley de inducción de Faraday 928

Inducción en un bucle plano dentro de un campo magnético 929

Ejemplo 29.1 Diferencia de potencial inducida por un campo magnético variable 930

Ejemplo 29.2 Diferencia de potencial inducida por un bucle en movimiento 931

29.3 Ley de Lenz 932

Corrientes transitorias 933

Detector de metales 934

Diferencia de potencial inducida en un alambre que se mueve en un campo magnético 935

Ejemplo 29.3 Satélite sujeto a un trasbordador espacial 936

Ejemplo 29.4 Barra conductora deslizable 936

29.4 Generadores y motores 937

Sistema de frenado regenerativo 938

29.5 Campo eléctrico inducido 939

29.6 Inductancia de un solenoide 939

29.7 Autoinductancia e inducción mutua 940

Problema resuelto 29.1 Inducción mutua de un solenoide y una bobina 942

29.8 Circuitos RL 943

Problema resuelto 29.2 Trabajo realizado por una batería 945

29.9 Energía y densidad de energía de un campo magnético 946

29.10 Aplicaciones a la tecnología de la información 947

Unidad de disco duro 947

LO QUE HEMOS APRENDIDO/ GUÍA DE ESTUDIO PARA EXAMEN 948

Práctica para resolución de problemas 949

Problema resuelto 29.3 Potencia de una barra rotatoria 949

Preguntas de opción múltiple 951

Preguntas 952

Problemas 953

LO QUE APRENDEREMOS

- Un campo magnético variable dentro de un bucle conductor induce una corriente en el bucle.
- Una corriente variable en un bucle induce una corriente en un bucle cercano.
- La ley de inducción de Faraday establece que en un bucle se induce una diferencia de potencial cuando hay un cambio en el flujo magnético a través del bucle.
- El flujo magnético es el producto de la magnitud del campo magnético medio y el área perpendicular en la que penetra.
- La ley de Lenz establece que la corriente inducida en un bucle por un campo magnético variable produce un campo magnético que se opone a este cambio en el campo magnético.
- Un campo magnético variable induce un campo eléctrico.
- La inductancia de un dispositivo es una medida de su oposición a cambios en la corriente que circula por éste.
- Los motores eléctricos y los generadores eléctricos constituyen aplicaciones cotidianas de la inducción magnética.
- Un circuito de un solo bucle con un inductor y un resistor tiene una constante de tiempo característica dada por la inductancia dividida entre la resistencia.
- La energía se almacena en un campo magnético.

Casi todos damos por sentada la electricidad: accionamos un interruptor y tenemos energía para iluminación, calefacción y entretenimiento. Pero la vasta red que suministra esta energía —denominada la *red*— depende de grandes generadores que convierten energía mecánica en energía eléctrica (figura 29.1). Los principios físicos que permiten esta conversión constituyen el tema de este capítulo.

En el capítulo 27 vimos que un campo magnético puede afectar la trayectoria de partículas cargadas, o corrientes eléctricas, y en el capítulo 28 vimos que una corriente eléctrica genera un campo magnético. En este capítulo veremos que un campo magnético variable genera una corriente eléctrica y, por lo tanto, un campo eléctrico. Observe la palabra "variable" aquí; justo como un campo magnético se genera sólo cuando cargas eléctricas están en movimiento, un campo eléctrico sólo es generado cuando un campo magnético está en movimiento (con respecto al conductor) o de otra manera cambia como una función del tiempo. Resulta que esta simetría es una parte fundamental de la descripción unificada de la electricidad y el magnetismo presentada en el capítulo 31.

29.1 Experimentos de Faraday

Algunos de los grandes descubrimientos sobre electricidad y magnetismo ocurrieron a fines del siglo XVIII e inicios del XIX. En 1750, el estadounidense Benjamin Franklin demostró, gracias a su famoso experimento con una cometa, que los rayos son una forma de electricidad. (Tal vez el aspecto más impresionante de ese experimento fue que Franklin no murió por el impacto del rayo.) En 1799, el italiano Alessandro Volta construyó la primera batería, denominada *pila voltaica* en esa época. En 1820, el físico danés Hans Christian Oersted demostró que la corriente eléctrica podía producir un campo magnético lo suficientemente intenso como para desviar la aguja de una brújula. (Realizó su experimento durante una conferencia para estudiantes, lo cual hizo de esta conferencia una de las demostraciones más productivas en la historia de la ciencia.)

No obstante, los experimentos de mayor importancia para este capítulo fueron realizados en 1830 por el químico y físico británico Michael Faraday, y de manera independiente por el físico estadounidense Joseph Henry. Su trabajo demostró que un campo magnético variable podía generar una diferencia de potencial en un conductor, lo suficientemente fuerte para producir una corriente eléctrica. Este descubrimiento es fundamental para todos los dispositivos eléctricos y magnéticos de uso diario: desde computadoras hasta teléfonos móviles, desde televisores hasta tarjetas de crédito, desde las baterías más pequeñas hasta la red eléctrica más grande. Con toda justificación, en electricidad hay unidades fundamentales denominadas así en honor de Faraday y Henry.

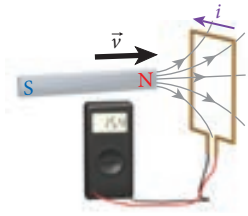
Para comprender los experimentos de Faraday, considere un bucle de alambre conectado a un amperímetro. Una barra imantada se encuentra a alguna distancia del bucle con su polo norte apuntando hacia él. Mientras el imán permanece estacionario, no circula corriente por el bucle. Sin embargo, si el imán se mueve hacia él [figura 29.2*a*)], por el bucle fluye una corriente en

sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj, como indica la corriente positiva en el amperímetro. Si el imán se mueve más rápido hacia el bucle, una corriente más grande se induce en él. Si el imán se invierte de modo que el polo sur apunte hacia el bucle [figura 29.2*b*)] y se mueva hacia él, por éste circula corriente en dirección opuesta. Si el polo norte del imán apunta hacia el bucle y luego el imán se *aleja* de él [figura 29.3*a*)], se induce en el bucle una corriente negativa en el sentido del movimiento de las manecillas del reloj, como indica el medidor de la figura 29.3*a*). Si el polo sur del imán apunta hacia el bucle y luego el imán se aleja de él [figura 29.3*b*)], una corriente positiva se induce en el bucle.

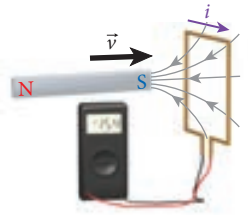
Los cuatro resultados ilustrados en las figuras 29.2 y 29.3 pueden repetirse al mantener estacionario el imán y moviendo las bobinas. Por ejemplo, con la disposición que muestra la figura 29.2*a*), si la bobina se mueve hacia el imán estacionario, en el bucle circula una corriente positiva.

Efectos semejantes pueden observarse al usar dos bucles conductores (figura 29.4). Si por el bucle 1 circula una corriente constante, en el bucle 2 no se induce ninguna corriente. Si la corriente se incrementa en el bucle 1, en el bucle 2 se induce una corriente en dirección opuesta. Así, la corriente creciente en el primer bucle no sólo induce una corriente en el segundo, sino que la corriente inducida es en dirección opuesta. Además, si en el bucle 1 circula una corriente en la misma dirección que antes y luego *se disminuye* (figura 29.5), la corriente inducida en el bucle 2 fluye en la *misma* dirección que la corriente en el 1.

Todos los fenómenos ilustrados en estas cuatro figuras pueden explicarse por la ley de inducción de Faraday, que se analiza en la sección 29.2, y por la ley de Lenz, que se aborda en la sección 29.3.



a)

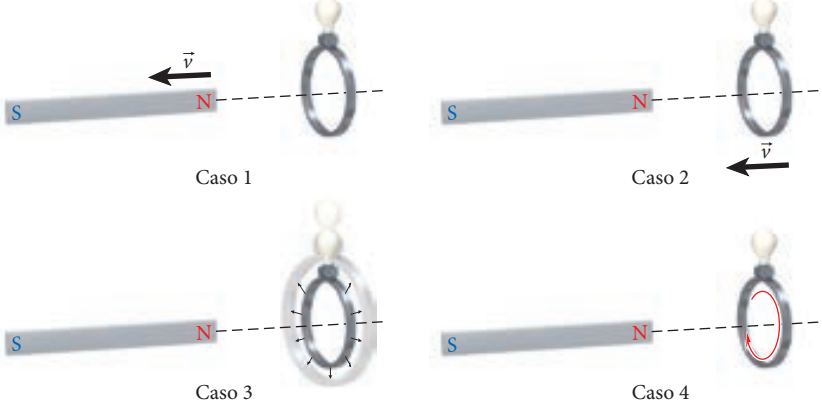


b)

FIGURA 29.2 Al acercar un imán hacia el bucle se induce una corriente que circula en él. *a*) Con el polo norte del imán apuntando hacia el bucle, resulta una corriente positiva. *b*) Con el polo sur del imán apuntando hacia el bucle, resulta una corriente negativa.

29.1 Ejercicio en clase

Las cuatro figuras presentan una barra imantada y una bombilla de bajo voltaje conectada a los extremos de un bucle conductor. El plano del bucle es perpendicular a la línea discontinua. En el caso 1, el bucle es estacionario y el imán se aleja. En el caso 2, el imán es estacionario y el bucle se acerca. En el caso 3, el imán y el bucle son estacionarios, pero el área de éste aumenta. En el caso 4, el imán es estacionario y el bucle rota alrededor de su centro. ¿En cuál de estas situaciones se quema la bombilla?



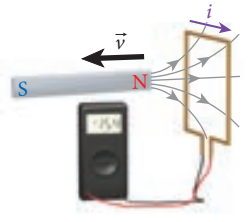
a) Caso 1

b) Casos 1 y 2

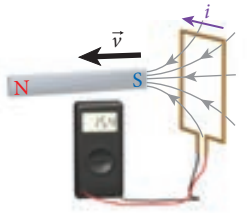
c) Casos 1, 2 y 3

d) Casos 1, 2 y 4

e) En los cuatro casos.



a)



b)

FIGURA 29.3 Al alejar un imán de un bucle de alambre se induce una corriente que circula en él. *a*) Con el polo norte del imán apuntando hacia el bucle, resulta una corriente negativa. *b*) Con el polo sur del imán apuntando hacia el bucle, resulta una corriente positiva.

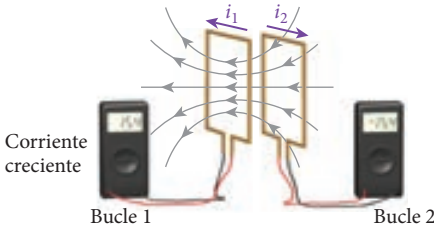


FIGURA 29.4 Una corriente creciente en el bucle 1 induce una corriente en dirección opuesta al bucle 2. (Las líneas de campo magnético mostradas son las producidas por la corriente 1 que fluye hacia el bucle 1.)

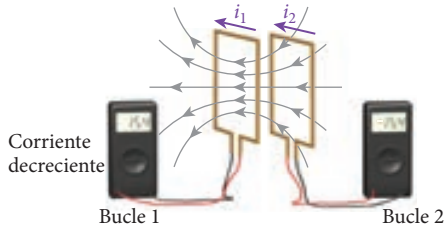


FIGURA 29.5 Una corriente decreciente en el bucle 1 induce una corriente en la misma dirección en el bucle 2.

29.2 Ley de inducción de Faraday

A partir de las observaciones en la sección precedente, vemos que un campo magnético variable a través de un bucle induce una corriente en él. Podemos visualizar el cambio en el campo magnético como un cambio en el número de líneas de campo magnético que pasan por el bucle. La **ley de inducción de Faraday** en su forma cualitativa establece lo siguiente:

> Una diferencia de potencial se induce en un bucle cuando el número de líneas de campo magnético que pasan por él cambia con el tiempo.

La razón de cambio de las líneas de campo magnético significa que ¡el campo magnético variable crea en realidad un campo eléctrico alrededor del bucle! Así, hay dos formas para producir un campo eléctrico: a partir de las cargas eléctricas y a partir de un campo magnético variable. Si el campo eléctrico surge debido a una carga, la fuerza eléctrica resultante sobre una carga de prueba es conservativa. Las fuerzas conservativas no realizan trabajo cuando actúan sobre un objeto cuya trayectoria empieza y termina en el mismo punto del espacio. En contraste, los campos eléctricos generados por campos magnéticos variables originan fuerzas eléctricas que *no* son conservativas. Entonces, una partícula de prueba que se mueve alrededor de un bucle realiza trabajo sobre éste debido a su campo eléctrico. De hecho, la cantidad de trabajo realizado es la diferencia de potencial inducida multiplicada por la carga de la partícula de prueba.

Las líneas de campo magnético son cuantificadas por el flujo magnético, en analogía con el flujo eléctrico. En el capítulo 22 se introdujo la ley de Gauss para el campo eléctrico, y el flujo eléctrico se definió como la integral de superficie de un campo eléctrico que pasa por un elemento diferencial de área, dA. En términos matemáticos, $\Phi_E = \oiint \vec{E} \cdot d\vec{A}$, donde $d\vec{A}$ es un vector de magnitud dA que es perpendicular al diferencial de área. Por analogía, para un campo magnético, el **flujo magnético** se define como la integral de superficie del campo magnético que pasa por un elemento diferencial de área:

$$\Phi_B = \oiint \vec{B} \cdot d\vec{A}, \tag{29.1}$$

donde $\vec{B}$ es el campo magnético en cada elemento diferencial de área, $d\vec{A}$, de una superficie cerrada. El signo elíptico en el símbolo para la integral de superficie significa que la integración es sobre una superficie cerrada. Las dos integrales significan integración sobre dos variables. El elemento diferencial de área, $d\vec{A}$, debe describirse por dos variables espaciales, como x y y, en coordenadas cartesianas o θ y ϕ en coordenadas esféricas. Con una superficie cerrada, el vector diferencial de área, $d\vec{A}$, siempre apunta fuera del volumen encerrado y es perpendicular a la superficie en todas partes.

La integración del flujo eléctrico sobre una superficie cerrada (vea el capítulo 22) produce la ley de Gauss: $\oiint \vec{E} \cdot d\vec{A} = q/\epsilon_0$. Es decir, la integral del flujo eléctrico sobre una superficie cerrada es igual a la carga eléctrica encerrada, q, dividida entre la permitividad eléctrica del espacio libre, ϵ_0. La integración del flujo magnético sobre una superficie *cerrada* es cero:

$$\oiint \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0. \tag{29.2}$$

A menudo este resultado se conoce como **ley de Gauss para campos magnéticos**. Quizás usted piense que la integral del flujo magnético sobre una superficie cerrada debe ser igual a la "carga magnética" encerrada, dividida entre la permeabilidad magnética del espacio libre. No obstante, aquí no hay cargas libres, no hay monopolos magnéticos, polos norte separados ni polos sur separados. Los polos magnéticos siempre se presentan por pares. Así, la ley de Gauss para campos magnéticos es otra forma de plantear que los monopolos magnéticos no existen. (Desde la década de 1980 se han llevado a cabo amplias aunque infructuosas investigaciones sobre los monopolos magnéticos. Sin embargo, varias teorías de cuerdas y las grandes teorías unificadas —sobre las cuales se ahonda en el capítulo 39— pronostican que los monopolos magnéticos sí existen.) Otra forma de plantear la ley de Gauss para campos magnéticos es que las líneas de campo magnético no empiezan o terminan, sino que forman un bucle continuo.

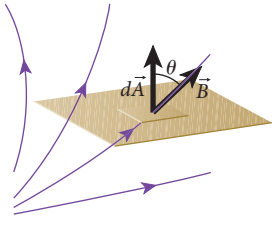


FIGURA 29.6 Campo magnético no uniforme $\vec{B}$ que pasa por un diferencial de área, $d\vec{A}$.

La figura 29.6 ilustra un campo magnético no uniforme, $\vec{B}$, que pasa por un elemento diferencial de área, $d\vec{A}$. También se muestra una porción de la superficie cerrada. El ángulo entre el campo magnético y el vector diferencial de área es θ.

Considere el caso especial de un bucle plano de área A en un campo magnético constante, como ilustra la figura 29.7. Para este caso, podemos volver a escribir la ecuación 29.1 como

$$\Phi_B = BA\cos\theta, \tag{29.3}$$

donde B es la magnitud del campo magnético constante, A es el área del bucle y θ es el ángulo entre el vector normal a la superficie del plano del bucle y las líneas de campo magnético. De esta manera, si el campo magnético es perpendicular al plano del bucle, $\theta = 0°$ y $\Phi_B = BA$. Si el campo magnético es paralelo al plano del bucle, $\theta = 90°$ y $\Phi_B = 0$.

La unidad del flujo magnético es $[\Phi_B] = [B][A] = \text{T m}^2$. Esta unidad recibe un nombre especial, **weber** (Wb):

$$1\ \text{Wb} = 1\ \text{T m}^2. \tag{29.4}$$

La ley de inducción Faraday se plantea cuantitativamente, en términos del flujo magnético, como sigue:

> La magnitud de la diferencia de potencial, ΔV_{ind}, inducida en un bucle conductor es igual a la razón de cambio con respecto al tiempo del flujo magnético a través del bucle.

Así, la ley de inducción de Faraday se expresa por medio de la ecuación

$$\Delta V_{\text{ind}} = -\frac{d\Phi_B}{dt}. \tag{29.5}$$

El signo negativo en la ecuación 29.5 es necesario porque la diferencia de potencial inducida establece una corriente inducida cuyo campo magnético tiende a oponerse al cambio en el flujo. Este fenómeno se analiza con más detalle en la sección 29.3 sobre la ley de Lenz.

El flujo magnético puede modificarse de varias formas, incluido el cambio en la magnitud del campo magnético, el cambio en el área del bucle o el cambio del ángulo que éste forma con respecto al campo magnético. En todas las situaciones que implican el movimiento de un conductor con respecto a la fuente del campo magnético, la diferencia de potencial inducida se denomina **fem de movimiento.**

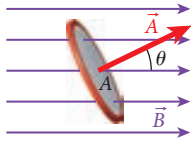


FIGURA 29.7 Un bucle plano de área A en un campo magnético constante, $\vec{B}$. El campo magnético forma un ángulo θ con respecto al vector normal a la superficie del bucle.

Inducción en un bucle plano dentro de un campo magnético

Apliquemos la ecuación 29.5 a un bucle plano de alambre dentro de un campo magnético uniforme, donde *uniforme* significa que el campo tiene el mismo valor (misma magnitud y misma dirección) en todos los puntos en el espacio en un instante dado, aunque pueden variar con el tiempo. Este arreglo es el caso más simple que podemos abordar. Según la ecuación 29.3, el flujo magnético en este caso está dado por $\Phi_B = BA\cos\theta$. Según la ecuación 29.5, la diferencia de potencial inducida es entonces

$$\Delta V_{\text{ind}} = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -\frac{d}{dt}(BA\cos\theta). \tag{29.6}$$

Podemos usar la regla del producto del cálculo para desarrollar esta derivada:

$$\Delta V_{\text{ind}} = -A\cos\theta\frac{dB}{dt} - B\cos\theta\frac{dA}{dt} + AB\,\text{sen}\,\theta\frac{d\theta}{dt}. \tag{29.7}$$

Debido a que la derivada con respecto al tiempo del desplazamiento angular es la velocidad angular, $d\theta/dt = \omega$, la diferencia de potencial inducida en un bucle plano de alambre dentro de un campo magnético uniforme es

$$\Delta V_{\text{ind}} = -A\cos\theta\frac{dB}{dt} - B\cos\theta\frac{dA}{dt} + \omega AB\,\text{sen}\,\theta. \tag{29.8}$$

Al mantener constantes dos de las tres variables en la ecuación 29.8 (A, B y θ) se obtienen los *tres casos especiales* siguientes:

1. Si el área del bucle y su orientación con respecto al campo magnético se mantienen constantes, pero se hace variar el campo magnético con el tiempo, se obtiene

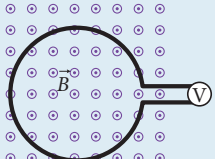
$$A \text{ y } \theta \text{ constantes:}\quad \Delta V_{\text{ind}} = -A\cos\theta\frac{dB}{dt}. \tag{29.9}$$

2. Si el campo magnético y la orientación del bucle con respecto al campo magnético se mantienen constantes, pero se hace variar el área del bucle que se expone al campo magnético, se obtiene

$$B \text{ y } \theta \text{ constantes:}\quad \Delta V_{\text{ind}} = -B\cos\theta\frac{dA}{dt}. \tag{29.10}$$

29.1 Oportunidad de autoevaluación

El plano del bucle circular mostrado en la figura es perpendicular a un campo magnético de magnitud B = 0.500 T. El campo magnético se hace cero a una razón constante en 0.250 s. El voltaje inducido en el bucle es 1.24 V durante ese tiempo. ¿Cuál es el radio del bucle?



3. Si el campo magnético se mantiene constante y el área del bucle se mantiene fija, pero se deja que el ángulo entre ambos cambie con el tiempo, se obtiene

$$A \text{ y } B \text{ constantes: } \Delta V_{\text{ind}} = \omega AB \operatorname{sen}\theta. \tag{29.11}$$

Los siguientes ejemplos ilustran los dos primeros casos. La sección 29.4 aborda el tercer caso, que tiene las aplicaciones técnicas más útiles, lo cual lleva directamente a los motores y generadores eléctricos.

EJEMPLO 29.1 Diferencia de potencial inducida por un campo magnético variable

Por un solenoide ideal circula una corriente de 600 mA, originando un campo magnético de 0.025 T. Entonces, la corriente aumenta con el tiempo, t, según

$$i(t) = i_0\left[1 + (2.4\ \text{s}^{-2})t^2\right].$$

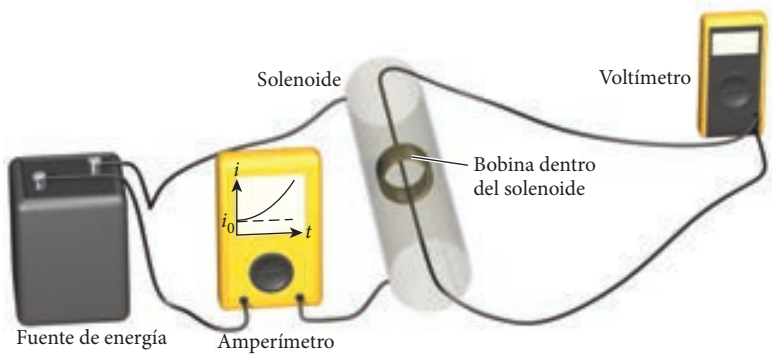


FIGURA 29.8 Corriente que cambia con el tiempo, aplicada a un solenoide, induce una diferencia de potencial en la bobina.

PROBLEMA

Si una bobina circular de radio 3.4 cm con N = 200 vueltas de alambre está dentro de un solenoide con su vector normal paralelo al campo magnético (figura 29.8), ¿cuál es la diferencia de potencial inducida en la bobina en t = 2.0 s?

SOLUCIÓN

Primero, calculamos el área de la bobina. Puesto que es circular, su área es πR^2. No obstante, tiene N vueltas de alambre, de modo que el área es la de N vueltas de área πR^2. El efecto neto es que el número de vueltas actúa como un simple multiplicador para el área del bucle, y el área total efectiva de la bobina es

$$A = N\pi R^2 = 200\pi(0.034\ \text{m})^2 = 0.73\ \text{m}^2. \tag{i}$$

El campo magnético dentro de un solenoide ideal es $B = \mu_0 ni$, donde n es el número de vueltas por unidad de longitud e i es la corriente (vea el capítulo 28). Debido a que el campo magnético es proporcional a la corriente, de inmediato obtenemos que en este caso la dependencia del campo magnético con respecto al tiempo es

$$B(t) = B_0\left[1 + (2.4\ \text{s}^{-2})t^2\right],$$

con $B_0 = \mu_0 n i_0$ = 0.025 T, según el planteamiento del problema.

Además, en este caso, el área de la bobina y el ángulo entre cada bucle y el campo magnético (que es cero) son constantes. En consecuencia, la ecuación 29.9 es válida. Luego encontramos la diferencia de potencial inducida, donde el área A ya considera el número de vueltas de alambre, como se muestra en la ecuación (i):

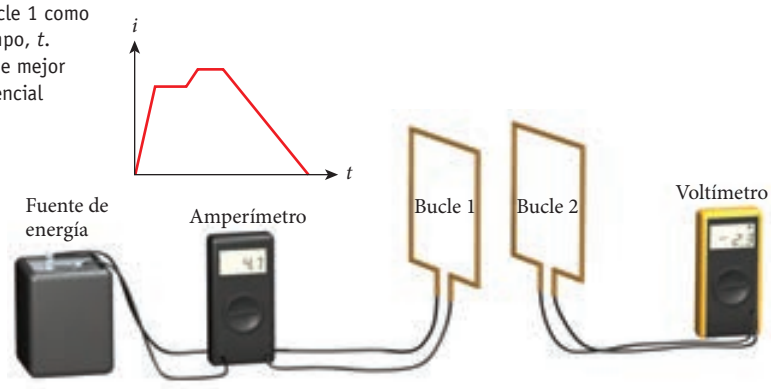
$$\begin{aligned}
\Delta V_{\text{ind}} &= -A\cos\theta\frac{dB}{dt} \\
&= -A\cos\theta\frac{d}{dt}(B_0(1 + \left(2.4\ \text{s}^{-2}\right)t^2)) \\
&= -AB_0\cos\theta(2\left(2.4\ \text{s}^{-2}\right)t) \\
&= -(0.73\ \text{m}^2)(0.025\ \text{T})(\cos 0°)\left(4.8\ \text{s}^{-2}\right)t \\
&= \left(-0.088\ \text{V/s}\right)t.
\end{aligned}$$

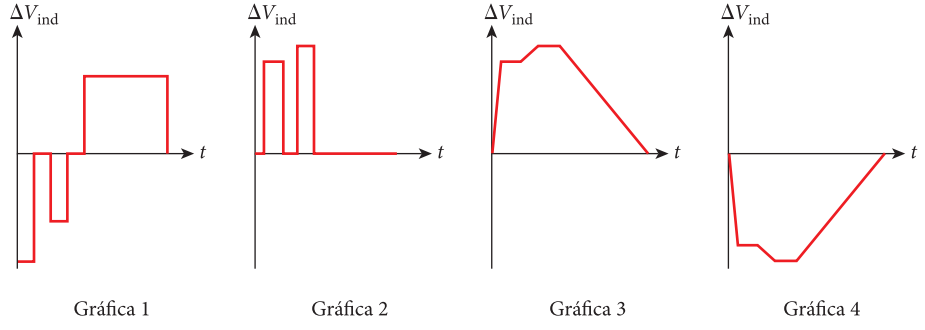
En el instante t = 2.0 s, la diferencia de potencial inducida en la bobina es: ΔV_{ind} = −0.18 V.

En el ejemplo 29.1 se observa una cuestión general importante: la diferencia de potencial inducida en una bobina con N vueltas y área A es simplemente N veces la diferencia de potencial inducida en un solo bucle de área A. Las ecuaciones 29.8 a 29.11 son válidas para bobinas con bucles múltiples, y la única manera en la que el número de vueltas entre en los cálculos es como multiplicador para determinar el área efectiva de la bobina.

29.2 Ejercicio en clase

Una fuente de energía se conecta al bucle 1 y a un amperímetro, como ilustra la figura. El bucle 2 está próximo al bucle 1 y está conectado a un voltímetro. En la figura también se muestra una gráfica de la corriente i por el bucle 1 como una función del tiempo, t. ¿Cuál gráfica describe mejor la diferencia de potencial inducida, ΔV_{ind}, en el bucle 2 como una función del tiempo, t?





a) Gráfica 1 *b*) Gráfica 2 *c*) Gráfica 3 *d*) Gráfica 4

EJEMPLO 29.2 Diferencia de potencial inducida por un bucle en movimiento

Un bucle rectangular de ancho $w = 3.1$ cm y profundidad $d_0 = 4.8$ cm se retira del espacio entre dos imanes permanentes. A lo largo de todo el espacio hay un campo magnético de magnitud $B = 0.073$ T (figura 29.9).

PROBLEMA

Si el bucle se retira a velocidad constante de 1.6 cm/s, ¿cuál es el voltaje inducido en el bucle como una función del tiempo?

SOLUCIÓN

Esta situación corresponde al caso especial de inducción debida a un cambio de área, regido por la ecuación 29.10. El campo magnético y la orientación del bucle con respecto al campo permanecen constantes. Suponemos que el ángulo entre el vector del campo magnético y el vector de área es cero. Lo que cambia es el área del bucle expuesta al campo magnético. Con un espacio así de angosto, mostrado en la figura, muy poco del campo existe fuera de este espacio, de modo que el área efectiva del bucle expuesta al campo es $A(t) = (w)(d(t))$, donde $d(t) = d_0 - vt$ es la profundidad de la parte del bucle dentro del campo magnético en el instante t. Mientras todo el bucle aún se encuentra dentro del espacio entre los imanes, no se produce ningún voltaje. Al

(*continúa*)

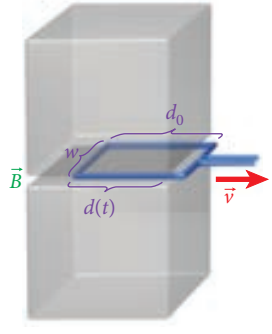


FIGURA 29.9 Un bucle de alambre (azul) se retira del espacio entre dos imanes.

(*continuación*)

hacer coincidir que el tiempo de llegada del borde derecho del bucle con el extremo derecho del espacio sea $t = 0$, tenemos

$$A(t) = (w)\big(d(t)\big) = w(d_0 - vt).$$

Esta fórmula se cumple hasta que el borde izquierdo del bucle llega al extremo derecho del espacio, luego de lo cual el área del bucle expuesta al campo magnético es cero. El borde izquierdo llega en el instante $t_f = d/v$ = (4.8 cm)/(1.6 cm/s) = 3.0 s y $A(t > t_f) = 0$. A partir de la ecuación 29.10 encontramos

$$\begin{aligned}\Delta V_{\text{ind}} &= -B\cos\theta\frac{dA}{dt}\\ &= -B\cos\theta\frac{d}{dt}\Big[w(d_0 - vt)\Big]\\ &= wvB\cos\theta\\ &= (0.031\text{ m})(0.016\text{ m/s})(0.073\text{ T})\cos 0°\\ &= 3.6\cdot 10^{-5}\text{ V}.\end{aligned}$$

Durante el lapso entre 0 y 3 s, se induce una diferencia de potencial constante de 36 μV y fuera de este intervalo de tiempo no se induce ninguna diferencia de potencial.

29.3 Ejercicio en clase

Un alambre largo conduce una corriente, *i*, como muestra la figura. Un bucle cuadrado se mueve en el mismo plano que el alambre, según se indica. ¿En qué casos el bucle tiene una corriente inducida?

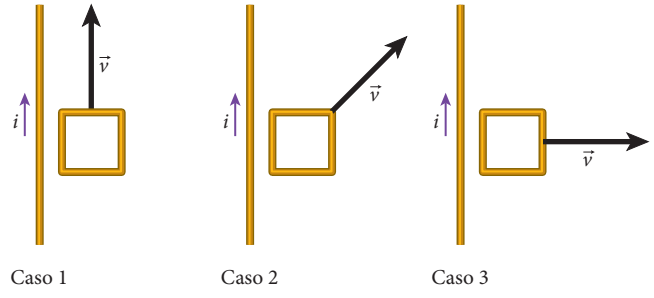
a) Casos 1 y 2.

b) Casos 1 y 3.

c) Casos 2 y 3.

d) Ninguno de los bucles tiene una corriente inducida.

e) Todos los bucles tienen una corriente inducida.



Caso 1 Caso 2 Caso 3

29.3 Ley de Lenz

La **ley de Lenz** constituye una regla para determinar la dirección de una corriente inducida en un bucle. Una corriente inducida tiene una dirección tal que el campo magnético *debido* a la corriente inducida *se opone* al cambio en el flujo magnético que *induce* la corriente. La dirección de la corriente inducida puede usarse para determinar las ubicaciones de mayor y menor potencial.

Apliquemos la ley de Lenz a las situaciones descritas en la sección 29.1. La situación física mostrada en la figura 29.2*a*) implica el movimiento de un imán hacia un bucle con el polo norte apuntando hacia el bucle. En este caso, las líneas de campo magnético apuntan alejándose del polo norte del imán. A medida que el imán se mueve hacia el bucle, la magnitud del campo magnético dentro del bucle, en la dirección apuntando hacia él, aumenta como muestra la figura 29.10*a*). La ley de Lenz establece que la corriente inducida en el bucle tiende a oponerse al cambio en el flujo magnético. Entonces, el campo magnético inducido, $\vec{B}_{\text{ind}}$, apunta en dirección opuesta a la del campo debido al imán.

En la figura 29.2*b*), un imán se mueve hacia un bucle con el polo sur apuntando hacia el bucle. En este caso, las líneas de campo magnético apuntan hacia el polo sur del imán. A medida que el imán se mueve hacia el bucle, la magnitud del campo en la dirección apuntando hacia el polo sur aumenta, como indica la figura 29.10*b*). La ley de Lenz establece que la corriente inducida crea un campo magnético que tiende a oponerse al aumento en el flujo magnético. Este campo inducido apunta en dirección opuesta a la de las líneas de campo debidas al imán.

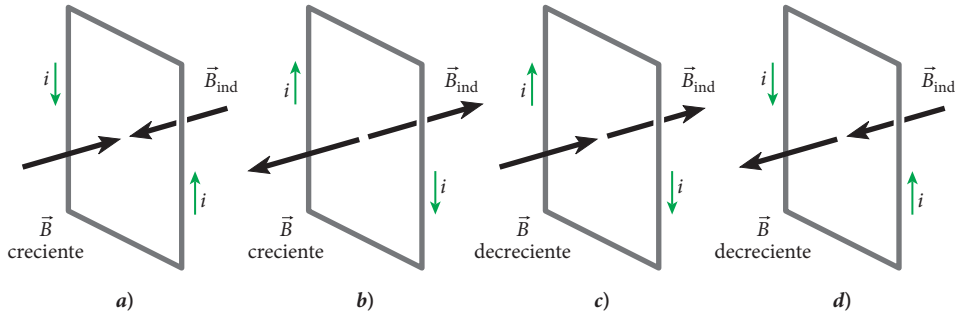


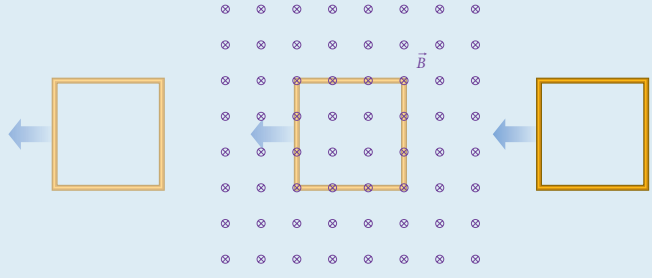
FIGURA 29.10 Relación de un campo magnético externo, $\vec{B}$, la corriente inducida, i, y el campo magnético, $\vec{B}_{ind}$, resultante de la corriente inducida: *a*) un campo magnético creciente que apunta hacia la derecha induce una corriente que crea un campo magnético apuntando hacia la izquierda. *b*) Un campo magnético creciente que apunta hacia la izquierda induce una corriente que crea un campo magnético apuntando hacia la derecha. *c*) Un campo magnético decreciente que apunta hacia la derecha induce una corriente que crea un campo magnético apuntando hacia la derecha. *d*) Un campo magnético decreciente que apunta hacia la izquierda induce una corriente que crea un campo magnético apuntando hacia la izquierda.

De forma semejante, en las figuras 29.10*c*) y 29.10*d*) se representan las situaciones físicas mostradas en las figuras 29.3*a*) y 29.3*b*), respectivamente. En estos dos casos, la magnitud del flujo magnético es decreciente, y se induce una corriente que produce un campo magnético opuesto a este decremento. En ambos casos, en el bucle se induce una corriente que crea un campo magnético que apunta en la misma dirección que el campo magnético del imán.

Para dos bucles en los que uno tiene una corriente variable, la ley de Lenz se aplica de la misma forma. La corriente creciente en el bucle 1 en la figura 29.4 induce una corriente en el bucle 2 que crea un campo magnético que se opone al incremento en flujo magnético, como muestra la figura 29.10*b*). La corriente decreciente en el bucle 1 en la figura 29.5 induce una corriente en el bucle 2 que crea un campo magnético opuesto al decremento en flujo magnético, como ilustra la figura 29.10*d*).

29.2 Oportunidad de autoevaluación

Un bucle conductor cuadrado con muy poca resistencia se mueve a velocidad constante desde una región sin ningún campo magnético hacia una región de campo magnético constante y luego hacia una región sin ningún campo magnético, como se aprecia en la figura. Cuando el bucle entra en la región del campo magnético, ¿cuál es la dirección de la corriente inducida? Cuando el bucle sale del campo magnético, ¿cuál es la dirección de la corriente inducida?



29.3 Oportunidad de autoevaluación

Suponga que la ley de Lenz establece que el campo magnético inducido aumenta el flujo magnético, lo cual significaría que la ley de inducción de Faraday podría escribirse como $\Delta V_{ind} = +d\Phi_B/dt$, es decir, con un signo positivo en lugar de uno negativo. ¿Cuáles serían las consecuencias? ¿Puede explicar por qué este hecho conduciría a una contradicción?

Corrientes transitorias

Consideremos dos péndulos, cada uno con una placa de metal conductora no magnética en el extremo, que está diseñada para pasar por el espacio entre dos imanes permanentes intensos (figura 29.11). Una placa de metal es sólida y la otra tiene ranuras. Los péndulos se llevan a un lado y se sueltan. El péndulo con la placa metálica sólida se detiene en el espacio entre los imanes, mientras el péndulo con las ranuras pasa por el campo magnético, aminorando sólo ligeramente su velocidad. Esta demostración ilustra el muy importante fenómeno de las **corrientes transitorias** inducidas. A medida que el péndulo con la placa metálica sólida penetra en el campo magnético entre los imanes, la ley de Lenz establece que el flujo magnético variable induce corrientes que

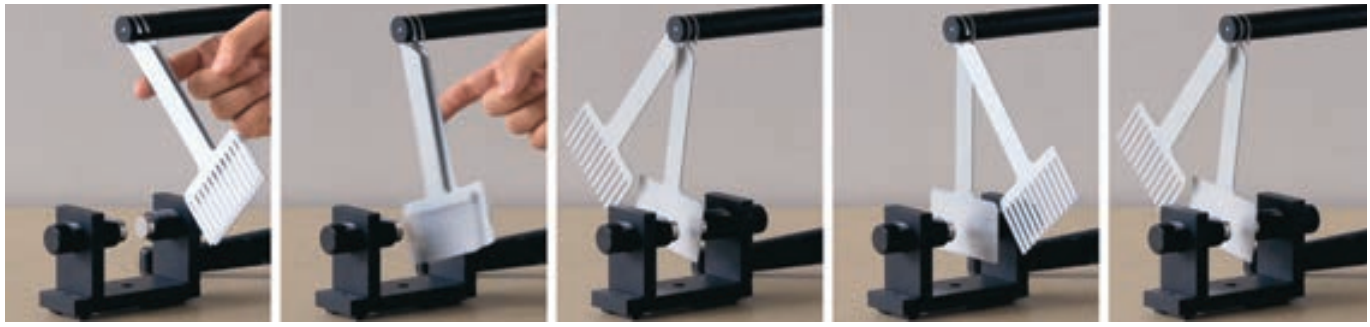


FIGURA 29.11 Dos péndulos, uno que consta de un brazo y una placa de metal sólida y otro que consta de un brazo y una placa de metal con ranuras. Los cinco recuadros están en secuencia de izquierda a derecha, en la que los dos péndulos comienzan a moverse al mismo tiempo en el segundo recuadro de la izquierda. El péndulo con la placa sólida se detiene en el espacio entre los imanes, mientras que el péndulo con la placa con ranuras pasa a través de ese espacio.

tienden a oponerse al cambio en el flujo. Estas corrientes producen campos magnéticos inducidos que se oponen al campo externo que originó las corrientes. Estos campos magnéticos inducidos interactúan con el campo magnético externo (por medio de sus gradientes espaciales) para detener el péndulo. Corrientes inducidas más grandes producen campos magnéticos inducidos más grandes y, por lo tanto, ocurre una desaceleración más rápida del péndulo. En la placa con ranuras, las corrientes transitorias inducidas son interrumpidas por las ranuras, y la placa con ranuras pasa por el campo magnético, deteniéndose sólo un poco. Las corrientes transitorias no son como la corriente sin dirección y uniforme inducida en el bucle en el ejemplo 29.2, sino que son transitorias que se arremolinan como las ondas que se ven en el flujo de aguas turbulentas.

¿Dónde se va la energía contenida en el movimiento del péndulo con la placa sólida en la figura 29.11? En otras palabras, ¿cómo las corrientes transitorias detienen el péndulo? La respuesta es que las corrientes transitorias dispersan calor en el metal debido a su resistencia finita, como se analizó en el capítulo 25. Mientras más intensas sean las corrientes transitorias inducidas, más rápido la energía es convertida por el péndulo en calor. Ésta es la razón por la cual la placa con ranuras, con corrientes transitorias inducidas mucho más pequeñas, sólo desacelera ligeramente cuando pasa por el espacio entre los imanes (aunque la desaceleración termina en algún momento).

Las corrientes transitorias a menudo son indeseables, lo cual obliga a los equipos de diseñadores a minimizarlas por segmentación o laminación de dispositivos eléctricos que deben operar en un entorno de campos magnéticos variables. No obstante, las corrientes transitorias también pueden ser útiles y se emplean en ciertas aplicaciones prácticas, como el sistema de frenado de vagones de trenes.

Detector de metales

Pasar por detectores de metales, especialmente en los aeropuertos forma parte inevitable de la vida en estos días. Un detector de metales trabaja al usar inducción electromagnética, a menudo denominada *inducción de impulsos*. Un detector de metales tiene una bobina transmisora y una receptora. Una corriente oscilante se aplica a la bobina transmisora, la cual, entonces, produce un campo magnético alterno. (*Alterno* significa que varía como una función del tiempo entre valores positivos y negativos. En el capítulo 30 se proporcionarán definiciones más precisas, consecuencias físicas y detalles matemáticos concernientes a la corriente alterna.) Cuando el campo magnético de la bobina transmisora aumenta y disminuye, induce una corriente en la bobina receptora que tiende a contrarrestar el cambio en el flujo magnético producido por la bobina transmisora. La corriente inducida en la bobina receptora se mide cuando entre las bobinas sólo hay aire. Si un conductor en forma de objeto metálico pasa entre las bobinas transmisora y receptora, en el objeto metálico se induce una corriente en forma de corrientes transitorias. Estas corrientes actúan para contrarrestar el aumento y la disminución en el campo magnético variable producido por la bobina transmisora, que a su vez induce una corriente en la bobina receptora que tiende a contrarrestar el incremento en la corriente en el metal. La corriente medida en la bobina receptora es menos si entre las dos bobinas hay cualquier objeto metálico.

La figura 29.12 muestra un esquema de un detector de metales en un aeropuerto. Una bobina transmisora y una receptora se colocan en lados opuestos de una puerta de entrada. La persona o el objeto a revisar pasa por la puerta entre las dos bobinas. Suponga que la corriente en la bobina transmisora circula en la dirección que se describe y es creciente. Una corriente se induce en la

placa de metal en dirección opuesta, que tiende a oponerse al incremento en la corriente en la bobina transmisora. La corriente creciente en la placa de metal induce una corriente en la bobina receptora, que es en dirección opuesta y tiende a oponerse al incremento en la corriente en la placa de metal (no aparece en la figura). Así, la placa de metal induce una corriente en la bobina receptora que circula en la misma dirección que la corriente en la bobina transmisora. Sin la placa de metal, la corriente creciente en la bobina transmisora induce una corriente en dirección opuesta a esta bobina, que tiende a oponerse al incremento en la corriente en la bobina transmisora (como ilustra el diagrama). Por esto, el efecto global en el detector de metales es disminuir la corriente observada en la bobina transmisora. El objeto de metal no tiene que ser una placa plana; cualquier pieza de metal, en el supuesto de que sea suficientemente grande, tiene una corriente inducida en ella que puede detectarse al medir la corriente inducida en la bobina receptora.

Los detectores de metales también se usan para controlar las luces de los semáforos. En esta aplicación, un bucle rectangular de alambre, que sirve como ambas bobinas, la transmisora y la receptora, se incrusta en la superficie del camino. Por el bucle se hace pasar un pulso de corriente que induce corrientes transitorias en cualquier metal cercano al bucle. La corriente en éste se mide una vez que se completa el pulso de corriente. Cuando un automóvil en el camino pasa por arriba del bucle, las corrientes transitorias inducidas en el metal del automóvil ocasiona que se mida una corriente diferente entre pulsos, que entonces hace que la señal del semáforo cambie a verde (¡después de un retraso idóneo para permitir que otros vehículos pasen por la intersección, por supuesto!). Sobre superficies de caminos antiguos aún pueden verse marcas en forma de rectángulo en la superficie de asfalto resultantes de retroadaptar intersecciones urbanas con estos bucles de inducción.

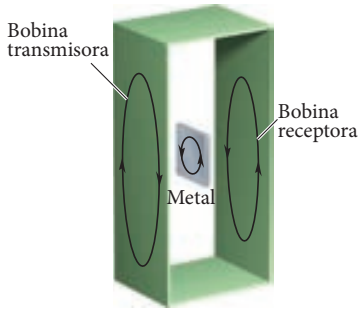


FIGURA 29.12 Diagrama de un detector de metales en un aeropuerto.

Diferencia de potencial inducida en un alambre que se mueve en un campo magnético

Considere un alambre conductor de longitud ℓ que se mueve con velocidad constante $\vec{v}$ perpendicular a un campo magnético constante, $\vec{B}$, dirigido hacia la página (figura 29.13). El alambre está orientado de modo que es perpendicular a la velocidad y al campo magnético. El campo magnético ejerce una fuerza, $\vec{F}_B$, sobre los electrones de conducción en el alambre, haciendo que se muevan hacia abajo. Este movimiento de los electrones produce una carga negativa neta en el extremo inferior del alambre y una carga positiva neta en el extremo superior del alambre. Esta separación de carga produce un campo eléctrico, $\vec{E}$, que ejerce una fuerza, $\vec{F}_E$, sobre los electrones de conducción que tiende a cancelar la fuerza magnética. Al cabo de algún tiempo, las dos fuerzas se vuelven iguales en magnitud (pero de dirección opuesta), produciendo una fuerza neta cero:

$$F_B = evB = F_E = eE. \tag{29.12}$$

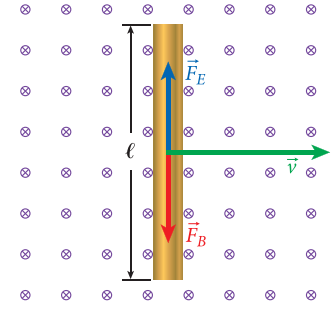
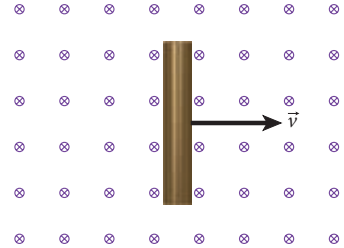


FIGURA 29.13 Conductor móvil en un campo magnético constante. Se muestran las fuerzas magnética y eléctrica sobre los electrones de conducción.

29.4 Ejercicio en clase

Una barra metálica se mueve con velocidad constante, $\vec{v}$, a través de un campo magnético uniforme que apunta hacia la página, como muestra la figura.



¿Cuál de las siguientes opciones representa con más precisión la distribución de carga sobre la superficie de la barra metálica?

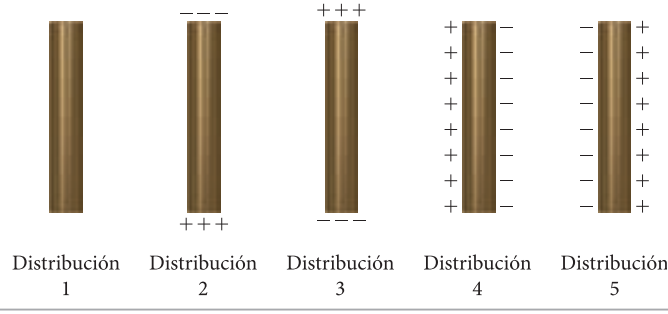
a) Distribución 1

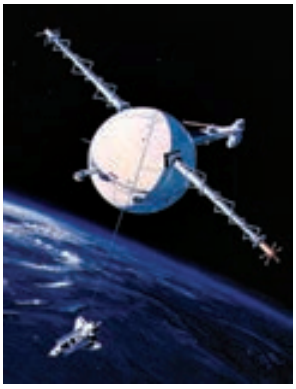
b) Distribución 2

c) Distribución 3

d) Distribución 4

e) Distribución 5





a)

b)

FIGURA 29.14 *a*) Concepción artística del trasbordador espacial *Columbia* y el satélite sujeto. *b*) Fotografía del satélite sujeto que se despliega del *Columbia*.

De esta manera, el campo eléctrico inducido puede expresarse por

$$E = vB. \tag{29.13}$$

Debido a que el campo eléctrico es constante en el alambre, produce una diferencia de potencial entre los dos extremos del alambre dada por

$$E = \frac{\Delta V_{\text{ind}}}{\ell} = vB. \tag{29.14}$$

Entonces, la diferencia de potencial inducida entre los extremos del alambre es

$$\Delta V_{\text{ind}} = v\ell B. \tag{29.15}$$

Ésta es una forma de fem de movimiento, mencionada en la sección 29.2.

EJEMPLO 29.3 Satélite sujeto a un trasbordador espacial

En 1996, el trasbordador espacial *Columbia* desplegó un satélite sujeto a un alambre a una distancia de 20 km (figura 29.14). El alambre estaba orientado perpendicular al campo magnético de la Tierra en ese punto, y la magnitud del campo era $B = 5.1 \cdot 10^{-5}$ T. El *Columbia* se desplazaba a una velocidad de 7.6 km/s.

PROBLEMA

¿Cuál fue la diferencia de potencial inducida entre los extremos del alambre?

SOLUCIÓN

Podemos usar la ecuación 29.15 para determinar la diferencia de potencial inducida entre los extremos del alambre. La longitud del alambre es L = 20 km, y la velocidad del alambre a través del campo magnético de la Tierra ($B = 5.1 \cdot 10^{-5}$ T) es la misma que la velocidad del trasbordador espacial, que es $v = 7.6$ km/s. Así, tenemos

$$\Delta V_{\text{ind}} = vLB = (7.6 \cdot 10^3 \text{ m/s})(20 \cdot 10^3 \text{ m})(5.1 \cdot 10^{-5} \text{ T}) = 7\,800 \text{ V}.$$

Los astronautas en el trasbordador espacial midieron una corriente aproximada de 0.5 A a un voltaje de 3 500 V. El circuito constaba del alambre desplegado y átomos ionizados en el espacio como trayectoria de regreso para la corriente. El alambre se rompió justo cuando el despliegue alcanzó 20 km, aunque la generación de corriente eléctrica debida al movimiento de la nave espacial quedó demostrada.

El problema resuelto 28.1 está relacionado con un acelerador de riel electromagnético. El siguiente ejemplo se centra en el fenómeno de inducción en un sistema semejante.

EJEMPLO 29.4 Barra conductora deslizable

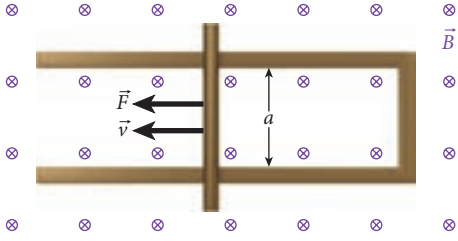


FIGURA 29.15 Una barra conductora se desliza a lo largo de dos rieles conductores con una velocidad constante en un campo magnético constante dirigido hacia la página.

Una barra conductora es jalada horizontalmente por una fuerza constante de magnitud $F = 5.00$ N, a lo largo de un conjunto de rieles conductores separados por una distancia $a = 0.500$ m (figura 29.15). Los dos rieles están conectados y entre la barra y los rieles no hay fricción. Un campo magnético uniforme de magnitud $B = 0.500$ T está dirigido hacia la página. La barra se mueve a velocidad constante, $v = 5.00$ m/s.

PROBLEMA

¿Cuál es la magnitud de la diferencia de potencial en el bucle creada por los rieles conectados y la barra deslizable?

SOLUCIÓN

La diferencia de potencial inducida está dada por la ecuación 29.10, que se aplica a un bucle en un campo magnético cuando el ángulo y el campo magnético se mantienen constantes y el área del bucle cambia con el tiempo:

$$\Delta V_{\text{ind}} = -B\cos\theta\frac{dA}{dt}.$$

En este caso, $\theta = 0$ y $B = 0.500$ T. El área del bucle aumenta con el tiempo. Podemos expresar el área del bucle en términos de A_0, el área antes de que la barra comience a moverse y un área adicional dada por el producto de la velocidad del bucle y el tiempo durante el cual se mueve, multiplicado por la distancia, a, entre los rieles:

$$A = A_0 + a(vt) = A_0 + vta.$$

Así, el cambio en el área del bucle como una función del tiempo es

$$\frac{dA}{dt} = \frac{d}{dt}(A_0 + vta) = va.$$

Por lo tanto, la magnitud de la diferencia de potencial inducida es

$$\Delta V_{\text{ind}} = \left| -B\cos\theta \frac{dA}{dt} \right| = vaB. \qquad \text{(i)}$$

Al escribir los valores numéricos, obtenemos

$$\Delta V_{\text{ind}} = (5.00 \text{ m/s})(0.500 \text{ m})(0.500 \text{ T}) = 1.25 \text{ V}.$$

Observe que la ecuación (i), $\Delta V_{\text{ind}} = vaB$, que obtuvimos para la ley de inducción de Faraday, tiene la misma forma que la ecuación 29.15 para la diferencia de potencial inducida en un alambre que se mueve en un campo magnético, que se obtuvo usando la fuerza magnética sobre cargas en movimiento.

29.5 Ejercicio en clase

Calcule la diferencia de potencial inducida entre las puntas de las alas de un Boeing 747-400, con una envergadura de 64.67 m a nivel de vuelo y a una velocidad de 913 km/h. Suponga que la componente hacia abajo del campo magnético de la Tierra es $B = 5.00 \cdot 10^{-5}$ T.

a) 0.821 V
b) 2.95 V
c) 10.4 V
d) 30.1 V
e) 225 V

29.4 Generadores y motores

El tercer caso especial del proceso de inducción básico descrito en la sección 29.2 es, por mucho, el más interesante desde el punto de vista tecnológico. En este caso, el ángulo entre el bucle conductor y el campo magnético varía con el tiempo, mientras el área de aquél y el campo magnético se mantienen constantes. En esta situación, la ecuación 29.11 puede usarse para aplicar la ley de inducción de Faraday a la generación y aplicación de corriente eléctrica. Un dispositivo que produce corriente eléctrica a partir del movimiento mecánico se denomina **generador eléctrico**. Un dispositivo que produce movimiento mecánico a partir de la corriente eléctrica se denomina **motor eléctrico**. La figura 29.16 muestra un motor eléctrico muy simple.

FIGURA 29.16 Un motor muy simple usado para demostraciones en conferencias. Consta de un par de imanes permanentes en la parte externa y dos solenoides en el interior, a través de los cuales se envía corriente.

Un generador simple consta de un bucle forzado a rotar en un campo magnético fijo. La fuerza que lo hace rotar puede suministrarse por medio de vapor caliente que pasa por una turbina, como ocurre en plantas nucleares y eléctricas que queman carbón. (Las plantas de energía en realidad usan múltiples bucles para aumentar la producción de energía.) Por otra parte, es posible hacer rotar el bucle por circulación de agua o aire para generar electricidad libre de contaminación.

La figura 29.17 muestra dos tipos de generadores. En un generador de corriente directa, el bucle rotatorio se conecta a un circuito externo por medio de un colector de anillo partido, como ilustra la figura 29.17*a*). A medida que gira, la conexión se invierte dos veces por revolución, de modo que la diferencia de potencial inducida siempre tiene el mismo signo. La figura 29.17*b*) muestra un arreglo semejante usado para producir una corriente alterna. Una corriente alterna es una corriente que varía con el tiempo entre valores positivos y negativos, donde la variación a menudo presenta una forma sinusoidal. Cada extremo del bucle está conectado al circuito externo por medio de su propio anillo de deslizamiento. Así, este generador produce una diferencia de potencial inducida que varía de positiva a negativa y luego al revés. Un generador que produce voltajes alternos y la corriente alterna resultante también se denomina **alternador**. La figura 29.18 ilustra una diferencia de potencial inducida como una función del tiempo para cada tipo de generador.

Los dispositivos en la figura 29.17 también pueden usarse como motores al suministrar corriente al bucle y usando el movimiento resultante de la bobina para realizar trabajo.

Los generadores y motores del mundo real son considerablemente más complicados que los simples ejemplos de la figura 29.17. Por ejemplo, en lugar de imanes permanentes, la corriente que circula en las bobinas crea el campo magnético requerido. Muchas bobinas devanadas estrechamente se usan a fin de utilizar de manera más eficiente el movimiento rotacional. Bucles múltiples también resuelven el problema de que un motor con bucle único puede detenerse en una posición

29.4 Oportunidad de autoevaluación

Un generador es operado al rotar una bobina de N vueltas en un campo magnético de magnitud B a frecuencia f. La resistencia de la bobina es R, y el área de la sección transversal de la bobina es A. Decida si cada una de las siguientes afirmaciones es falsa o verdadera.

a) La diferencia de potencial inducida media se duplica si la frecuencia, f, se duplica.

b) La diferencia de potencial inducida media se duplica si la resistencia, R, se duplica.

c) La diferencia de potencial inducida media se duplica si la magnitud del campo magnético, B, se duplica.

d) La diferencia de potencial inducida media se duplica si el área, A, se duplica.

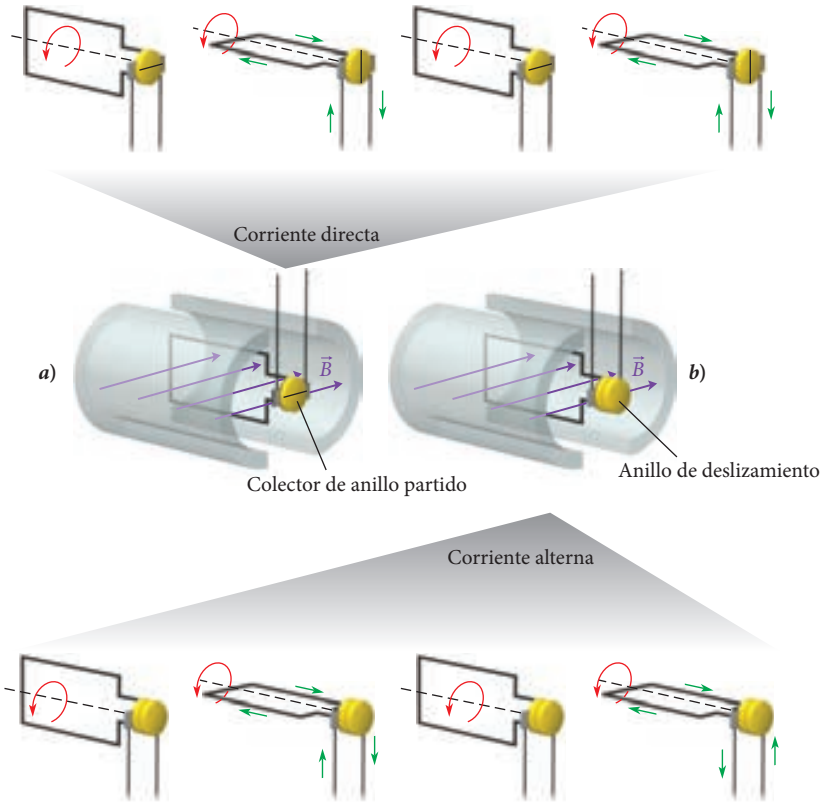


FIGURA 29.17 *a*) Generador/motor simple de corriente directa (CD). *b*) Generador/motor simple de corriente alterna (CA).

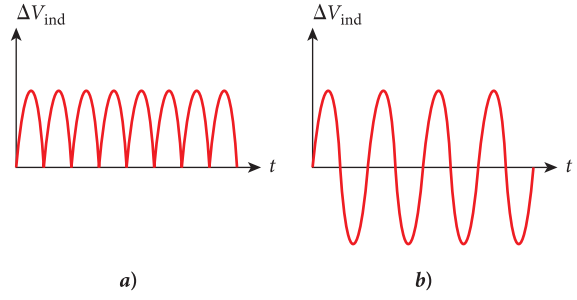


FIGURA 29.18 Diferencia de potencial inducida como una función del tiempo para *a*) un generador simple de corriente directa; *b*) generador simple de corriente alterna.

FIGURA 29.19 Motor híbrido de un automóvil, abierto para enseñar el sistema de frenado regenerativo, mostrado en acercamiento en el recuadro.

en la que la corriente a través de él no produce momento de torsión. El campo magnético también puede cambiar con el tiempo en fase con el bucle rotatorio. En algunos generadores y motores, los bucles (bobinas) están fijos y lo que gira es el imán.

Sistema de frenado regenerativo

Los automóviles híbridos son impulsados por una combinación de potencia de gasolina y energía eléctrica. Una característica atractiva de un vehículo híbrido es que es capaz de **regenerar el sistema de frenado**. Cuando los frenos se usan para desacelerar o detener un vehículo no híbrido, la energía cinética del vehículo se transforma en calor en las pastillas de freno. Este calor se disipa en el entorno y la energía se pierde. En un automóvil híbrido, los frenos están conectados con el motor eléctrico (figura 29.19), que funciona como un generador, cargando la batería del automóvil. Así, la energía cinética del automóvil se recupera parcialmente durante el frenado, y esta energía puede usarse más tarde para impulsar el vehículo, contribuyendo a su eficiencia y aumentando bastante su rendimiento por kilometraje en conducción a marcha lenta.

29.5 Campo eléctrico inducido

La ley de inducción de Faraday establece que un flujo magnético variable produce una diferencia de potencial inducida, que puede producir una corriente inducida. ¿Cuáles son las consecuencias de este efecto?

Considere una carga positiva q que se mueve en trayectoria circular con radio r en un campo eléctrico, $\vec{E}$. El trabajo realizado sobre la carga es igual a la integral del producto escalar de la fuerza y el vector diferencial de desplazamiento. Por el momento, supongamos que el campo eléctrico $\vec{E}$ es constante, que tiene líneas de campo circulares y que la carga se mueve a lo largo de una de estas líneas. En una revolución de la carga, el trabajo realizado sobre ésta es

$$\oint \vec{F}\cdot d\vec{s} = \oint q\vec{E}\cdot d\vec{s} = \oint q\cos 0° E\, ds = qE\oint ds = qE(2\pi r).$$

Puesto que el trabajo realizado por un campo eléctrico es $\Delta V_{\text{ind}}q$, obtenemos

$$\Delta V_{\text{ind}} = 2\pi rE.$$

Podemos generalizar este resultado al considerar el trabajo realizado sobre una carga q que se mueve a lo largo de una trayectoria cerrada arbitraria:

$$W = \oint \vec{F}\cdot d\vec{s} = q\oint \vec{E}\cdot d\vec{s}.$$

De nuevo, al sustituir $\Delta V_{\text{ind}}q$ para el trabajo realizado, obtenemos

$$\Delta V_{\text{ind}} = \oint \vec{E}\cdot d\vec{s}. \tag{29.16}$$

Ahora podemos expresar la diferencia de potencial inducida en una forma diferente al combinar la ecuación 29.5 con la 29.16:

$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{s} = -\frac{d\Phi_B}{dt}. \tag{29.17}$$

La ecuación 27.17 establece que un flujo magnético variable induce un campo eléctrico. Esta ecuación puede aplicarse a cualquier trayectoria cerrada en un campo magnético variable, incluso si en la trayectoria no hay ningún conductor.

29.6 Inductancia de un solenoide

Considere un solenoide largo con N vueltas que conduce una corriente, i. Esta corriente crea un campo magnético en el centro del solenoide, resultando en un flujo magnético, Φ_B. El mismo flujo magnético pasa por cada una de las N vueltas del solenoide. Suele acostumbrarse definir el **eslabonamiento de flujo** como el producto del número de vueltas y el flujo magnético, o $N\Phi_B$. La ecuación 29.1 definía el flujo magnético como $\Phi_B = \iint \vec{B}\cdot d\vec{A}$. Dentro del solenoide, el vector de campo magnético y el vector normal a la superficie, $d\vec{A}$, son paralelos. Y en el capítulo 28 vimos que la magnitud del campo magnético dentro del solenoide es $B = \mu_0 ni$, donde $\mu_0 = 4\pi\cdot 10^{-7}$ T m/A es la permeabilidad magnética del espacio libre, i es la corriente y n es el número de vueltas por unidad de longitud ($n = N/\ell$). En consecuencia, el flujo magnético en el interior del solenoide es proporcional a la corriente que circula por el solenoide, lo que trivialmente significa que el eslabonamiento de flujo también es proporcional a la corriente. Podemos expresar esta proporcionalidad como

$$N\Phi_B = Li, \tag{29.18}$$

usando una constante de proporcionalidad, L, denominada **inductancia**. (*Nota*: El uso de la letra L para representar la inductancia es una convención. Aunque L también se usa para la cantidad física de longitud y la cantidad física de cantidad de movimiento angular, la inductancia no está relacionada en absoluto con ninguna de estas dos.)

La inductancia es una medida del eslabonamiento de flujo producido por el solenoide por unidad de corriente. La unidad de inductancia es el **henry** (H), en honor del físico estadounidense Joseph Henry (1797-1878), dada por

$$[L] = \frac{[\Phi_B]}{[i]} \Rightarrow 1\text{ H} = \frac{1\text{ T m}^2}{1\text{ A}}. \tag{29.19}$$

La definición del henry dada en la ecuación 29.19 significa que la permeabilidad magnética del espacio libre también puede darse como $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ H/m.

Ahora usaremos la ecuación 29.18 para encontrar la inductancia de un solenoide con área de sección transversal A y longitud ℓ. El eslabonamiento de flujo para este solenoide es

$$N\Phi_B = (n\ell)(BA), \tag{29.20}$$

donde n es el número de vueltas por unidad de longitud y B es la magnitud del campo magnético dentro del solenoide. Así, la inductancia está dada por

$$L = \frac{N\Phi_B}{i} = \frac{(n\ell)(\mu_0 ni)(A)}{i} = \mu_0 n^2 \ell A. \tag{29.21}$$

Esta expresión para la inductancia de un solenoide es aceptable para solenoides largos porque los efectos de campos marginales en los extremos de un solenoide así son pequeños. Por la ecuación 29.21 puede ver que la inductancia de un solenoide sólo depende de la geometría (longitud, área y número de vueltas) del dispositivo. Esta dependencia de la inductancia con respecto sólo a la geometría se cumple para todas las bobinas y los solenoides, justo como la capacitancia de cualquier capacitor depende sólo de la geometría de éste.

Cualquier solenoide tiene inductancia, y cuando el solenoide se usa en un circuito eléctrico, se denomina simplemente *inductor*, porque su inductancia es la propiedad más importante en cuanto al flujo de corriente se refiere.

29.7 Autoinductancia e inducción mutua

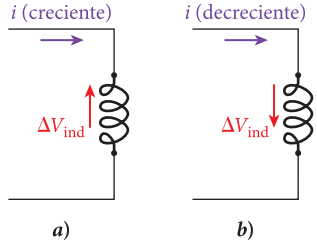


FIGURA 29.20 *a*) Diferencia de potencial autoinducida en un inductor cuando la corriente es creciente. *b*) Diferencia de potencial autoinducida en un inductor cuando la corriente es decreciente.

Considere la situación en la que dos bobinas, o inductores, están próximas entre sí y una corriente variable en la primera bobina produce un flujo magnético en la segunda. No obstante, la corriente variable en la primera bobina también induce una diferencia de potencial en esa bobina y, por lo tanto, el campo magnético de esa bobina también cambia. Este fenómeno se denomina **autoinducción**. La diferencia de potencial resultante se denomina *diferencia de potencial autoinducida*. Al cambiar la corriente en la primera bobina también se induce una diferencia de potencial en la segunda. Este fenómeno se denomina **inducción mutua**.

Según la ley de inducción de Faraday, la diferencia de potencial autoinducida para cualquier inductor está dada por

$$\Delta V_{\text{ind},L} = -\frac{d(N\Phi_B)}{dt} = -\frac{d(Li)}{dt} = -L\frac{di}{dt}, \tag{29.22}$$

donde la ecuación 29.18 permite sustituir Li por $N\Phi_B$. Así, en cualquier inductor, una diferencia de potencial autoinducida aparece cuando la corriente cambia con el tiempo. Esta diferencia de potencial autoinducida depende de la razón de cambio con respecto al tiempo de la corriente y la inductancia del dispositivo.

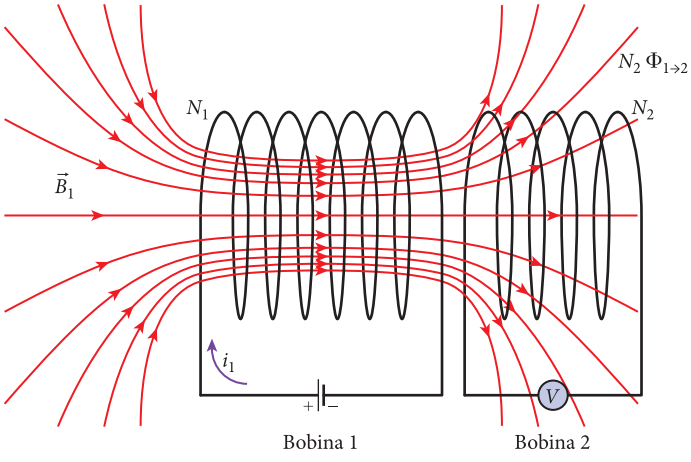


FIGURA 29.21 La bobina 1 tiene una corriente i_1. La bobina 2 tiene un voltímetro capaz de medir pequeñas diferencias de potencial inducidas.

La ley de Lenz proporciona la dirección de la diferencia de potencial autoinducida. El signo negativo en la ecuación 29.22 proporciona la pista de que la diferencia de potencial inducida siempre se opone al cambio en la corriente. Por ejemplo, la figura 29.20*a*) muestra la corriente que fluye por un inductor y crece con el tiempo. De esta forma, la diferencia de potencial autoinducida se opone al aumento en la corriente. En la figura 29.20*b*), la corriente que circula por un inductor disminuye con el tiempo. Entonces, una diferencia de potencial autoinducida se opone a la disminución en la corriente. Hemos supuesto que estos inductores son inductores ideales; es decir, que no tienen resistencia. Todas las diferencias de potencial inducidas se manifiestan a través de las conexiones del inductor. Los inductores con resistencia se abordan en la siguiente sección.

Ahora consideremos dos bobinas adyacentes cuyos ejes centrales están alineados (figura 29.21). La bobina 1 tiene N_1 vueltas, y la bobina 2, N_2 vueltas. La corriente en

la bobina 1 produce un campo magnético, $\vec{B}_1$. El flujo vinculado en la bobina 2 resultante del campo magnético de la bobina 1 es $N_2\Phi_{1\to2}$. La inductancia mutua, $M_{1\to2}$, de la bobina 2 debida a la bobina 1 se define como

$$M_{1\to2} = \frac{N_2\Phi_{1\to2}}{i_1}. \tag{29.23}$$

Al multiplicar ambos miembros de la ecuación 29.23 por i_1, se obtiene

$$i_1 M_{1\to2} = N_2\Phi_{1\to2}.$$

Si la corriente en la bobina 1 cambia con el tiempo, podemos escribir

$$M_{1\to2}\frac{di_1}{dt} = N_2\frac{d\Phi_{1\to2}}{dt}.$$

El miembro derecho de esta ecuación es semejante al miembro derecho de la ley de inducción de Faraday (ecuación 29.5). De esta manera, podemos escribir

$$\Delta V_{\text{ind},2} = -M_{1\to2}\frac{di_1}{dt}. \tag{29.24}$$

Ahora invertiremos los papeles de las dos bobinas (figura 29.22). La corriente, i_2, en la bobina 2 produce un campo magnético, $\vec{B}_2$. El flujo vinculado en la bobina 1 resultante del campo magnético en la bobina 2 es $N_1\Phi_{2\to1}$. Al utilizar el mismo análisis aplicado para encontrar la inductancia mutua de la bobina 2 debida a la bobina 1, encontramos

$$\Delta V_{\text{ind},1} = -M_{2\to1}\frac{di_2}{dt}, \tag{29.25}$$

donde $M_{2\to1}$ es la inductancia mutua de la bobina 1 debida a la bobina 2.

Vemos que la diferencia de potencial inducida en una bobina es proporcional al cambio de la corriente en la otra bobina. La constante de proporcionalidad es la inducción mutua. Si se intercambian los índices 1 y 2 y se repite todo el análisis de los efectos de las bobinas entre sí, podremos demostrar que

$$M_{1\to2} = M_{2\to1} = M.$$

Podemos volver a escribir las ecuaciones 29.24 y 29.25 como

$$\Delta V_{\text{ind},2} = -M\frac{di_1}{dt} \tag{29.26}$$

y

$$\Delta V_{\text{ind},1} = -M\frac{di_2}{dt}, \tag{29.27}$$

donde M es la **inductancia mutua** entre las dos bobinas. La unidad SI de inductancia mutua es el henry. Una aplicación fundamental de la inductancia se encuentra en los transformadores, que se analizan en el capítulo 30.

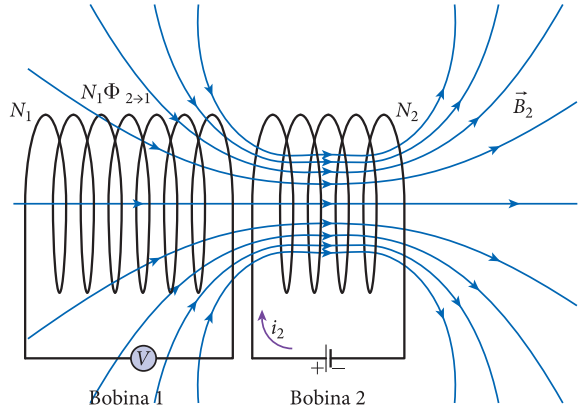


FIGURA 29.22 La bobina 2 tiene una corriente i_2. La bobina 1 tiene un voltímetro capaz de medir pequeñas diferencias de potencial inducidas.

PROBLEMA RESUELTO 29.1 Inducción mutua de un solenoide y una bobina

Un solenoide largo con sección transversal circular de radio $r_1 = 2.80$ cm y $n = 290$ vueltas/cm está dentro de un cable coaxial con una bobina corta con sección transversal de radio $r_2 = 4.90$ cm y $N = 31$ vueltas [figura 29.23*a*)]. La corriente en el solenoide se incrementa a una razón constante desde cero hasta $i = 2.20$ A sobre un intervalo de 48.0 ms.

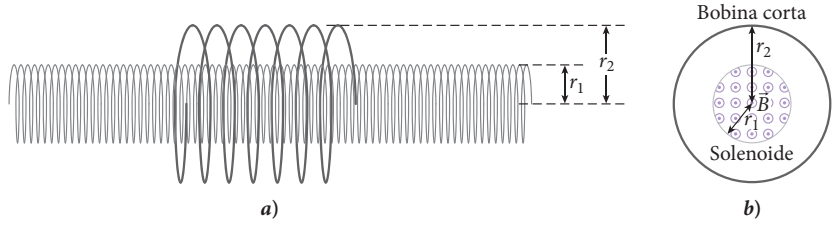


FIGURA 29.23 *a*) Un solenoide largo de radio r_1 dentro de una bobina corta de radio r_2. *b*) Vista de las dos bobinas vistas desde el eje central.

PROBLEMA

¿Cuál es la diferencia de potencial inducida en la bobina corta mientras cambia la corriente?

SOLUCIÓN

PIENSE

La diferencia de potencial inducida en la bobina corta se debe a la corriente variable que circula en el solenoide. Según la ecuación 29.23, la inductancia mutua de la bobina corta debida al solenoide es el número de vueltas en la bobina corta multiplicado por el flujo magnético del solenoide, dividido entre la corriente que circula por el solenoide. Entonces podemos calcular la diferencia de potencial inducida en la bobina corta.

ESBOCE

La figura 29.23*b*) muestra una vista de las dos bobinas vistas desde su eje central.

PLANTEE

Podemos plantear la inductancia mutua entre la bobina y el solenoide como

$$M = \frac{N\Phi_{s\to c}}{i}, \tag{i}$$

donde N es el número de vueltas en la bobina corta, $N\Phi_{s\to c}$ es el flujo vinculado en la bobina resultante del campo magnético en el solenoide, e i es la corriente en el solenoide. El flujo puede expresarse como

$$\Phi_{s\to c} = BA, \tag{ii}$$

donde B es la magnitud del campo magnético dentro del solenoide y A es el área de la sección transversal. Recuerde por el capítulo 28 que para un solenoide la magnitud del campo magnético es

$$B = \mu_0 ni,$$

donde n es el número de vueltas por unidad de longitud. El área de la sección transversal del solenoide es

$$A = \pi r_1^2. \tag{iii}$$

Entonces, la diferencia de potencial inducida en la bobina corta es

$$\Delta V_{ind} = -M\frac{di}{dt}.$$

SIMPLIFIQUE

Podemos combinar las ecuaciones (i), (ii) y (iii) para obtener la inductancia mutua entre las dos bobinas:

$$M = \frac{NBA}{i} = \frac{N(\mu_0 ni)(\pi r_1^2)}{i} = N\pi\mu_0 n r_1^2.$$

Entonces, la diferencia de potencial inducida en la bobina es

$$\Delta V_{ind} = -(N\pi\mu_0 n r_1^2)\frac{di}{dt}.$$

CALCULE

El cambio en la corriente es constante, de modo que

$$\frac{di}{dt} = \frac{2.20\text{ A}}{48.0\cdot10^{-3}\text{ s}} = 45.8333\text{ A/s}.$$

La inductancia mutua entre las dos bobinas es

$$M = (31)\pi\left(4\pi\cdot10^{-7}\text{ T m/A}\right)\left(290\cdot10^{2}\text{ m}^{-1}\right)\left(2.80\cdot10^{-2}\text{ m}\right)^{2} = 0.0027825\text{ H}.$$

Por esto, la diferencia de potencial inducida en la bobina corta es

$$\Delta V_{\text{ind}} = -(0.0027825\text{ H})(45.8333\text{ A/s}) = -0.127531\text{ V}.$$

REDONDEE

Mostramos nuestro resultado con tres cifras:

$$\Delta V_{\text{ind}} = -0.128\text{ V}.$$

VUELVA A REVISAR

La magnitud de la diferencia de potencial inducida en la bobina corta externa es 128 mV, que es la magnitud que podría alcanzarse al mover una potente barra imantada tanto dentro como fuera de una bobina. De esta manera, nuestro resultado parece razonable.

29.6 Ejercicio en clase

Suponga que la corriente en la bobina corta en el problema resuelto 29.1 se incrementa de manera continua desde cero hasta i = 2.80 A en 18.0 ms. ¿Cuál es la magnitud de la diferencia de potencial inducida en el solenoide mientras la corriente en la bobina corta varía?

a) 0.0991 V
b) 0.128 V
c) 0.233 V
d) 0.433 V
e) 0.750 V

29.8 Circuitos RL

En el capítulo 26 vimos que una fuente de fem que suministra un voltaje, V_{fem}, en un circuito de bucle único que contiene un resistor de resistencia R y un capacitor de capacitancia C, la carga, q, sobre el capacitor se acumula con el tiempo según

$$q = CV_{\text{fem}}\left(1 - e^{-t/\tau_{\text{RC}}}\right),$$

donde la constante de tiempo del circuito, $\tau_{\text{RC}} = RC$, es el producto de la resistencia y la capacitancia. La misma constante de tiempo rige el decrecimiento de la carga inicial, q_0, sobre el capacitor si la fuente de fem se retira repentinamente y el circuito se pone en corto:

$$q = q_0 e^{-t/\tau_{\text{RC}}}.$$

Si una fuente de fem se coloca en un circuito de bucle único con un resistor de resistencia R y un inductor con inductancia L, denominado **circuito RL**, ocurre un fenómeno semejante. La figura 29.24 describe un circuito en el que una fuente de fem está conectada a un resistor y a un inductor en serie. Si en el circuito sólo estuviera el resistor y no el inductor, la corriente aumentaría casi de manera instantánea hasta el valor dado por la ley de Ohm, iV_{fem}/R, tan pronto como se cerrara el interruptor. No obstante, en el circuito con el resistor y el inductor, la corriente creciente que fluye por el inductor crea una diferencia de potencial autoinducida que tiende a oponerse al incremento en la corriente. Con el paso del tiempo, el cambio en la corriente disminuye y la diferencia de potencial autoinducida también disminuye. Después de mucho tiempo, la corriente se vuelve estacionaria en el valor V_{fem}/R.

Podemos usar la ley de voltaje de Kirchhoff para analizar este circuito, en el supuesto de que la corriente, i, en cualquier instante dado fluye por el circuito en dirección contraria al movimiento de las manecillas del reloj. Con la corriente circulando en dirección contraria al movimiento de las manecillas del reloj, la fuente de fem representa una ganancia en potencial, $+V_{\text{fem}}$, y el resistor representa una caída de potencial, $-iR$. La autoinductancia del inductor produce una caída en el potencial porque se opone al incremento en la corriente. La caída de potencial debida al inductor es proporcional a la razón de cambio con respecto al tiempo de la corriente, como se indica en la ecuación 29.22. Así, podemos escribir la suma de las caídas de potencial alrededor del circuito como

$$V_{\text{fem}} - iR - L\frac{di}{dt} = 0.$$

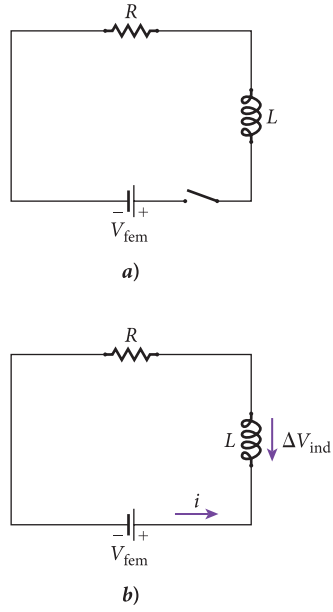
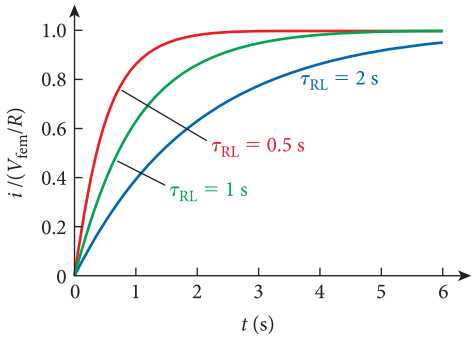
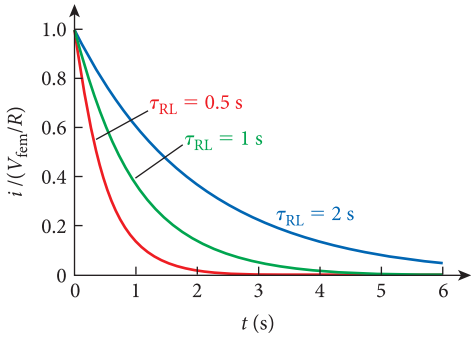


FIGURA 29.24 Circuito de un bucle único con una fuente de fem, un resistor y un inductor: *a*) interruptor abierto; *b*) interruptor cerrado. Cuando el interruptor está cerrado, la corriente que fluye en la dirección mostrada aumenta. A través del inductor se induce una diferencia de potencial en dirección opuesta, como se muestra.



a)



b)

FIGURA 29.25 Dependencia con respecto al tiempo de la corriente que fluye por un circuito RL. *a*) La corriente como una función del tiempo cuando un resistor, un inductor y una fuente de fem se conectan en serie. *b*) La corriente como una función del tiempo cuando la fuente de fem se retira repentinamente de un circuito RL que ha permanecido conectado durante mucho tiempo.

Podemos volver a escribir esta ecuación como

$$L\frac{di}{dt}+iR=V_{\text{fem}}. \tag{29.28}$$

La solución de esta ecuación diferencial se obtiene exactamente de la misma manera en la que se obtuvo la solución de la ecuación diferencial para el circuito RC en el capítulo 26. La solución, que puede comprobarse al sustituirla en la ecuación 29.28, es

$$i(t)=\frac{V_{\text{fem}}}{R}\left(1-e^{-t/(L/R)}\right). \tag{29.29}$$

La cantidad L/R es la constante de tiempo del circuito RL:

$$\tau_{\text{RL}}=\frac{L}{R}. \tag{29.30}$$

La dependencia con respecto al tiempo de un circuito RL se muestra en la figura 29.25*a*) para tres valores diferentes de la constante de tiempo.

Al observar la ecuación 29.29, se ve que para $t = 0$ la corriente es cero. Para $t \to \infty$, la corriente está dada por $i = V_{\text{fem}}/R$, que es como se esperaba.

Ahora considere el circuito que se muestra en la figura 29.26, donde se ha conectado una fuente de fem que se ha retirado repentinamente. Podemos usar la ecuación 29.28 con $V_{\text{fem}} = 0$ para describir la dependencia con respecto al tiempo de este circuito:

$$L\frac{di}{dt}+iR=0. \tag{29.31}$$

El resistor ocasiona una caída de potencial, y el inductor tiene una diferencia de potencial autoinducida que tiende a oponerse a la disminución en la corriente. La solución de la ecuación 29.31 es

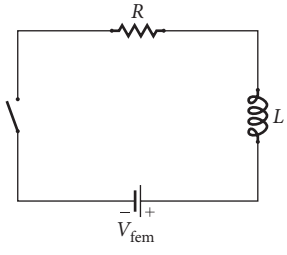
$$i(t)=i_0e^{-t/\tau_{\text{RL}}}. \tag{29.32}$$

Para determinar la corriente inicial: $i_0 = V_{\text{fem}}/R$ pueden usarse las condiciones iniciales cuando la fuente de fem estaba conectada. La ecuación 29.32 describe un circuito con un solo bucle con un resistor y un inductor que inicialmente tiene una corriente i_0. La corriente decrece exponencialmente con el tiempo, con una constante de tiempo $\tau_{\text{RL}} = L/R$, y después de bastante tiempo, la corriente en el circuito es cero. La corriente en este circuito RL como una función del tiempo para tres valores diferentes de la constante de tiempo se muestra en la figura 29.25*b*).

Los circuitos RL pueden usarse como temporizadores para encender dispositivos a intervalos particulares y también pueden utilizarse para filtrar ruido. No obstante, estas aplicaciones suelen manipularse con circuitos RC semejantes porque se cuenta con capacitores pequeños en una gama más amplia de capacitancias que los inductores. El valor real de los inductores se pone de manifiesto en circuitos que tienen los tres componentes: resistores, capacitores e inductores, que se abordan en el capítulo 30.

29.7 Ejercicio en clase

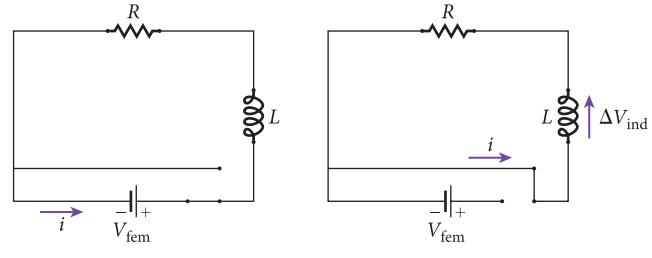
Considere el circuito RL que se muestra en la figura. Cuando el interruptor está cerrado, la corriente en el circuito crece exponencialmente hasta el valor $i = V_{\text{fem}}/R$. Si el inductor en este circuito se sustituye por un inductor que tiene tres veces el número de vueltas por unidad de longitud, el tiempo necesario para alcanzar una corriente de $0.9i$



a) aumenta.

b) disminuye.

c) permanece igual.



a) *b*)

FIGURA 29.26 Circuito de bucle único con una fuente de fem, un resistor y un inductor. *a*) El circuito con la fuente de fem conectada. La corriente fluye en la dirección mostrada. *b*) La fuente de fem se ha retirado y el resistor y el inductor están conectados. La corriente fluye en la misma dirección que antes, pero es decreciente. Una diferencia de potencial se induce a través del inductor en la misma dirección que la corriente, como se ilustra.

PROBLEMA RESUELTO 29.2 Trabajo realizado por una batería

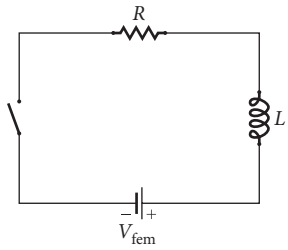


FIGURA 29.27 Un circuito RL con un interruptor.

Un circuito en serie contiene una batería que suministra $V_{fem} = 40.0$ V, un inductor con $L = 2.20$ H, un resistor con $R = 160.0\ \Omega$, y un interruptor, conectados como muestra la figura 29.27.

PROBLEMA

El interruptor se cierra en el instante $t = 0$. ¿Cuánto trabajo realiza la batería entre $t = 0$ y $t = 1.65 \cdot 10^{-2}$ s?

SOLUCIÓN

PIENSE

Cuando el interruptor se cierra, comienza a circular corriente y la batería suministra potencia. La potencia se define como el voltaje multiplicado por la corriente en cualquier instante dado. El trabajo es la integral de la potencia durante el tiempo que opera el circuito.

ESBOCE

La figura 29.28 ilustra una gráfica de la corriente en el circuito RL como función del tiempo.

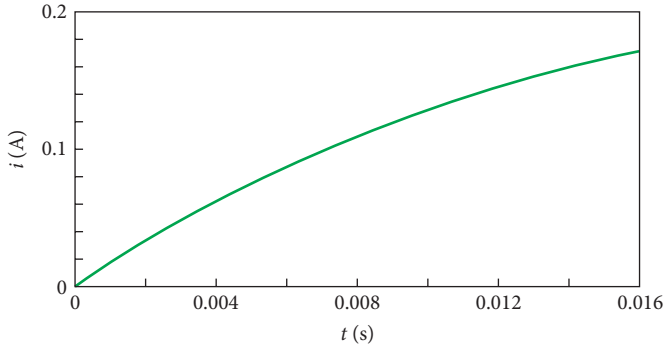


FIGURA 29.28 Corriente en un circuito RL como función del tiempo.

INVESTIGUE

La potencia en el circuito en cualquier instante t después de que se cierra el interruptor está dada por

$$P(t) = V_{fem} i(t), \tag{i}$$

donde $i(t)$ es la corriente en el circuito. La corriente como función del tiempo para este circuito está dada por la ecuación 29.29,

$$i(t) = \frac{V_{fem}}{R}\left(1 - e^{-t/\tau_{RL}}\right), \tag{ii}$$

donde $\tau_{RL} = L/R$. El trabajo realizado por la batería es la integral de la potencia durante el tiempo de operación del circuito:

$$W = \int_0^T P(t)dt, \tag{iii}$$

donde T es el tiempo después de que se cierra el interruptor.

SIMPLIFIQUE

Podemos combinar las ecuaciones (i), (ii) y (iii) para obtener

$$W = \int_0^T \frac{V_{fem}^2}{R}\left(1 - e^{-t/\tau_{RL}}\right)dt.$$

Al evaluar la integral definida, obtenemos

$$W = \frac{V_{fem}^2}{R}\left[t + \tau_{RL} e^{-t/\tau_{RL}}\right]_0^T = \frac{V_{fem}^2}{R}\left[T + \tau_{RL}\left(e^{-T/\tau_{RL}} - 1\right)\right]. \tag{iv}$$

CALCULE

Primero calculamos el valor de la constante de tiempo:

$$\tau_{RL} = \frac{L}{R} = \frac{2.20\ \text{H}}{160.0\ \Omega} = 1.375 \cdot 10^{-2}\ \text{s}.$$

Luego, al escribir los valores numéricos en la ecuación (iv), obtenemos

$$W = \frac{(40.0\ \text{V})^2}{160.0\ \Omega}\left[\left(1.65 \cdot 10^{-2}\ \text{s}\right) + \left(1.375 \cdot 10^{-2}\ \text{s}\right)\left(e^{-\left(1.65 \cdot 10^{-2}\ \text{s}\right)/\left(1.375 \cdot 10^{-2}\ \text{s}\right)} - 1\right)\right] = 0.0689142\ \text{J}.$$

(*continúa*)

(*continuación*)

REDONDEE

Mostramos nuestro resultado con tres cifras:

$$W = 6.89 \cdot 10^{-2} \text{ J}.$$

VUELVA A REVISAR

Para corroborar nuestro resultado, suponemos que la corriente en el circuito es constante en el tiempo e igual a la mitad de la corriente final:

$$i_{\text{med}} = \frac{i(T)}{2} = \frac{\left(V_{\text{fem}}/R\right)\left(1 - e^{-T/\tau_{\text{RL}}}\right)}{2} = \frac{(40.0 \text{ V}/160.0\ \Omega)\left(1 - e^{-(1.65\cdot10^{-2}\text{ s})/(1.375\cdot10^{-2}\text{ s})}\right)}{2} = 0.0874 \text{ A}.$$

Esta corriente correspondería a la corriente media si la corriente aumentase linealmente con el tiempo. Entonces, el trabajo realizado es

$$W = PT = i_{\text{med}} V_{\text{fem}} T = (0.0874 \text{ A})(40.0 \text{ V})(1.65 \cdot 10^{-2} \text{ s}) = 5.77 \cdot 10^{-2} \text{ J}$$

Este valor es menor, pero próximo, a nuestro resultado calculado. Así, nuestro resultado parece razonable.

29.9 Energía y densidad de energía de un campo magnético

Podemos considerar que un inductor es un dispositivo capaz de almacenar energía en un campo magnético, en forma semejante a como un capacitor puede almacenar energía en un campo eléctrico. La energía almacenada en el campo eléctrico de un capacitor está dada por

$$U_E = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C}.$$

Considere un inductor conectado a una fuente de fem. Por el inductor comienza a circular corriente, produciendo una diferencia de potencial autoinducida que se opone al aumento en la corriente. La potencia instantánea suministrada por la fuente de fem es el producto de la corriente y el voltaje de la fuente de fem, V_{fem}. Al usar la ecuación 29.28 con $R = 0$, podemos escribir

$$P = V_{\text{fem}} i = \left(L\frac{di}{dt}\right) i. \tag{29.33}$$

Al integrar esta potencia durante el tiempo necesario para alcanzar una corriente final i en el circuito, se obtiene la energía suministrada por la fuente de fem. Puesto que en este circuito no hay pérdidas resistivas, esta cantidad de energía debe almacenarse en el campo magnético del inductor. En consecuencia,

$$U_B = \int_0^t P\,dt = \int_0^i Li'\,di' = \tfrac{1}{2}Li^2. \tag{29.34}$$

La ecuación 29.34 tiene una forma semejante a la ecuación análoga para el campo eléctrico de un capacitor, con q sustituida por i y 1/C sustituido por L.

Ahora consideremos un solenoide ideal de longitud ℓ, área de la sección transversal A y n vueltas por unidad de longitud, que conduce una corriente i. Al usar la ecuación 29.21 se encuentra que la energía almacenada en el campo magnético del solenoide es

$$U_B = \tfrac{1}{2}Li^2 = \tfrac{1}{2}\mu_0 n^2 \ell A i^2.$$

El campo magnético ocupa el volumen encerrado por el solenoide, que está dado por ℓA. Así, la densidad de energía, u_B, del campo magnético del solenoide es

$$u_B = \frac{\frac{1}{2}\mu_0 n^2 \ell A i^2}{\ell A} = \tfrac{1}{2}\mu_0 n^2 i^2.$$

Puesto que $B = \mu_0 ni$ para un solenoide, la densidad de energía del campo magnético del solenoide puede expresarse como

$$u_B = \frac{1}{2\mu_0}B^2. \tag{29.35}$$

Aunque esta expresión la obtuvimos para un caso especial de un solenoide, es válida para campos magnéticos en general.

29.8 Ejercicio en clase

Considere un solenoide largo con sección transversal de radio $r = 8.10$ cm y $n = 2.00 \cdot 10^4$ vueltas/m. La longitud del solenoide es $\ell = 0.540$ m y conduce una corriente de magnitud $i = 4.04 \cdot 10^{-3}$ A. ¿Cuánta energía se almacena en el campo magnético del solenoide?

a) $2.11 \cdot 10^{-7}$ J *d*) $6.66 \cdot 10^{-3}$ J

b) $8.91 \cdot 10^{-6}$ J *e*) $4.55 \cdot 10^{-1}$ J

c) $4.55 \cdot 10^{-5}$ J

29.10 Aplicaciones a la tecnología de la información

Las computadoras y muchos dispositivos de electrónica de consumo usan magnetización e inducción para almacenar y recuperar información. Algunos ejemplos son las unidades de disco duro de las computadoras, videocintas, audiocintas y las bandas magnéticas en las tarjetas de crédito. Durante la década pasada, se incrementó el uso de medios de almacenamiento basados en otras tecnologías, como el almacenamiento óptico de información en CD y DVD y las tarjetas de memoria flash en cámaras digitales; no obstante, los dispositivos de almacenamiento magnético siguen constituyendo un fundamento tecnológico y la base de una industria que maneja miles de millones de dólares.

Unidad de disco duro

Un dispositivo que almacena información usando magnetización e inducción es la unidad de disco duro de las computadoras. La unidad de disco duro almacena información en forma de *bits*, el código binario que consta de ceros y unos. Ocho bites constituyen un *byte*, que puede representar un número o un carácter alfanumérico. Una unidad de disco duro moderna puede contener hasta 2 terabytes (10^{12} bytes) de información. Una unidad de disco duro consta de dos o más platos rotatorios con un recubrimiento ferromagnético a los que puede acceder una cabeza móvil de lectura/escritura, como muestra la figura 29.29.

FIGURA 29.29 La cabeza de lectura/escritura y el plato giratorio dentro de la unidad de disco duro de una computadora.

La cabeza de lectura/escritura puede colocarse para acceder a una de muchas pistas sobre el plato giratorio. La operación de una cabeza de lectura/escritura en una unidad de disco convencional se describe en la figura 29.30*a*). A medida que el plato recubierto se mueve por debajo de la cabeza de lectura/escritura, un impulso de corriente en una dirección magnetiza la superficie del plato para representar un uno binario, o un impulso de corriente en la dirección opuesta magnetiza la superficie del plato para representar un cero binario. En la figura 29.30*a*), un uno binario está representado por una flecha roja que apunta hacia la derecha, y un cero binario está representado por una flecha verde que apunta hacia la izquierda. En modo de lectura, cuando las zonas magnetizadas del plato pasan por debajo del sensor de lectura, se induce una corriente positiva o negativa y los circuitos electrónicos de la unidad de disco duro pueden indicar si la información es un cero o un uno. El método usado para codificar y leer datos mostrados en la figura 29.30 se denomina *codificación longitudinal*, porque los campos magnéticos de las zonas magnetizadas del plato son paralelas o antiparalelas a su movimiento. La capacidad de almacenamiento de datos de las unidades de discos duros se ha incrementado al hacer más pequeñas las zonas magnetizadas y al agregar más platos y

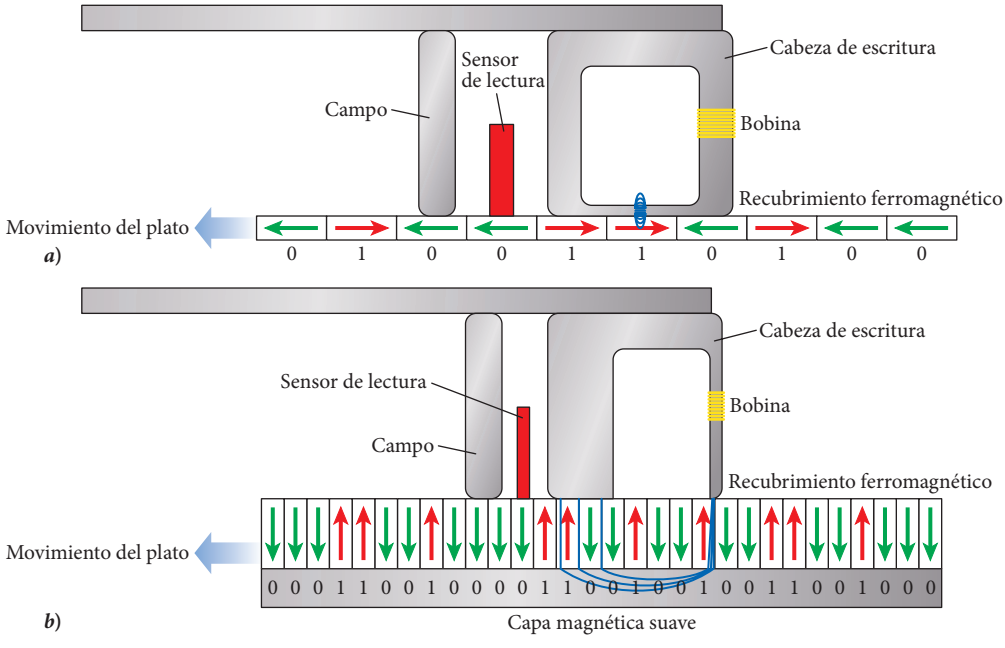


FIGURA 29.30 La cabeza lectura/escritura del disco duro de una computadora. *a*) Codificación longitudinal de información sobre el plato giratorio. *b*) Codificación perpendicular de información sobre el plato giratorio.

cabezas de lectura/escritura. No obstante, los fabricantes encuentran difícil construir unidades de disco duro con más de 250 gigabytes ($250 \cdot 10^9$ bytes) usando esta técnica. A medida que los fabricantes hacen más pequeños los bits, éstos interfieren entre sí, haciendo que algunos bits cambien aleatoriamente e introduzcan errores en los datos almacenados.

Recientemente se ha desarrollado la técnica de *codificación perpendicular*, que se ilustra en la figura 29.30*b*). De nuevo, una cabeza de lectura/escritura se usa por arriba de un plato giratorio recubierto con una sustancia ferromagnética. No obstante, en este caso, los campos magnéticos son perpendiculares a la superficie del plato, lo cual permite un empacado más estrecho de los bits e incrementa la capacidad de la unidad de disco duro. El plato se construye con un recubrimiento ferromagnético más grueso y un material magnético suave sobre la parte superior que actúa para contener las líneas de campo magnético. Observe que estas líneas en el extremo puntiagudo de la cabeza de escritura están muy próximas entre sí, mientras que las líneas de campo magnético que regresan al extremo de la cabeza de lectura están bastante espaciadas. Así, el recubrimiento ferromagnético del plato está fuertemente magnetizado en la dirección hacia arriba o hacia abajo, dependiendo de la dirección del impulso de corriente a través de la bobina de la cabeza de escritura, mientras los bits más próximos al sensor de lectura no se ven afectados.

Las unidades de disco duro que usan codificación perpendicular incorporan el fenómeno denominado *magnetorresistencia gigante* (GMR, del inglés *giant magnetoresistance*), que permite la construcción de un sensor de lectura bastante pequeño y sensible. El físico francés Albert Fert y el físico alemán Peter Grünberg fueron galardonados con el premio Nobel de Física en 2007 por el descubrimiento de este efecto. Existe una amplia gama de unidades de disco duro con capacidades de almacenamiento de información hasta de 2 terabytes (10^{12} bytes) o más que usan codificación perpendicular y sensores de lectura de GMR. Los iPod con una capacidad de almacenamiento superior a 64 GB constituyen un ejemplo de dispositivo que usa esta tecnología (iPod Touch e iPhones usan una tecnología de almacenamiento diferente que no tiene partes móviles). El hecho de poder ver películas en toda su extensión en el iPod y guardar miles de canciones en el mismo aparato es un resultado directo de investigaciones físicas realizadas durante las dos últimas décadas. Y en la medida en la que la investigación en nanociencia y nanotecnología continúa, el impresionante crecimiento en las capacidades de dispositivos de electrónica de consumo continuará en el futuro.

LO QUE HEMOS APRENDIDO | GUÍA DE ESTUDIO PARA EXAMEN

- Según la ley de inducción de Faraday, la diferencia de potencial inducida, ΔV_{ind}, en un bucle conductor está dada por el negativo de la razón de cambio con respecto al tiempo del flujo magnético que pasa por el bucle: $\Delta V_{\text{ind}} = -\dfrac{d\Phi_B}{dt}$.
- El flujo magnético, Φ_B, está dado por $\Phi_B = \iint \vec{B} \bullet d\vec{A}$, donde $\vec{B}$ es el campo magnético y $d\vec{A}$ es el elemento diferencial de área definido por un vector normal a la superficie por la que pasa el flujo magnético.
- Para un flujo magnético constante, $\vec{B}$, el flujo magnético, Φ_B, que pasa por un área, A, está dado por $\Phi_B = BA\cos\theta$, donde θ es el ángulo entre el vector de campo magnético y el vector normal al área.
- La ley de Lenz establece que un flujo magnético variable a través de un bucle conductor induce una corriente en el bucle que se opone al cambio en el flujo magnético.
- Un campo magnético que cambia con el tiempo induce un campo eléctrico dado por $\oint \vec{E} \bullet d\vec{s} = -\dfrac{d\Phi_B}{dt}$, donde la integración se realiza sobre cualquier trayectoria cerrada en el campo magnético.
- La inductancia, L, de un dispositivo con bucles conductores es el flujo vinculado (el producto del número de bucles, N, y el flujo magnético, Φ_B) dividido entre la corriente, i: $L = \dfrac{N\Phi_B}{i}$.
- La inductancia de un solenoide está dada por $L = \mu_0 n^2 \ell A$, donde n es el número de vueltas por unidad de longitud, ℓ es la longitud del solenoide y A es el área de la sección transversal del solenoide.
- La diferencia de potencial autoinducida, $\Delta V_{\text{ind},L}$, para cualquier inductor está dada por $\Delta V_{\text{ind},L} = -L\dfrac{di}{dt}$, donde L es la inductancia del dispositivo y $\dfrac{di}{dt}$ es la razón de cambio con respecto al tiempo de la corriente que circula por el inductor.
- Un circuito de bucle único con inductancia L y resistencia R tiene una constante de tiempo característica de $\tau_{\text{RL}} = \dfrac{L}{R}$.
- La energía almacenada en el campo magnético U_B de un inductor con inductancia L que conduce una corriente i está dada por $U_B = \frac{1}{2}Li^2$.

TÉRMINOS CLAVE

ley de inducción de Faraday, p. 928
flujo magnético, p. 928
ley de Gauss para campos magnéticos, p. 928
weber, p. 929
fem de movimiento, p. 929
ley de Lenz, p. 932
corrientes transitorias, p. 933
generador eléctrico, p. 937
motor eléctrico, p. 937
alternador, p. 937
regenerar el sistema de frenado, p. 938
eslabonamiento de flujo, p. 939
inductancia, p. 939
henry, p. 939
autoinducción, p. 940
inducción mutua, p. 940
inductancia mutua, p. 941
circuito RL, p. 943

NUEVOS SÍMBOLOS Y ECUACIONES

$\Phi_B = \oiint \vec{B} \bullet d\vec{A}$, flujo magnético

$\Delta V_{\text{ind}} = -\dfrac{d\Phi_B}{dt}$, ley de inducción de Faraday

$L = \dfrac{N\Phi_B}{i}$, inductancia

$\tau_{\text{RL}} = \dfrac{L}{R}$, constante de tiempo para un circuito RL

RESPUESTAS A LAS OPORTUNIDADES DE AUTOEVALUACIÓN

29.1 $\dfrac{dB}{dt} = -\dfrac{0.500\ \text{T}}{0.250\ \text{s}} = -2.00\ \text{T/s}$

$$\Delta V_{\text{ind}} = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -\frac{d(BA)}{dt} = -\pi r^2 \frac{dB}{dt}$$

$$r = \sqrt{\frac{|\Delta V_{\text{ind}}|}{\pi |dB/dt|}} = \sqrt{\frac{1.24\ \text{V}}{\pi (2.00\ \text{T/s})}} = 0.444\ \text{m}.$$

29.2 Cuando el bucle entra en el campo magnético, el flujo magnético es creciente. La corriente inducida en el bucle es en dirección contraria al movimiento de las manecillas del reloj para oponerse al incremento en el flujo. Cuando el bucle sale del campo magnético, el flujo magnético es decreciente. La corriente inducida en el bucle es en dirección del movimiento de las manecillas del reloj para oponerse al decremento en el flujo.

29.3 Si la diferencia de potencial inducida fuese igual al cambio en el flujo magnético, entonces cualquier incremento en el flujo que pasa por una bobina (tal vez de apenas un minuto de fluctuación aleatoria en el campo magnético del ambiente en la habitación) llevaría a una diferencia de potencial inducida, que produciría una corriente en la bobina que actuaría para incrementar el flujo, lo cual llevaría a una diferencia de potencial inducida más grande, una mayor corriente e incluso un incremento aún mayor del flujo. En otras palabras, resultaría una situación fuera de control, lo cual viola claramente la conservación de la energía.

29.4 *a*) verdadera *b*) falsa *c*) verdadera *d*) verdadera

PRÁCTICA PARA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Lineamientos para resolución de problemas

1. Para resolver un problema que implique inducción electromagnética, primero pregunte: ¿qué hace que cambie el flujo magnético? Si el flujo magnético cambia, debe usar la ecuación 29.9; si cambia el área por la que pasa el flujo magnético, tiene que utilizar la ecuación 29.10; y si cambia la orientación entre el campo magnético y el área, debe emplear la ecuación 29.11. No es necesario memorizar estas ecuaciones mientras recuerde la ley de Faraday (ecuación 29.5) y la definición de flujo magnético (ecuación 29.1).

2. Una vez que sepa cuáles elementos de la situación planteada en el problema son constantes y cuáles varían, use la ley de Lenz para determinar la dirección de la corriente inducida y las ubicaciones de mayor y menor potencial. Luego, puede escoger una dirección para el vector diferencial de área, $d\vec{A}$, del flujo y calcular las cantidades desconocidas.

PROBLEMA RESUELTO 29.3 Potencia de una barra rotatoria

Una barra conductora de longitud ℓ = 8.17 cm rota alrededor de uno de sus extremos en un campo magnético uniforme de magnitud B = 1.53 T y está dirigido paralelo al eje de rotación de la barra (vea la figura 29.31). El otro extremo de la barra se desliza sin fricción sobre un anillo conductor. La barra realiza 6.00 revoluciones por segundo. Entre la barra rotatoria y el anillo conductor está conectado un resistor, R = 1.63 mΩ.

PROBLEMA

¿Cuál es la potencia disipada en el resistor debido a la inducción magnética?

(*continúa*)

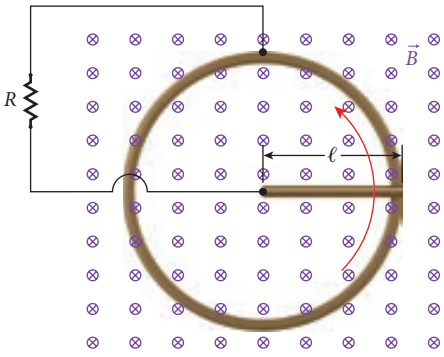


FIGURA 29.31 Barra rotatoria conductora en un campo magnético constante dirigido hacia la página.

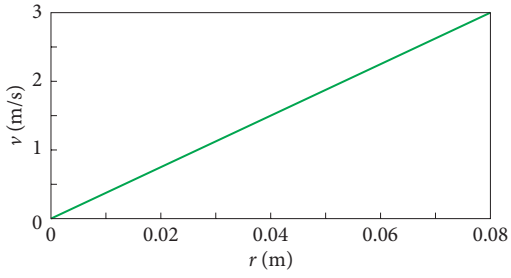


FIGURA 29.32 La velocidad como una función del radio para la barra conductora.

(*continuación*)

SOLUCIÓN

PIENSE

Podemos calcular la diferencia de potencial inducida en un conductor de longitud ℓ que se mueve con velocidad v perpendicular a un campo magnético de magnitud B. No obstante, la barra rotatoria tiene velocidades distintas a radios diferentes, $v(r)$. En consecuencia, debemos calcular la diferencia de potencial inducida sobre la barra al integrar $Bv(r)$ sobre la longitud de la barra. A partir de la diferencia de potencial inducida, podemos calcular la potencia disipada en el resistor.

ESBOCE

La figura 29.32 muestra la velocidad como una función del radio de la barra conductora.

INVESTIGUE

La diferencia de potencial, ΔV_{ind}, inducida sobre un conductor de longitud ℓ que se mueve con velocidad v perpendicular a un campo magnético de magnitud B está dada por la ecuación 29.15:

$$\Delta V_{\text{ind}} = v\ell B.$$

No obstante, en este caso, partes diferentes de la barra se mueven a velocidades diferentes. Podemos expresar la velocidad de las diferentes partes de la barra como una función de la distancia r al eje de rotación:

$$v(r) = \frac{2\pi r}{T},$$

donde $v(r)$ es la velocidad de la barra a una distancia r, y T es el periodo de rotación. Luego encontramos la diferencia de potencial inducida en la barra rotatoria sobre su longitud, ℓ:

$$\Delta V_{\text{ind}} = \int_0^{\ell} v(r) B\, dr. \tag{i}$$

La potencia disipada en el resistor está dada por

$$P = \frac{\Delta V_{\text{ind}}{}^2}{R}. \tag{ii}$$

SIMPLIFIQUE

Al evaluar la integral definida en la ecuación (i), se obtiene

$$\Delta V_{\text{ind}} = \int_0^{\ell} \left(\frac{2\pi r}{T}\right) B\, dr = \frac{2\pi B}{T}\frac{\ell^2}{2} = \frac{\pi B \ell^2}{T}. \tag{iii}$$

Al sustituir la expresión para ΔV_{ind} de la ecuación (iii) en la ecuación (ii), se llega a una expresión para la potencia disipada en el resistor:

$$P = \frac{\left(\pi B\ell^2 / T\right)^2}{R} = \frac{\pi^2 B^2 \ell^4}{RT^2}.$$

CALCULE

El periodo es el inverso de la frecuencia. La frecuencia es $f = 6.00$ Hz, de modo que el periodo es

$$T = \frac{1}{f} = \frac{1}{6.00}\ \text{s}.$$

Al escribir los valores numéricos, obtenemos

$$P = \frac{\pi^2 B^2 \ell^4}{RT^2} = \frac{\pi^2 (1.53\ \text{T})^2 (0.0817\ \text{m})^4}{\left(1.63\cdot 10^{-3}\ \Omega\right)\left(\frac{1}{6.00}\ \text{s}\right)^2} = 22.7345\ \text{W}.$$

REDONDEE

Mostramos nuestro resultado con tres cifras:

$$P = 22.7\ \text{W}.$$

VUELVA A REVISAR

Para corroborar nuestro resultado, consideramos una barra conductora de la misma longitud que se mueve perpendicularmente al mismo campo magnético con una velocidad igual a la velocidad del centro de la barra rotatoria, que es

$$v(\ell/2)=\frac{2\pi(\ell/2)}{T}=\frac{2\pi L}{2T}=\frac{2\pi(0.0817\text{ m})}{2\left(\frac{1}{6.00}\text{ s}\right)}=1.54\text{ m/s}.$$

La diferencia de potencial inducida a través de la barra conductora que se mueve perpendicularmente debe ser

$$\Delta V_{\text{ind}}=v\ell B=(1.54\text{ m/s})(0.0817\text{ m})(1.53\text{ T})=0.193\text{ V}.$$

Entonces, la potencia disipada en el resistor debe ser

$$P=\frac{\Delta V_{\text{ind}}{}^2}{R}=\frac{(0.193\text{ V})^2}{1.63\cdot10^{-3}\ \Omega}=22.9\text{ W},$$

que está próxima a nuestro resultado en errores de redondeo. Así, nuestro resultado parece razonable.

Por último, observe que hay una fuente de diferencia de potencial adicional posible entre los dos extremos de la barra. Nuestra solución supone que la diferencia de potencial entre los dos extremos se debe exclusivamente a la inducción magnética. No obstante, todos los portadores de carga dentro de la barra están obligados a moverse en trayectoria circular debido a la rotación. Para esto se requiere una fuerza centrípeta, que en principio debe reducir la diferencia de potencial entre los dos extremos de la barra. Sin embargo, para la pequeña velocidad angular de la barra en este problema, este efecto es despreciable.

PREGUNTAS DE OPCIÓN MÚLTIPLE

29.1 Un solenoide con 200 vueltas y área de la sección transversal de 60 cm^2 tiene un campo magnético de 0.60 T a lo largo de su eje. Si el campo está confinado dentro del solenoide y cambia a razón de 0.20 T/s, la magnitud de la diferencia de potencial inducida en el solenoide es

a) 0.0020 V. *b*) 0.02 V. *c*) 0.001 V. *d*) 0.24 V.

29.2 El bucle rectangular de alambre en la figura 29.9 se lleva a aceleración constante de una región de cero campo magnético a una región de campo magnético uniforme. Durante este proceso, la corriente inducida en el bucle:

a) Es cero.

b) Es igual a algún valor constante diferente de cero.

c) Crece linealmente con el tiempo.

d) Crece exponencialmente con el tiempo.

e) Crece linealmente con el cuadrado del tiempo.

29.3 ¿Cuál de las siguientes acciones induce una corriente en un bucle de alambre en un campo magnético uniforme?

a) Disminuir la intensidad de campo.

b) Rotar el bucle alrededor de un eje paralelo al campo.

c) Mover el bucle dentro del campo.

d) Todas las anteriores.

e) Ninguna de las anteriores.

29.4 La ley de inducción de Faraday establece:

a) Que en un bucle se induce una diferencia de potencial cuando hay un cambio de flujo magnético a través del bucle.

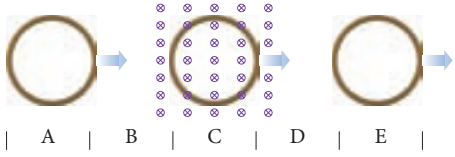
b) Que la corriente inducida en un bucle por un campo magnético variable produce un campo magnético que se opone a este cambio del campo magnético.

c) Que un campo magnético variable induce un campo eléctrico.

d) Que una inductancia de un dispositivo es una medida de su oposición a cambios en corriente que circula a través del dispositivo.

e) Que el flujo magnético es el producto del campo magnético medio y el área perpendicular a éste en el que penetra.

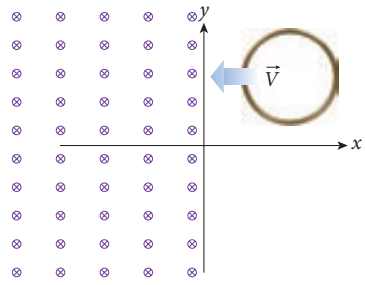
29.5 Un anillo conductor se mueve de izquierda a derecha a través de un campo magnético uniforme, como muestra la figura. ¿En qué regiones hay una corriente inducida en el anillo?



a) Regiones B y D. *c*) Región C.

b) Regiones B, C y D. *d*) Regiones A a E.

29.6 Un bucle circular de alambre que se mueve en el plano *xy* con una velocidad constante en la dirección *x* negativa entra en un campo magnético uniforme, que cubre la región en la que $x < 0$, como ilustra la figura. El vector normal a la superficie del bucle apunta hacia la dirección del campo magnético. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es correcta?



a) La diferencia de potencial inducida en el bucle está en un máximo cuando el borde del bucle apenas entra en la región con el campo magnético.

b) La diferencia de potencial inducida en el bucle está en un máximo cuando un cuarto del bucle está en la región con el campo magnético.

c) La diferencia de potencial inducida en el bucle está en un máximo cuando el bucle está a la mitad de la región con el campo magnético.

d) La diferencia de potencial inducida en el bucle es constante desde el momento en el que éste comienza a entrar en la región con el campo magnético.

29.7 ¿Cuál de las siguientes afirmaciones sobre autoinducción es correcta?

a) La autoinducción ocurre sólo cuando una corriente directa fluye por el circuito.

b) La autoinducción ocurre sólo cuando una corriente alterna fluye por el circuito.

c) La autoinducción ocurre cuando por un circuito fluye una corriente directa o una corriente alterna.

d) La autoinducción ocurre cuando por un circuito fluye una corriente directa o una corriente alterna, siempre y cuando la corriente varíe.

29.8 Usted tiene una bombilla, una barra imantada, un carrete de alambre que puede cortar en tantas piezas como quiera, y nada más. ¿Cómo puede encender la bombilla?

a) No puede. Para encenderse, la bombilla necesita electricidad, no magnetismo.

b) Puede cortar un trozo de alambre, conectar la bombilla a los dos extremos del alambre y pasar el imán por el bucle que se ha formado.

c) Corte dos trozos de alambre y conecte el imán y la bombilla en serie.

PREGUNTAS

29.9 Cuando conecta un refrigerador en una conexión de pared, algunas veces se produce una chispa entre las puntas. ¿Qué origina este fenómeno?

29.10 A las personas que usan marcapasos u otros dispositivos mecánicos como implantes, a menudo se les advierte que deben mantenerse alejadas de máquinas o motores grandes. ¿Por qué?

29.11 En el capítulo 14 se analizaron los osciladores armónicos simples, en los que la fuerza de amortiguamiento depende de la velocidad y siempre se opone al movimiento del oscilador. Una forma de producir este tipo de fuerza es usar un trozo de metal, como aluminio, que se mueva por un campo magnético no uniforme. Explique por qué esta técnica es capaz de producir una fuerza de amortiguamiento.

29.12 En una demostración popular utilizada en conferencias, un imán permanente cilíndrico se deja caer por un largo tubo de aluminio, como describe la figura. Si se ignora la fricción del imán contra las paredes interiores del tubo y en el supuesto de que éste sea muy largo en comparación con el tamaño del imán, ¿el imán acelera hacia abajo con una aceleración igual a g (caída libre)? En caso negativo, describa el movimiento del imán. ¿Importa si el polo norte o el polo sur del imán está en la parte inferior?

29.13 Una demostración popular de las corrientes transitorias implica dejar caer un imán en un tubo metálico largo y un tubo de vidrio o plástico largos. Cuando el imán cae por un tubo, hay un flujo magnético variable conforme el imán cae acercándose o alejándose de cada parte del tubo.

a) ¿En cuál tubo se induce el mayor voltaje?

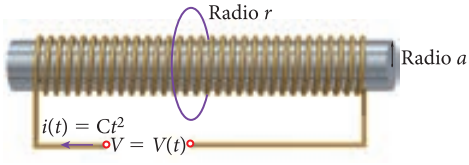
b) ¿En cuál tubo se inducen las corrientes transitorias más grandes?

29.14 La corriente en un solenoide muy largo devanado muy estrechamente, con radio a y n vueltas por unidad de longitud, varía con el tiempo según la ecuación $i(t) = Ct^2$, donde la corriente i está en amperios y el tiempo t está en segundos, y C es una constante con unidades idóneas. En forma concéntrica con el solenoide hay un anillo conductor de radio r, como muestra la figura.

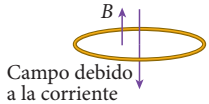
a) Escriba una expresión para la diferencia de potencial inducida en el anillo.

b) Escriba una expresión para la magnitud del campo eléctrico inducido en un punto arbitrario del anillo.

c) ¿Es necesario el anillo para que haya un campo eléctrico?



29.15 Un anillo circular de alambre experimenta un campo magnético creciente en la dirección hacia arriba, como muestra la figura. ¿Cuál es la dirección de la corriente inducida en el anillo?

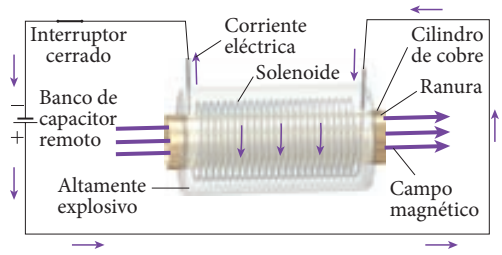


29.16 Un bucle conductor cuadrado con lados de longitud L rota a velocidad angular constante ω, en un campo magnético uniforme de magnitud B. En el instante $t = 0$, el bucle orientado de modo que la dirección normal al bucle está alineada con el campo magnético. Encuentre una expresión para la diferencia de potencial inducida en el bucle como una función del tiempo.

29.17 Un disco metálico sólido de radio R rota alrededor de su eje central a velocidad angular constante ω. El disco está en un campo magnético uniforme de magnitud B, que está orientado de manera normal a la superficie del disco. Calcule la magnitud de la diferencia de potencial entre el centro del disco y el borde externo.

29.18 Ciertamente, los campos eléctricos grandes constituyen un riesgo para el cuerpo humano, ya que pueden producir corrientes peligrosas; pero, ¿qué hay respecto a los grandes campos magnéticos? Un hombre de 1.80 m de estatura camina a 2.00 m/s perpendicular a un campo magnético horizontal de 5.0 T; es decir, camina entre los polos de un imán muy grande. (Este imán puede, por ejemplo, encontrarse en el National Superconducting Cyclotron Laboratory en la Universidad Estatal de Michigan.) Dado que el cuerpo de la persona está lleno de fluidos conductores, estime la diferencia de potencial inducida entre su cabeza y sus pies.

29.19 En Los Alamos National Laboratories, un medio para producir campos magnéticos muy grandes se denomina *EPFCG* (*explosively-pumped flux compression generator*), que se usa para estudiar los efectos de un impulso electromagnético de alta potencia (EMP) en artículos bélicos electrónicos. Los explosivos se empacan y detonan en el espacio entre un solenoide y un pequeño cilindro de cobre coaxial, y que está dentro del solenoide, como ilustra la figura. La explosión ocurre en un tiempo muy breve y colapsa rápidamente al cilindro. Este rápido cambio crea corrientes inductivas que mantienen constante



el flujo magnético mientras el radio del cilindro se reduce por un factor de r_i/r_f. Estime el campo magnético producido, en el supuesto de que el radio se comprime por un factor de 14 y que la magnitud inicial del campo magnético, B_i, es 1.0 T.

29.20 Un aro de metal está colocado horizontalmente sobre el suelo. Un campo magnético que está dirigido hacia arriba, fuera del suelo, crece en magnitud. Cuando el aro se ve desde arriba, ¿cuál es la dirección de la corriente inducida en el aro?

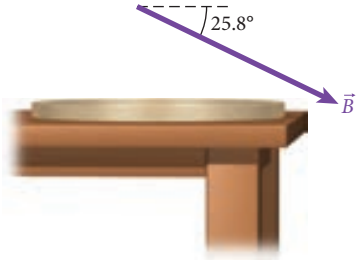
29.21 El alambre de un solenoide devanado estrechamente se desenrolla y luego se vuelve a devanar para formar otro solenoide con el doble de diámetro del primer solenoide. ¿Por qué factor cambia la inductancia?

PROBLEMAS

Una • y dos •• indican un nivel creciente de la dificultad.

Secciones 29.1 y 29.2

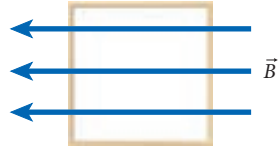
29.22 Una bobina circular de alambre con 20 vueltas y radio de 40.0 cm está colocada en posición horizontal sobre una mesa, como muestra la figura. Sobre toda la mesa hay un campo magnético uniforme que se extiende con una magnitud de 5.00 T dirigido hacia el norte y hacia abajo, formando un ángulo de 25.8° con la horizontal. ¿Cuál es la magnitud del flujo magnético a través de la bobina?



29.23 Cuando un imán en una resonancia magnética se interrumpe abruptamente, se dice que el imán *se apagó*. El apagado puede ocurrir en tan poco tiempo como 20.0 s. Suponga que un imán con un campo inicial de 1.20 T se apaga en 20.0 s y que el campo final es aproximadamente cero. En estas condiciones, ¿cuál es la diferencia de potencial media inducida alrededor de un bucle conductor de radio 1.00 cm (alrededor del tamaño de un anillo de bodas), orientado perpendicular al campo?

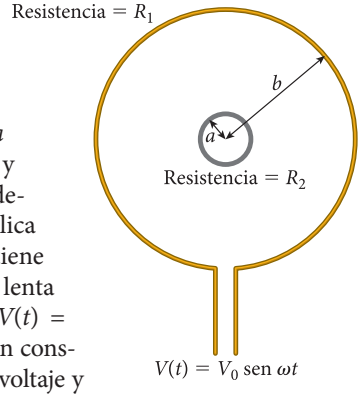
29.24 Una bobina con 8 vueltas tiene bucles cuadrados que miden 0.200 m de lado y una resistencia de 3.00 Ω. Se coloca en un campo magnético que forma un ángulo de 40.0° con el plano de cada bucle. La magnitud de este campo varía con el tiempo según $B = 1.50t^3$, donde t se mide en segundos, y B, en teslas. ¿Cuál es la corriente inducida en la bobina en $t = 2.00$ s?

29.25 Un bucle de metal tiene un área de 0.100 m^2 y está colocado horizontalmente sobre el suelo. Hay un campo magnético que apunta hacia el oeste, como indica la figura. Inicialmente, el campo magnético tiene una magnitud de 0.123 T, que decrece en forma continua hasta 0.075 T durante un periodo de 0.579 s. Encuentre la diferencia de potencial inducida en el bucle durante este tiempo.



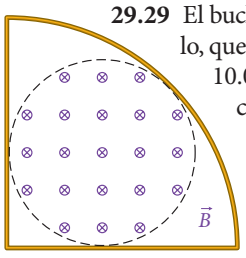
•**29.26** Un monitor de respiración tiene un bucle flexible de alambre de cobre, que se envuelve alrededor del pecho. Cuando la persona con el monitor respira, el radio del bucle de alambre aumenta y disminuye. Cuando una persona en el campo magnético de la Tierra (asuma $0.420 \cdot 10^{-4}$ T) inhala, ¿cuál es la corriente media en el bucle, en el supuesto de que tiene una resistencia de 30.0 Ω y aumenta de radio desde 20.0 cm hasta 25.0 cm en 1.00 s? Suponga que el campo magnético es perpendicular al plano del bucle.

•**29.27** Un bucle conductor circular con radio a y resistencia R_2 es concéntrico a un bucle conductor circular con radio $b \gg a$ (b es mucho mayor que a) y resistencia R_1. Un voltaje dependiente del tiempo se aplica al bucle más grande, que tiene una variación sinusoidal lenta con el tiempo dada por $V(t) = V_0 \operatorname{sen} \omega t$, donde V_0 y ω son constantes con dimensiones de voltaje y tiempo inverso, respectivamente. En el supuesto de que el campo magnético a través del bucle interior es uniforme (constante en el espacio) e igual al campo en el centro del bucle, obtenga expresiones para la diferencia de potencial inducida en el bucle interior y la corriente i a través de ese bucle.



••**29.28** Un solenoide largo con área de sección transversal A_1 rodea otro solenoide largo con área de sección transversal $A_2 < A_1$ y resistencia R. Ambos solenoides tienen la misma longitud y el mismo número de vueltas. Una corriente dada por $i = i_0 \cos \omega t$ circula por el solenoide exterior. Encuentre una expresión para el campo magnético en el solenoide interior debido a la corriente inducida.

Sección 29.3

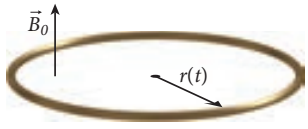


29.29 El bucle conductor en forma de cuarto de círculo, que se muestra en la figura, tiene un radio de 10.0 cm y una resistencia de 0.200 Ω. Inicialmente, la intensidad del campo magnético dentro del círculo con línea discontinua de radio 3.00 cm es de 2.00 T. Luego, la intensidad del campo magnético decrece de 2.00 T a 1.00 T en 2.00 s. Encuentre *a*) la magnitud y *b*) la dirección de la corriente inducida en el bucle.

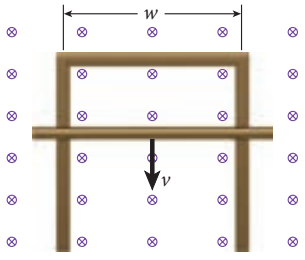
29.30 Un avión supersónico con envergadura de 10.0 m vuela sobre el polo norte magnético (en un campo magnético de magnitud 0.500 G perpendicular al suelo) a una velocidad igual a tres veces la velocidad del sonido (Mach 3). ¿Cuál es la diferencia de potencial entre las puntas de las alas? Suponga que las alas son de aluminio.

•**29.31** Un helicóptero está suspendido arriba del polo norte magnético en un campo magnético de magnitud 0.426 G perpendicular al suelo. Los rotores del helicóptero miden 10.0 m de longitud, son de aluminio y rotan alrededor del centro con una velocidad rotacional de $10.0 \cdot 10^4$ rpm. ¿Cuál es la diferencia de potencial del centro del rotor al extremo?

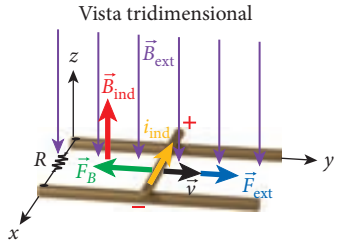
•**29.32** Un conductor circular elástico se expande a razón constante con el tiempo de modo que su radio está dado por $r(t) = r_0 + vt$, donde $r_0 = 0.100$ m y $v = 0.0150$ m/s. El bucle tiene una resistencia constante de $R = 12.0\ \Omega$ y está colocado en un campo magnético uniforme de magnitud $B_0 = 0.750$ T, perpendicular a su plano, como aparece en la figura. Calcule la dirección y la magnitud de la corriente inducida, i, en $t = 5.00$ s.

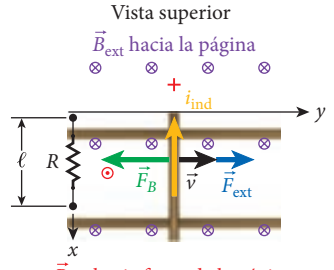


•**29.33** Un marco rectangular de alambre conductor tiene una resistencia despreciable y ancho w, y está sostenido verticalmente en un campo magnético de magnitud B, como muestra la figura. Una barra de metal con masa m y resistencia R se coloca a través del marco, manteniendo contacto con éste. Obtenga una expresión para la velocidad terminal de la barra si se deja que ésta caiga libremente a lo largo de este marco empezando a partir del reposo. Ignore la fricción entre los alambres y la barra de metal.



•**29.34** Dos rieles conductores paralelos con resistencia despreciable están conectados a un extremo por un resistor de resistencia R, como ilustra la figura. Los rieles están colocados en un campo magnético $\vec{B}_{\text{ext}}$, que es perpendicular al plano de los rieles. Este campo magnético es uniforme e independiente del tiempo. La distancia entre los rieles es ℓ. Una barra conductora se desliza sin fricción en la parte superior de los dos rieles a velocidad constante $\vec{v}$.





a) Use la ley de inducción de Faraday para calcular la magnitud de la diferencia de potencial inducida en la barra móvil.

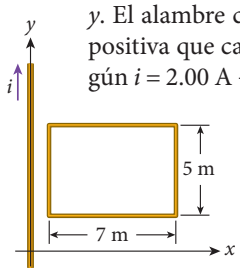
b) Calcule la magnitud de la corriente inducida en la barra, i_{ind}.

c) Demuestre que para que la barra se mueva a velocidad constante como se muestra, debe extraerse con una fuerza externa, $\vec{F}_{\text{ext}}$, y calcular la magnitud de esta fuerza.

d) Calcule el trabajo realizado, W_{ext}, y la potencia generada, P_{ext}, por la fuerza externa al mover la barra.

e) Calcule la potencia usada (disipada) por el resistor, P_{R}. Explique la correlación entre este resultado y el del inciso *d*).

•**29.35** Un alambre recto largo está colocado a lo largo del eje y. El alambre conduce una corriente en la dirección y positiva que cambia como una función del tiempo según $i = 2.00$ A + (0.300 A/s)t. Un bucle de alambre está colocado en el plano xy cerca del eje y, como presenta la figura. El bucle tiene dimensiones 7.00 m por 5.00 m y está a 1.00 m del alambre. ¿Cuál es la diferencia de potencial inducida en el bucle de alambre en $t = 10.0$ s?

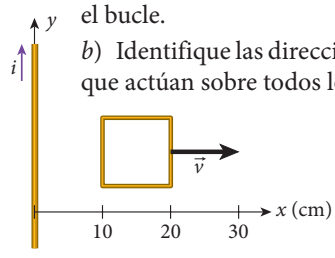


••**29.36** Por el alambre recto y largo de la figura circula una corriente $i = 1.00$ A. Un bucle cuadrado de 10.0 cm por lado y resistencia de 0.0200 Ω está ubicado a 10.0 cm del alambre. Luego, se mueve en la dirección x positiva con velocidad $v = 10.0$ cm/s.

a) Encuentre la dirección de la corriente inducida en el bucle.

b) Identifique las direcciones de las fuerzas magnéticas que actúan sobre todos los lados del bucle cuadrado.

c) Calcule la dirección y la magnitud de la fuerza neta que actúa sobre el bucle en el instante en el que empieza a moverse.



Sección 29.4

29.37 Un generador simple consta de un bucle que rota dentro de un campo magnético constante (vea la figura 29.17). Si el bucle rota con una frecuencia f, el flujo magnético está dado por $\Phi(t) = BA \cos(2\pi ft)$. Si $B = 1.00$ T y $A = 1.00$ m^2, ¿cuál debe

ser el valor de f para que la diferencia de potencial máxima inducida sea 110. V?

•**29.38** Un motor tiene un solo bucle dentro de un campo magnético de magnitud 0.87 T. Si el área del bucle es 300 cm^2, encuentre la velocidad angular máxima posible para este motor cuando se conecta a una fuente de fem que suministra 170 V.

•**29.39** Un amigo suyo decide producir energía eléctrica al hacer girar una bobina de $1.00 \cdot 10^5$ bucles circulares de alambre alrededor de un eje paralelo a un diámetro del campo magnético de la Tierra, que tiene una magnitud local de 0.300 G. Los bucles tienen un radio de 25.0 cm.

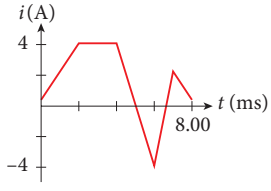
a) Si su amigo gira la bobina a una frecuencia de 150. Hz, ¿qué corriente pico circula en un resistor, $R = 1\,500.\ \Omega$, conectado a la bobina?

b) La corriente media que circula en la bobina será 0.7071 veces la corriente pico. ¿Cuál es la potencia media que se obtiene con este dispositivo?

Secciones 29.6 y 29.7

29.40 Encuentre la inductancia mutua del solenoide y la bobina descritos en el ejemplo 29.1, así como la diferencia de potencial en $t = 2.0$ s, usando las técnicas descritas en la sección 29.7. ¿Cómo se comparan los resultados?

29.41 La figura ilustra la corriente que pasa por un inductor de 10.0 mH durante un intervalo de 8.00 ms. Trace una gráfica que muestre la diferencia de potencial autoinducida, $\Delta V_{\text{ind},L}$, para el inductor durante el mismo intervalo.



•**29.42** Una bobina corta de radio $R = 10.0$ cm contiene $N = 30.0$ vueltas y rodea un solenoide largo con radio $r = 8.00$ cm que contiene $n = 60$ vueltas por centímetro. La corriente en la bobina corta se incrementa a razón constante desde cero hasta $i = 2.00$ A en un tiempo de $t = 12.0$ s. Calcule la diferencia de potencial inducida en el solenoide largo, mientras la corriente crece en la bobina corta.

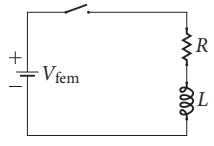
Sección 29.8

29.43 Considere un circuito RL con resistencia $R = 1.00\ \text{M}\Omega$ e inductancia $L = 1.00$ H, que es alimentado por una batería de 10.0 V.

a) ¿Cuál es la constante de tiempo del circuito?

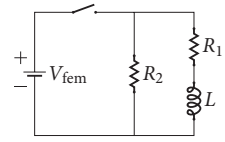
b) Si el interruptor se cierra en el instante $t = 0$, ¿cuál es la corriente justo después de ese instante? ¿Justo después de 2.00 μs? ¿Cuándo ha transcurrido bastante tiempo?

29.44 En el circuito en la figura, $R = 120.\ \Omega$, $L = 3.00$ H y $V_{\text{fem}} = 40.0$ V. Una vez cerrado el interruptor, ¿en cuánto tiempo la corriente en el inductor llega a 300. mA?



29.45 La corriente crece a razón de 3.6 A/s en un circuito RL con $R = 3.25\ \Omega$ y $L = 440$ mH. ¿Cuál es la diferencia de potencial a través del circuito en el momento en el que la corriente en el circuito es 3.0 A?

•**29.46** En el circuito en la figura, una batería suministra $V_{\text{fem}} = 18$ V y $R_1 = 6.0\ \Omega$, $R_2 = 6.0\ \Omega$ y $L = 5.0$ H. Calcule cada inciso *inmediatamente* después de que se cierra el interruptor:



a) la corriente que fluye hacia fuera de la batería;

b) la corriente por R_1;

c) la corriente por R_2;

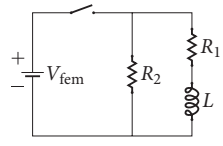
d) la diferencia de potencial a través de R_1;

e) la diferencia de potencial a través de R_2;

f) la diferencia de potencial a través de L, y

g) la razón de cambio de la corriente a través de R_1.

•**29.47** En el circuito en la figura, una batería suministra $V_{\text{fem}} = 18$ V y $R_1 = 6.0\ \Omega$, $R_2 = 6.0\ \Omega$ y $L = 5.0$ H. Calcule cada inciso *mucho tiempo* después de que se cierra el interruptor:



a) la corriente que fluye hacia fuera de la batería;

b) la corriente por R_1;

c) la corriente por R_2;

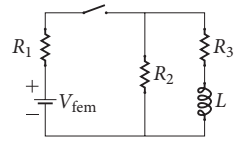
d) la diferencia de potencial a través de R_1;

e) la diferencia de potencial a través de R_2;

f) la diferencia de potencial a través de L, y

g) la razón de cambio de la corriente a través de R_1.

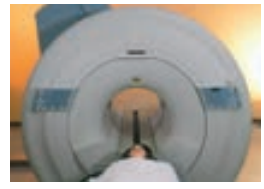
•29.48 Un circuito contiene una batería, tres resistores y un inductor, como indica la figura. ¿Cuál es la corriente a través de cada resistor *a*) inmediatamente después de que se cierra el interruptor? *b*) ¿mucho tiempo después de que se cierra el interruptor? *c*) Suponga que el interruptor vuelve a abrirse mucho después de que se cerró. ¿Cuál es la corriente en cada resistor? ¿Después de mucho tiempo?



Sección 29.9

29.49 Una vez que ha aprendido que hay energía asociada con un campo magnético, un inventor se las arregla para aprovechar la energía asociada con el campo magnético de la Tierra. ¿Qué volumen de espacio cerca de la superficie de la Tierra contiene 1 J de energía, en el supuesto de que la intensidad del campo magnético sea $5.0 \cdot 10^{-5}$ T?

29.50 Considere un imán superconductor clínico que se usa en resonancia magnética de 1.00 m de diámetro, 1.50 m de longitud y un campo magnético uniforme de 3.00 T. Determine *a*) la densidad de energía del campo magnético, y *b*) la energía total en el solenoide.



29.51 La magnitud del campo magnético de un *magnetar* (estrella magnética de neutrones) o magnetoestrella cerca de su superficie es $4.0 \cdot 10^{10}$ T.

a) Calcule la densidad de energía de este campo magnético.

b) La Teoría Especial de la Relatividad asocia la energía con cualquier masa m en reposo según $E_0 = mc^2$ (sobre este tema se

abunda más en el capítulo 35). Encuentre la densidad de la masa en reposo asociada con la densidad de energía del inciso *a*).

•**29.52** Una fem de 20.0 V se aplica a una bobina con inductancia de 40.0 mH y resistencia de 0.500 Ω.

a) Determine la energía almacenada en el campo magnético cuando la corriente alcanza un cuarto de su valor máximo.

b) ¿En cuánto tiempo llega la corriente a este valor?

•**29.53** Una estudiante que lleva una anillo de oro de 15.0 g y 0.750 cm de radio (y una resistencia de 61.9 μΩ y calor específico de c = 129 J/kg °C) en su dedo mueve el dedo desde una región que tiene un campo magnético de 0.0800 T, apuntando a lo largo de su dedo, hasta una región con campo magnético cero en 40.0 ms. Como resultado de esta acción, energía térmica se agrega al anillo debido a la corriente inducida, lo cual eleva la temperatura del anillo. Calcule dicho incremento en el supuesto de que la energía producida se usa para elevar la temperatura.

•**29.54** Una bobina con N vueltas y área A, que conduce una corriente constante, i, cae en un campo magnético externo, $\vec{B}_{\text{ext}}$, de modo que su momento dipolar cambia de oponerse al campo a alinearse con él. Durante este proceso, la inducción produce una diferencia de potencial que tiende a reducir la corriente en la bobina. Calcule el trabajo realizado por la fuente de alimentación de la bobina para mantener constante la corriente.

••**29.55** Una onda electromagnética que se propaga en el vacío tiene campos eléctrico y magnético dados por $\vec{E}(\vec{x},t) = E$ c $\vec{E}_0 \cos(\vec{k}\bullet\vec{x} - \omega t)$ y $\vec{B}(\vec{x},t) = \vec{B}_0 \cos(\vec{k}\bullet\vec{x} - \omega t)$, donde $\vec{B}_0$ está dado por $\vec{B}_0 = \vec{k} \times \vec{E}_0/\omega$ y el vector de onda $\vec{k}$ es perpendicular tanto a $\vec{E}_0$ como a $\vec{B}_0$. La magnitud de $\vec{k}$ y la frecuencia angular ω cumplen la relación de dispersión, $\omega/|\vec{k}| = (\mu_0\epsilon_0)^{-1/2}$, donde μ_0 y ϵ_0 son la permeabilidad y la permitividad del espacio libre, respectivamente. Esta onda transporta energía en sus campos eléctrico y magnético. Calcule la razón de las densidades de energía de los campos magnético y eléctrico, u_B/u_E, en esta onda. Simplifique su respuesta final tanto como pueda.

Problemas adicionales

29.56 Un alambre de longitud ℓ = 10.0 cm se mueve con velocidad constante en el plano xy; el alambre es paralelo al eje y y se mueve a lo largo del eje x. Si un campo magnético de magnitud 1.00 T apunta a lo largo del eje z positivo, ¿cuál debe ser la velocidad del alambre para inducir una diferencia de potencial de 2.00 V a través del alambre?

29.57 El campo magnético dentro del solenoide en la figura cambia a razón de 1.50 T/s. Una bobina conductora con 2 000 vueltas rodea el solenoide, como se muestra. El radio del solenoide mide 4.00 cm, y el radio de la bobina 7.00 cm. ¿Cuál es la diferencia de potencial inducida en la bobina?

29.58 Una batería ideal (sin resistencia interna) suministra una V_{fem} y se conecta a una bobina superconductora (¡sin resistencia!) de inductancia L en el instante t = 0. Encuentre la corriente en la bobina como una función del tiempo, $i(t)$. Suponga que todas las conexiones también tienen resistencia cero.

29.59 Un solenoide con 100 vueltas, de longitud 8 cm y de radio 6 mm conduce una corriente de 0.4 A de derecha a izquierda. Luego, la corriente se invierte de modo que fluye de izquierda a derecha. ¿Por cuánto cambia la energía almacenada en el campo magnético dentro del solenoide?

29.60 ¿Cuál es la resistencia en un circuito RL con L = 36.94 mH si el tiempo necesario para que alcance 75% de su valor de corriente máximo es 2.56 ms?

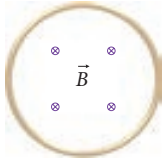
29.61 El campo magnético cerca de la superficie de la Tierra tiene una magnitud de 150 N/C, y la magnitud del campo magnético de la Tierra cerca de la superficie suele ser 50.0 μT. Calcule y compare las densidades de energía asociadas con estos dos campos. Suponga que las propiedades eléctricas y magnéticas del aire son esencialmente las del vacío.

29.62 Un anillo de bodas (de 2.0 cm de diámetro) se lanza al aire con un espín dado, lo cual resulta en una velocidad angular de 17 rotaciones por segundo. El eje de rotación es el diámetro del anillo. Considere que la magnitud del campo magnético de la Tierra es $4.0 \cdot 10^{-5}$ T, ¿cuál es la máxima diferencia de potencial inducida en el anillo?

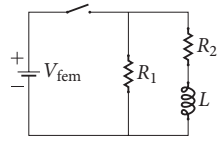
29.63 ¿Cuál es la inductancia en un circuito RL donde R = 3.00 kΩ si la corriente crece hasta la mitad de su valor final de 20.0 μs?

29.64 Una batería de 100. V está conectada en serie con un resistor de 500. Ω. Según la ley de inducción de Faraday, la corriente nunca puede cambiar en forma instantánea, de modo que siempre hay algo de inductancia "parásita". Suponga que la inductancia parásita es 0.200 μH. ¿En cuánto tiempo la corriente se acumula hasta 0.500% de su valor final de 0.200 A después de que el resistor se conecta a la batería?

29.65 Un bucle único de alambre con un área de 5.00 m^2 está colocado sobre el plano de la página, como ilustra la figura. Un campo magnético que varía con el tiempo en la región del bucle está dirigido hacia la página, y su magnitud está dada por B = 3.00 T + (2.00 T/s)t. En t = 2.00 s, ¿cuáles son la diferencia de potencial inducida en el bucle y la dirección de la corriente inducida?



29.66 Una batería de 9.00 V está conectada por medio de un interruptor a dos resistores idénticos y a un resistor ideal, como muestra la figura. Cada uno de los resistores tiene una resistencia de 100. Ω, y el inductor tiene una inductancia de 3.00 H. Inicialmente, el interruptor está abierto.



a) Inmediatamente después de que el interruptor se cierra, ¿cuál es la corriente en el resistor R_1 y en el resistor R_2?

b) Después de 50.0 ms que se cierra el interruptor, ¿cuál es la corriente en el resistor R_1 y en el resistor R_2?

c) Después de 500. ms que se cierra el interruptor, ¿cuál es la corriente en el resistor R_1 y en el resistor R_2?

d) Después de mucho tiempo (> 10.0 s), que el interruptor se abre de nuevo, ¿cuál es la corriente en el resistor R_1 y en el resistor R_2?

e) Después de 50 ms que se abre el interruptor, ¿cuál es la corriente en el resistor R_1 y en el resistor R_2?

f) Después de 500 ms que se abre el interruptor, ¿cuál es la corriente en el resistor R_1 y en el resistor R_2?

•**29.67** Un solenoide largo de longitud 3.0 m y $n = 290$ vueltas/m conduce una corriente de 3.0 A y almacena 2.8 J de energía. ¿Cuál es el área de la sección transversal del solenoide?

•**29.68** Un bucle conductor rectangular con dimensiones a y b y resistencia R está colocado en el plano xy. Un campo magnético de magnitud B pasa por el bucle. El campo magnético está en la dirección z positiva y varía con el tiempo según $B = B_0(1 + c_1t^3)$, donde c_1 es una constante con unidades de $1/s^3$. ¿Cuál es la dirección de la corriente inducida en el bucle, y cuál es el valor en $t = 1$ s (en términos de a, b, R, B_0 y c_1)?

•**29.69** Un circuito contiene una batería de 12.0 V, un interruptor y una bombilla conectados en serie. Cuando por la bombilla fluye una corriente de 0.100 A, justo empieza a brillar. Esta bombilla requiere 2.00 W cuando el interruptor ha permanecido cerrado durante mucho tiempo. El interruptor se abre y al circuito se agrega un inductor en serie con la bombilla. Si la bombilla empieza a brillar 3.50 ms después de que el interruptor se vuelve a cerrar, ¿cuál es la magnitud de la inductancia? Ignore el tiempo necesario para calentar el filamento y suponga que usted puede observar el brillo tan pronto como la corriente en el filamento alcanza un umbral de 0.100 A.

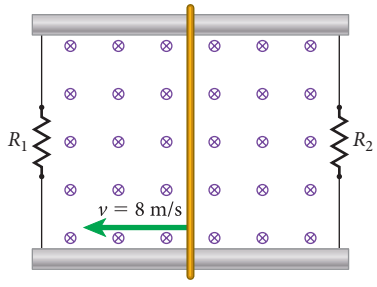
•**29.70** Un bucle circular de área A está colocado perpendicular a un campo magnético de $B(t) = B_0 + at + bt^2$, que varía con el tiempo, donde B_0, a y b son constantes.

a) ¿Cuál es el flujo magnético que pasa por el bucle en $t = 0$?

b) Obtenga una ecuación para la diferencia de potencial inducida en el bucle como una función del tiempo.

c) ¿Cuáles son la magnitud y la dirección de la corriente inducida si la resistencia del bucle es R?

•**29.71** Una barra conductora de 50.0 cm de longitud se desliza sobre dos barras metálicas paralelas colocadas en un campo magnético de magnitud de 1 000. G, como se indica en la figura. Los extremos de las barras están conectados a dos resistores, $R_1 = 100.\ \Omega$ y $R_2 = 200.\ \Omega$. La barra conductora se mueve a velocidad constante de 8.00 m/s.

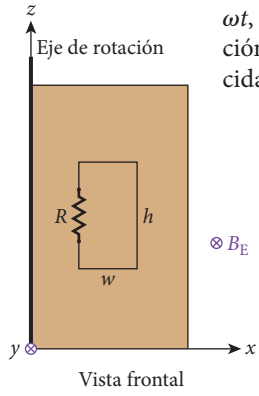


a) ¿Cuáles son las corrientes que fluyen por los dos resistores?

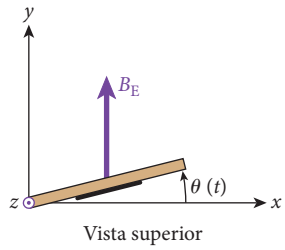
b) ¿Qué potencia se suministra a los resistores?

c) ¿Qué fuerza se requiere para mantener el movimiento de la barra a velocidad constante?

•**29.72** Un bucle rectangular de alambre (dimensiones $h = 15.0$ cm y $w = 8.00$ cm) con resistencia $R = 5.00\ \Omega$ está montado en una puerta. El campo magnético de la Tierra, $B_E = 2.6 \cdot 10^{-5}$ T, es uniforme y perpendicular a la superficie de la puerta cerrada (la superficie es el plano xz). En el instante $t = 0$, la puerta se abre (el borde derecho se mueve hacia el eje y) a razón constante, con un ángulo de apertura de $\theta(t) = \omega t$, donde $\omega = 3.5$ rad/s. Calcule la dirección y la magnitud de la corriente inducida en el bucle, $i(t = 0.200\ \text{s})$.



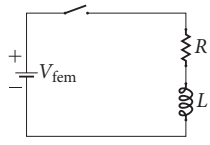
Vista frontal



Vista superior

•**29.73** Un cilindro de acero con radio 2.5 cm y longitud 10.0 cm rueda sin deslizamiento por una rampa inclinada que forma un ángulo de 15° por arriba de la horizontal y tiene una longitud (arriba de la rampa) de 3.0 m. ¿Cuál es la diferencia de potencial inducida entre los extremos del cilindro en la parte inferior de la rampa, si la superficie de ésta apunta hacia el norte magnético?

•**29.74** En la figura aparece un circuito en el que una batería está conectada en serie con un resistor y un inductor.



a) ¿Cuál es la corriente en el circuito en cualquier instante t después de que se cierra el interruptor?

b) Calcule la energía total suministrada por la batería desde $t = 0$ hasta $t = L/R$.

c) Calcule la energía total disipada en el resistor durante el mismo lapso.

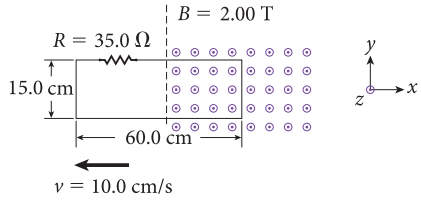
d) ¿Se conserva la energía en este circuito?

•**29.75** Como se muestra en la figura, un bucle rectangular (de 15.0 cm de ancho por 60.0 cm de longitud) con resistencia 35.0 Ω se mantiene paralelo al plano xy con una mitad dentro de un campo magnético uniforme. Un campo magnético dado por $\vec{B} = 2.00\,\hat{z}$ T está dirigido a lo largo del eje z positivo a la derecha de la línea discontinua; a la izquierda de esta línea no hay ningún campo magnético externo.

a) Calcule la magnitud de la fuerza requerida para mover el bucle hacia la izquierda a una velocidad constante de 10.0 cm/s, mientras su extremo derecho sigue en el campo magnético.

b) ¿Qué potencia se gasta para extraer el bucle del campo magnético a esta velocidad?

c) ¿Cuál es la potencia disipada por el resistor?



30 Oscilaciones y corrientes electromagnéticas

LO QUE APRENDEREMOS 959

30.1 Circuitos LC 959
30.2 Análisis de oscilaciones LC 961
Ejemplo 30.1 Características de un circuito LC 963
30.3 Oscilaciones amortiguadas en un circuito RLC 964
30.4 Circuitos impulsados por CA 965
fem impulsada por CA 965
Circuito con un resistor 965
Circuito con un capacitor 966
Circuito con un inductor 967
30.5 Circuito RLC en serie 968
Un ejemplo práctico 970
Ejemplo 30.2 Caracterización de un circuito RLC 971
Filtros de frecuencia 972
Ejemplo 30.3 Cruces de circuitos para bocinas de audio 974
30.6 Energía y potencia en circuitos AC 975
Receptor de radio AM 977
Problema resuelto 30.1 Inductancia desconocida en un circuito RL 977
30.7 Transformadores 979
30.8 Rectificadores 981

LO QUE HEMOS APRENDIDO/ GUÍA DE ESTUDIO PARA EXAMEN 982

Práctica para resolución de problemas 984
Problema resuelto 30.2 Caída de voltaje a través de un inductor 984
Problema resuelto 30.3 Potencia disipada en un circuito RLC 985
Preguntas de opción múltiple 986
Preguntas 987
Problemas 988

a) *b*)

FIGURA 30.1 *a*) La reproducción electrónica de sonido, como en un equipo de sonido portátil, depende de las propiedades de los circuitos de corriente alterna. *b*) Se genera sonido de mejor calidad si se cuenta con bocinas por separado para sonidos de alta y baja frecuencia.

LO QUE APRENDEREMOS

- Los voltajes y las corrientes en circuitos de un solo bucle que contienen un inductor y un capacitor oscilan con una frecuencia característica.
- Los voltajes y las corrientes en circuitos de un solo bucle que contienen un resistor, un inductor y un capacitor también oscilan con una frecuencia característica, pero estas oscilaciones se amortiguan con el tiempo.
- Un circuito de un solo bucle, que contiene una fuente de fem que varía con el tiempo y un resistor, tiene corrientes y voltajes que están en fase y varían con el tiempo.
- Un circuito de un solo bucle, que contiene una fuente de fem que varía con el tiempo y un capacitor, tiene una corriente y un voltaje que varían con el tiempo y están fuera de fase por $+\pi/2$ rad (+90°), donde la corriente adelanta el voltaje. La corriente y el voltaje en un circuito así están relacionados por la reactancia capacitiva.
- Un circuito de un solo bucle, que contiene una fuente de fem que varía con el tiempo y un inductor, tiene una corriente y un voltaje que varían con el tiempo y están fuera de fase por $-\pi/2$ rad (–90°), donde el voltaje adelanta la corriente. El voltaje y la corriente en este circuito están relacionados por la reactancia inductiva.
- Un circuito de un solo bucle, que contiene una fuente de fem que varía con el tiempo y un resistor, un capacitor y un inductor, tiene una corriente y un voltaje que varían con el tiempo. La diferencia de fase entre la corriente y el voltaje depende de los valores de la resistencia, la capacitancia y la inductancia, y de la frecuencia de la fuente de fem.
- Un circuito de un solo bucle, que contiene una fuente de fem que varía con el tiempo y un resistor, un capacitor y un inductor, tiene una frecuencia de resonancia determinada por el valor de la inductancia y la capacitancia.
- La impedancia de un circuito de corriente alterna es semejante a la resistencia de un circuito de corriente directa, pero la impedancia depende de la frecuencia de la fuente de fem variable con el tiempo.
- Los transformadores pueden aumentar (o disminuir) voltajes alternos mientras disminuyen (aumentan) corrientes alternas.
- Los rectificadores convierten corriente alterna en corriente directa.

En los capítulos 24 a 26 se analizaron circuitos que tienen una corriente constante o una corriente que crece hasta una corriente constante o decrece hasta una corriente constante. Estas corrientes no invierten su dirección de flujo. Este capítulo introduce circuitos que contienen un resistor, un inductor y un capacitor. Estos circuitos presentan oscilaciones sinusoidales en voltaje y corriente. En este capítulo también se abordan circuitos que contienen una fuente de fem que varía con el tiempo. Aunque estos circuitos de corriente alterna (CA) tienen los mismos elementos de circuito (resistores, capacitores e inductores) que los circuitos de corriente directa (CD) que hemos considerado en capítulos previos, los circuitos de corriente alterna presentan fenómenos que no se observan en los circuitos de corriente directa, como la resonancia. Las corrientes alternas desempeñan un gran papel en la vida cotidiana; por ejemplo, en la operación de dispositivos electrónicos como los equipos de sonido portátiles (figura 30.1*a*).

Las bocinas para reproducir sonido (figura 30.1*b*) suelen constar de dos partes: la bocina pequeña (tweeter) para altas frecuencias reproduce sonidos a altas frecuencias, y la bocina grande (woofer) reproduce sonidos a bajas frecuencias. Pero, ¿cómo es que los circuitos electrónicos envían un rango de frecuencias a una bocina y otro rango de frecuencias a otra? La respuesta es: por medio de un filtro, y encontraremos la forma de construir uno.

Los circuitos de CD que hemos estudiado hasta el momento contienen una fuente de fem que suministra una diferencia de potencial estable al circuito en una dirección. Las fem alternas cambian de dirección según un patrón sinusoidal, que suele ser de 50 o 60 veces por segundo, dependiendo de su ubicación en el planeta. Esta condición resulta en un comportamiento físico que no es posible en circuitos de CD, lo cual hace de los circuitos de CA la norma en la mayor parte de los aparatos electrónicos.

30.1 Circuitos LC

En capítulos previos se introdujeron tres elementos de circuitos: capacitores, resistores e inductores. Hemos analizado circuitos de un solo bucle que contienen resistores y capacitores (circuitos RC) o resistores e inductores (circuitos RL). Ahora consideraremos circuitos de un solo bucle que contienen inductores y capacitores: **circuitos LC**. Veremos que los circuitos LC tienen corrientes y voltajes que varían sinusoidalmente con el tiempo, en lugar de crecer o decrecer exponencialmente con el tiempo, como los circuitos RC y RL. Estas variaciones de voltaje y corriente en los circuitos LC se denominan **oscilaciones electromagnéticas**.

Para comprender las oscilaciones electromagnéticas, considere un circuito de un solo bucle que consta de un inductor y un capacitor (figura 30.2). Recuerde que la energía almacenada en el campo eléctrico de un capacitor con capacitancia C está dada por (vea el capítulo 24)

$$U_E = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C},$$

donde q es la magnitud de la carga sobre las placas del capacitor. La energía almacenada en el campo magnético de un inductor con inductancia L está dada por (vea el capítulo 29):

$$U_B = \tfrac{1}{2}Li^2,$$

donde i es la corriente que circula por el inductor. La figura 30.2 muestra cómo estas energías varían con el tiempo en un circuito LC.

En la figura 30.2*a*), el capacitor está inicialmente cargado por completo (con la carga positiva sobre la placa inferior) y luego se conecta al circuito. En ese instante, la energía en el circuito está totalmente contenida en el campo eléctrico del capacitor. El capacitor empieza a descargarse a través del inductor en la figura 30.2*b*). En este punto, la corriente fluye por el inductor, lo cual genera un campo magnético. (Una flecha verde o una etiqueta abajo de cada diagrama de circuito indica la dirección y la magnitud de la corriente instantánea, *i*.) Luego, parte de la energía del circuito está almacenada en el campo eléctrico del capacitor y parte está en el campo magnético del inductor. La corriente comienza a estabilizarse a medida que el campo magnético creciente del inductor induce una fem que se opone a la corriente. En la figura 30.2*c*), el capacitor está descar-

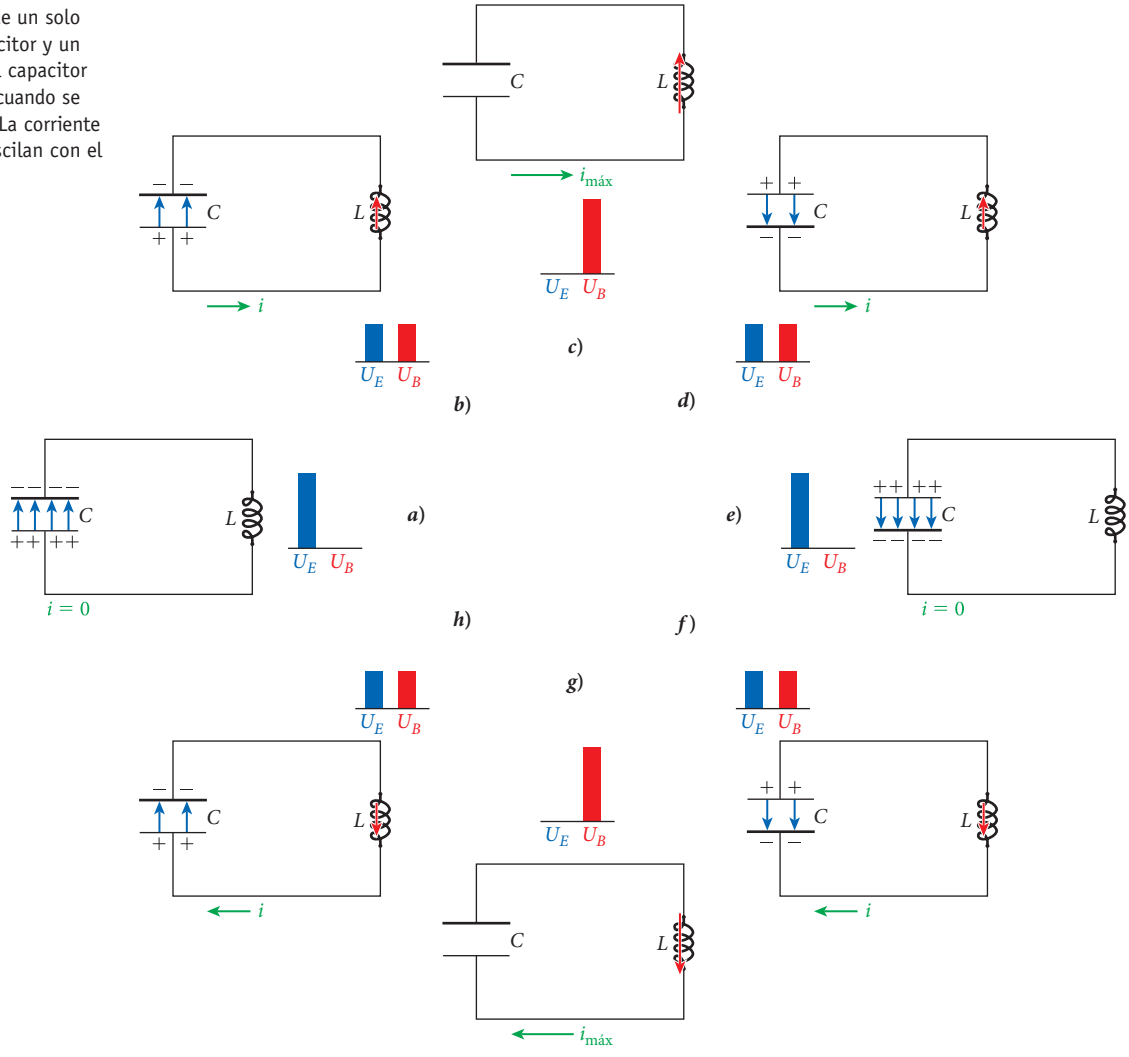


FIGURA 30.2 Circuito de un solo bucle que contiene un capacitor y un inductor. *a*) Inicialmente, el capacitor está cargado por completo cuando se conecta al circuito. *b*) a *h*) La corriente y el voltaje en el circuito oscilan con el tiempo.

gado por completo y por el inductor circula una corriente máxima. (Cuando la magnitud de i tiene su valor máximo, se identifica por $i_{máx}$ en la figura.) Toda la energía del circuito está almacenada ahora en el campo magnético del inductor. No obstante, la corriente continúa circulando, decreciendo desde su valor máximo, lo cual ocasiona que el campo magnético del inductor decrezca. En la figura 30.2*d*), el capacitor comienza a cargar con polaridad opuesta (la carga positiva en la placa superior). De nuevo, la energía se almacena en el campo eléctrico del capacitor, así como en el campo magnético del inductor.

En la figura 30.2*e*), la energía en el circuito de nuevo está contenida por completo en el campo eléctrico del capacitor. Observe que el campo eléctrico ahora apunta en la dirección opuesta al campo original en la figura 30.2*a*). La corriente es cero, así como el campo magnético del inductor. En la figura 30.2*f*), el capacitor comienza a descargarse de nuevo, produciendo un flujo de corriente en la dirección opuesta a la de los incisos *b*) a *d*) de la figura; a su vez, esta corriente crea un campo magnético en dirección opuesta en el inductor. De nuevo, parte de la energía se almacena en el campo eléctrico y parte en el campo magnético. En la figura 30.2*g*), toda la energía está almacenada en el campo magnético del inductor, pero con el campo magnético en dirección opuesta a la de la figura 30.2*c*) y con la corriente máxima en dirección opuesta a la de la figura 30.2*c*). En la figura 30.2*h*), el capacitor comienza a cargarse de nuevo, lo cual significa que hay energía tanto en el campo eléctrico como en el magnético. Luego, el estado del circuito regresa al ilustrado en la figura 30.2*a*). El circuito continúa oscilando de manera indefinida porque no contiene ningún resistor y los dos campos juntos, el eléctrico y el magnético, conservan la energía. Un circuito real con un capacitor y un inductor no oscila indefinidamente; en lugar de eso, las oscilaciones se extinguen con el tiempo debido a las pequeñas resistencias que hay en el circuito (lo cual se aborda en la sección 30.3) o a la radiación electromagnética (estudiada en el capítulo 31).

La carga sobre cualquier placa del capacitor y la corriente en el circuito LC varían sinusoidalmente, como muestra la figura 30.3. $q_{máx}$ se refiere a la carga máxima sobre la placa del capacitor que inicialmente está cargada positivamente (la placa inferior en la figura 30.2*a*). La energía en el campo eléctrico depende del cuadrado de la carga sobre el capacitor, y la energía en el campo magnético depende del cuadrado de la corriente en el inductor. Así, la energía eléctrica, U_E, y la energía magnética, U_B, varían entre cero y sus valores máximos respectivos como una función del tiempo.

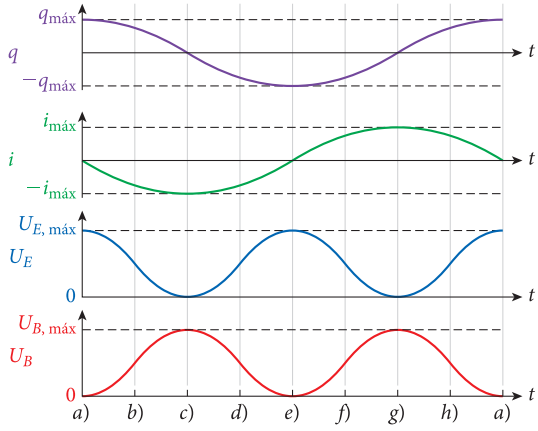


FIGURA 30.3 Variación de la carga, la corriente, la energía eléctrica y la energía magnética como una función del tiempo para un circuito LC de un solo bucle. Las letras en la parte inferior se refieren a los incisos en la figura 30.2.

30.1 Ejercicio en clase

La figura 30.2*a*) muestra que la carga sobre el capacitor en un circuito LC es máxima cuando la corriente es cero. ¿Qué ocurre con la diferencia de potencial a través del capacitor?

a) La diferencia de potencial a través del capacitor es máxima cuando la carga es máxima.

b) La diferencia de potencial a través del capacitor es máxima cuando la carga es máxima.

c) La diferencia de potencial a través del capacitor no cambia.

30.2 Análisis de oscilaciones LC

En esta sección se presenta una descripción cuantitativa de los fenómenos descritos en la sección precedente. Considere un circuito de un solo bucle que contiene un capacitor de capacitancia C y un inductor de inductancia L, pero ningún resistor y ninguna pérdida resistiva en el alambre del circuito, como ilustra la figura 30.4. Podemos escribir la energía total en el circuito, U, como la suma de la energía eléctrica en el capacitor y la energía magnética en el inductor:

$$U = U_E + U_B.$$

FIGURA 30.4 Circuito LC con un solo bucle, que contiene un inductor y un capacitor.

Al usar las expresiones para la energía eléctrica y la energía magnética en términos de la carga y la corriente, $U_E = \frac{1}{2}(q^2/C)$ y $U_B = \frac{1}{2}Li^2$, obtenemos

$$U = U_E + U_B = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C} + \frac{1}{2}Li^2.$$

Debido a que hemos supuesto resistencia cero, nada de energía puede perderse como calor, y la energía en el circuito permanece constante, ya que el campo eléctrico y el campo magnético juntos conservan energía. Así, la derivada con respecto al tiempo de la energía en el circuito es cero:

$$\frac{dU}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\frac{q^2}{C} + \frac{1}{2}Li^2\right) = \frac{q}{C}\frac{dq}{dt} + Li\frac{di}{dt} = 0.$$

Por definición, la corriente es la derivada con respecto al tiempo de la carga: $i = dq/dt$, y en consecuencia, la derivada con respecto al tiempo de la corriente es la segunda derivada de la carga:

$$\frac{di}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dq}{dt}\right) = \frac{d^2q}{dt^2}.$$

Con esta expresión para di/dt, la ecuación precedente para la derivada con respecto al tiempo de la energía total, dU/dt, se vuelve

$$\frac{q}{C}\frac{dq}{dt} + L\frac{dq}{dt}\frac{d^2q}{dt^2} = \frac{dq}{dt}\left(\frac{q}{C} + L\frac{d^2q}{dt^2}\right) = 0.$$

Podemos volver a escribir esta ecuación como

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{q}{LC} = 0. \tag{30.1}$$

(Descartamos la solución $dq/dt = 0$ porque corresponde a las situaciones en las que inicialmente no hay carga sobre el capacitor.) Esta ecuación diferencial tiene la misma forma que para el movimiento armónico simple, que describe la posición, x, de un objeto con masa m conectado a un resorte con constante del resorte k:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0.$$

En el capítulo 14 vimos que la solución de esta ecuación diferencial para la posición como una función del tiempo era la función sinusoidal $x = x_{\text{máx}} \cos(\omega_0 t + \phi)$, donde ϕ es una constante de fase y la frecuencia angular, ω_0, está dada por $\omega_0 = \sqrt{k/m}$.

Al sustituir simplemente q por x y $1/LC$ por k/m en la ecuación diferencial para movimiento armónico simple, se obtiene la solución análoga para la ecuación 30.1. Así, la carga como una función del tiempo en un circuito LC está dada por

$$q = q_{\text{máx}} \cos(\omega_0 t - \phi), \tag{30.2}$$

donde $q_{\text{máx}}$ es la magnitud de la carga máxima en un circuito y ϕ es la constante de fase, determinada por las condiciones iniciales para una situación dada. (Observe que la convención para oscilaciones electromagnéticas consiste en usar un signo negativo antes de ϕ.) La frecuencia angular está dada por

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}} = \frac{1}{\sqrt{LC}}. \tag{30.3}$$

La corriente está dada por la derivada con respecto al tiempo de la ecuación 30.2:

$$i = \frac{dq}{dt} = \frac{d}{dt}\left(q_{\text{máx}} \cos(\omega_0 t - \phi)\right) = -\omega_0 q_{\text{máx}} \operatorname{sen}(\omega_0 t - \phi).$$

Puesto que la corriente máxima en el circuito es $i_{\text{máx}} = \omega_0 q_{\text{máx}}$, obtenemos

$$i = -i_{\text{máx}} \operatorname{sen}(\omega_0 t - \phi). \tag{30.4}$$

Las ecuaciones 30.2 y 30.4 corresponden a las dos curvas superiores en la figura 30.3, con $\phi = 0$. Podemos escribir expresiones para la energía eléctrica y la energía magnética como funciones del tiempo:

$$U_E = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C} = \frac{1}{2}\frac{\left[q_{\text{máx}} \cos(\omega_0 t - \phi)\right]^2}{C} = \frac{q_{\text{máx}}^2}{2C}\cos^2(\omega_0 t - \phi),$$

y

$$U_B = \frac{1}{2}Li^2 = \frac{L}{2}\left[-i_{\text{máx}} \operatorname{sen}(\omega_0 t - \phi)\right]^2 = \frac{L}{2}i_{\text{máx}}^2 \operatorname{sen}^2(\omega_0 t - \phi).$$

Puesto que $i_{\text{máx}} = \omega_0 q_{\text{máx}}$ y $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$, podemos escribir

$$\frac{L}{2}i_{\text{máx}}^2 = \frac{L}{2}\omega_0^2 q_{\text{máx}}^2 = \frac{q_{\text{máx}}^2}{2C}.$$

Por lo tanto, podemos expresar la energía magnética como una función del tiempo como sigue:

$$U_B = \frac{q_{\text{máx}}^2}{2C}\,\text{sen}^2(\omega_0 t - \phi).$$

Observe que tanto la energía eléctrica como la energía magnética tienen un valor máximo igual a $q_{\text{máx}}/2C$ y uno mínimo de cero.

Podemos obtener una expresión para la energía total en el circuito, U, al sumar las energías eléctrica y magnética y luego al usar la identidad trigonométrica $\text{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$:

$$\begin{aligned} U = U_E + U_B &= \frac{q_{\text{máx}}^2}{2C}\cos^2(\omega_0 t - \phi) + \frac{q_{\text{máx}}^2}{2C}\,\text{sen}^2(\omega_0 t - \phi) \\ &= \frac{q_{\text{máx}}^2}{2C}\left[\text{sen}^2(\omega_0 t - \phi) + \cos^2(\omega_0 t - \phi)\right] \\ &= \frac{q_{\text{máx}}^2}{2C} = \frac{L}{2} i_{\text{máx}}^2. \end{aligned}$$

Así, la energía total en el circuito permanece constante con el tiempo y es proporcional al cuadrado de la carga original colocada en el capacitor.

30.2 Ejercicio en clase

En la figura 30.3, suponga que $t = 0$ en el punto *c*). ¿Cuál es la constante de fase para este caso? (Defina la corriente en el sentido del movimiento de las manecillas del reloj como positiva.)

a) 0
b) $\pi/2$
c) π
d) $3\pi/2$
e) Ninguna de las anteriores.

EJEMPLO 30.1 Características de un circuito LC

Un circuito contiene un capacitor, con $C = 1.50\ \mu\text{F}$, y un inductor, con $L = 3.50\ \text{mH}$ (figura 30.4). El capacitor se carga por completo al usar una batería de 12.0 V y luego se conecta al circuito.

PROBLEMAS

¿Cuál es la frecuencia angular del circuito? ¿Cuál es la energía total en el circuito? ¿Cuál es la carga sobre el capacitor después de $t = 2.50$ s?

SOLUCIONES

La frecuencia angular del circuito está dada por

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{\left(3.50\cdot10^{-3}\ \text{H}\right)\left(1.50\cdot10^{-6}\ \text{F}\right)}} = 1.38\cdot10^{4}\ \text{rad/s}.$$

La energía total del circuito es

$$U = \frac{q_{\text{máx}}^2}{2C}.$$

La carga sobre el capacitor es

$$\begin{aligned} q_{\text{máx}} &= CV_{\text{fem}} = \left(1.50\cdot10^{-6}\ \text{F}\right)(12.0\ \text{V}) \\ &= 1.80\cdot10^{-5}\ \text{C}. \end{aligned}$$

Así, podemos calcular la energía inicial almacenada en el campo eléctrico del capacitor, que es la misma que la energía total en el circuito:

$$U = \frac{q_{\text{máx}}^2}{2C} = \frac{\left(1.80\cdot10^{-5}\ \text{C}\right)^2}{2\left(1.50\cdot10^{-6}\ \text{F}\right)} = 1.08\cdot10^{-4}\ \text{J}.$$

La carga sobre el capacitor como una función del tiempo está dada por

$$q = q_{\text{máx}}\cos(\omega_0 t - \phi).$$

Para determinar la constante ϕ, recordamos que $q = q_{\text{máx}}$ en $t = 0$, de modo que

$$q(0) = q_{\text{máx}} = q_{\text{máx}}\cos[(\omega_0)(0) - \phi] = q_{\text{máx}}\cos(-\phi) = q_{\text{máx}}\cos\phi.$$

(*continúa*)

30.1 Oportunidad de autoevaluación

La frecuencia de oscilación de un circuito LC es 200.0 kHz. En $t = 0$, la carga sobre el capacitor tiene su máxima carga positiva en la placa inferior. Decida si cada una de las siguientes afirmaciones es falsa o verdadera.

a) En $t = 2.50\ \mu$s, la carga sobre la placa inferior del capacitor tiene su máximo valor negativo.

b) En $t = 5.00\ \mu$s, la corriente en el circuito está en su valor máximo.

c) En $t = 2.50\ \mu$s, la energía en el circuito está almacenada por completo en el inductor.

d) En $t = 1.25\ \mu$s, la mitad de la energía en el circuito está almacenada en el capacitor y la mitad de la energía está almacenada en el inductor.

(*continuación*)

Por lo tanto, vemos que $\phi = 0$, y podemos escribir la carga como una función del tiempo como sigue:

$$q = q_{\text{máx}} \cos \omega_0 t.$$

Al escribir los valores $q_{\text{máx}} = 1.80 \cdot 10^{-5}$ C, $\omega_0 = 1.38 \cdot 10^4$ rad/s, y $t = 2.50$ s, obtenemos

$$q = \left(1.80 \cdot 10^{-5}\ \text{C}\right) \cos\left[\left(1.38 \cdot 10^4\ \text{rad/s}\right)\left(2.50\ \text{s}\right)\right] = 1.02 \cdot 10^{-5}\ \text{C}.$$

30.3 Oscilaciones amortiguadas en un circuito RLC

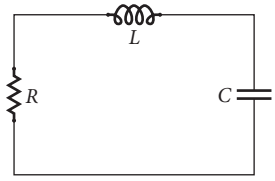


FIGURA 30.5 Circuito RLC con un bucle, que contiene un resistor, un inductor y un capacitor.

Ahora consideremos un circuito con un solo bucle que tiene un capacitor y un inductor, pero también un resistor: un **circuito RLC**, como muestra la figura 30.5. En la sección precedente vimos que la energía de un circuito con un capacitor y un inductor permanece constante y que la energía se transforma de eléctrica a magnética y otra vez en eléctrica sin pérdidas. No obstante, si en el circuito hay un resistor, el flujo de corriente produce pérdidas óhmicas, que se manifiestan como energía térmica. Así, la energía del circuito decrece debido a estas pérdidas. La razón de pérdida de energía está dada por

$$\frac{dU}{dt} = -i^2 R.$$

Podemos volver a escribir el cambio en energía en el circuito como una función del tiempo:

$$\frac{dU}{dt} = \frac{q}{C}\frac{dq}{dt} + Li\frac{di}{dt} = -i^2 R.$$

De nuevo, puesto que $i = dq/dt$ y $di/dt = d^2q/dt^2$, podemos escribir

$$\frac{q}{C}\frac{dq}{dt} + Li\frac{di}{dt} + i^2 R = \frac{q}{C}\frac{dq}{dt} + L\frac{dq}{dt}\frac{d^2q}{dt^2} + \left(\frac{dq}{dt}\right)^2 R = 0$$

o bien,

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dq}{dt} + \frac{1}{LC}q = 0. \tag{30.5}$$

La solución de esta ecuación diferencial (para amortiguación pequeña, lo cual significa valores suficientemente pequeños de la resistencia) es

$$q = q_{\text{máx}} e^{-Rt/2L} \cos \omega t, \tag{30.6}$$

donde

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{R}{2L}\right)^2} \tag{30.7}$$

y $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$.

No se muestran los cálculos usados para llegar a la solución de la ecuación 30.6. Puede comprobar que la solución satisface la ecuación 30.5 por sustitución directa de las ecuaciones 30.6 y 30.7 en la ecuación 30.5. También puede consultar el capítulo 14, en el que se demostró que la ecuación de movimiento de un oscilador mecánico débilmente amortiguado (o subamortiguado) tiene una solución semejante. En el capítulo 14 también se abordaron las oscilaciones sobreamortiguadas y críticamente amortiguadas.

Si el capacitor en el circuito RLC con un solo bucle de la figura 30.5 se carga y luego se conecta en el circuito, la carga sobre el capacitor varía sinusoidalmente con el tiempo mientras decrece en amplitud (figura 30.6). Al tomar la derivada de la ecuación 30.6 se observa que la corriente, $i = dq/dt$, tiene una amplitud que es amortiguada a la misma razón que la carga es amortiguada y que esta amplitud también varía sinusoidalmente con el tiempo. Luego de un lapso, en el circuito no queda corriente.

Podemos analizar la energía en el circuito como una función del tiempo al calcular la energía almacenada en el campo eléctrico del capacitor:

$$U_E = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C} = \frac{q_{\text{máx}}^2}{2C} e^{-Rt/L} \cos^2 \omega t.$$

30.2 Oportunidad de autoevaluación

Compare la ecuación 30.5 para la carga sobre el capacitor como una función del tiempo con la ecuación diferencial para la posición de una masa sobre un resorte, presentada en el capítulo 14: $\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{b}{m}\frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}x = 0$. ¿Qué cantidad en el circuito eléctrico RLC desempeña el papel de la masa m, cuál la de la constante del resorte k y cuál la de la constante de amortiguamiento b?

30.3 Ejercicio en clase

¿Cuál es la condición para amortiguación pequeña que debe cumplirse para que la ecuación 30.6 sea una solución de la ecuación 30.5? (*Sugerencia*: esto puede encontrarse por analogía con la oscilación amortiguada de una masa en un resorte, para la que la ecuación diferencial es $\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{b}{m}\frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}x = 0$ y la condición para amortiguación pequeña es $b < 2\sqrt{mk}$. En forma alternativa, puede usar análisis dimensional.)

a) $R < 2\sqrt{L/C}$

b) $R < \sqrt{2C/L}$

c) $R < \sqrt{2LC}$

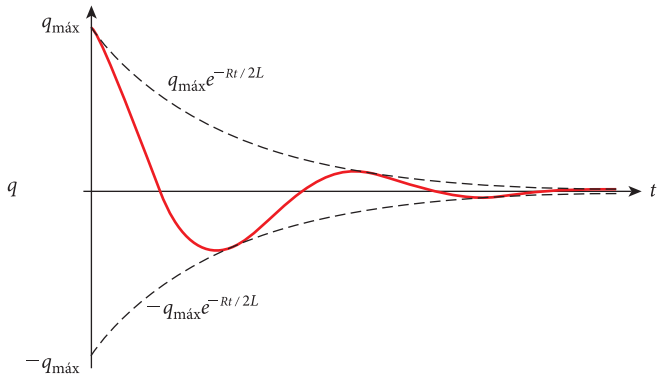


FIGURA 30.6 Gráfica de la carga sobre el capacitor como una función del tiempo en un circuito que contiene un capacitor, un inductor y un resistor.

Por lo tanto, U_E y U_B —ambas— decrecen exponencialmente con el tiempo, y en consecuencia también así ocurre con la energía total en el circuito, $U_E + U_B$.

30.4 Circuitos impulsados por CA

Hasta ahora, hemos estudiado circuitos que contienen una fuente de fem constante o que empiezan con una carga constante y contienen energía que después oscila entre campos eléctrico y magnético. No obstante, en un circuito en el que la corriente oscila de manera continua ocurren muchos efectos interesantes. En esta sección se investigan algunos de estos efectos, empezando con una fuente de fem que varía con el tiempo y prosiguiendo a la vez con un resistor, un capacitor y un inductor conectados a esta fuente.

fem impulsada por CA

Una fuente de fem debe ser capaz de producir un voltaje que cambie con el tiempo, en oposición a las fuentes de fem constante consideradas en capítulos previos. Supondremos que la fuente de fem que varía con el tiempo suministra un voltaje sinusoidal como una función del tiempo, la *fem de activación*, dada por

$$V_{\text{fem}} = V_{\text{máx}} \operatorname{sen} \omega t, \tag{30.8}$$

donde ω es la frecuencia angular de la fem y $V_{\text{máx}}$ es la amplitud o valor máximo de la fem.

La corriente inducida en un circuito que contiene una fuente de fem que varía con el tiempo también varía sinusoidalmente con el tiempo. Esta corriente que varía con el tiempo se denomina **corriente alterna (CA)**. Sin embargo, la corriente alterna puede no siempre estar en fase con la fem que varía con el tiempo. La corriente, i, como una función del tiempo, está dada por

$$i = I \operatorname{sen}(\omega t - \phi), \tag{30.9}$$

donde I es la amplitud de la corriente y la frecuencia angular de la corriente que varía con el tiempo es la misma que la fem de activación, aunque la constante de fase ϕ no es cero. Observe que, como se acostumbra indicar, la constante de fase está precedida por un signo negativo.

Circuito con un resistor

Iniciemos nuestro análisis de los circuitos RLC con corriente alterna al considerar un circuito que sólo contiene un resistor y una fuente de fem que varía con el tiempo (figura 30.7). Al aplicar la ley de voltaje de Kirchhoff a este circuito, obtenemos

$$V_{\text{fem}} - v_R = 0,$$

donde v_R es la caída de potencial a través del resistor. Al sustituir v_R por V_{fem} en la ecuación 30.8, obtenemos

$$v_R = V_{\text{máx}} \operatorname{sen} \omega t = V_R \operatorname{sen} \omega t,$$

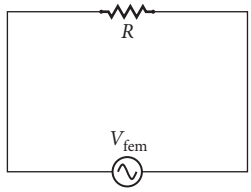


FIGURA 30.7 Circuito de un solo bucle con un resistor y una fuente de fem que varía con el tiempo.

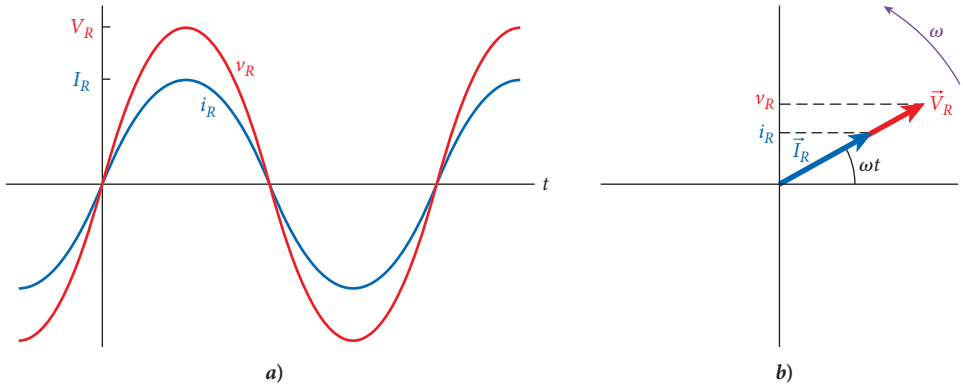


FIGURA 30.8 Voltaje y corriente alternos para un circuito de un solo bucle que contiene una fuente de fem que varía con el tiempo y un resistor: *a*) voltaje y corriente como funciones del tiempo; *b*) fasores que representan voltaje y corriente, mostrando que están en fase.

donde V_R es la caída de potencial máximo a través del resistor. Observe que el voltaje como una función de tiempo está representado por una v minúscula y la amplitud del voltaje con una V mayúscula. Según la ley de Ohm, $V = iR$, podemos escribir

$$i_R = \frac{v_R}{R} = \frac{V_R}{R} \operatorname{sen} \omega t = I_R \operatorname{sen} \omega t. \tag{30.10}$$

Así, la amplitud de corriente y la amplitud de voltaje están relacionadas como sigue:

$$V_R = I_R R. \tag{30.11}$$

La figura 30.8*a*) muestra el voltaje a través del resistor y la corriente a través de éste como una función del tiempo. La corriente que varía con el tiempo puede representarse por un fasor, $\vec{I}_R$, y el voltaje que varía con el tiempo por un fasor, $\vec{V}_R$ (figura 30.8*b*). Un **fasor** es un vector rotatorio en dirección contraria al movimiento de las manecillas del reloj (con su cola fija en el origen), cuya proyección sobre el eje vertical representa la variación sinusoidal de la cantidad particular en el tiempo. La velocidad angular de los fasores en la figura 30.8*b*) es ω de la ecuación 30.10. La corriente que fluye por el resistor y el voltaje a través del resistor están en fase, lo cual significa que la diferencia de fase entre la corriente y el voltaje es cero.

Circuito con un capacitor

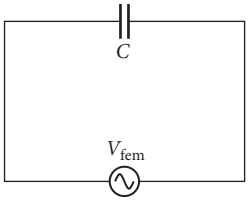


FIGURA 30.9 Circuito de un solo bucle con un capacitor y una fuente de fem que varía con el tiempo.

Ahora analizaremos un circuito que contiene un capacitor y una fem que varía con el tiempo (figura 30.9). El voltaje a través del capacitor está dado por la ley del voltaje de Kirchhoff,

$$V_{\text{fem}} - v_C = 0,$$

donde v_C es la caída de tensión a través del capacitor. Así, tenemos

$$v_C = V_{\text{máx}} \operatorname{sen} \omega t = V_C \operatorname{sen} \omega t,$$

donde V_C es el voltaje máximo a través del capacitor. Puesto que $q = CV$ para un capacitor, podemos escribir

$$q = Cv_C = CV_C \operatorname{sen} \omega t.$$

Sin embargo, queremos una expresión para la corriente (más que para la carga) como una función del tiempo. En consecuencia, tomamos la derivada con respecto al tiempo de la ecuación precedente:

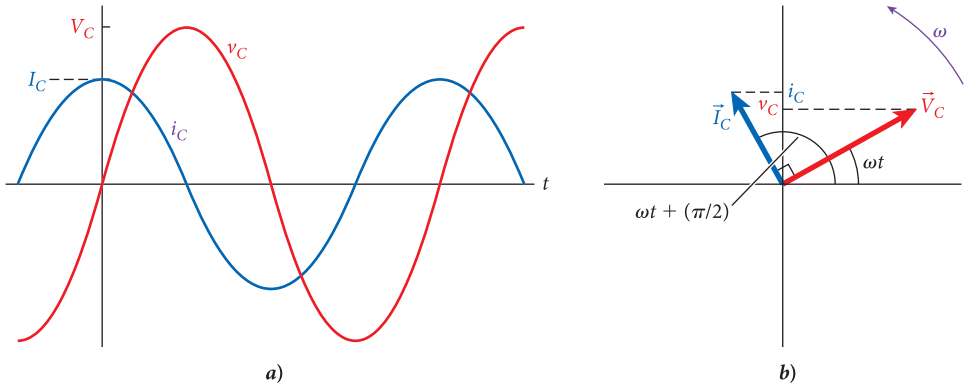
$$i_C = \frac{dq}{dt} = \frac{d\left(CV_C \operatorname{sen} \omega t\right)}{dt} = \omega C V_C \cos \omega t.$$

Esta ecuación puede escribirse en una forma comparable a la de la ecuación 30.10 al definir una cantidad semejante a la resistencia, denominada **reactancia capacitiva**, X_C:

$$X_C = \frac{1}{\omega C}. \tag{30.12}$$

Esta definición nos permite expresar la corriente, i_C, como

$$i_C = \frac{V_C}{X_C} \cos \omega t,$$



a) *b*)

FIGURA 30.10 Voltaje y corriente alternos para un circuito con un solo bucle que contiene una fuente de fem y un capacitor: *a*) voltaje y corriente como una función del tiempo; *b*) fasores que representan voltaje y corriente, mostrando que están fuera de fase por $\pi/2$ rad (90°).

o, con $I_C = V_C/X_C$, como

$$i_C = I_C \cos \omega t.$$

Podemos usar $\cos\theta = \text{sen}(\theta + \pi/2)$ para expresar este resultado en una forma análoga a la de la ecuación 30.10:

$$i_C = I_C \,\text{sen}\left(\omega t + \pi/2\right). \tag{30.13}$$

Esta expresión para la corriente que circula en un circuito con un solo capacitor es semejante a la expresión para la corriente que fluye en un circuito con un solo resistor, excepto que la corriente y el voltaje están fuera de fase por $\pi/2$ rad (90°). La figura 30.10*a*) presenta el voltaje y la corriente como funciones del tiempo.

Los fasores correspondientes $\vec{I}_C$ y $\vec{V}_C$, que se muestran en la figura 30.10*b*), indican que *para un circuito con un solo capacitor, la corriente adelanta el voltaje*. La amplitud del voltaje a través del capacitor y la amplitud de la corriente por el capacitor están relacionadas por

$$V_C = I_C X_C. \tag{30.14}$$

Esta ecuación se parece a la ley de Ohm con la reactancia capacitiva que sustituye a la resistencia. Una diferencia fundamental entre la reactancia capacitiva y la resistencia es que la reactancia capacitiva depende de la frecuencia angular de la fem que varía con el tiempo.

Circuito con un inductor

Ahora consideremos un circuito con una fuente de fem que varía con el tiempo y un inductor (figura 30.11). De nuevo aplicamos la ley de voltaje de Kirchhoff a este circuito para obtener el voltaje a través del inductor:

$$v_L = V_{\text{máx}} \,\text{sen}\,\omega t = V_L \,\text{sen}\,\omega t,$$

donde V_L es el voltaje máximo a través del inductor. Una corriente variable en un inductor induce una fem dada por

$$v_L = L\frac{di_L}{dt}.$$

Observe que para di/dt positiva la caída de voltaje a través del inductor es positiva porque la dirección de la corriente es la dirección de potencial decreciente. Así, podemos escribir

$$L\frac{di_L}{dt} = V_L \,\text{sen}\,\omega t,$$

o bien,

$$\frac{di_L}{dt} = \frac{V_L}{L}\,\text{sen}\,\omega t.$$

Estamos interesados en la corriente, más que en su derivada con respecto al tiempo, de modo que integramos la ecuación precedente:

$$i_L = \int \frac{di_L}{dt}dt = \int \frac{V_L}{L}\,\text{sen}\,\omega t\,dt = -\frac{V_L}{\omega L}\cos\omega t.$$

30.4 Ejercicio en clase

Un circuito con un capacitor (figura 30.9) tiene una fuente de fem que varía con el tiempo que suministra un voltaje dado por $v_C = V_C$ sen ωt. ¿Cuál es la corriente, i_C, por el capacitor cuando la diferencia de potencial a través de éste es máxima ($v_C = V_{\text{máx}}$)?

a) $i_C = 0$

b) $i_C = +I_{\text{máx}}$

c) $i_C = -I_{\text{máx}}$

30.5 Ejercicio en clase

Considere un circuito con una fuente de fem que varía con el tiempo dada por $V_{\text{fem}} = 120.0$ sen $[(377\ \text{rad/s})t]$ V y un capacitor con capacitancia $C = 5.00\ \mu\text{F}$. ¿Cuál es la corriente en el circuito en $t = 1.00$ s?

a) 0.226 A

b) 0.451 A

c) 0.555 A

d) 0.750 A

e) 1.25 A

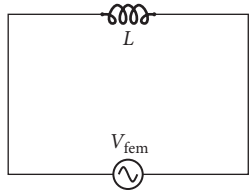


FIGURA 30.11 Corriente con un solo bucle con un inductor y una fuente de fem que varía con el tiempo.

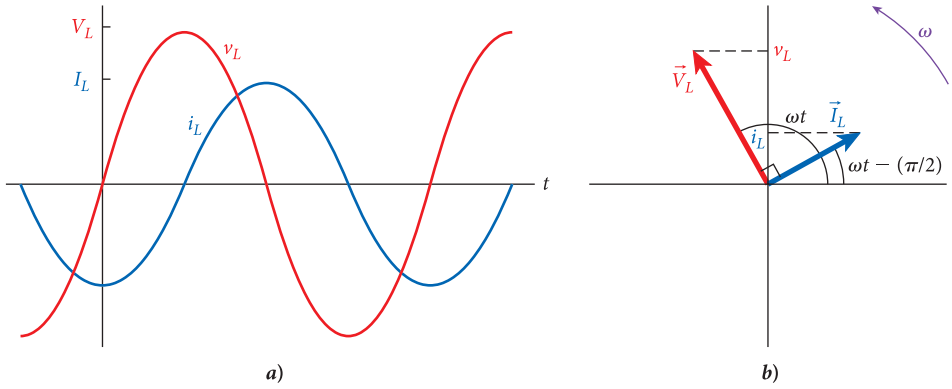


FIGURA 30.12 Voltaje y corriente alternos para un circuito con un solo bucle que contiene una fuente de fem y un inductor: *a*) voltaje y corriente como funciones del tiempo; *b*) fasores que representan el voltaje y la corriente, mostrando que están fuera de fase por $-\pi/2$ rad (−90°).

Aquí igualamos a cero la constante de integración porque no nos interesan soluciones que contengan tanto una corriente oscilatoria como una corriente constante. La **reactancia inductiva**, que, como la reactancia capacitiva, es semejante a la resistencia, se define como

$$X_L = \omega L. \tag{30.15}$$

Al usar la reactancia inductiva, podemos expresar i_L como

$$i_L = -\frac{V_L}{X_L}\cos\omega t = -I_L\cos\omega t,$$

donde I_L es la corriente máxima. Así,

$$V_L = I_L X_L,$$

que de nuevo se parece a la ley de Ohm excepto que la reactancia inductiva depende de la frecuencia angular de la fem que varía con el tiempo.

Debido a que $-\cos\theta = \text{sen}(\theta - \pi/2)$, podemos escribir $i_L = -I_L\cos\omega t$ como sigue:

$$i_L = I_L\,\text{sen}\left(\omega t - \pi/2\right). \tag{30.16}$$

Así, la corriente que circula en un circuito con un inductor y una fuente de fem que varía con el tiempo está fuera de fase con el voltaje por $-\pi/2$ rad. La figura 30.12*a*) ilustra el voltaje y la corriente como funciones del tiempo. Los fasores correspondientes, $\vec{I}_L$ y $\vec{V}_L$, se muestran en la figura 30.12*b*), donde se observa que *para un circuito con un inductor, el voltaje adelanta la corriente.*

30.5 Circuito RLC en serie

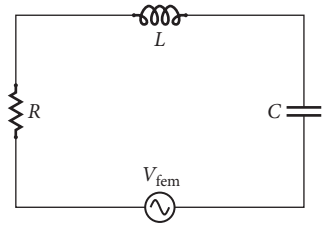


FIGURA 30.13 Corriente con un solo bucle que contiene una fuente de fem que varía con el tiempo, un resistor, un inductor y un capacitor.

Ahora estamos listos para considerar un circuito con un solo bucle que tiene los tres elementos de circuito, junto con una fuente de fem que varía con el tiempo (figura 30.13). En esta sección no se presenta un análisis matemático completo de este circuito RLC, sino que se usan fasores para analizar los aspectos importantes.

La corriente que varía con el tiempo en el circuito simple RLC puede describirse por un fasor, $\vec{I}_{\text{m}}$ (figura 30.14). La proyección de $\vec{I}_{\text{m}}$ sobre el eje vertical representa la corriente i que circula en el circuito como una función del tiempo, t, donde el ángulo del fasor está dado por $\omega t - \phi$ de modo que

$$i = I_{\text{m}}\,\text{sen}\left(\omega t - \phi\right).$$

La corriente i y los voltajes a través de los componentes del circuito tienen fases diferentes con respecto a la fuente de fem que varía con el tiempo, como hemos visto en la sección previa:

- *Para este resistor,* el voltaje v_R y la corriente i están en fase entre sí, y el fasor de voltaje, $\vec{V}_R$, está en fase con $\vec{I}_{\text{m}}$.
- *Para el capacitor,* la corriente i adelanta el voltaje v_C por $\pi/2$ rad (90°), de modo que el fasor de voltaje, $\vec{V}_C$, tiene un ángulo que es $\pi/2$ rad (90°) menor que los ángulos de $\vec{I}_{\text{m}}$ y $\vec{V}_R$.
- *Para el inductor,* la corriente i se atrasa con respecto al voltaje v_L por $\pi/2$ rad (90°), de modo que el fasor de voltaje, $\vec{V}_L$, tiene un ángulo que es $\pi/2$ rad (90°) mayor que los ángulos de $\vec{I}_{\text{m}}$ y $\vec{V}_R$.

Los fasores de voltaje para el circuito RLC se muestran en la figura 30.15. El voltaje instantáneo a través de cada componente se representa por la proyección del fasor respectivo sobre el eje vertical.

La caída de potencial total a través de todos los componentes, V, está dado por:

$$V = v_R + v_C + v_L. \tag{30.17}$$

El voltaje total, V, puede considerarse como la proyección sobre el eje vertical del fasor $\vec{V}_m$, que representa la fuente de fem que varía con el tiempo en el circuito (figura 30.16). Los fasores en la figura 30.15 rotan juntos, de modo que la ecuación 30.17 se cumple siempre. Los fasores de voltaje deben sumarse como vectores para coincidir con $\vec{V}_m$ a fin de cumplir siempre con la ecuación 30.17. La suma vectorial se muestra en la figura 30.16. En esta figura, la suma de los dos fasores $\vec{V}_L$ y $\vec{V}_C$ se ha sustituido por $\vec{V}_L + \vec{V}_C$. La suma vectorial de $\vec{V}_L + \vec{V}_C$ y $\vec{V}_R$ debe ser igual a $\vec{V}_m$. Por lo tanto, podemos escribir

$$V_m^2 = V_R^2 + (V_L - V_C)^2, \tag{30.18}$$

debido a que los vectores $\vec{V}_L$ y $\vec{V}_C$ siempre apuntan en direcciones opuestas, y $\vec{V}_m$ es perpendicular a ambos. Ahora podemos sustituir las expresiones que hemos obtenido para V_R, V_L y V_C en la ecuación 30.18, tomando la amplitud de la corriente en sus tres componentes como I_m, ya que están en serie:

$$V_m^2 = (I_m R)^2 + (I_m X_L - I_m X_C)^2.$$

Podemos despejar la amplitud de la corriente en este circuito:

$$I_m = \frac{V_m}{\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}}.$$

El denominador del término en el miembro derecho se denomina **impedancia**, Z:

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}. \tag{30.19}$$

La impedancia de un circuito depende de la frecuencia de la fem que varía con el tiempo. Esta dependencia con respeto al tiempo se expresa de manera explícita cuando se hacen sustituciones para la reactancia capacitiva, X_C, y la reactancia inductiva, X_L:

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}. \tag{30.20}$$

La impedancia de un circuito CA tiene la unidad ohm (Ω), justo como la resistencia en un circuito CD. Entonces podemos escribir

$$I_m = \frac{V_m}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} = \frac{V_m}{Z}. \tag{30.21}$$

La corriente que circula en un circuito CA depende de la diferencia entre la reactancia inductiva y la reactancia capacitiva, y se denomina reactancia total. La constante de fase, ϕ, puede expresarse en términos de esta diferencia. La constante de fase se define como la diferencia de fase entre los fasores de voltaje $\vec{V}_R$ y $\vec{V}_m$ que se representan en la figura 30.16. Así, podemos expresar la constante de fase como

$$\phi = \tan^{-1}\left(\frac{V_L - V_C}{V_R}\right).$$

Puesto que $V_L = X_L I_m$, $V_C = X_C I_m$ y $V_R = R I_m$, lo anterior puede escribirse como:

$$\phi = \tan^{-1}\left(\frac{X_L - X_C}{R}\right).$$

Al usar $X_C = 1/\omega C$ y $X_L = \omega L$, podemos obtener la dependencia con respecto a la frecuencia de la constante de fase:

$$\phi = \tan^{-1}\left(\frac{\omega L - (\omega C)^{-1}}{R}\right). \tag{30.22}$$

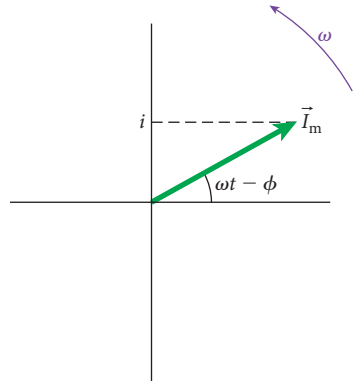


FIGURA 30.14 Fasor $\vec{I}_m$ que representa la corriente i que circula en un circuito RLC.

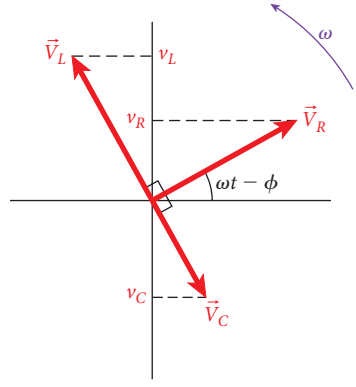


FIGURA 30.15 Fasores de voltaje para un circuito RLC en serie. El fasor $\vec{V}_R$ está en fase con el fasor $\vec{I}_m$ que representa la corriente en el circuito.

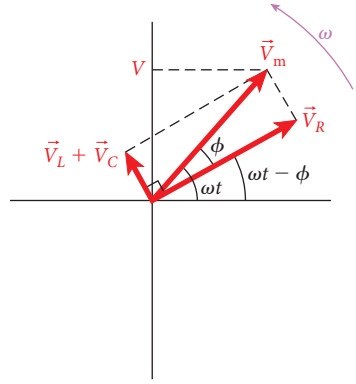


FIGURA 30.16 Suma de los fasores de voltaje en un circuito RLC en serie.

30.6 Ejercicio en clase

Un circuito como el que aparece en la figura 30.13, que contiene un capacitor, un inductor y un resistor conectados en serie con una fuente de fem que varía con el tiempo, tiene $V_{fem} = V_m \operatorname{sen} \omega t$. En un punto en el tiempo cuando V_{fem} es creciente, ¿cuál es el comportamiento de la corriente en el circuito?

a) La corriente es creciente.

b) La corriente es decreciente.

c) La corriente no cambia.

d) La corriente puede ser creciente o decreciente.

30.3 Oportunidad de autoevaluación

Considere un circuito RLC en serie como el que se muestra en la figura 30.13. El circuito es activado a una frecuencia angular ω por la fuente de fem que varía con el tiempo. La frecuencia angular de resonancia es ω_0. Decida cuál de las siguientes afirmaciones es falsa o verdadera.

a) Si $\omega = \omega_0$, el voltaje y la corriente están en fase.

b) Si $\omega < \omega_0$, el voltaje va atrás de la corriente.

c) Si $\omega > \omega_0$, entonces $X_C > X_L$.

La corriente en el circuito RLC puede escribirse ahora como

$$i = I_m \operatorname{sen}(\omega t - \phi), \tag{30.23}$$

donde I_m es la magnitud del fasor $\vec{I}_m$. El voltaje a través de todos los componentes en el circuito está dado por la fuente de fem que varía con el tiempo:

$$V = V_{fem}(t) = V_m \operatorname{sen} \omega t \tag{30.24}$$

donde V_m es la magnitud del fasor $\vec{V}_m$.

Por lo tanto, para un circuito en serie que contiene un resistor, un capacitor y un inductor son posibles tres condiciones:

- Si $X_L > X_C$, ϕ es positivo, y la corriente en el circuito va atrás del voltaje en el circuito. Este circuito es semejante a un circuito con un solo inductor, excepto que la constante de fase no necesariamente es $\pi/2$ rad (90°), como ilustra la figura 30.17*a*).
- Si $X_L < X_C$, ϕ es negativo, y la corriente en el circuito va adelante del voltaje en el circuito. Este circuito es semejante a un circuito con un solo capacitor, excepto que la constante de fase no necesariamente es $-\pi/2$ rad (–90°), como muestra la figura 30.17*b*).
- Si $X_L = X_C$, ϕ es cero, y la corriente en el circuito está en fase con el voltaje en el circuito. Este circuito es semejante a un circuito con una sola resistencia, como se ilustra en la figura 30.17*c*). Cuando $\phi = 0$, se dice que el circuito está en **resonancia**.

La amplitud de la corriente, I_m, en el circuito RLC en serie depende de la frecuencia de la fuente de fem que varía con el tiempo, así como de L y C. Al revisar la ecuación 30.21 se observa que la corriente máxima ocurre cuando

$$\omega L - \frac{1}{\omega C} = 0,$$

que corresponde a $\phi = 0$ y $X_L = X_C$. La frecuencia angular, ω_0, a la que ocurre la corriente máxima, denominada **frecuencia angular de resonancia**, es

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

Un ejemplo práctico

Ahora consideremos un circuito real (figura 30.18). El diagrama de este circuito se muestra en la figura 30.13. El circuito tiene una fuente de fem que varía con el tiempo con $V_m = 7.5$ V y tiene $L = 8.2$ mH, $C = 100$ μF y $R = 10$ Ω. La corriente máxima, I_m, se midió como una función de la razón de la frecuencia angular de la fuente de fem que varía con el tiempo a la frecuencia angular de resonancia, ω/ω_0 (figura 30.19). Los círculos rojos indican los resultados de las mediciones. El

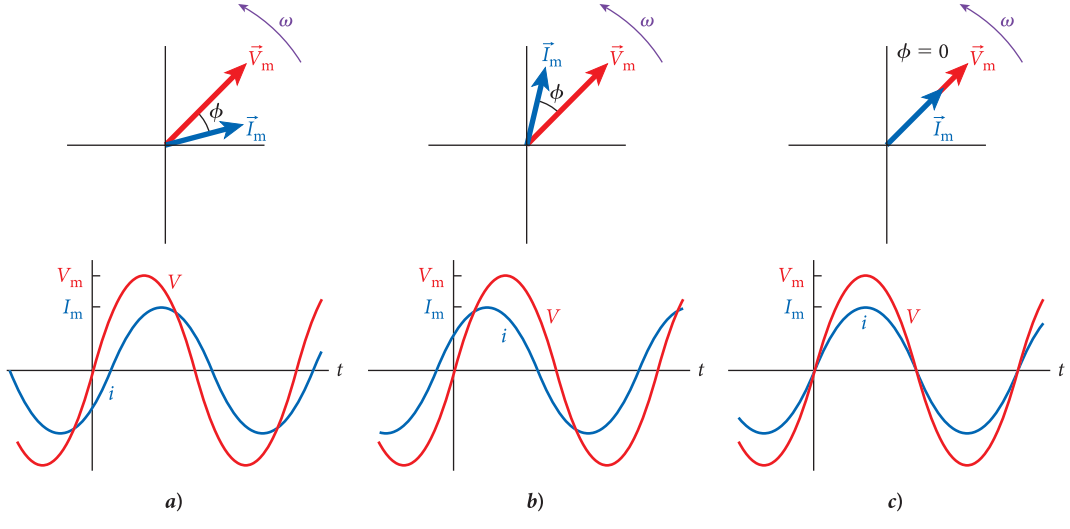


FIGURA 30.17 Corriente y voltaje como funciones del tiempo para un circuito RLC con: *a*) $X_L > X_C$; *b*) $X_L < X_C$; *c*) $X_L = X_C$.

valor máximo de la corriente ocurre, como es de esperar, a la frecuencia angular de resonancia. No obstante, con $R = 10\ \Omega$, la relación entre I_m y ω/ω_0, dada por la ecuación 30.21, resulta en la curva verde, que no reproduce los resultados medidos. Para describir mejor la corriente, debemos recordar que en un circuito real el inductor tiene una resistencia, incluso a la frecuencia de resonancia. La curva negra en la figura 30.19 corresponde a la ecuación 30.21 con $R = 15.4\ \Omega$.

El comportamiento en resonancia de un circuito RLC semeja la respuesta de un oscilador mecánico amortiguado (capítulo 14). La figura 30.20 muestra la corriente máxima calculada, I_m, como una función de la razón de la frecuencia angular de la fuente de fem que varía con el tiempo a la frecuencia angular de resonancia, ω/ω_0, para un circuito RLC en serie con $V_m = 7.5$ V, $L = 8.2$ mH, $C = 100$ μF y tres resistencias diferentes. Puede ver que, a medida que la resistencia disminuye, la corriente máxima a la frecuencia angular de resonancia aumenta, lo cual produce un pico más pronunciado.

FIGURA 30.18 Corriente real en serie que contiene un inductor de 8.2 mH, un resistor de 10 Ω y un capacitor de 100 μF.

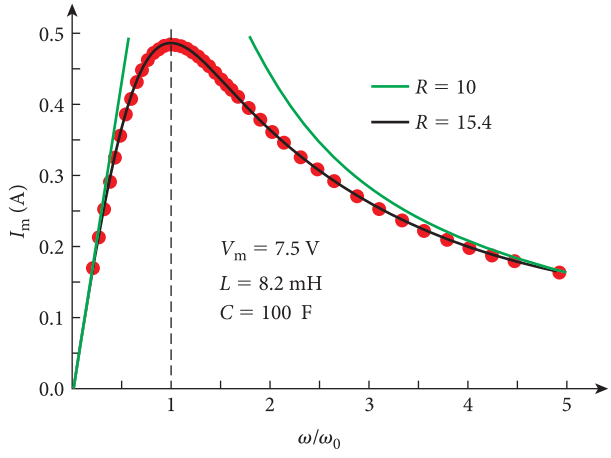


FIGURA 30.19 Gráfica de la corriente máxima, I_m, contra la razón de la frecuencia angular, ω, de la fuente de fem que varía con el tiempo a la frecuencia de resonancia, ω_0, para un circuito RLC. Los puntos rojos representan mediciones. En el texto se explican las curvas verde y negra.

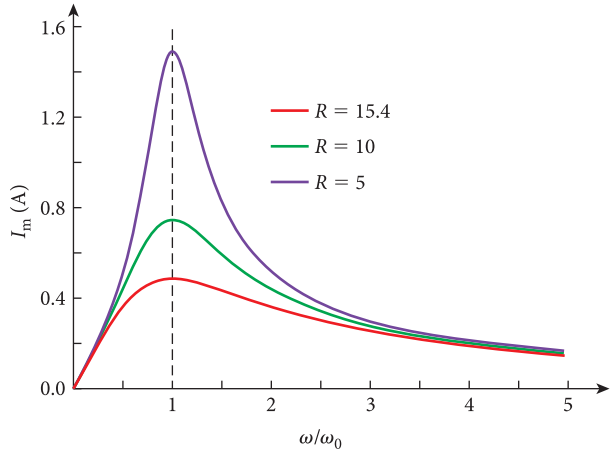


FIGURA 30.20 Gráfica de la corriente máxima, I_m, contra la razón de la frecuencia angular, ω, de la fuente de fem que varía con el tiempo a la frecuencia de resonancia, ω_0, para tres circuitos RLC en serie, con $L = 8.2$ mH, $C = 100$ μF y tres resistencias diferentes.

EJEMPLO 30.2 Caracterización de un circuito RLC

Suponga que un circuito RLC en serie como el que aparece en la figura 30.13 tiene $R = 91.0\ \Omega$, $C = 6.00$ μF y $L = 60.0$ mH. La fuente de fem que varía con el tiempo tiene una frecuencia angular de $\omega = 64.0$ rad/s.

PROBLEMA

¿Cuál es la impedancia de este circuito?

SOLUCIÓN

Normalmente resolveríamos este problema al obtener una expresión para la impedancia en términos de las cantidades proporcionadas. Sin embargo, en lugar de hacer lo anterior, calcularemos varias respuestas numéricas intermedias para comprender las características de este circuito.

La impedancia está dada por $Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$. Para ver cuál de las cantidades en el miembro derecho tiene el mayor impacto sobre la impedancia, calculamos las cantidades de manera individual. La reactancia inductiva está dada por

$$X_L = \omega L = (64.0\ \text{rad/s})(60.0 \cdot 10^{-3}\ \text{H}) = 3.84\ \Omega.$$

La reactancia capacitiva es

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{(64.0\ \text{rad/s})(6.00 \cdot 10^{-6}\ \text{F})} = 2\,600\ \Omega.$$

(*continúa*)

30.4 Oportunidad de autoevaluación

Considere un circuito RLC en serie como el que ilustra la figura 30.13. Decida si cada una de las siguientes afirmaciones es falsa o verdadera.

a) La corriente por el resistor siempre es la misma que la corriente por el inductor.

b) En un escenario ideal, la energía se disipa en el resistor, pero no en el capacitor o en el inductor.

c) La caída de voltaje a través del resistor siempre es la misma que la caída de voltaje a través del inductor.

30.7 Ejercicio en clase

Una fuente de fem que varía con el tiempo suministra V_m = 115.0 V a f = 60.0 Hz en un circuito RLC en serie con R = 374 Ω, L = 0.310 H y C = 5.50 μF. ¿Cuál es la impedancia de este circuito?

a) 321 Ω *d*) 831 Ω

b) 523 Ω *e*) 975 Ω

c) 622 Ω

(*continuación*)

Vemos que la impedancia de este circuito está dominada por la reactancia capacitiva al valor dado de la frecuencia angular. Este tipo de circuito se denomina *capacitivo*.

Al escribir nuestros resultados para las reactancias capacitiva e inductiva, calculamos la impedancia:

$$Z=\sqrt{R^2+(X_L-X_C)^2}=\sqrt{(91.0\ \Omega)^2+(3.84\ \Omega-2\,600\ \Omega)^2}=2\,600\ \Omega.$$

Es decir, la reactancia inductiva y la resistencia son despreciables por completo a menos del error por redondeo. Para efectos de comparación, la impedancia de este circuito cuando está en resonancia es

$$Z=\sqrt{R^2+(X_L-X_C)^2}=\sqrt{(91.0\ \Omega)^2+0}=91.0\ \Omega.$$

Este resultado implica que el circuito según se describe en el planteamiento del problema está lejos de la resonancia, lo cual es consistente con los valores tan diferentes que obtuvimos para las reactancias capacitiva e inductiva. (¡Recuerde que en resonancia estas dos reactancias tienen el mismo valor!)

Filtros de frecuencia

FIGURA 30.21 Filtro de paso de banda típico para audífonos conectados a un circuito del hogar que tiene una conexión DSL para internet.

Hemos estado analizando circuitos que tienen una fuente de fem que varía con el tiempo con una sola frecuencia. No obstante, muchas aplicaciones implican fuentes de fem que varían con el tiempo que reflejan una superposición de muchas frecuencias. En algunas situaciones es necesario filtrar las frecuencias en este tipo de circuito. (Los circuitos RLC en serie pueden usarse como filtros de frecuencias.) Un ejemplo de este tipo de circuito puede encontrarse en los filtros de línea de abonado digital (DSL, del inglés *digital suscriber line*) para hacer conexiones a internet sobre una línea telefónica de casa. La figura 30.21 ilustra un filtro DSL típico.

Una conexión a internet DSL opera a altas frecuencias y está conectada a una línea telefónica de casa. La alta frecuencia de operación de la DSL produce ruido en los teléfonos en la casa. En consecuencia, normalmente en todos estos teléfonos se instala un **filtro de paso de banda** para filtrar el ruido de alta frecuencia creado por la conexión a internet DSL. Los filtros de frecuencia pueden diseñarse para dejar pasar frecuencias bajas y bloquear frecuencias altas (*filtro de paso bajo*), o bien, pasar frecuencias altas y bloquear frecuencias bajas (*filtro de paso alto*). Un filtro de paso bajo puede combinarse con un filtro de paso alto para permitir el paso de un rango de frecuencias (*filtro de paso de banda*) y el bloqueo de las frecuencias fuera de este rango.

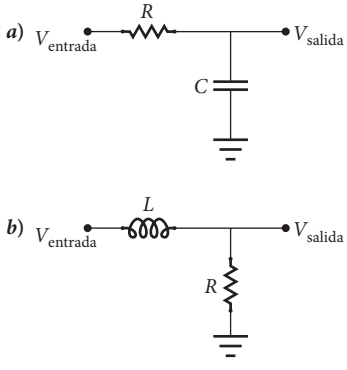


FIGURA 30.22 Dos filtros de paso bajo: *a*) versión RC; *b*) versión RL.

La figura 30.22 presenta dos ejemplos de un filtro de paso bajo, donde $V_{entrada}$ es una fuente de fem que varía con el tiempo con muchas frecuencias. Esencialmente, un filtro de paso bajo es un divisor de voltaje (o divisor de potencial). Parte del voltaje original pasa por el circuito, y parte se va a tierra. Para la versión RC del filtro de paso bajo, mostrado en la figura 30.22*a*), las frecuencias bajas tienen, esencialmente, un circuito abierto, mientras las frecuencias altas son, preferencialmente, enviadas a tierra. Así, por el filtro sólo pasan señales con bajas frecuencias. Este comportamiento tiene sentido, ya que la corriente que va a tierra debe pasar por un capacitor que esencialmente bloquea el flujo de corriente para bajas frecuencias, porque las placas del capacitor están cargándose, mientras la corriente que cambia rápidamente no deja que la carga se acumule sobre las placas del capacitor, permitiendo que la corriente circule. Para la versión RL, mostrada en la figura 30.22*b*), las bajas frecuencias pasan fácilmente por el inductor en tanto las altas frecuencias son bloqueadas. Este efecto se presenta porque la fem autoinducida en un inductor se opone a cambios rápidos en la corriente, bloqueando de manera efectiva la corriente a través del inductor a altas frecuencias, mientras un cambio lento en la corriente produce una fem opuesta mucho menor, lo cual permite la circulación de corriente.

Para cuantificar el desempeño del filtro de paso bajo en la figura 30.22*a*), definimos la sección de entrada del circuito como el resistor y el capacitor. La impedancia de esta sección es $Z_{entrada}=\sqrt{R^2+X_C^2}$. La impedancia de la sección de salida es justamente $Z_{salida}=X_C$. La razón de la fem en el filtro y la fem que sale del filtro es

$$\frac{V_{salida}}{V_{entrada}}=\frac{Z_{salida}}{Z_{entrada}}. \qquad (30.25)$$

Así, la razón de las fem puede escribirse como

$$\frac{V_{\text{salida}}}{V_{\text{entrada}}} = \frac{X_C}{\sqrt{R^2 + X_C^2}} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{R}{X_C}\right)^2 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 R^2 C^2}}. \tag{30.26}$$

Para la versión RL del filtro de paso bajo, mostrado en la figura 30.22*b*), $Z_{\text{entrada}} = \sqrt{R^2 + X_L^2}$ y $Z_{\text{salida}} = R$, se escribe

$$\frac{V_{\text{salida}}}{V_{\text{entrada}}} = \frac{R}{\sqrt{R^2 + X_L^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\omega^2 L^2 / R^2\right)}}. \tag{30.27}$$

La *frecuencia de punto de interrupción*, ω_B, entre la respuesta a bajas y altas frecuencias es la frecuencia a la cual la razón $V_{\text{salida}}/V_{\text{entrada}}$ es $1/\sqrt{2} = 0.707$. A esta frecuencia para la versión RC, tenemos

$$\frac{1}{\sqrt{1 + \omega_B^2 R^2 C^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

a partir de lo cual podemos despejar la frecuencia de punto de interrupción:

$$\omega_B = \frac{1}{RC}. \tag{30.28}$$

Para la versión RL del filtro de paso bajo, la frecuencia de punto de interrupción se obtiene a partir de la ecuación 30.27:

$$\omega_B = \frac{R}{L}. \tag{30.29}$$

La figura 30.23 describe dos ejemplos de un filtro de paso alto. Un filtro de paso alto también es un divisor de voltaje. Para la versión RC del filtro de paso alto, mostrado en la figura 30.23*a*), las señales con bajas frecuencias no pueden pasar del capacitor mientras las señales con altas frecuencias pasan fácilmente. Este comportamiento tiene sentido porque la señal debe pasar por un capacitor que esencialmente bloquea el paso de corriente para bajas frecuencias porque las placas del capacitor se están cargando, mientras la corriente que fluye rápidamente no permite la acumulación de carga sobre las placas del capacitor, lo cual permite el paso de corriente. Para la versión RL, ilustrada en la figura 30.23*b*), las señales con baja frecuencia tienen esencialmente un circuito abierto a tierra, mientras las señales con alta frecuencia están bloqueadas para alcanzar tierra. Así, sólo las señales con frecuencias altas pasarán por el filtro. Este efecto ocurre porque la fem autoinducida en un inductor se opone a los cambios rápidos en la corriente, bloqueando de manera efectiva la corriente a través del inductor a altas frecuencias, mientras un cambio lento en la corriente produce una fem opuesta mucho más pequeña, permitiendo que fluya corriente.

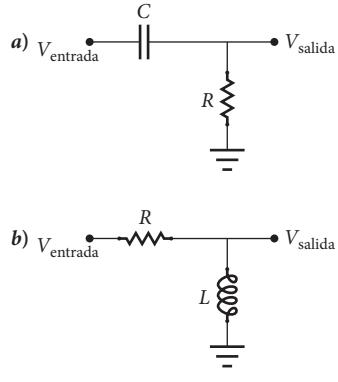


FIGURA 30.23 Dos filtros de paso alto: *a*) versión RC; *b*) versión RL.

Para la versión RC del filtro de paso alto en la figura 30.23*a*), la impedancia de la sección de entrada es $Z_{\text{entrada}} = \sqrt{R^2 + X_C^2}$, mientras la impedancia de la sección de salida es $Z_{\text{salida}} = R$. Entonces, la razón de la fem de salida a la fem de entrada es

$$\frac{V_{\text{salida}}}{V_{\text{entrada}}} = \frac{R}{\sqrt{R^2 + X_C^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + X_C^2/R^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{\omega^2 R^2 C^2}}}. \tag{30.30}$$

Para la versión RL del filtro de paso alto en la figura 30.23*b*), la razón de la fem de salida a la fem de entrada es

$$\frac{V_{\text{salida}}}{V_{\text{entrada}}} = \frac{X_L}{\sqrt{R^2 + X_L^2}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{R^2}{X_L^2} + 1}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{R^2}{\omega^2 L^2}}}. \tag{30.31}$$

Para estos tres filtros de paso alto, conforme la frecuencia crece, la razón de la fem de salida a la fem de entrada tiende a 1, mientras que para bajas frecuencias, la razón de la fem de salida a la fem de entrada tiende a cero. Las frecuencias de punto de interrupción para los filtros de paso alto son las mismas que para los filtros de paso bajo: $\omega_B = 1/(RC)$ para la versión RC y $\omega_B = R/L$ para la versión RL.

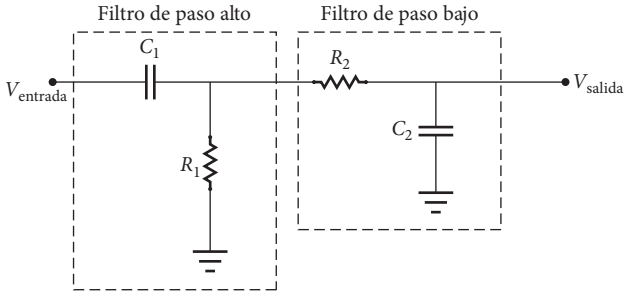


FIGURA 30.24 Filtro de paso de banda que consta de un filtro de paso alto conectado en serie con un filtro de paso bajo.

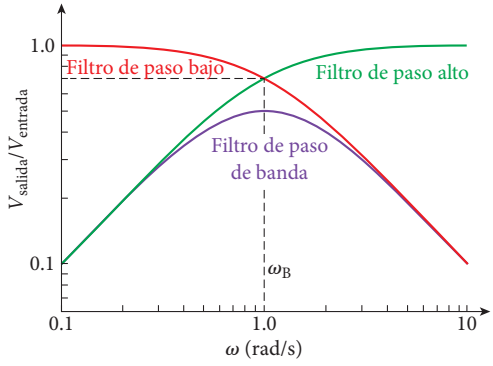


FIGURA 30.25 Respuesta a la frecuencia de un filtro de paso bajo, un filtro de paso alto y un filtro de paso de banda.

La figura 30.24 ilustra un ejemplo de un filtro de paso de banda. Este tipo de filtro consta de un filtro de paso alto conectado en serie con un filtro de paso bajo. Así, se suprimen las bajas frecuencias y las altas frecuencias y se permite que por el filtro pase una estrecha banda de frecuencias.

En la figura 30.25 se muestra la respuesta a la frecuencia de un filtro de paso bajo y de un filtro de paso alto con $R = 50\ \Omega$ y $C = 20$ mF. Para esta combinación de resistencia y capacitancia, la frecuencia de punto de interrupción es

$$\omega_B = \frac{1}{RC} = \frac{1}{(50\ \Omega)(20 \cdot 10^{-3}\ \text{F})} = 1\ \text{rad/s}.$$

En la figura 30.25 también se describe la respuesta a la frecuencia de un filtro de paso de banda con $R_1 = R_2 = 50\ \Omega$ y $C_1 = C_2 = 20$ mF.

EJEMPLO 30.3 Cruces de circuitos para bocinas de audio

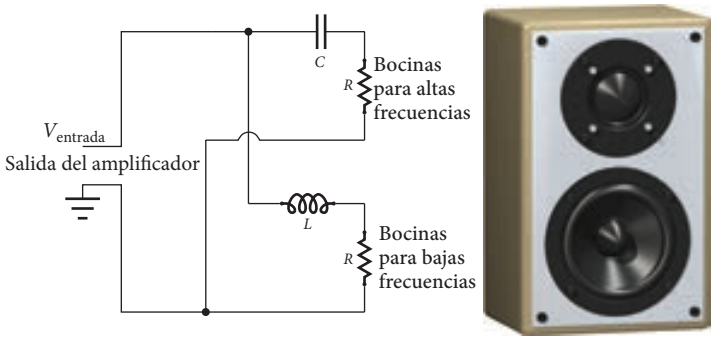


FIGURA 30.26 Cruces de circuitos para bocinas de audio.

Una manera para mejorar el desempeño de un sistema de audio consiste en enviar altas frecuencias a una pequeña bocina denominada *bocina para altas frecuencias* (*tweeter*) y bajas frecuencias a una gran bocina denominada *bocina para bajas frecuencias* (*woofer*). La figura 30.26 muestra un cruce de circuitos simple que preferencialmente pasa altas frecuencias a una bocina para altas frecuencias y bajas frecuencias a una bocina para bajas frecuencias. El cruce de circuitos consta de un filtro de paso alto RC y un filtro de paso bajo RL conectados en paralelo a la salida de un amplificador de audio. Las bocinas actúan como resistores, como ilustra la figura 30.26. La capacitancia y la resistencia de este cruce de circuitos son $C = 10.0\ \mu$F y $L = 10.0$ mH. Cada una de las bocinas tiene una resistencia de $R = 8.00\ \Omega$.

PROBLEMA

¿Cuál es la frecuencia de cruce para este cruce de circuitos?

SOLUCIÓN

Podemos usar la ecuación 30.27 de la respuesta para el filtro de paso bajo RL y la ecuación 30.30 de la respuesta para el filtro de paso alto RC e igualar ambas respuestas:

$$\frac{V_{salida}}{V_{entrada}} = \frac{R}{\sqrt{R^2 + X_L^2}} = \frac{R}{\sqrt{R^2 + X_C^2}}.$$

Por lo tanto, las respuestas del filtro de paso alto y el filtro de paso bajo son las mismas cuando

$$X_L = X_C. \qquad \text{(i)}$$

Podemos volver a escribir la ecuación (i) como

$$\omega_{\text{cruce}} L = \frac{1}{\omega_{\text{cruce}} C},$$

donde ω_{cruce} es la frecuencia angular de cruce. Por lo tanto, la frecuencia angular de cruce es

$$\omega_{\text{cruce}} = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

Queremos determinar la frecuencia de cruce, y puesto que $f = \omega/2\pi$, tenemos

$$f_{\text{cruce}} = \frac{\omega_{\text{cruce}}}{2\pi} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}.$$

Al escribir los valores numéricos, obtenemos

$$f_{\text{cruce}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{(10\text{ mH})(10\ \mu\text{F})}} = 503\text{ Hz}.$$

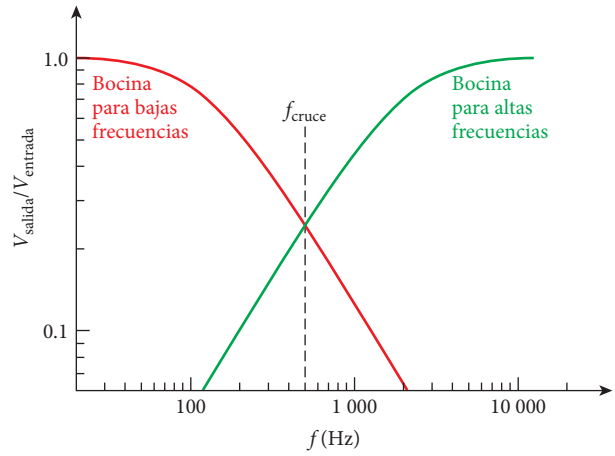


FIGURA 30.27 La respuesta del cruce de circuitos como una función de la frecuencia.

La figura 30.27 presenta la respuesta del cruce de circuitos como una función de la frecuencia. La respuesta de paso bajo y la respuesta de paso alto a través de f_{cruce} = 503 Hz, que envía frecuencias superiores predominantemente a la bocina para altas frecuencias y frecuencias bajas predominantemente a la bocina para bajas frecuencias.

Este simple cruce de circuitos no produce un desempeño ideal de audio sobre una amplia gama de diseños de frecuencias y bocinas. Cruces de circuitos más complicados que tienen mejor desempeño también tienen que ver con frecuencias de gama media.

30.6 Energía y potencia en circuitos AC

Cuando un circuito RLC está en operación, algo de la energía del circuito se almacena en el campo eléctrico del capacitor, algo de la energía se almacena en el campo magnético del inductor y algo de energía se disipa en forma de calor en el resistor. En la mayor parte de las aplicaciones, estamos interesados en el comportamiento en estado estacionario del circuito, comportamiento que ocurre una vez que se extinguen los efectos iniciales (transitorios). (Un análisis matemático completo también toma en cuenta los efectos transitorios, que decaen exponencialmente en una forma semejante a como establece la ecuación 30.6 para un circuito con un solo bucle sin fuente de fem.) La suma de la energía almacenada en el capacitor y en el inductor no cambia en el estado estacionario, como vimos en la sección 30.1. En consecuencia, la energía transferida de la fuente de fem al circuito se transfiere al resistor.

La rapidez a la que esa energía se disipa en el resistor es la potencia, P, dada por

$$P = i^2 R = \left[I \operatorname{sen}(\omega t - \phi)\right]^2 R = I^2 R \operatorname{sen}^2(\omega t - \phi), \tag{30.32}$$

donde la corriente alterna, i, está dada por la ecuación 30.9. Podemos expresar la potencia media, $\langle P \rangle$, usando el hecho de que el valor medio de $\operatorname{sen}^2(\omega t - \phi)$ sobre una oscilación completa es $\frac{1}{2}$:

$$\langle P \rangle = \tfrac{1}{2} I^2 R = \left(\frac{I}{\sqrt{2}}\right)^2 R.$$

En cálculos de potencia y energía, suele ser común usar la **corriente raíz cuadrática media (rcm)**, I_{rcm}. (En general, *raíz cuadrática media*, o *rcm*, significa la raíz cuadrada de la media del cuadrado de una cantidad específica.) A partir de la ecuación 30.32, tenemos $i^2 = \left[I \operatorname{sen}(\omega t - \phi)\right]^2$, y la media (o promedio) de i^2 es $I^2/2$. Por lo tanto, $I_{\text{rcm}} = I/\sqrt{2}$. Entonces, podemos escribir la potencia media como

$$\langle P \rangle = I_{\text{rcm}}^2 R. \tag{30.33}$$

En forma semejante, podemos definir el valor raíz cuadrático medio de otras cantidades que varían con el tiempo, como el voltaje:

$$V_{\text{rcm}} = \frac{V_{\text{m}}}{\sqrt{2}}. \tag{30.34}$$

Los valores de la corriente y el voltaje que suelen citarse para corrientes alternas y que se miden en amperímetros de CA son I_{rcm} y V_{rcm}. Por ejemplo, los enchufes de pared en Estados Unidos suministran $V_{\text{rcm}} = 110$ V, que corresponden a un voltaje máximo de $\sqrt{2}(110\text{ V}) \approx 156$ V.

Podemos volver a escribir la ecuación 30.21 en términos de valores raíz cuadráticos medios al multiplicar ambos lados de la ecuación por $1/\sqrt{2}$:

$$I_{\text{rcm}} = \frac{V_{\text{rcm}}}{Z} = \frac{V_{\text{rcm}}}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \dfrac{1}{\omega C}\right)^2}}. \tag{30.35}$$

Esta forma se usa más a menudo para describir las características de los circuitos de CA.

Podemos describir la potencia media disipada en un circuito CA en una forma diferente al empezar con la ecuación 30.33:

$$\langle P \rangle = I_{\text{rcm}}^2 R = \frac{V_{\text{rcm}}}{Z} I_{\text{rcm}} R = I_{\text{rcm}} V_{\text{rcm}} \frac{R}{Z}. \tag{30.36}$$

A partir de la figura 30.16 vemos que el coseno de la constante de fase es igual a la razón del valor máximo del voltaje a través del resistor al valor máximo de la fem que varía con el tiempo:

$$\cos\phi = \frac{V_R}{V_{\text{m}}} = \frac{IR}{IZ} = \frac{R}{Z}. \tag{30.37}$$

Así, podemos volver a escribir la ecuación 30.36 como sigue:

$$\langle P \rangle = I_{\text{rcm}} V_{\text{rcm}} \cos\phi. \tag{30.38}$$

Esta expresión proporciona la potencia media disipada en un circuito CA, donde el término $\cos\phi$ se denomina **factor de potencia**. Puede ver que para $\phi = 0$, en el circuito se disipa la potencia máxima; es decir, la potencia máxima se disipa en un circuito CA cuando la frecuencia de la fem que varía con el tiempo coincide con la frecuencia de resonancia del circuito.

Podemos combinar las ecuaciones 30.19, 30.35 y 30.36 para obtener una expresión para la potencia media como una función de la frecuencia angular, la inductancia, la resistencia y la frecuencia de resonancia:

$$\langle P \rangle = I_{\text{rcm}} V_{\text{rcm}} \frac{R}{Z} = \frac{V_{\text{rcm}}}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \dfrac{1}{\omega C}\right)^2}} V_{\text{rcm}} \frac{R}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \dfrac{1}{\omega C}\right)^2}},$$

o simplemente

$$\langle P \rangle = \frac{V_{\text{rcm}}^2 R}{R^2 + \left(\omega L - \dfrac{1}{\omega C}\right)^2}.$$

Puesto que $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$, podemos escribir $C = 1/(L\omega_0^2)$, y así encontramos la potencia media para un circuito RLC en serie en términos de la frecuencia angular:

$$\langle P \rangle = \frac{V_{\text{rcm}}^2 R}{R^2 + \left(\omega L - \dfrac{L\omega_0^2}{\omega}\right)^2} = \frac{V_{\text{rcm}}^2 R\omega^2}{R^2\omega^2 + L^2\left(\omega^2 - \omega_0^2\right)^2}. \tag{30.39}$$

El **factor de calidad**, Q, de un circuito RLC en serie se define como

$$Q = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}. \tag{30.40}$$

El factor de calidad es la razón de la energía total almacenada en el sistema dividida entre la energía disipada por ciclo de oscilación. Esta definición es la misma que se usó para los osciladores mecánicos en el capítulo 14. Para un circuito RLC en serie, el factor de calidad caracteriza la

selectividad del circuito. Mientras más alto es el valor de Q, más selectivo es el circuito; es decir, es posible aislar más precisamente una frecuencia (como en un receptor de radio AM, que se analizará a continuación). Mientras más bajo es el valor de Q, menos selectivo se vuelve el circuito.

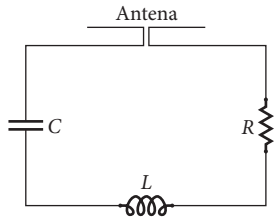


FIGURA 30.28 Circuito RLC en serie en el que la fuente de fem que varía con el tiempo se ha sustituido por una antena. Este circuito puede funcionar como un receptor de radio AM.

Receptor de radio AM

Consideremos un ejemplo típico de un circuito RLC en serie selectivo: un receptor de radio AM. Un receptor de radio AM puede construirse usando un circuito RLC en serie en el que la fuente de fem que varía con el tiempo es suministrada por una antena que detecta transmisiones provenientes de una estación de radio distante que transmite a una frecuencia dada y convierte estas transmisiones en voltaje, como se ilustra en la figura 30.28.

La figura 30.29 es una gráfica de la potencia media como una función de la frecuencia de la señal recibida sobre la antena para el circuito presentado en la figura 30.28, en el supuesto de que $R = 0.09111\ \Omega$, $L = 5.000\ \mu\text{H}$, $C = 6.693\ \text{nF}$ y $V_m = 3.500\ \text{mV}$. La frecuencia angular de resonancia para este circuito es

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{\left(5.000\cdot10^{-6}\ \text{H}\right)\left(6.693\cdot10^{-9}\ \text{F}\right)}} = 5.466\cdot10^{6}\ \text{rad/s},$$

que corresponde a una frecuencia de resonancia de

$$f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{5.466\cdot10^{6}\ \text{rad/s}}{2\pi} = 870.0\ \text{kHz}.$$

El factor de calidad para este circuito es

$$Q = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{\left(5.466\cdot10^{6}\ \text{rad/s}\right)\left(5.000\cdot10^{-6}\ \text{H}\right)}{0.09111\ \Omega} = 300.0.$$

Un método para determinar el factor de calidad aproximado para un circuito RLC en serie consiste en usar la fórmula

$$Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega} = \frac{f_0}{\Delta f},$$

donde $\Delta\omega$ y Δf son los anchos completos a la mitad del máximo de la frecuencia angular y la frecuencia, respectivamente, sobre la curva de potencia. Mientras más alto es el valor de Q, más estrecha es la respuesta de potencia a la frecuencia. En la figura 30.29, $\Delta f = 2.9\ \text{kHz}$, lo cual da un factor de calidad de

$$Q = \frac{f_0}{\Delta f} = \frac{870.0\ \text{kHz}}{2.9\ \text{kHz}} = 300.0.$$

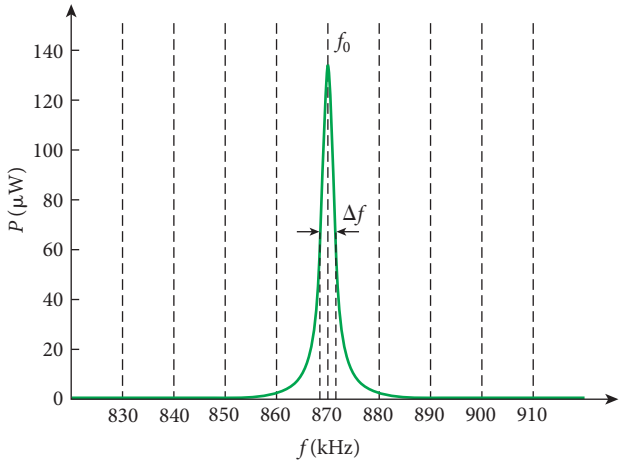


FIGURA 30.29 Respuesta de la potencia de un circuito RLC en serie que funciona como un receptor de radio AM. La etiqueta Δf indica el *ancho completo a la mitad del máximo*, o la diferencia entre las frecuencias en las que la potencia tiene la mitad del valor que tiene en su valor máximo, a la frecuencia f_0.

Este resultado es el mismo que se obtuvo al usar la fórmula que define el factor de calidad en la ecuación 30.40. ¡Observe que estas dos fórmulas para el factor de calidad tienen los mismos resultados sólo para Q alto!

La fórmula alternativa para el factor de calidad de un circuito RLC en serie es semejante a la expresión dada en el capítulo 14 para la calidad de un oscilador mecánico débilmente amortiguado, $Q \cong \dfrac{\omega_0}{2\omega_\gamma}$, donde ω_0 es la frecuencia angular de resonancia y ω_γ es la frecuencia angular de amortiguación.

En la figura 30.29, las frecuencias de canales adyacentes en la banda de radio AM están indicadas por las líneas verticales discontinuas ubicadas a 10 kHz de separación. La respuesta del circuito RLC en serie permite que el receptor de AM sintonice una estación y excluya los canales adyacentes.

30.8 Ejercicio en clase

En la mayor parte de los cafés y en cualquier residencia hay instaladas conexiones inalámbricas WiFi para permitir acceso a internet. La norma WiFi más común se conoce como 802.11 g, que soporta velocidades de comunicación hasta de 54 megabits por segundo. Las redes inalámbricas en Estados Unidos y Canadá que siguen esta norma usan una frecuencia de alrededor de 2.4 GHz en 14 canales diferentes en la banda entre 2.401 GHz y 2.495 GHz. Cada canal tiene ancho completo a la mitad del máximo de 22 MHz. ¿Cuál es el factor de calidad de estas redes WiFi?

a) 0.1 *d*) 109

b) 9.9 *e*) 300

c) 33

PROBLEMA RESUELTO 30.1 Inductancia desconocida en un circuito RL

Considere un circuito RL en serie con una fuente de fem que varía con el tiempo. En este circuito, $V_m = 33.0\ \text{V}$ con $f = 7.10\ \text{kHz}$ y $R = 83.0\ \Omega$. Por el circuito fluye una corriente $I = 0.158\ \text{A}$.

PROBLEMA

¿Cuál es la magnitud de la inductancia, L?

(*continúa*)

(*continuación*)

SOLUCIÓN

PIENSE

El voltaje y la corriente específicos son valores raíz cuadráticos medios implícitos. Podemos relacionar el voltaje y la corriente a través de la impedancia del circuito. La impedancia de este circuito depende de la resistencia y la inductancia, así como de la frecuencia de la fuente de fem.

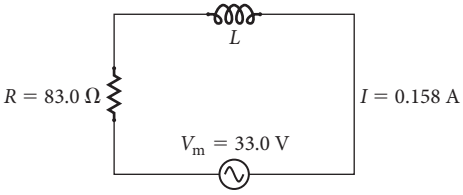


FIGURA 30.30 Un circuito RL en serie.

ESBOCE

La figura 30.30 muestra un diagrama del circuito.

INVESTIGUE

Podemos relacionar la fem que varía con el tiempo, V_m, y la impedancia Z en el circuito:

$$V_m = IZ. \tag{i}$$

La impedancia está dada por

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = \sqrt{R^2 + X_L^2}, \tag{ii}$$

donde R es la resistencia, X_L es la reactancia inductiva y X_C es la reactancia capacitiva, que es cero. La frecuencia angular, ω, del circuito está dada por

$$\omega = 2\pi f,$$

donde f es la frecuencia. Podemos expresar la reactancia inductiva como

$$X_L = \omega L. \tag{iii}$$

SIMPLIFIQUE

Podemos combinar las ecuaciones (i), (ii) y (iii) para obtener

$$Z^2 = R^2 + X_L^2 = \left(\frac{V_m}{I}\right)^2 = R^2 + (\omega L)^2. \tag{iv}$$

Al reordenar la ecuación (iv), obtenemos

$$\omega L = \sqrt{\frac{V_m^2}{I^2} - R^2}.$$

Y, finalmente, encontramos la inductancia desconocida:

$$L = \frac{1}{2\pi f}\sqrt{\frac{V_m^2}{I^2} - R^2}.$$

CALCULE

Al escribir los valores numéricos, obtenemos

$$L = \frac{1}{2\pi\left(7.10\cdot 10^3\ \text{s}^{-1}\right)}\sqrt{\frac{(33.0\ \text{V})^2}{(0.158\ \text{A})^2} - (83.0\ \Omega)^2} = 0.0042963\ \text{H}.$$

REDONDEE

Mostramos nuestro resultado con tres cifras:

$$L = 4.30\cdot 10^{-3}\ \text{H} = 4.30\ \text{mH}.$$

VUELVA A REVISAR

Para corroborar nuestro resultado para la inductancia, primero calculamos la reactancia inductiva:

$$X_L = 2\pi f L = 2\pi\left(7.10\cdot 10^3\ \text{s}^{-1}\right)\left(4.30\cdot 10^{-3}\ \text{H}\right) = 192\ \Omega.$$

Entonces, la impedancia del circuito es

$$Z = \sqrt{R^2 + X_L^2} = \sqrt{(83.0\ \Omega)^2 + (192\ \Omega)^2} = 209\ \Omega.$$

30.9 Ejercicio en clase

En el circuito RL en serie en el Problema resuelto 30.1, ¿cuál es la magnitud de la diferencia de fase entre la fem que varía con el tiempo y la corriente en el circuito?

a) 30.0° *d*) 75.0°

b) 45.0° *e*) 90.0°

c) 66.6°

Usamos este valor de Z para calcular un valor de V_m:

$$V_m = IZ = (0.158\ \text{A})(209\ \Omega) = 33.0\ \text{V},$$

que coincide con el valor especificado en el planteamiento del problema. Así, nuestro resultado es consistente.

30.7 Transformadores

En esta sección se analizan los valores raíz cuadráticos medios de corrientes y voltajes, más que los valores máximos o instantáneos. Cuando se usan los valores raíz cuadráticos medios, el resultado que se obtiene para la potencia siempre es la potencia media. Esta práctica es la convención que suelen seguir científicos, ingenieros y electricistas al trabajar con circuitos de CA.

En un circuito CA que sólo tiene un resistor, la constante de fase es cero. Así, podemos expresar la potencia como

$$P = IV. \tag{30.41}$$

Para una potencia dada suministrada a un circuito, la aplicación dicta la elección de alta corriente o alto voltaje. Por ejemplo, a fin de contar con suficiente potencia para operar una computadora o una aspiradora, usar altos voltajes puede ser peligroso. El diseño de generadores eléctricos es complicado por el uso de altos voltajes. En consecuencia, para estos dispositivos resulta más conveniente usar bajos voltajes y corrientes superiores.

No obstante, la transmisión de potencia eléctrica requiere la condición opuesta. La potencia disipada en una línea de transmisión está dada por $P = I^2R$. Así, la potencia perdida en una línea, como la de la figura 30.31*a*), es proporcional al cuadrado de la corriente en la línea. Como ejemplo, considere una planta de energía que produce 500 MW de potencia. Si la potencia se transmite a 350 kV, la corriente en las líneas de potencia será

$$I = \frac{P}{V} = \frac{500\ \text{MW}}{350\ \text{kV}} = \frac{5 \cdot 10^8\ \text{W}}{3.5 \cdot 10^5\ \text{V}} = 1\,430\ \text{A}.$$

Si la resistencia total de las líneas de potencia es 50 Ω, la potencia perdida en las líneas de transmisión es

$$P = I^2R = (1\,430\ \text{A})^2(50\ \Omega) = 100\ \text{MW},$$

o 20% de la potencia generada. Un cálculo semejante mostraría que la transmisión de 200 kV, en lugar de 350 kV, aumentaría la pérdida de potencia por un factor de 3.1. Así, 60% de la potencia generada se perdería en la transmisión. Ésta es la razón por la cual la transmisión de potencia eléctrica siempre se realiza al máximo voltaje posible.

La capacidad de cambiar el voltaje permite la generación y el uso de potencia eléctrica a bajos voltajes, seguros, pero transmitida al máximo voltaje práctico. Las corrientes y los voltajes alternos se transforman de valores altos a valores bajos por medio de un dispositivo denominado, idóneamente, **transformador**. Un transformador que recibe voltajes bajos y los convierte en altos se denomina *transformador elevador*; uno que toma voltajes altos y los convierte en bajos se denomina *transformador reductor*. Los transformadores son los componentes principales de, por ejemplo, los cargadores de teléfonos celulares (figura 30.32) y la fuente de alimentación de los reproductores de MP3, computadoras portátiles y bastantes otros dispositivos de electrónica de consumo. La mayor parte de estos dispositivos requieren un voltaje de 12 V o menos, pero la red suministra 110 V a las tomas en Estados Unidos, por lo que usted necesita una gran diversidad de transformadores.

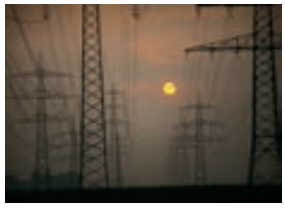
Un transformador consta de dos conjuntos de bobinas alrededor de un núcleo de cobre (figura 30.33). La bobina primaria, con N_p vueltas, está conectada a una fuente de fem descrita por

$$V_{\text{fem}} = V_{\text{máx}} \operatorname{sen} \omega t.$$

Supondremos que la bobina primaria actúa como un inductor. El circuito primario tiene la corriente y el voltaje fuera de fase por $\pi/2$ rad (90°), de modo que el factor de potencia, $\cos\phi$, es cero. Así, la fuente de fem no suministra potencia alguna al transformador si sólo está conectada la bobina primaria. En otras palabras, si la bobina secundaria no está conectada a un circuito

30.5 Oportunidad de autoevaluación

Tal vez usted podría argumentar que la compañía de luz debe simplemente reducir la resistencia en sus líneas de trasmisión a fin de evitar pérdidas de potencia sustanciales. Los alambres típicos para transmisión de potencia eléctrica son del grueso de un dedo. ¿Cuán gruesos deben ser para reducir la resistencia por un factor de 100, en el supuesto de que todos los otros parámetros (material usado, longitud) permanecen iguales? (*Sugerencia*: Consulte la sección 25.3.)



a)

b)

FIGURA 30.31 *a*) Líneas de potencia de alto voltaje; *b*) transformadores para líneas de alimentación residenciales.

FIGURA 30.32 Un transformador (rectángulo negro con núcleo amarillo) es el componente primario de un cargador de teléfono celular. (El cargador también incluye un rectificador descrito en la sección 30.8.)

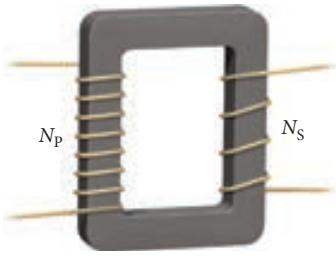


FIGURA 30.33 Transformador con N_P vueltas en la bobina primaria y N_S en la secundaria.

cerrado, el transformador no extrae nada de potencia. Por ejemplo, el cargador de su teléfono celular no extrae potencia si está conectado a un enchufe de pared, pero el otro extremo no está conectado al teléfono. (Esta afirmación no es completamente cierta; hay una resistencia finita en los alambres en la bobina primaria, que no se toma en cuenta en esta descripción.)

La bobina secundaria de un transformador tiene N_S vueltas. La fuente de fem que varía con el tiempo en la bobina primaria induce un campo magnético que varía con el tiempo en el núcleo de hierro. Este núcleo pasa por la bobina secundaria. Así, una tensión que varía con el tiempo se induce en la bobina secundaria, como se describe con la ley de inducción de Faraday:

$$V_{\text{fem}} = -N\frac{d\Phi_B}{dt},$$

donde N es el número de vueltas y Φ_B es el flujo magnético. Debido al núcleo de hierro las dos bobinas, primaria y secundaria, experimentan el mismo flujo magnético variable. Así,

$$V_S = -N_S\frac{d\Phi_B}{dt}$$

y

$$V_P = -N_P\frac{d\Phi_B}{dt},$$

donde V_S y V_P son los voltajes a través de las bobinas secundaria y primaria, respectivamente. Al dividir la primera de estas dos ecuaciones entre la otra y reordenar, se obtiene

$$\frac{V_P}{N_P} = \frac{V_S}{N_S},$$

o bien,

$$V_S = V_P\frac{N_S}{N_P}. \tag{30.42}$$

El transformador cambia el voltaje del circuito primario a un voltaje secundario, dado por la razón del número de vueltas en la bobina secundaria dividida entre el número de vueltas en la bobina primaria.

Si a través de los devanados secundarios se conecta un resistor, R, por la bobina secundaria comienza a fluir una corriente, I_S. Entonces, la potencia en el circuito secundario es $P_S = I_S V_S$. Esta corriente induce un campo magnético que varía con el tiempo que induce un voltaje en la bobina primaria, de modo que luego la fuente de fem produce suficiente corriente, I_p, para mantener el voltaje original. Esta corriente, I_p, está en fase con el voltaje debido al resistor, de modo que es posible transferir potencia al transformador. La conservación de la energía requiere que la potencia suministrada a la bobina primaria sea transferida a la bobina secundaria, de modo que podemos escribir

$$P_P = I_P V_P = P_S = I_S V_S.$$

Al usar la ecuación 30.42, podemos expresar la corriente en el circuito secundario como

$$I_S = I_P\frac{V_P}{V_S} = I_P\frac{N_P}{N_S}. \tag{30.43}$$

La corriente en el circuito secundario es igual a la corriente en el circuito primario multiplicada por la razón del número de vueltas en la bobina primaria dividida entre el número de vueltas en la bobina secundaria.

Cuando el circuito secundario empieza a extraer corriente, es necesario proporcionar corriente al circuito primario. Puesto que $V_S = I_S R$ en el circuito secundario, podemos usar las ecuaciones 30.42 y 30.43 para escribir

$$I_P = \frac{N_S}{N_P}I_S = \frac{N_S}{N_P}\frac{V_S}{R} = \frac{N_S}{N_P}\left(V_P\frac{N_S}{N_P}\right)\frac{1}{R} = \left(\frac{N_S}{N_P}\right)^2\frac{V_P}{R}. \tag{30.44}$$

La resistencia efectiva del circuito primario puede expresarse en términos de $V_P = I_P R_P$, de modo que la resistencia efectiva es

$$R_P = \frac{V_P}{I_P} = V_P\left(\frac{N_P}{N_S}\right)^2\frac{R}{V_P} = \left(\frac{N_P}{N_S}\right)^2 R. \tag{30.45}$$

Observe que hemos supuesto que en el transformador no hay pérdidas, que la bobina primaria es sólo un inductor y que no hay pérdidas en flujo magnético entre las bobinas primaria y secundaria, y que el circuito secundario tiene la única resistencia. Los transformadores reales tienen algunas pérdidas. Parte de estas pérdidas resultan del hecho de que los campos magnéticos alternos de las bobinas inducen corrientes transitorias en el núcleo de hierro del transformador. A fin de contrarrestar este efecto, los núcleos de los transformadores están construidos mediante la laminación de placas de metal, con el propósito de inhibir la formación de corrientes transitorias. Los transformadores modernos pueden transformar voltajes con muy poca pérdida.

Otra aplicación de los transformadores es la **adaptación de impedancia**. La transferencia de potencia entre una fuente de fem y un dispositivo que usa potencia es máxima cuando en ambos la impedancia es la misma. Con frecuencia, la fuente de fem y el dispositivo previsto no tienen la misma impedancia. Un ejemplo común es un amplificador estereofónico y sus bocinas. Por lo general, la impedancia del amplificador es alta, y la de las bocinas, baja. Un transformador colocado entre el amplificador y las bocinas puede ayudar a adaptar las impedancias de los dispositivos, produciendo una transferencia de potencia más eficaz.

30.8 Rectificadores

Muchos dispositivos electrónicos requieren corriente directa en lugar de alterna. No obstante, muchas fuentes comunes de potencia eléctrica suministran corriente alterna. En consecuencia, esta corriente debe convertirse en corriente directa para operar equipo electrónico. Un **rectificador** es un dispositivo que convierte corriente alterna en corriente directa. La mayor parte de los rectificadores usan un componente electrónico que se describió en la sección 25.8: el diodo. Un diodo se diseña para permitir el flujo de corriente en una dirección, pero no en la otra. El símbolo del diodo es , y la dirección de la punta de flecha significa la dirección en la que el diodo conduce corriente.

Empecemos con un circuito simple que contiene una fuente de fem que varía con el tiempo, un resistor y un diodo, como muestra la figura 30.34*b*). El voltaje proporcionado por la fuente de fem es positivo y negativo en forma alterna, como ilustra la figura 30.34*a*). Observe que ambos extremos de la fuente de fem están conectados simultáneamente de modo que cuando un extremo produce un voltaje positivo, el otro produce un voltaje negativo. El circuito en la figura 30.34*b*) produce corriente en el resistor que, en efecto, fluye en una sola dirección. No obstante, el circuito bloquea la mitad de la corriente, como se indica en la figura 30.34*c*). Así, este tipo de circuito a menudo se denomina **rectificador de media onda**.

Para permitir que toda la corriente fluya en una dirección, se usa el tipo de circuito mostrado en la figura 30.35. De nuevo, el voltaje alterna entre positivo y negativo, como se ilustra en la figura 30.35*a*). En las figuras 30.35*b*) y 30.35*c*) se presentan dos diagramas de circuito equivalentes. Toda la corriente en el resistor fluye en una dirección, como indica la figura 30.35*d*). Este tipo de circuito se denomina **rectificador de onda completa**.

Para ilustrar la forma en la que funciona el rectificador de onda completa, la figura 30.36 muestra vistas instantáneas del circuito con voltaje positivo y negativo. En la figura 30.36*a*), el vol-

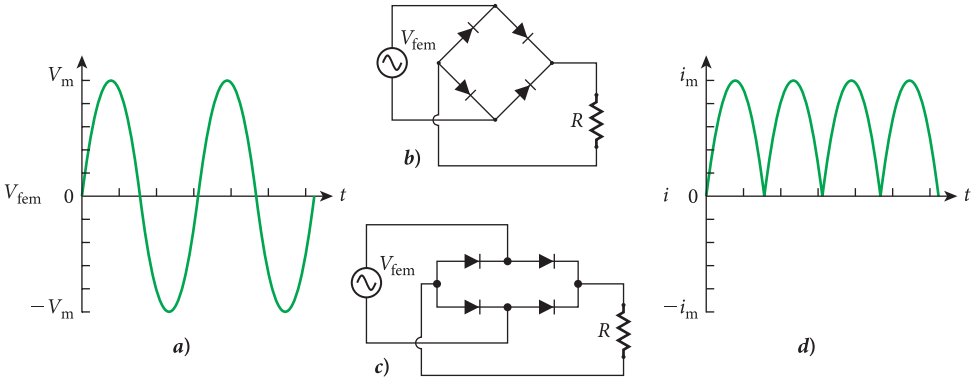


FIGURA 30.35 Circuito que contiene una fuente de fem que varía con el tiempo, un resistor y cuatro diodos, formando un rectificador de onda completa: *a*) la fem como una función del tiempo; *b*) el diagrama de circuito; *c*) otra forma de dibujar el diagrama de circuito; *d*) la corriente que fluye por el circuito como una función del tiempo.

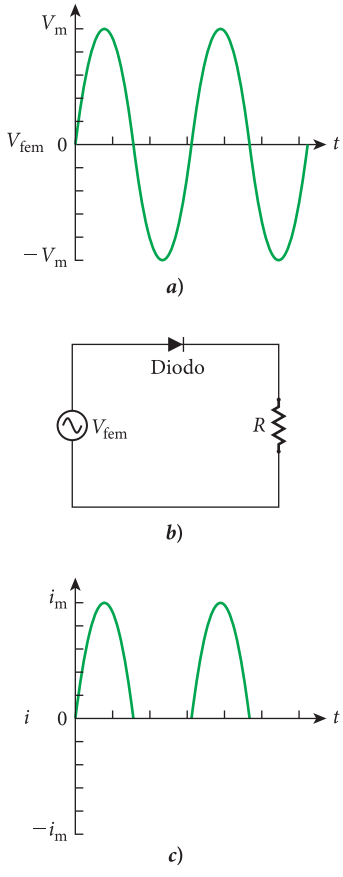


FIGURA 30.34 Circuito que contiene una fuente de fem que varía con el tiempo, un resistor y un diodo, formando un rectificador de media onda: *a*) la fem como una función del tiempo; *b*) el diagrama de circuito; *c*) la corriente que fluye por el circuito como una función del tiempo.

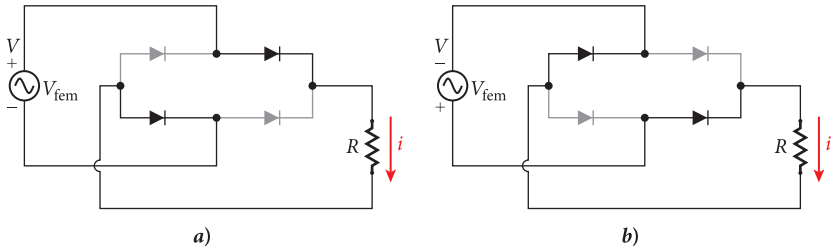


FIGURA 30.36 Rectificador de onda completa con los diodos que no conducen corriente en el instante dado en gris. La corriente en el resistor siempre fluye en la misma dirección. *a*) Voltaje positivo. *b*) Voltaje negativo.

30.6 Oportunidad de autoevaluación

Un alternador típico de uso en los automóviles produce corriente alterna trifásica. Cada fase está desplazada 120° de la siguiente fase. Esboce el diagrama de circuito para el rectificador de onda completa para este alternador con base en el diagrama de circuito en la figura 30.35*c*), pero con seis diodos en lugar de cuatro.

taje de la fuente de fem es positivo. Los diodos negros conducen corriente, mientras los grises, no. En la figura 30.36*b*) se ha invertido el voltaje, y la corriente fluye a través del otro par de diodos; la corriente en el resistor sigue en la misma dirección.

Aunque el rectificador de onda completa no convierte, en efecto, corriente alterna en corriente directa, la corriente directa resultante varía con el tiempo. Esta varianza, a menudo denominada *rizado*, puede alisarse al agregar un capacitor a la salida del rectificador, creando un circuito RC con una constante de tiempo regida por la elección de R y C, como se muestra en la figura 30.37. La figura 30.37*a*) ilustra la fuente de fem que varía con el tiempo, y en la figura 30.37*b*) se presenta el diagrama de circuito. La corriente directa es filtrada por el capacitor agregado. En la figura 30.37*c*) se muestra la corriente resultante como una función del tiempo. La corriente sigue variando con el tiempo pero mucho menos que la corriente que fluye fuera del rectificador de onda completa sin un capacitor.

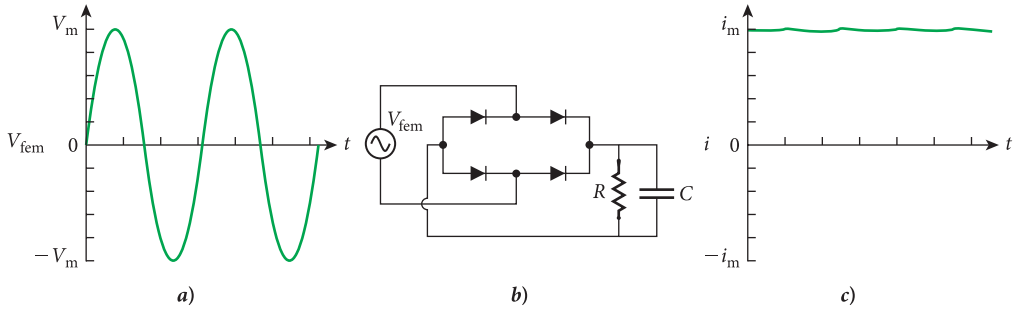


FIGURA 30.37 Circuito que contiene una fuente de fem que varía con el tiempo, un resistor, un capacitor y cuatro diodos, formando un rectificador de onda completa: *a*) la fem como una función del tiempo; *b*) el diagrama de circuito; *c*) la corriente que fluye a través del circuito como una función del tiempo.

LO QUE HEMOS APRENDIDO | GUÍA DE ESTUDIO PARA EXAMEN

- La energía almacenada en el campo eléctrico de un capacitor con capacitancia C y carga q está dada por $U_E = \frac{1}{2}(q^2/C)$; la energía almacenada en el campo magnético de un inductor con inductancia L que conduce una corriente i está dada por $U_B = \frac{1}{2}Li^2$.
- La corriente en un circuito con un solo bucle que contiene un inductor y un capacitor (un circuito LC) oscila con una frecuencia dada por $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$.
- La corriente en un circuito con un solo bucle que contiene un resistor, un inductor y un capacitor (un circuito RLC) oscila con una frecuencia dada por $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - (R/2L)^2}$, donde $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$.
- La carga, q, sobre un capacitor en un circuito RLC con un solo bucle oscila y decrece exponencialmente con el tiempo según $q = q_{máx}\, e^{-Rt/2L} \cos(\omega t)$, donde $q_{máx}$ es la carga original sobre el capacitor.
- Para un circuito con un solo bucle que contiene una fuente de fem que varía con el tiempo y un resistor, R, $V_R = I_R R$, donde V_R e I_R son el voltaje y la corriente, respectivamente.
- Para un circuito con un solo bucle que contiene una fuente de fem que varía con el tiempo cuya frecuencia es ω y un capacitor, $V_C = I_C X_C$, donde V_C e I_C son el voltaje y la corriente, respectivamente, y $X_C = 1/\omega C$ es la reactancia capacitiva.
- Para un circuito con un solo bucle que contiene una fuente de fem que varía con el tiempo cuya frecuencia es $V_L = I_L X_L$, donde V_L e I_L son el voltaje y la corriente, respectivamente, y $X_L = \omega L$ es la reactancia inductiva.
- Para un circuito RLC con un solo bucle que contiene una fuente de fem que varía con el tiempo cuya frecuencia es ω, $V = IZ$, donde V e I son el voltaje y la corriente, respectivamente, y $Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$ es la impedancia.

- La constante de fase, ϕ, entre la corriente y el voltaje en un circuito RLC con un solo bucle que contiene una fuente de fem que varía con el tiempo cuya frecuencia es ω está dada por $\phi = \tan^{-1}\left(\dfrac{X_L - X_C}{R}\right)$.
- La potencia media en un circuito RLC con un solo bucle que contiene una fuente de fem que varía con el tiempo cuya frecuencia es ω está dada por $\langle P \rangle = I_{\text{rcm}} V_{\text{rcm}} \cos\phi$, donde $I_{\text{rcm}} = I_{\text{m}}/\sqrt{2}$ y $V_{\text{rcm}} = V_{\text{m}}/\sqrt{2}$.
- Todas las corrientes, voltajes y potencias citadas para circuitos de corriente alterna (CA) suelen ser valores raíz cuadráticos medios.
- Un transformador con N_{P} vueltas en la bobina primaria y N_{S} vueltas en la bobina secundaria puede convertir un voltaje alterno primario, V_{P}, en un voltaje alterno secundario, V_{S}, dado por $V_{\text{S}} = V_{\text{P}} \dfrac{N_{\text{S}}}{N_{\text{P}}}$, y una corriente alterna primaria, I_{P}, en una corriente alterna secundaria, I_{S}, dada por $I_{\text{S}} = I_{\text{P}} \dfrac{N_{\text{P}}}{N_{\text{S}}}$.

TÉRMINOS CLAVE

circuito LC, p. 959
oscilaciones electromagnéticas, p. 959
circuito RLC, p. 964
corriente alterna (CA), p. 965
fasor, p. 966
reactancia capacitiva, p. 966
reactancia inductiva, p. 968
impedancia, p. 969
resonancia, p. 970
frecuencia angular de resonancia, p. 970
filtro de paso de banda, p. 972
corriente raíz cuadrática media (rcm), p. 975
factor de potencia, p. 976
factor de calidad, p. 976
transformador, p. 979
adaptación de impedancia, p. 981
rectificador, p. 981
rectificador de media onda, p. 981
rectificador de onda completa, p. 981

NUEVOS SÍMBOLOS Y ECUACIONES

$\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$, frecuencia de resonancia de circuitos LC y RLC

$X_C = \dfrac{1}{\omega C}$, reactancia capacitiva

$X_L = \omega L$, reactancia inductiva

$Z = \sqrt{R^2 + \left(X_L - X_C\right)^2}$, impedancia de un circuito de corriente alterna (CA)

$\langle P \rangle = I_{\text{rcm}} V_{\text{rcm}} \cos\phi$, potencia media disipada en un circuito CA

$\phi = \tan^{-1}\left(\dfrac{X_L - X_C}{R}\right)$, constante de fase entre el voltaje y la corriente en un circuito CA

$Q = \dfrac{\omega_0 L}{R}$, factor de calidad de un circuito RLC en serie

N_{P} y N_{S}, el número de vueltas en el primario y en el secundario de un transformador

RESPUESTAS A LAS OPORTUNIDADES DE AUTOEVALUACIÓN

30.1 $\omega_0 = 2\pi f = 2\pi(200\text{ kHz})$ rad/s $= 4\pi \cdot 10^5$ rad/s; $\phi = 0$ puesto que $q(0) = q_{\text{máx}}$

a) Verdadera ($\cos\omega_0 t = -1$)

b) Falsa ($\operatorname{sen}\omega_0 t = 0$)

c) Falsa ($\cos\omega_0 t = -1$ y $\operatorname{sen}\omega_0 t = 0$)

d) Falsa ($\cos\omega_0 t = 0$ y $\operatorname{sen}\omega_0 t = 1$)

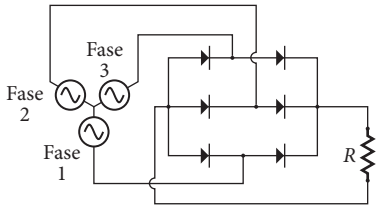
30.2 k/m corresponde a $1/LC$, y $b/2m$ corresponde a $R/2L$. A partir de esto se concluye que la inductancia, L, desempeña el papel de la masa, m; la capacitancia, C, corresponde al inverso de la constante del resorte, $1/k$, y la resistencia, R, tiene la función de la constante de amortiguamiento, b.

30.3 *a*) Verdadera *b*) Verdadera *c*) Falsa

30.4 *a*) Verdadera *b*) Verdadera *c*) Falsa

30.5 La resistencia es inversamente proporcional al inverso del área del alambre y, en consecuencia, inversamente proporcional al cuadrado del radio. Por lo tanto, un alambre, 10 veces más grueso, tiene una resistencia 100 veces menor.

30.6



Puente rectificador de la fase 3

PRÁCTICA PARA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Lineamientos para resolución de problemas

1. La mayor parte de problemas relacionados con circuitos CA requieren el cálculo de la resistencia, la reactancia capacitiva, la reactancia inductiva o la impedancia. Asegúrese de comprender qué es cada una de estas cantidades y cómo usarlas para calcular corrientes y voltajes.

2. A menudo debe distinguir entre la corriente o el voltaje instantáneos en un circuito y el valor raíz cuadrático medio o valor máximo de la corriente o el voltaje. La práctica común suele usar minúsculas *i* y *v* para los valores instantáneos y mayúsculas *I* y *V* para valores constantes (con subíndices cuando es necesario). Asegúrese de usar notación clara, para no confundirse durante los cálculos.

3. Recuerde las relaciones de fase para los circuitos CA: para un resistor, la corriente y el voltaje están en fase; para un capacitor, la corriente adelanta el voltaje; para un inductor, la corriente atrasa el voltaje.

4. Los fasores se suman con operaciones vectoriales, no según la simple aritmética escalar. Cada vez que use fasores para determinar corriente o voltaje, revise los resultados al comprobar las relaciones de fase dadas en el lineamiento precedente.

5. Para analizar circuitos CA suele ser más fácil trabajar con frecuencia angular (ω) que con frecuencia (f). Más a menudo, en el planteamiento del problema se proporciona una frecuencia angular, pero si se proporciona una frecuencia, conviértala a una frecuencia angular multiplicándola por 2π.

PROBLEMA RESUELTO 30.2 Caída de voltaje a través de un inductor

Un circuito RLC en serie tiene una fuente de fem que varía con el tiempo que suministra V_{rcm} = 170.0 V, una resistencia R = 820.0 Ω, una inductancia L = 30.0 mH y una capacitancia C = 0.290 mF. El circuito opera a su frecuencia de resonancia.

PROBLEMA

¿Cuál es la caída de voltaje raíz cuadrática media a través del inductor?

SOLUCIÓN

PIENSE

A la frecuencia de resonancia, la impedancia del circuito es igual a la resistencia. Podemos calcular la corriente raíz cuadrática media en el circuito. Entonces, la caída de voltaje a través del inductor es el producto de la corriente raíz cuadrática media en el circuito y la reactancia inductiva.

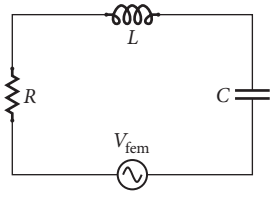


FIGURA 30.38 Un circuito RLC en serie.

ESBOCE

La figura 30.38 muestra un diagrama del circuito RLC en serie.

PLANTEE

En resonancia, la impedancia del circuito es

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = R.$$

En resonancia, la corriente raíz cuadrática media, I_{rcm}, en el circuito está dada por

$$V_{rcm} = I_{rcm} R.$$

La caída de voltaje raíz cuadrática media a través del inductor, V_L, en resonancia es

$$V_L = I_{rcm} X_L,$$

donde la reactancia inductiva X_L se define como

$$X_L = \omega L$$

y ω es la frecuencia angular a la cual opera el circuito. La frecuencia de resonancia ω_0 del circuito es

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

SIMPLIFIQUE

Al combinar estas ecuaciones, obtenemos la caída de voltaje a través del inductor en resonancia:

$$V_L = \left(\frac{V_{rcm}}{R}\right)(\omega_0 L) = \frac{L V_{rcm}}{R}\frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{V_{rcm}}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}.$$

CALCULE

Al escribir los valores numéricos, obtenemos

$$V_L = \frac{170.0\ \text{V}}{820.0\ \Omega}\sqrt{\frac{30.0\cdot 10^{-3}\ \text{H}}{0.290\cdot 10^{-3}\ \text{F}}} = 2.10861\ \text{V}.$$

REDONDEE

Mostramos nuestro resultado con tres cifras:

$$V_L = 2.11\ \text{V}.$$

VUELVA A REVISAR

La caída de voltaje raíz cuadrática media a través del capacitor es

$$V_C = \left(\frac{V_{\text{rcm}}}{R}\right)\left(\frac{1}{\omega_0 C}\right) = \frac{V_{\text{rcm}}}{RC}\sqrt{LC} = \left(\frac{V_{\text{rcm}}}{R}\right)\sqrt{\frac{L}{C}},$$

que es lo mismo que la caída de voltaje raíz cuadrática media a través del inductor. En resonancia, la caída de voltaje instantánea a través del inductor es el negativo de la caída de voltaje a través del capacitor. Por lo tanto, el voltaje rcm a través del capacitor debe ser el mismo que el voltaje rcm a través del inductor. Así, el resultado parece razonable.

PROBLEMA RESUELTO 30.3 Potencia disipada en un circuito RLC

Un circuito RLC en serie tiene una fuente de fem que suministra $V_{\text{rcm}} = 120.0$ V y opera a una frecuencia $f = 50.0$ Hz, un inductor, $L = 0.500$ H, un capacitor, $C = 3.30\ \mu$F y un resistor, $R = 276\ \Omega$.

PROBLEMA

¿Cuál es la potencia media disipada en el circuito?

SOLUCIÓN

PIENSE

La potencia media disipada en el circuito es la corriente rcm multiplicada por el voltaje rcm, aunque depende de la frecuencia angular de la fuente de fem. La corriente en el circuito puede encontrarse usando la impedancia.

ESBOCE

La figura 30.38 muestra un diagrama del circuito RLC en serie.

INVESTIGUE

La frecuencia angular, ω, de la fuente de fem es

$$\omega = 2\pi f.$$

La impedancia, Z, del circuito es

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2},$$

donde la reactancia inductiva está dada por

$$X_L = \omega L$$

y la reactancia capacitiva está dada por

$$X_C = \frac{1}{\omega C}.$$

Podemos encontrar la corriente rcm, I_{rcm}, en el circuito usando la relación

$$V_{\text{rcm}} = I_{\text{rcm}} Z.$$

La potencia media disipada en el circuito, $\langle P \rangle$, está dada por

$$\langle P \rangle = I_{\text{rcm}} V_{\text{rcm}} \cos\phi,$$

(*continúa*)

(*continuación*)

donde ϕ es la constante de fase entre el voltaje y la corriente en el circuito.

$$\phi = \tan^{-1}\left(\frac{X_L - X_C}{R}\right).$$

SIMPLIFIQUE

Podemos combinar todas estas ecuaciones para obtener una expresión para la potencia disipada en el circuito:

$$\langle P\rangle = \frac{V_{\text{rcm}}}{Z} V_{\text{rcm}} \cos\phi = \frac{V_{\text{rcm}}^2}{\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}} \cos\phi.$$

CALCULE

Primero, calculamos la reactancia inductiva:

$$X_L = \omega L = 2\pi f L = 2\pi(50.0\text{ Hz})(0.500\text{ H}) = 157.1\ \Omega.$$

Luego, calculamos la reactancia capacitiva:

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{2\pi f C} = \frac{1}{2\pi(50.0\text{ Hz})(3.30\cdot 10^{-6}\text{ F})} = 964.6\ \Omega.$$

Entonces, la constante de fase es

$$\phi = \tan^{-1}\left(\frac{X_L - X_C}{R}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{157.1\ \Omega - 964.6\ \Omega}{276\ \Omega}\right) = -1.241\text{ rad} = -71.13°.$$

Ahora calculamos la potencia media disipada en el circuito:

$$\langle P\rangle = \frac{(120.0\text{ V})^2}{\sqrt{(276\ \Omega)^2 + (157.1\ \Omega - 964.6\ \Omega)^2}} \cos(-1.241\text{ rad}) = 5.46477\text{ W}.$$

REDONDEE

Mostramos nuestro resultado con tres cifras:

$$\langle P\rangle = 5.46\text{ W}.$$

VUELVA A REVISAR

Para corroborar nuestro resultado, podemos calcular la potencia que se disiparía en el circuito si operara a frecuencia de resonancia. A frecuencia de resonancia, la potencia máxima se disipa en el circuito y la impedancia del circuito es igual a la resistencia del resistor. Por lo tanto, la potencia media máxima es

$$\langle P\rangle_{\text{máx}} = \frac{V_{\text{rcm}}^2}{R} = \frac{(120.0\text{ V})^2}{276\ \Omega} = 52.2\text{ W}.$$

Nuestro resultado para la potencia disipada a $f = 50.0$ Hz es menor que la potencia media máxima, por lo que parece admisible.

PREGUNTAS DE OPCIÓN MÚLTIPLE

30.1 Un resistor de 200 Ω, un inductor de 40.0 mH y un capacitor de 3.0 μF están conectados en serie con una fuente de fem que varía con el tiempo que suministra 10.0 V a una frecuencia de 1 000 Hz. ¿Cuál es la impedancia del circuito?

a) 200 Ω
b) 228 Ω
c) 342 Ω
d) 282 Ω

30.2 ¿Para qué valores de f es $X_L > X_C$?

a) $f > 2\pi(LC)^{1/2}$
b) $f > (2\pi LC)^{-1}$
c) $f > (2\pi(LC)^{1/2})^{-1}$
d) $f > 2\pi LC$

30.3 ¿Cuál de las siguientes afirmaciones sobre la relación de fase entre los campos eléctrico y magnético en un circuito LC es correcta?

a) Cuando un campo está en un máximo, también lo está el otro, y lo mismo es cierto para los valores mínimos.

b) Cuando un campo está en su intensidad máxima, el otro está en intensidad mínima (cero).

c) La relación de fase, en general, depende de los valores de L y C.

30.4 Para el filtro paso de banda que se muestra en la figura 30.24, ¿cómo es posible incrementar el ancho de la respuesta de frecuencia?

a) Al aumentar R_1
b) Al disminuir C_1
c) Al aumentar R_2
d) Al aumentar C_2
e) Al hacer cualquiera de las anteriores.

30.5 La constante de fase, ϕ, entre el voltaje y la corriente en un circuito CA depende de _____.

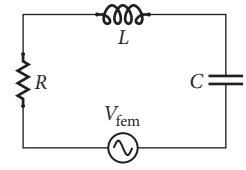
a) La reactancia inductiva
b) La reactancia capacitiva
c) La resistencia
d) Todas las anteriores

30.6 La banda AM de radio cubre el intervalo de frecuencias de 520 kHz a 1 610 kHz. Si se supone una inductancia fija en un circuito LC simple, ¿qué razón de capacitancia es necesaria para cubrir este intervalo de frecuencias? Es decir, ¿cuál es el valor de C_h/C_l, donde C_h es la frecuencia más alta y C_l es la capacitancia para la frecuencia más baja?

a) 9.59
b) 0.104
c) 0.568
d) 1.76

30.7 En el circuito RLC de la figura, $R = 60\ \Omega$, $L = 3$ mH, $C = 4$ mF, y la fuente de fem que varía con el tiempo tiene un voltaje máximo de 120 V. ¿Cuál debe ser la frecuencia angular, ω, para producir la corriente más alta en el resistor?

a) 4.2 rad/s
b) 8.3 rad/s
c) 204 rad/s
d) 289 rad/s
e) 5 000 rad/s
f) 20 000 rad/s



30.8 Un enchufe de pared estándar en Estados Unidos se identifica como de 110 V. Esta identificación indica el valor _____ del voltaje.

a) Medio
b) Máximo
c) Raíz cuadrático medio
d) Instantáneo

PREGUNTAS

30.9 ¿Cuál es la impedancia en un circuito RLC en serie cuando la frecuencia de la fuente de fem que varía con el tiempo se fija en la frecuencia de resonancia del circuito?

30.10 Estime la energía total almacenada en los 5.00 km de espacio arriba de la superficie de la Tierra si la magnitud media del campo magnético en la superficie terrestre es aproximadamente $0.500 \cdot 10^{-4}$ T.

30.11 En un circuito CD que contiene un capacitor, por el circuito fluye corriente sólo durante un lapso muy breve, mientras el capacitor se carga o descarga. Por otra parte, una corriente alterna estable fluye en un circuito que contiene el mismo capacitor, pero alimentado con una fuente de fem que varía con el tiempo. ¿Significa esto que las cargas cruzan el espacio entre las placas (dieléctrico) del capacitor?

30.12 En un circuito RL con corriente alterna, la corriente atrasa el voltaje. ¿Qué significa esto y cómo puede explicarse cualitativamente, con base en el fenómeno de inducción electromagnética?

30.13 En el problema resuelto 30.1, el voltaje aplicado por la fuente de fem que varía con el tiempo es 33.0 V, el voltaje a través del resistor es $V_R = IR = 13.1$ V, y el voltaje a través del inductor es $V_L = IX_L = 30.3$ V. ¿Este circuito obedece las reglas de Kirchhoff?

30.14 ¿Por qué para un circuito CA se especifica la potencia rcm y no una potencia media?

30.15 ¿Por qué no es posible usar un cargador universal que se ajuste en un enchufe eléctrico casero para cargar todos los aparatos eléctricos: teléfono celular, juguete eléctrico, abrelatas, etc., en lugar de usar un cargador por separado con su propio transformador para cada dispositivo?

30.16 Si se usa un capacitor de placas paralelas con aire en el espacio entre las placas como parte de un circuito RLC en un generador, es posible medir la corriente que pasa por el generador. ¿Por qué el espacio de aire en el capacitor no actúa como un circuito abierto, bloqueando todo el flujo de corriente en el circuito?

30.17 Una configuración de alambres común tiene pares torcidos, en oposición a alambres rectos paralelos. ¿Cuál es la ventaja técnica de usar pares torcidos de alambre contra pares rectos paralelos?

30.18 En una demostración en el aula, un núcleo de hierro se inserta en un largo solenoide conectado a una fuente de alimentación CA. El efecto del núcleo es amplificar el campo magnético en el solenoide por la permeabilidad magnética relativa, κ_m, del núcleo (donde κ_m es una constante adimensional, sustancialmente más grande que la unidad para un material ferromagnético introducido en el capítulo 28) o, en forma equivalente, sustituir la permeabilidad magnética del espacio libre, μ_0, por la permeabilidad magnética del núcleo, $\mu = \kappa_m \mu_0$.

a) La corriente raíz cuadrática media medida cae aproximadamente desde 10 A a menos de 1 A y permanece en el valor inferior. Explique por qué.

b) ¿Qué ocurriría si la fuente de alimentación fuese CD?

30.19 A lo largo del Capitol Drive en Milwaukee, Wisconsin, hay un gran número de torres de transmisión. Contrario a lo que se espera, la radiorrecepción es mala; estaciones no deseadas interfieren a menudo con la que se sintoniza. Dado que un sintonizador de radio es un oscilador resonante —su frecuencia de resonancia se ajusta a la de la estación deseada—, explique este fenómeno de interferencia.

30.20 Un circuito RLC en serie está en resonancia cuando es activado por un voltaje sinusoidal a su frecuencia de resonancia, $\omega_0 = (LC)^{-1/2}$. Pero si el mismo circuito es activado por un voltaje de *onda cuadrada* (que se enciende y apaga en forma alterna durante lapsos iguales), presenta resonancia a su frecuencia de resonancia y a $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{7}$, ..., Explique por qué.

30.21 ¿Es posible que la amplitud de voltaje a través del inductor de un circuito RLC en serie exceda la amplitud de voltaje de la fuente de voltaje? ¿Por qué sí o por qué no?

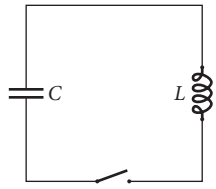
30.22 ¿Por qué no es posible usar un transformador para subir o bajar el voltaje en un circuito CD?

PROBLEMAS

Una • y dos •• indican nivel creciente de la dificultad del problema.

Secciones 30.1 y 30.2

30.23 Para el circuito *LC* en la figura, $L = 32.0$ mH y $C = 45.0$ μF. El capacitor está cargado a $q_0 = 10.0$ μC, el interruptor se cierra a $t = 0$ s, ¿En qué instante la energía almacenada en el capacitor primero es igual a la energía almacenada en el inductor?



30.24 Un capacitor de 2.00 μF se carga por completo al conectarlo con una batería de 12.0 V. El capacitor cargado por completo se conecta después a un inductor de 0.250 H. Calcule *a*) la corriente máxima en el inductor y *b*) la frecuencia de oscilación del circuito LC.

30.25 Un circuito LC consta de un inductor de 1.00 mH y un capacitor cargado por completo. Luego de 2.10 ms, la energía almacenada en el capacitor es la mitad de su valor original. ¿Cuál es la capacitancia?

30.26 La corriente que varía con el tiempo en un circuito LC donde $C = 10.0$ μF está dada por $i(t) = (1.00\text{ A})\,\text{sen}\,(1\,200.\,t)$, donde t está en segundos.

a) ¿En qué instante después de $t = 0$ la corriente alcanza su valor máximo?

b) ¿Cuál es la energía total del circuito?

c) ¿Cuál es la inductancia, *L*?

•**30.27** Un capacitor de 10.0 μF se carga por completo por medio de una batería de 12.0 V y luego se desconecta de la batería, dejando que se descargue a través de un inductor de 0.200 H. Encuentre las tres primeras veces cuando la carga sobre el capacitor es 80.0 μC, tomando $t = 0$ como el instante en el que el capacitor se conecta al inductor.

•**30.28** Un capacitor de 4.00 mF está conectado en serie a un inductor de 7.00 mH. La corriente máxima en los alambres entre el capacitor y el inductor es 3.00 A.

a) ¿Cuál es la energía eléctrica total en este circuito?

b) Escriba una expresión para la carga sobre el capacitor como una función del tiempo, en el supuesto de que el capacitor está cargado por completo en $t = 0$ s.

Sección 30.3

30.29 Un circuito RLC en serie tiene resistencia *R*, inductancia *L* y capacitancia *C*. ¿En qué instante la energía en el circuito alcanza la mitad de su valor inicial?

•**30.30** Un oscilador RLC contiene un resistor de 50.0 Ω y un inductor de 1 mH. ¿Qué capacitancia es necesaria para que la constante de tiempo del circuito (el valor 1.00/*e*) sea igual al periodo de oscilación? Grafique el voltaje a través del resistor como una función del tiempo.

•**30.31** Un capacitor de 2.00 μF se carga por completo cuando está conectado a una batería de 12.0 V. Luego, el capacitor cargado por completo se conecta en serie con un resistor y un inductor: $R = 50.0$ Ω y $L = 0.200$ H. Calcule la frecuencia amortiguada del circuito resultante.

•**30.32** Un circuito LC consta de un capacitor, $C = 2.50$ μF, y un inductor, $L = 4.0$ mH. El capacitor se carga por completo usando una batería y luego se conecta al inductor. Para medir la frecuencia de las oscilaciones en el circuito se usa un osciloscopio. Luego, el circuito se abre y un resistor, *R*, se inserta en serie con el inductor y el capacitor. El capacitor se carga por completo otra vez usando la misma batería y luego se conecta al circuito. Se encuentra que la frecuencia angular de las oscilaciones amortiguadas en el circuito RLC es 20% menor que la frecuencia angular de las oscilaciones en el circuito LC.

a) Determine la resistencia del resistor.

b) ¿Cuánto tiempo después que el capacitor se vuelve a conectar en el circuito la amplitud de la corriente amortiguada por el circuito es 50% del valor inicial?

c) ¿Cuántas oscilaciones amortiguadas completas ocurren en ese tiempo?

Sección 30.4

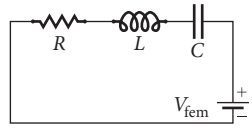
30.33 ¿A qué frecuencia un capacitor de 10.0 μF tiene una reactancia $X_C = 200.\ \Omega$?

30.34 Un capacitor con capacitancia $C = 5.00 \cdot 10^{-6}$ F está conectado a una fuente de alimentación CA cuyo valor máximo es 10.0 V y $f = 100.$ Hz. Encuentre la reactancia del capacitor y la corriente máxima en el circuito.

30.35 Un inductor con inductancia $L = 47.0$ mH está conectado a una fuente de alimentación CA cuyo valor máximo es 12.0 V y $f = 1\,000.$ Hz. Encuentre la reactancia del inductor y la corriente máxima en el circuito.

Sección 30.5

30.36 La figura muestra un circuito con una fuente de fem constante conectada en serie a un resistor, un inductor y un capacitor. ¿Cuál es la corriente de estado estacionario que fluye por el circuito?



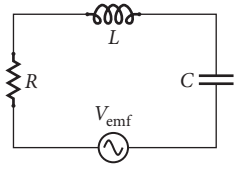
30.37 Un circuito en serie contiene un resistor de 100.0 Ω, un inductor de 0.500 H, un capacitor de 0.400 μF y una fuente de fem que varía con el tiempo que suministra 40.0 V.

a) ¿Cuál es la frecuencia angular de resonancia del circuito?

b) ¿Qué corriente fluye por el circuito a la frecuencia de resonancia?

30.38 Un capacitor variable usado en un circuito RLC produce una frecuencia de resonancia de 5.0 MHz cuando su capacitancia se establece en 15 pF. ¿Cuál es la frecuencia de resonancia cuando la capacitancia se incrementa a 380 pF?

30.39 Determine la constante de fase y la impedancia del circuito RLC mostrado en la figura cuando la frecuencia de la fuente de fem que varía con el tiempo es 1.00 kHz, $C = 100.\ \mu F$, $L = 10.0$ mH y $R = 100\ \Omega$.



30.40 ¿Cuál es la frecuencia de resonancia del circuito RLC en serie del problema 30.39 si $C = 4.00\ \mu F$, $L = 5.00$ mH y $R = 1.00\ k\Omega$? ¿Cuál es la corriente máxima en el circuito si $V_m = 10.0$ V a la frecuencia de resonancia?

•**30.41** En un circuito RLC en serie, $V = (12.0\text{ V})(\text{sen } \omega t)$, $R = 10.0\ \Omega$, $L = 2.00$ H y $C = 10.0\ \mu F$. En resonancia, determine la amplitud del voltaje a través del inductor. ¿Es razonable el resultado, considerando que el voltaje suministrado a todo el circuito tiene una amplitud de 12.0 V?

•**30.42** Una fuente de alimentación CA con $V_m = 220$ V y $f = 60.0$ Hz está conectada a un circuito RLC en serie. La resistencia, R, la inductancia, L, y la capacitancia, C, de este circuito son, respectivamente, 50.0 Ω, 0.200 H y 0.040 mF. Encuentre cada una de las siguientes cantidades:

a) la reactancia inductiva;

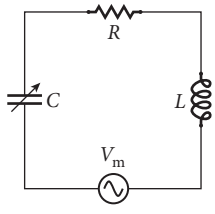
b) la reactancia capacitiva;

c) la impedancia del circuito;

d) la corriente máxima por el circuito, y

e) la diferencia de potencial máxima a través de cada elemento del circuito.

•**30.43** El circuito RLC en serie que se muestra en la figura tiene $R = 2.20\ \Omega$, $L = 9.30$ mH, $C = 2.27$ mF, $V_m = 110$ V y $\omega = 377$ rad/s.



a) ¿Cuál es la corriente máxima, I_m, en este circuito?

b) ¿Cuál es la constante de fase, ϕ, entre el voltaje y la corriente?

c) Es posible variar la capacitancia, C. ¿Qué valor de C permite que ocurran la amplitud máxima de las oscilaciones, y cuáles son las magnitudes de esta corriente, I'_m, y el ángulo de fase, ϕ', entre la corriente y el voltaje?

•**30.44** Diseñe un filtro de paso de banda RC que pase una señal con frecuencia 5.00 kHz, tenga una razón $V_{salida}/V_{entrada} = 0.500$ y tenga una impedancia de 1.00 kΩ a frecuencias muy altas.

a) ¿Qué componentes usaría?

b) ¿Cuál es la fase de V_{salida} con respecto a $V_{entrada}$ a la frecuencia de 5 kHz?

••**30.45** Diseñe un filtro RC de paso alto que rechace ruido en la línea de 60.0 Hz de un circuito usado en un detector. Sus criterios son reducción de la amplitud del ruido en la línea por un factor de 1 000. e impedancia total a altas frecuencias de 2.00 kΩ.

a) ¿Qué componentes usaría?

b) ¿Cuál es el intervalo de frecuencias de las señales que pasarán con por lo menos 90.0% de su amplitud?

Sección 30.6

30.46 ¿Cuál es el valor máximo del voltaje CA cuyo valor raíz cuadrático medio es *a*) 110 V o *b*) 220 V?

30.47 El factor de calidad, Q, de un circuito puede definirse por $Q = \omega_0(U_E + U_B)/P$. Exprese el factor de calidad de un circuito RLC en serie en términos de su resistencia R, inductancia L y capacitancia C.

30.48 La etiqueta en una secadora para cabello indica "110V 1 250W." ¿Cuál es la corriente máxima en la secadora, en el supuesto de que actúa como un resistor?

30.49 Un sintonizador de radio tiene una resistencia de 1.00 μΩ, una capacitancia de 25.0 nF y una inductancia de 3.00 mH.

a) Encuentre la frecuencia de resonancia de este sintonizador de radio.

b) Calcule la potencia en el circuito si una señal a la frecuencia de resonancia produce una fem a través de la antena V_{rms} 1.50 mV.

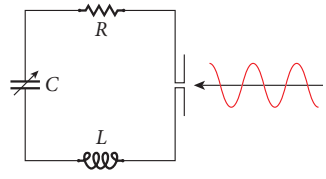
•**30.50** Un circuito tiene conectados en serie un resistor de 100. Ω, un inductor de 0.0500 H, un capacitor de 0.400 μF y una fuente de fem que varía con el tiempo. La fuente de fem que varía con el tiempo es de $V_{rms} = 50.0$ V a una frecuencia de 2 000. Hz.

a) Determine la corriente en el circuito.

b) Determine la caída de voltaje a través de cada componente del circuito.

c) ¿Cuánta potencia se extrae de la fuente de fem?

•**30.51** En la figura se muestra un circuito simple de antena de FM donde $L = 8.22\ \mu H$ y C es variable (el capacitor puede sintonizarse para recibir una estación específica). La señal de radio de una estación de radio de FM produce una fem sinusoidal que varía con el tiempo con una amplitud de 12.9 μV y una frecuencia de 88.7 MHz en la antena.



a) ¿A qué valor, C_0, es necesario sintonizar el capacitor para recibir mejor esta estación?

b) Otra señal de radio de una estación produce una fem sinusoidal que varía con el tiempo con la misma amplitud, 12.9 μV, pero con una frecuencia de 88.5 MHz en la antena. Con el circuito sintonizado para optimizar la recepción a 88.7 MHz, ¿cuál debe ser el valor, R_0, de la resistencia para reducir por un factor de 2 (en comparación con la corriente si el circuito se optimizara para 88.5 MHz) la corriente producida por la señal de esta estación?

Sección 30.7

30.52 La transmisión de energía eléctrica ocurre al máximo voltaje posible para reducir pérdidas. ¿Por cuánto podría reducirse la pérdida de potencia si el voltaje se eleva por un factor de 10?

30.53 Considere el solenoide y la bobina del problema 29.1 como un transformador.

a) Encuentre el voltaje raíz cuadrático medio en la bobina si el solenoide tiene un voltaje raíz cuadrático media de 120 V y una frecuencia de 60 Hz. La longitud del solenoide es 12.0 cm.

b) ¿Cuál es el voltaje en la bobina si la frecuencia es 0 Hz (corriente directa)?

30.54 Un transformador tiene 800 vueltas en la bobina primaria y 40 vueltas en la bobina secundaria.

a) ¿Qué ocurre si por la bobina primaria pasa un voltaje CA de 100. V?

b) Si la CA inicial es 5.00 A, ¿cuál es la corriente de salida?

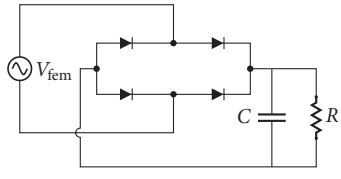
c) ¿Qué ocurre si por la bobina primaria pasa una corriente CD a 100. V?

d) Si la CD inicial es 5.00 A, ¿cuál es la corriente de salida?

30.55 Un transformador contiene una bobina primaria con 200 vueltas y una bobina secundaria con 120 vueltas. La bobina secundaria activa una corriente I a través de un resistor de 1.00 kΩ. Si a través de la bobina primaria se aplica un voltaje $V_{\text{rcm}} = 75.0$ V, ¿cuál es la potencia disipada en el resistor?

Sección 30.8

30.56 Considere el rectificador de onda completa filtrado que se muestra en la figura. Si la frecuencia de la fuente de fem que varía con el tiempo es 60 Hz, ¿cuál es la frecuencia de la corriente resultante?



•**30.57** A la bobina primaria de un transformador se aplica un voltaje $V_{\text{rcm}} = 110$ V a una frecuencia de 60 Hz. La relación del transformador es $N_P/N_S = 11$. La bobina secundaria se usa como la fuente de V_{fem} para el rectificador de onda completa filtrado del problema 30.56.

a) ¿Cuál es el voltaje máximo en la bobina secundaria del transformador?

b) ¿Cuál es la tensión CD suministrada por el resistor?

Problemas adicionales

30.58 El motor de una aspiradora puede considerarse como un inductor con inductancia de 100. mH. Para un voltaje CA, $V_{\text{rcm}} = 115$ V a 60.0 Hz, ¿qué capacitancia debe estar en serie con el motor a fin de maximizar la potencia de salida de la aspiradora?

30.59 Cuando se acciona el dial de un radio, se ajusta un capacitor variable en un circuito LC. Suponga que se sintoniza una estación de AM que transmite a una frecuencia de 1 000. kHz, y que en el circuito de sintonización hay un inductor de 10.0 mH. Una vez que se sintoniza la estación, ¿cuál es la capacitancia del capacitor?

30.60 Un circuito RLC en serie tiene una fuente de fem que varía con el tiempo que suministra 12.0 V a una frecuencia f_0, con $L = 7.00$ mH, $R = 100.$ Ω y $C = 0.0500$ mF.

a) ¿Cuál es la frecuencia de resonancia de este circuito?

b) ¿Cuál es la potencia media disipada en el resistor a esta frecuencia de resonancia?

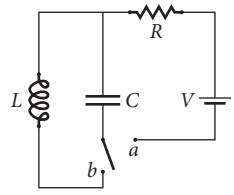
30.61 ¿Cuáles son los valores máximos de *a*) la corriente y *b*) el voltaje, cuando una bombilla incandescente de 60 W (a 110 V) se conecta a un enchufe de pared de 110 V?

30.62 Una fuente de fem de 360 Hz está conectada a un circuito que consta de un capacitor, un inductor de 25 mH y un resistor de 0.80 Ω. Para que la corriente y el voltaje estén en fase, ¿cuál debe ser el valor de C?

30.63 ¿Cuál es la resistencia en un circuito RLC con $L = 65.0$ mH y $C = 1.00$ μF si el circuito pierde 3.50% de su energía total como energía térmica en cada ciclo?

30.64 Se diseña un transformador con 400 vueltas en la bobina primaria y 20 vueltas en la bobina secundaria para suministrar una potencia media de 1 200. W con un voltaje máximo de 60.0 V. ¿Cuál es la corriente máxima en la bobina primaria?

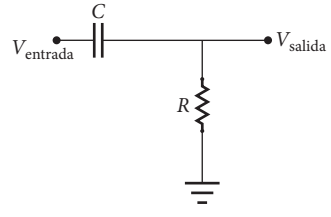
30.65 Un capacitor de 5.00 μF en serie con un resistor de 4.00 Ω se carga con una batería de 9.00 V durante bastante tiempo al cerrar el interruptor (posición *a* en la figura). Luego, el capacitor se descarga por medio de un inductor ($L = 40.0$ mH) al cerrar el interruptor (posición *b*) en $t = 0$.



a) Determine la corriente máxima a través del inductor.

b) ¿Cuándo es la primera vez en la que la corriente está en su máximo?

•**30.66** En el filtro de paso alto que se muestra en la figura, $R = 10.0$ kΩ y $C = 0.0470$ μF. ¿Cuál es la frecuencia a 3.00 dB de este circuito (donde dB significa básicamente lo mismo para la corriente eléctrica que para el sonido en el capítulo 16)? Es decir, ¿a qué frecuencia la razón del voltaje de salida al voltaje de entrada satisface $20 \log (V_{\text{salida}}/V_{\text{entrada}}) = -3.00$?



•**30.67** En el análisis de circuitos RL, RC y RLC en este capítulo se ha supuesto un resistor puramente resistivo, cuya inductancia y capacitancia son exactamente cero. Aunque en general es posible ignorar la capacitancia de un resistor, la inductancia es una parte intrínseca del resistor. En efecto, uno de los resistores más utilizados, las resistencias bobinadas, no es sino un solenoide hecho de alambre altamente resistivo. Suponga que una resistencia bobinada de resistencia desconocida está conectada a una fuente de energía de CD. A una tensión de $V = 10.0$ V a través del resistor, la corriente por el resistor es 1.00 A. Luego, el mismo resistor se conecta a una fuente de alimentación CA que suministra $V_{\text{rcm}} = 10.0$ V a una frecuencia variable. Cuando la frecuencia es 20.0 kHz, por el resistor se mide una corriente, $I_{\text{rcm}} = 0.800$ A.

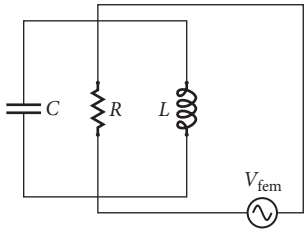
a) Calcule la resistencia del resistor.

b) Calcule la reactancia inductiva del resistor.

c) Calcule la inductancia del resistor.

d) Calcule la frecuencia de la fuente de alimentación CA a la que la reactancia inductiva del resistor excede su resistencia.

•**30.68** Un circuito RLC tiene un capacitor, un resistor y un inductor conectados en paralelo, como ilustra la figura, y conectados a una fuente de fem que varía con el tiempo que suministra una V_{rcm} a la frecuencia f. Encuentre una expresión para I_{rcm} en términos de V_{rcm}, f, L, C y R.



•**30.69** *a*) Un bucle de alambre de 5.00 cm de diámetro conduce una corriente de 2.00 A. ¿Cuál es la densidad de energía del campo magnético en su centro?

b) ¿Qué corriente debe circular en un alambre recto para producir la misma energía en un punto a 4.00 cm del alambre?

•**30.70** Una bombilla de luz de 75 000 W (¡sí, existen ese tipo de cosas!) opera a I_{rcm} = 200 A y V_{rcm} = 440 V en un circuito CA de 60.0 Hz. Encuentre la resistencia, R, y la autoinductancia, L, de esta bombilla. Su reactancia capacitiva es despreciable.

•**30.71** Demuestre que la potencia disipada en un resistor conectado a una fuente de alimentación CA con frecuencia ω oscila con frecuencia 2ω.

•**30.72** Un resistor de 300. Ω está conectado en serie con un capacitor de 4.00 μF y una fuente de fem que varía con el tiempo que suministra V_{rms} = 40.0 V.

a) ¿A qué frecuencia la caída de voltaje a través del capacitor es igual a la caída de voltaje a través del resistor?

b) ¿Cuál es la corriente rms a la que ocurre lo anterior?

•**30.73** Un electroimán consta de 200 vueltas, tiene una longitud de 10.0 cm y un área de la sección transversal de 5.00 cm^2. Encuentre la frecuencia de resonancia de este electroimán cuando está conectado a la Tierra (considere que la Tierra es un capacitor esférico).

•**30.74** Experimentos de laboratorio con circuitos RLC en serie requieren algo de cuidado, ya que estos circuitos producen grandes voltajes en resonancia. Suponga que se tiene un inductor de 1.00 H (que no es difícil de obtener) y una variedad de resistores y capacitores. Diseñe un circuito RLC en serie que resuene a una frecuencia (no la frecuencia angular) de 60.0 Hz y que en resonancia produzca una amplificación del voltaje a través del capacitor o del inductor por un factor de 20.0 veces la tensión de entrada o la tensión a través del resistor.

•**30.75** Un filtro de paso bajo RC particular tiene un punto de interrupción de la frecuencia de 200 Hz. ¿A qué frecuencia debe dividirse el voltaje de salida entre el voltaje de entrada para que sea 0.10?

•**30.76** En un circuito RLC, un resistor de 20.0 Ω, un inductor de 10.0 mH y un capacitor de 5.00 μF están conectados en serie con una fuente de alimentación CA para la cual V_{rcm} = 10.0 V y f = 100. Hz. Calcule

a) la amplitud de la corriente;

b) la fase entre la corriente y el voltaje, y

c) el voltaje máximo a través de cada componente.

31 Ondas electromagnéticas

LO QUE APRENDEREMOS 993

31.1 Campos magnéticos inducidos 993
31.2 Corriente de desplazamiento 994
31.3 Ecuaciones de Maxwell 996
31.4 Soluciones de onda para las ecuaciones de Maxwell 996
Solución propuesta 997
Ley de Gauss para campos eléctricos 997
Ley de Gauss para campos magnéticos 997
Ley de inducción de Faraday 998
Ley de Maxwell-Ampère 999
31.5 La velocidad de la luz 1000
31.6 El espectro electromagnético 1000
Bandas de frecuencia de comunicación 1002
31.7 Ondas electromagnéticas viajeras 1003
31.8 Vector de Poynting y transporte de energía 1004
Ejemplo 31.1 Uso de paneles solares para cargar un automóvil eléctrico 1005
Ejemplo 31.2 Campos eléctrico y magnético raíz cuadráticos medios de la luz solar 1006
31.9 Presión de radiación 1006
Ejemplo 31.3 Presión de radiación de un apuntador láser 1007
Problema resuelto 31.1 Satélite solar estacionario 1008
31.10 Polarización 1010
Ejemplo 31.4 Tres polarizadores 1011
Aplicaciones de la polarización 1013
31.11 Deducción de la ecuación de onda 1014

LO QUE HEMOS APRENDIDO/ GUÍA DE ESTUDIO PARA EXAMEN 1015

Práctica para resolución de problemas 1016
Problema resuelto 31.2 Polarizadores múltiples 1016
Problema resuelto 31.3 Velas solares propulsadas por láser 1018
Preguntas de opción múltiple 1019
Preguntas 1020
Problemas 1021

FIGURA 31.1 El cometa Hale-Bopp con sus dos increíbles colas.

LO QUE APRENDEREMOS

- Campos eléctricos variables inducen campos magnéticos y campos magnéticos variables inducen campos eléctricos.
- Las ecuaciones de Maxwell describen fenómenos electromagnéticos.
- Las ondas electromagnéticas tienen campos eléctricos y campos magnéticos.
- Las soluciones de las ecuaciones de Maxwell pueden expresarse en términos de ondas viajeras que varían sinusoidalmente.
- Para una onda electromagnética, el campo eléctrico es perpendicular al campo magnético y ambos campos son perpendiculares a la dirección en la que se desplaza la onda.
- La velocidad de la luz puede expresarse en términos de constantes relacionadas con campos eléctricos y magnéticos.
- La luz es una onda electromagnética.
- Las ondas electromagnéticas pueden transportar energía y cantidad de movimiento.
- La intensidad de una onda electromagnética es proporcional al cuadrado de la magnitud de la raíz cuadrática media del campo eléctrico de la onda.
- La dirección del campo eléctrico de una onda electromagnética viajera se denomina dirección de polarización.

El cometa Hale-Bopp hizo una aparición espectacular en 1997 (figura 31.1). En la fotografía, son particularmente impactantes las dos colas del cometa. La cola blanca sigue la trayectoria del cometa. Consta de polvo proveniente del cuerpo del cometa, evaporado por el calor del Sol e iluminado por la luz solar. La cola azul apunta directamente lejos del Sol y consta de gas ionizado por el viento solar: la corriente de partículas de alta energía emitidas por el Sol (mencionado en la sección 27.1 en relación con el campo magnético de la Tierra).

En este capítulo analizaremos la naturaleza de la luz, incluida la forma en la que puede transmitir energía y presión a otros objetos. Veremos que la luz es un tipo de onda, denominada *onda electromagnética*, que consta de campos eléctrico y magnético que interactúan. Otros tipos de ondas electromagnéticas que también conoce usted varían desde las ondas de radio y TV, pasando por las microondas, hasta los rayos X. Veremos en qué se parecen y en qué difieren estos tipos. El siguiente capítulo es el primero en centrarse en la óptica: las propiedades y el comportamiento de la luz, y muchas de estas propiedades también se cumplen para otras ondas electromagnéticas.

Observe que la mayor parte de los resultados de este capítulo sólo son válidos para ondas electromagnéticas que se desplazan en el vacío. Para todos los efectos prácticos, no hay ninguna diferencia para ondas electromagnéticas que se desplazan por medios como la atmósfera terrestre. Hay algunas diferencias importantes para ondas electromagnéticas que se propagan a través de otros medios, pero estas ondas no se abordan en este capítulo.

31.1 Campos magnéticos inducidos

En el capítulo 29 vimos que un campo magnético variable induce un campo eléctrico. Según la ley de inducción de Faraday,

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\frac{d\Phi_B}{dt}, \tag{31.1}$$

donde $\vec{E}$ es el campo eléctrico inducido alrededor de un bucle por el flujo magnético variable, Φ_B, a través de ese bucle. En forma semejante, un campo eléctrico variable induce un campo magnético. La **ley de inducción de Maxwell** (así denominada en honor del físico británico James Clerk Maxwell, 1831-1879) describe este fenómeno como

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt}, \tag{31.2}$$

donde $\vec{B}$ es el campo magnético inducido alrededor de un bucle cerrado por un flujo eléctrico variable, Φ_E, a través de ese bucle. Esta ecuación es semejante a la ecuación 31.1, excepto por la constante $\mu_0\epsilon_0$ y la falta de un signo negativo. La constante es una consecuencia de las unidades SI empleadas para campos magnéticos. El hecho de que el miembro derecho de la ecuación 31.2 no tenga signo negativo implica que el campo magnético inducido tiene signo opuesto al del cam-

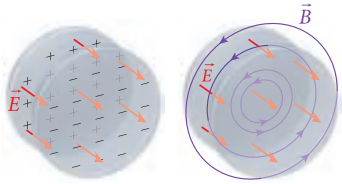


FIGURA 31.2 *a*) Capacitor circular cargado. Las flechas rojas representan el campo eléctrico entre las placas. *b*) Un capacitor con carga creciente con el tiempo. Las flechas rojas representan el campo eléctrico, y los bucles morados representan el campo magnético inducido.

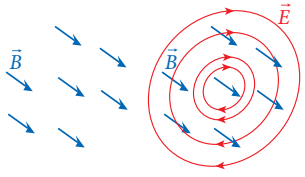


FIGURA 31.3 *a*) Campo magnético uniforme constante. *b*) Un capacitor con carga creciente con el tiempo. Campo magnético uniforme creciente con el tiempo, que induce un campo eléctrico representado por los bucles rojos.

po eléctrico inducido cuando ambos se inducen en condiciones semejantes, como veremos más adelante.

Primero, observe que *no resulta evidente en absoluto* que la ecuación 31.2 puede escribirse en analogía con la ecuación 31.1. Cuando Maxwell escribió por primera vez esta ecuación, representó un paso fundamental hacia la unificación de la electricidad y el magnetismo. Faraday descubrió su ley en 1831, pero transcurrió un cuarto de siglo para que Maxwell descubriera la contraparte. Lo que ahí se plantea como un hecho simple es en realidad el primer gran salto conceptual hacia la unificación de todas las fuerzas físicas de la naturaleza. Esta unificación comenzó con el trabajo de Maxwell hace siglo y medio y continúa en investigaciones actuales de física moderna.

Un capacitor circular puede usarse para ilustrar un campo magnético inducido (figura 31.2). Para el capacitor mostrado en la figura 31.2*a*), la carga es constante, y entre las placas aparece un campo eléctrico constante. No hay campo magnético. Para el capacitor mostrado en la figura 31.2*b*), la carga crece con el tiempo. Así, el flujo eléctrico entre las placas crece con el tiempo. Un campo magnético, $\vec{B}$, se induce, representado por los bucles morados, que también indican la dirección de $\vec{B}$. A lo largo de cada bucle, el vector de campo magnético tiene la misma magnitud y está dirigido tangencialmente al bucle. Cuando la carga deja de crecer, el flujo eléctrico permanece constante y el campo magnético desaparece.

Posteriormente, considere un campo magnético uniforme que también es constante con el tiempo, como en la figura 31.3*a*). En la figura 31.3*b*), el campo magnético sigue siendo uniforme en el espacio, pero crece con el tiempo, lo cual induce un campo eléctrico, indicado por los bucles rojos. El vector de campo eléctrico tiene magnitud constante a lo largo de cada bucle y está dirigido tangencialmente a los bucles como se muestra. Observe que este campo eléctrico inducido apunta en dirección opuesta a la del campo magnético inducido provocado por un campo eléctrico creciente [figura 31.2*b*)].

Ahora, recuerde la ley de Ampère:

$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{s} = \mu_0 i_{\text{enc}}, \tag{31.3}$$

que relaciona la integral alrededor de un bucle del producto de punto del campo magnético y el diferencial de desplazamiento a lo largo del bucle, $\vec{B}\cdot d\vec{s}$, con la corriente que fluye a través de él. No obstante, Maxwell se percató de que esta ecuación es incompleta porque no toma en cuenta las contribuciones al campo magnético originadas por los campos eléctricos variables. Las ecuaciones 31.2 y 31.3 pueden combinarse para obtener una descripción de campos magnéticos creados por cargas móviles y por campos eléctricos variables:

$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{s} = \mu_0\epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt} + \mu_0 i_{\text{enc}}. \tag{31.4}$$

La ecuación 31.4 se denomina **ley de Maxwell-Ampère**. Puede ver que para el caso de corriente constante, como la corriente que fluye en un conductor, esta ecuación se reduce a la ley de Ampère. Para el caso de un campo eléctrico variable sin flujo de corriente, como el campo eléctrico entre las placas de un capacitor, esta ecuación se reduce a la ley de inducción de Maxwell. Es importante destacar que la ley de Maxwell-Ampère describe dos fuentes diferentes de campo magnético: la corriente convencional (según se analizó en el capítulo 28) y el flujo eléctrico variable con el tiempo (que se analizará con más detalle en la siguiente sección).

31.2 Corriente de desplazamiento

Al considerar la ley de Maxwell-Ampère (ecuación 31.4), puede ver que el término $\epsilon_0\, d\Phi_E/dt$ en el miembro derecho de la ecuación debe tener unidades de corriente. Aunque ninguna "corriente" real se "desplaza", este término se denomina **corriente de desplazamiento**, i_d:

$$i_d = \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt}. \tag{31.5}$$

Con esta definición podemos escribir de nuevo la ecuación 31.4 como

$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{s} = \mu_0\left(i_d + i_{\text{enc}}\right).$$

De nuevo, consideremos un capacitor de placas paralelas con placas circulares, ahora colocado en un circuito en el que la corriente, i, fluye mientras el capacitor se carga (figura 31.4). Para un

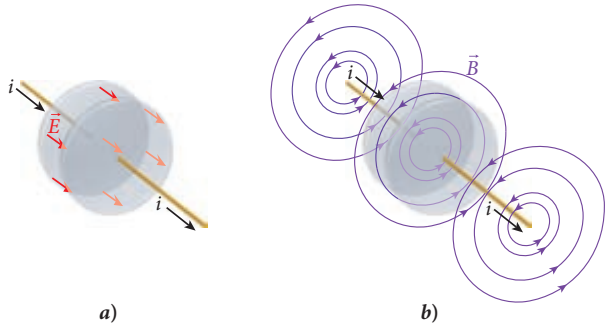


FIGURA 31.4 Un capacitor de placas paralelas en un circuito que está siendo cargado por una corriente, *i*: *a*) el campo eléctrico entre las placas en un instante dado; *b*) el campo magnético alrededor de los alambres y entre las placas del capacitor.

capacitor de placas paralelas, la carga, q, está relacionada con el campo eléctrico entre las placas, E, como sigue (vea el capítulo 24)

$$q = \epsilon_0 AE$$

donde A es el área de las placas. La corriente, i, en el circuito, puede obtenerse al tomar la derivada con respecto al tiempo de esta ecuación:

$$i = \frac{dq}{dt} = \epsilon_0 A \frac{dE}{dt}. \tag{31.6}$$

En el supuesto de que el campo eléctrico entre las placas del capacitor es uniforme, podemos obtener una expresión para la corriente de desplazamiento:

$$i_d = \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt} = \epsilon_0 \frac{d(AE)}{dt} = \epsilon_0 A \frac{dE}{dt}. \tag{31.7}$$

Así, la corriente en el circuito, i, dada por la ecuación 31.6, es igual a la corriente de desplazamiento, i_d, dada por la ecuación 31.7. Aunque entre las placas del capacitor no circula ninguna corriente real, en el sentido de que no hay cargas reales que se muevan a través del espacio de una placa a la otra, la corriente de desplazamiento puede usarse para calcular el campo magnético inducido.

Para calcular el campo magnético entre las dos placas circulares del capacitor, suponemos que el volumen entre las dos placas puede sustituirse por un conductor de radio R que conduce una corriente i_d. En el capítulo 28 vimos que el campo magnético a una distancia perpendicular r del centro del capacitor está dada por

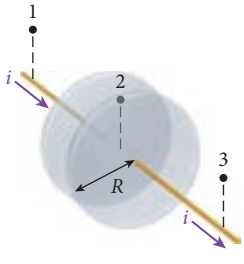
$$B = \left(\frac{\mu_0 i_d}{2\pi R^2}\right) r \qquad (\text{para } r < R).$$

El sistema fuera del capacitor puede tratarse como un alambre conductor de corriente; así, el campo magnético a una distancia perpendicular r del alambre es

$$B = \frac{\mu_0 i_d}{2\pi r} \qquad (\text{para } r > R).$$

31.2 Ejercicio en clase

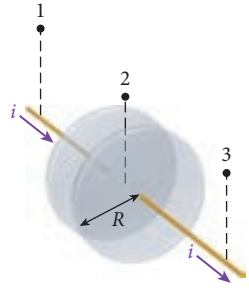
La corriente de desplazamiento, i_d, para el capacitor con placas circulares de radio R que está cargándose y se muestra en la figura, es igual a la corriente de conducción, i, en los alambres. Los puntos 1 y 3 están ubicados a una distancia perpendicular r de los alambres, y el punto 2 está situado a la misma distancia perpendicular r del centro del capacitor, de modo que $r < R$. Clasifique los campos magnéticos en los puntos 1, 2 y 3 de mayor a menor magnitud.



a) $B_1 > B_2 > B_3$
b) $B_3 > B_2 > B_1$
c) $B_1 = B_3 > B_2$
d) $B_2 > B_1 = B_3$
e) $B_1 = B_2 = B_3$

31.1 Ejercicio en clase

La corriente de desplazamiento, i_d, para el capacitor con placas circulares de radio R que está cargándose y se muestra en la figura, es igual a la corriente de conducción, i, en los alambres. Los puntos 1 y 3 están ubicados a una distancia perpendicular r de los alambres, y el punto 2 está situado a la misma distancia perpendicular r del centro del capacitor, de modo que $r > R$. Clasifique los campos magnéticos en los puntos 1, 2 y 3 de mayor a menor magnitud.



a) $B_1 > B_2 > B_3$
b) $B_3 > B_2 > B_1$
c) $B_1 = B_3 > B_2$
d) $B_2 > B_1 = B_3$
e) $B_1 = B_2 = B_3$

31.3 Ecuaciones de Maxwell

La ley de Maxwell-Ampère completa el conjunto de cuatro ecuaciones conocido como **ecuaciones de Maxwell**, que describen las interacciones entre cargas eléctricas, corrientes, campos eléctricos y campos magnéticos. Estas ecuaciones consideran la electricidad y el magnetismo como dos aspectos de una fuerza unificada denominada **electromagnetismo**. Todos los resultados antes descritos para la electricidad y el magnetismo siguen siendo válidos, aunque estas ecuaciones muestran cómo los campos eléctrico y magnético interactúan entre sí, dando origen a un amplio rango de fenómenos electromagnéticos. Este capítulo se centra en las ondas electromagnéticas y el capítulo 34 en la óptica de ondas. En la tabla 31.1 se proporciona un resumen de las ecuaciones de Maxwell. (De nuevo, como recordatorio, la $\oiint d\vec{A}$ en las dos primeras ecuaciones representa integración sobre una superficie cerrada, y $\oint d\vec{s}$ en las dos últimas ecuaciones indica integración sobre una curva cerrada.)

Si examina con detalle las ecuaciones de Maxwell, quizás observe una falta de simetría entre $\vec{E}$ y $\vec{B}$. Esta diferencia surge del hecho de que las cargas eléctricas existen de manera aislada, y cuando las cargas se mueven aparece una corriente correspondiente, pero en la naturaleza no existen cargas magnéticas estacionarias aparentemente no aisladas. Las partículas que hipotéticamente tienen una sola carga magnética (un polo norte o un polo sur, pero no ambos) se denominan *monopolos magnéticos*, aunque empíricamente se ha encontrado que los polos magnéticos siempre existen por pares: un polo norte junto con un polo sur. No hay ninguna razón fundamental para explicar la ausencia de monopolos magnéticos, y mucha investigación se ha dedicado a encontrarlos, pero sin éxito. El más delicado de estos experimentos fue MACRO, en el que se usó un detector de masa que durante muchos años operó en un laboratorio ubicado en las profundidades de la montaña Gran Sasso en Italia. MACRO buscaba monopolos magnéticos en los rayos cósmicos, infructuosamente.

Ahora iniciamos el estudio de las **ondas electromagnéticas**. Estas ondas constan de campos eléctrico y magnético, pueden desplazarse en el vacío sin ningún medio de soporte y no implican cargas o corrientes móviles. La existencia de las ondas electromagnéticas fue demostrada por primera vez por el físico alemán Heinrich Hertz (1857-1894). Hertz usó un circuito RLC que inducía una corriente en un inductor que producía una descarga disruptiva. Una descarga disruptiva se produce entre dos electrodos, cuando se aplica una diferencia de potencial a través de ellos, y se produce una chispa al excitar el gas entre los electrodos. Hertz colocó un circuito y un pequeño descargador separados por varios metros. Observó que en el circuito remoto se inducían chispas que se correlacionaban con las oscilaciones electromagnéticas en el circuito principal RLC. Así, las ondas electromagnéticas eran capaces de desplazarse por el espacio sin necesidad de ningún medio. Por ésta y otras contribuciones, la unidad básica de oscilación, ciclos por segundo, se denomina hertz (Hz) en su honor.

Tabla 31.1 Ecuaciones de Maxwell que describen fenómenos electromagnéticos

Nombre	Ecuación	Descripción
Ley de Gauss para campos eléctricos	$\oiint \vec{E}\cdot d\vec{A} = \frac{q_{\text{enc}}}{\epsilon_0}$	El flujo eléctrico neto a través de una superficie cerrada es proporcional a la carga eléctrica neta encerrada.
Ley de Gauss para campos magnéticos	$\oiint \vec{B}\cdot d\vec{A} = 0$	El flujo magnético neto a través de una superficie cerrada es cero (no existen los monopolos).
Ley de inducción de Faraday	$\oint \vec{E}\cdot d\vec{s} = -\frac{d\Phi_B}{dt}$	Un flujo magnético variable induce un campo eléctrico.
Ley de Maxwell-Ampère	$\oint \vec{B}\cdot d\vec{s} = \mu_0\epsilon_0\frac{d\Phi_E}{dt} + \mu_0 i_{\text{enc}}$	Un flujo eléctrico variable o una corriente induce un campo magnético.

31.4 Soluciones de onda para las ecuaciones de Maxwell

Como se mostrará en la sección 31.11, es posible usar cálculo avanzado para obtener una ecuación de onda general a partir de las ecuaciones de Maxwell si se empieza con la forma diferencial de estas ecuaciones. No obstante, primero supondremos que las ondas electromagnéticas que se pro-

pagan en el vacío (no cargas o corrientes móviles) tienen la forma de una onda viajera y demostraremos que esta forma satisface las ecuaciones de Maxwell.

Solución propuesta

Suponemos que las siguientes ecuaciones expresan los campos eléctrico y magnético en una onda electromagnética en particular que se desplaza en la dirección x positiva:

$$\vec{E}(\vec{r},t) = E_{\text{máx}}\ \text{sen}\left(\kappa x - \omega t\right)\hat{y}$$

y

$$\vec{B}(\vec{r},t) = B_{\text{máx}}\ \text{sen}\left(\kappa x - \omega t\right)\hat{z}, \tag{31.8}$$

donde $\kappa = 2\pi/\lambda$ es el número de onda y $\omega = 2\pi f$ es la frecuencia angular de una onda con longitud de onda λ y frecuencia f. Observe que la magnitud de ambos campos no depende de las coordenadas y o z, sino sólo de la coordenada x y del tiempo. Este tipo de onda, en el que los vectores del campo eléctrico y del campo magnético están en un plano, se denomina **onda plana**. La ecuación 31.8 indica que esta onda electromagnética en particular se desplaza en la dirección x positiva porque, conforme el tiempo t crece, la coordenada x debe crecer a fin de mantener el mismo valor para los campos. La onda descrita por la ecuación 31.8 se muestra en la figura 31.5.

En el caso particular ilustrado en la figura 31.5, el campo eléctrico está completamente en la dirección y y el campo magnético está completamente en la dirección z; es decir, ambos campos son perpendiculares a la dirección de propagación de la onda. Resulta que el campo eléctrico siempre es perpendicular a la dirección en la que se desplaza la onda y siempre es perpendicular al campo magnético. No obstante, en general, para una onda electromagnética que se propaga a lo largo del eje x, el campo eléctrico puede apuntar hacia cualquier parte en el plano xy.

La representación de la onda en la figura 31.5 es una abstracción instantánea. Los vectores mostrados representan la magnitud y dirección de los campos eléctrico y magnético; sin embargo, usted debe percatarse de que estos campos no son objetos sólidos. Nada hecho de materia se mueve realmente hacia la izquierda y hacia derecha, hacia arriba y hacia abajo cuando la onda se desplaza. Los vectores que apuntan hacia la izquierda, hacia la derecha, hacia arriba y hacia abajo representan los campos eléctrico y magnético.

La demostración de que la onda viajera descrita por la ecuación 31.8 cumple todas las ecuaciones de Maxwell requiere bastante cálculo vectorial, aunque también se usan muchos de los conceptos desarrollados en capítulos precedentes. En la siguiente subsección se trabaja con bastante detalle este proceso, una ecuación a la vez.

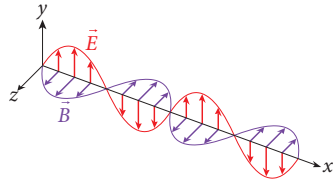


FIGURA 31.5 Representación de una onda electromagnética que se desplaza en la dirección x positiva en un instante dado.

31.3 Ejercicio en clase

Una onda electromagnética plana se desplaza en el vacío. El campo eléctrico de la onda está dado por $\vec{E} = E_{\text{máx}}\cos\left(\kappa x - \omega t\right)\hat{y}$. ¿Cuál de las siguientes ecuaciones describe el campo magnético de la onda?

a) $\vec{B} = B_{\text{máx}}\cos\left(\kappa x - \omega t\right)\hat{x}$

b) $\vec{B} = B_{\text{máx}}\cos\left(\kappa y - \omega t\right)\hat{y}$

c) $\vec{B} = B_{\text{máx}}\cos\left(\kappa z - \omega t\right)\hat{z}$

d) $\vec{B} = B_{\text{máx}}\cos\left(\kappa y - \omega t\right)\hat{z}$

e) $\vec{B} = B_{\text{máx}}\cos\left(\kappa x - \omega t\right)\hat{z}$

Ley de Gauss para campos eléctricos

Empecemos con la ley de Gauss para campos eléctricos. Para una onda electromagnética en el vacío, en ninguna parte hay carga encerrada ($q_{\text{enc}} = 0$); así, debemos demostrar que la solución propuesta de la ecuación 31.8 satisface

$$\oiint \vec{E}\cdot d\vec{A} = 0. \tag{31.9}$$

Escogemos una caja rectangular como la superficie gaussiana que encierra una porción de la representación vectorial de la onda (figura 31.6). Para las caras de la caja en el plano yz, $\vec{E}\cdot d\vec{A}$ es cero porque los vectores $\vec{E}$ y $d\vec{A}$ son perpendiculares entre sí. Lo mismo es cierto para las caras en el plano xy. Las caras en el plano xz contribuyen $+EA_1$ y $-EA_1$, donde A_1 es el área de la cara superior y de la cara inferior. Así, la integral es cero y la ley de Gauss para campos eléctricos se cumple.

Si analizamos la representación vectorial en instantes diferentes, obtendríamos un campo eléctrico diferente. Sin embargo, debido a que el campo eléctrico siempre está en la dirección y, la integral siempre es cero.

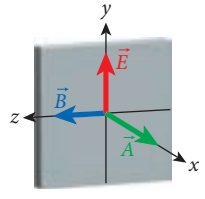


FIGURA 31.6 Superficie gaussiana (caja gris) alrededor de una porción de la representación vectorial de una onda electromagnética que se desplaza en la dirección x positiva. El vector de área se muestra para la cara frontal de la superficie gaussiana.

Ley de Gauss para campos magnéticos

Para la ley de Gauss para campos magnéticos debemos demostrar que

$$\oiint \vec{B}\cdot d\vec{A} = 0. \tag{31.10}$$

Usamos de nuevo la superficie cerrada en la figura 31.6 para la integración. Para las caras en el plano yz y para las caras en el plano xz, $\vec{B}\cdot d\vec{A}$ es cero porque los vectores $\vec{B}$ y $d\vec{A}$ son perpendiculares entre sí. Es lo mismo para las caras en el plano xy. Las caras en el plano xy contribuyen

$+BA_2$ y $-BA_2$, donde A_2 es el área de cada una de las dos caras en el plano xy. Así, la integral es cero y la ley de Gauss para campos magnéticos se cumple.

Ley de inducción de Faraday

Ahora abordaremos la ley de inducción de Faraday:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\frac{d\Phi_B}{dt}. \tag{31.11}$$

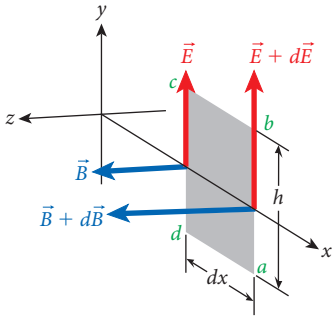


FIGURA 31.7 Dos instantáneas de los campos eléctrico y magnético en una onda electromagnética. El área gris representa un bucle de integración para la ley de Faraday.

Para evaluar la integral en el miembro izquierdo de esta ecuación, suponemos un bucle cerrado en el plano xy que tiene ancho dx y altura h, y que va de a a b a c a d y regresa a a, como se representa por el rectángulo gris en la figura 31.7. El diferencial de área $d\vec{A} = \hat{n}\,dA = \hat{n}h\,dx$ de este rectángulo tiene su vector unitario normal a la superficie, $\hat{n}$, apuntando en la dirección z positiva. Observe que los campos eléctrico y magnético cambian con la distancia a lo largo del eje x. Así, al ir del punto x al punto $x + dx$, el campo eléctrico cambia de $\vec{E}(x)$ a $\vec{E}(x + dx) = \vec{E}(x) + d\vec{E}$.

Para evaluar la integral de la ecuación 31.11 sobre el bucle cerrado, dividimos dicho bucle en cuatro partes, integrando en dirección contraria al sentido del movimiento de las manecillas del reloj de a a b, de b a c, de c a d y de d a a. Las contribuciones a la integral que son paralelas al eje x, por integrar de b a c y de d a a, son cero porque el campo eléctrico siempre es perpendicular a la dirección de integración. Para las integraciones en la dirección y, de a a b y de c a d, el campo eléctrico es paralelo o antiparalelo a la dirección de integración; en consecuencia, el producto escalar se reduce a un producto convencional. Debido a que el campo eléctrico es independiente de la coordenada y, puede extraerse de la integral. Así, la integral a lo largo de cada uno de los segmentos en la dirección y es un simple producto del integrando (la magnitud del campo eléctrico en la coordenada x correspondiente) y la longitud del intervalo de integración (h), multiplicado por -1 para la integración en la dirección y negativa porque $\vec{E}$ es antiparalelo a la dirección de integración. Así, al evaluar la integral se obtiene

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = E\int_a^b ds - E\int_c^d ds = \big(E + dE\big)\big(h\big) - Eh = \big(dE\big)\big(h\big).$$

El miembro derecho de la ecuación 31.11 está dado por

$$-\frac{d\Phi_B}{dt} = -A\frac{dB}{dt} = -\big(h\big)\big(dx\big)\frac{dB}{dt}.$$

Entonces, tenemos

$$\big(h\big)(dE) = -\big(h\big)\big(dx\big)\frac{dB}{dt}$$

o bien,

$$\frac{dE}{dx} = -\frac{dB}{dt}. \tag{31.12}$$

Cada una de las derivadas dE/dx y dB/dt se toma respecto a una variable única, aunque tanto E como B dependen de x y t. Así, podemos escribir la ecuación 31.12 en forma más idónea al usar derivadas:

$$\frac{\partial E}{\partial x} = -\frac{\partial B}{\partial t}. \tag{31.13}$$

Al emplear las formas asumidas para los campos eléctrico y magnético (ecuación 31.8), podemos desarrollar las derivadas parciales:

$$\frac{\partial E}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\Big(E_{\text{máx}}\ \text{sen}\,\big(\kappa x - \omega t\big)\Big) = \kappa E_{\text{máx}}\cos\big(\kappa x - \omega t\big),$$

y

$$\frac{\partial B}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\Big(B_{\text{máx}}\ \text{sen}\,\big(\kappa x - \omega t\big)\Big) = -\omega B_{\text{máx}}\cos\big(\kappa x - \omega t\big).$$

Al sustituir estas expresiones en la ecuación 31.13, se obtiene

$$\kappa E_{\text{máx}}\cos\big(\kappa x - \omega t\big) = -\big[-\omega B_{\text{máx}}\cos\big(\kappa x - \omega t\big)\big].$$

La frecuencia angular y el número de onda están relacionados por medio de

$$\frac{\omega}{\kappa} = \frac{2\pi f}{(2\pi/\lambda)} = f\lambda = c, \tag{31.14}$$

donde c es la velocidad de la onda. (En general, podemos usar v para la velocidad de esta onda. No obstante, escogemos c porque, como veremos, todas las ondas electromagnéticas se propagan en el vacío con una velocidad característica, la velocidad de la luz, que suele estar representada por c.) Entonces, tenemos

$$\frac{E_{\text{máx}}}{B_{\text{máx}}} = \frac{\omega}{\kappa} = c.$$

Podemos usar la ecuación 31.8 para volver a escribir esta ecuación en términos de la razón de las magnitudes de los campos en un sitio y tiempo fijos como

$$\frac{E}{B} = \frac{\left|\vec{E}(\vec{r},t)\right|}{\left|\vec{B}(\vec{r},t)\right|} = \frac{E_{\text{máx}}\left|\text{sen}(\kappa x - \omega t)\right|}{B_{\text{máx}}\left|\text{sen}(\kappa x - \omega t)\right|} = c. \tag{31.15}$$

Por lo tanto, la ecuación 31.8 cumple la ley de inducción de Faraday si la razón de las magnitudes de los campos eléctrico y magnético es c.

Ley de Maxwell-Ampère

Finalmente, abordamos la ley de Maxwell-Ampère. Para ondas electromagnéticas, en las que no circula corriente, podemos escribir

$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{s} = \mu_0\epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt}. \tag{31.16}$$

Para evaluar la integral del miembro izquierdo de esta ecuación, suponemos un bucle cerrado en el plano xz de ancho dx y altura h, representado por el rectángulo gris en la figura 31.8. El diferencial de área de este rectángulo está orientado en la dirección y positiva.

La integral alrededor del bucle en la dirección contraria al sentido del movimiento de las manecillas del reloj (de a a b a c a d a a) está dada por

$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{s} = Bh - (B + dB)(h) = -(dB)(h). \tag{31.17}$$

Como antes, las partes del bucle paralelas al eje x no contribuyen a la integral. El miembro derecho de la ecuación 31.16 puede escribirse como

$$\mu_0\epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt} = \mu_0\epsilon_0 A \frac{dE}{dt} = \mu_0\epsilon_0 (h)(dx)\frac{dE}{dt}. \tag{31.18}$$

Al sustituir las ecuaciones 31.17 y 31.18 en la ecuación 31.16, obtenemos

$$-(dB)(h) = \mu_0\epsilon_0 (h)(dx)\frac{dE}{dt}.$$

Al expresar esta ecuación en términos de derivadas parciales, como hicimos para la ecuación 31.12, obtenemos

$$-\frac{\partial B}{\partial x} = \mu_0\epsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t}.$$

Luego, al usar la ecuación 31.18, tenemos

$$-\left[\kappa B_{\text{máx}} \cos(\kappa x - \omega t)\right] = -\mu_0\epsilon_0\omega E_{\text{máx}} \cos(\kappa x - \omega t),$$

o bien,

$$\frac{E_{\text{máx}}}{B_{\text{máx}}} = \frac{\kappa}{\mu_0\epsilon_0\omega} = \frac{1}{\mu_0\epsilon_0 c}.$$

Podemos expresar esta ecuación en términos de las magnitudes de los campos eléctrico y magnético como antes:

$$\frac{E}{B} = \frac{1}{\mu_0\epsilon_0 c}. \tag{31.19}$$

La ecuación 31.8 satisface la ley de Maxwell-Ampère si la relación de las magnitudes de los campos eléctrico y magnético está dada por $1/\mu_0\epsilon_0 c$.

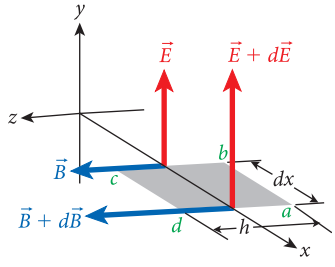


FIGURA 31.8 Representaciones de los campos eléctrico y magnético en una onda electromagnética en un instante dado. El área gris representa una integración sobre un bucle para la ley de Maxwell-Ampère.

31.5 La velocidad de la luz

A partir de las ecuaciones 31.15 y 31.19 podemos concluir que

$$\frac{E}{B} = \frac{1}{\mu_0 \epsilon_0 c} = c,$$

que conduce a

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}. \tag{31.20}$$

Por lo tanto, la velocidad de una onda electromagnética puede expresarse en términos de dos constantes fundamentales relacionadas con los campos eléctrico y magnético: la permeabilidad magnética y la permitividad del espacio libre (en el vacío). Al escribir los valores aceptados de estas constantes en la ecuación 31.20, se obtiene

$$c = \frac{1}{\sqrt{\left(4\pi \cdot 10^{-7}\ \text{H/m}\right)\left(8.85 \cdot 10^{-12}\ \text{F/m}\right)}} = 3.00 \cdot 10^{8}\ \text{m/s}.$$

Esta velocidad calculada es igual a la velocidad medida de la luz. Esta igualdad significa que todas las ondas electromagnéticas se desplazan (en el vacío) a la velocidad de la luz y sugiere que la luz es una onda electromagnética.

La ecuación 31.15 establece que $E/B = c$. Aunque c es un número muy grande, la ecuación 31.15 no significa que la magnitud del campo eléctrico es mucho mayor que la magnitud del campo magnético. De hecho, los campos eléctrico y magnético se miden en unidades diferentes, por lo que una comparación directa no es posible.

La velocidad de la luz desempeña un papel importante en la teoría de la relatividad especial, que analizaremos en el capítulo 35. La velocidad de la luz siempre es la misma en cualquier marco de referencia. Por lo tanto, si usted envía una onda electromagnética en una dirección específica, cualquier observador, sin importar si se mueve hacia usted o se aleja de usted o en otra dirección, verá que la onda se mueve a la velocidad de la luz. Este impresionante resultado, junto con el postulado admisible de que las leyes físicas son las mismas para todos los observadores inerciales, lleva a la teoría de la relatividad especial.

La velocidad de la luz puede medirse con extrema precisión, mucho más precisamente de lo que el metro puede determinarse a partir del patrón de referencia original. En consecuencia, la velocidad de la luz ahora se define precisamente como

$$c = 299\ 792\ 458\ \text{m/s}. \tag{31.21}$$

La definición del metro es ahora simplemente la distancia recorrida por la luz en el vacío en un intervalo de tiempo de 1/299 792 458 s.

31.4 Ejercicio en clase

¿En cuánto tiempo la luz láser viaja de la Tierra a la Luna y regresa a la Tierra? La distancia entre la Tierra y la Luna es $3.84 \cdot 10^{8}$ m.

a) 0.640 s
b) 1.28 s
c) 2.56 s
d) 15.2 s
e) 85.0 s

31.1 Oportunidad de autoevaluación

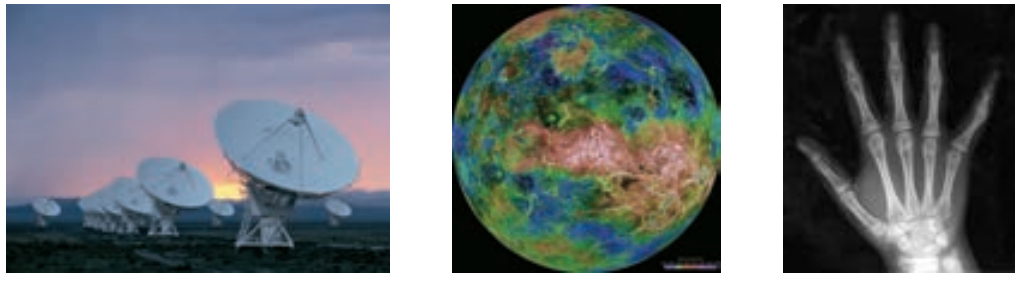
La estrella más brillante en el cielo nocturno es Sirio, que está a una distancia de $8.30 \cdot 10^{16}$ m de la Tierra. Cuando vemos la luz de esta estrella, ¿cuánto tiempo atrás (en años) estamos viendo?

31.6 El espectro electromagnético

Todas las ondas electromagnéticas viajan a la velocidad de la luz. No obstante, la longitud de onda y la frecuencia de las ondas electromagnéticas varían drásticamente. La velocidad de la luz, c, la longitud de onda, λ, y la frecuencia, f, están relacionadas por

$$c = \lambda f. \tag{31.22}$$

Algunos ejemplos de ondas electromagnéticas son la luz, las ondas de radio, las microondas, los rayos X y los rayos gamma. La figura 31.9 muestra tres aplicaciones de las ondas electromagnéticas.



a) *b*) *c*)

FIGURA 31.9 *a*) Radio telescopio de largo alcance. *b*) Imagen en falso color de la superficie de Venus. *c*) Imagen de una mano obtenida con rayos X.

El **espectro electromagnético** se ilustra en la figura 31.10 e incluye ondas electromagnéticas cuyas longitudes de onda varían desde 1 000 m y son más largas hasta menos de 10^{-12} m, con frecuencias correspondientes que varían de 10^5 a 10^{20} Hz. Las ondas electromagnéticas con longitudes de onda (y frecuencias) en ciertos intervalos se identifican con nombres característicos:

- La **luz visible** se refiere a ondas electromagnéticas que podemos ver a simple vista, con longitudes de onda desde 400 nm (azul) hasta 700 nm (rojo). La respuesta máxima del ojo humano es alrededor de 550 nm (verde) y cae rápidamente lejos de esa longitud de onda. Otras longitudes de onda de las ondas electromagnéticas son invisibles para el ojo humano. No obstante, podemos detectarlas por otros medios.
- Las **ondas infrarrojas** (con longitudes de onda justo más largas que la luz visible hasta alrededor de 10^{-4} m) se sienten como calor. Es posible usar detectores de ondas infrarrojas para medir fugas de calor en casas y oficinas, así como para localizar volcanes en gestación. Muchos animales han desarrollado la habilidad para ver ondas infrarrojas, por lo que pueden ver en la oscuridad. Los haces infrarrojos también se usan en grifos automáticos en sanitarios públicos y en unidades de control remoto para televisiones y reproductores de DVD.
- Los **rayos ultravioleta** con longitudes de onda apenas más cortas que la luz visible de algunos nanómetros (10^{-9} m) pueden dañar la piel y provocar quemaduras de sol. Afortunadamente, la atmósfera de la Tierra, en particular su zona de ozono, impide que la mayor parte de los rayos ultravioleta lleguen a la superficie de la Tierra. Los rayos ultravioleta se usan en hospitales para esterilizar instrumental y producir propiedades ópticas como la fluorescencia.
- Las **ondas de radio** tienen frecuencias que varían desde varios cientos de kHz (radio AM) hasta 100 MHz (radio FM). También se usan ampliamente en astronomía porque pueden pasar a través de nubes de polvo y gas que bloquean la luz visible; el telescopio de largo alcance mostrado en la figura 31.9*a*) es una colección de telescopios que usan ondas de radio.
- Las **microondas**, usadas para hacer palomitas en hornos de microondas y transmitir mensajes por teléfono a través de torres o satélites de retransmisión, tienen frecuencias de alrededor de 10 GHz. En el radar se usan ondas con longitudes de onda entre las ondas de radio y las microondas, lo que les permite viajar fácilmente a través de la atmósfera y reflejar objetos cuyo tamaño va desde el de una pelota de baloncesto hasta el de una nube

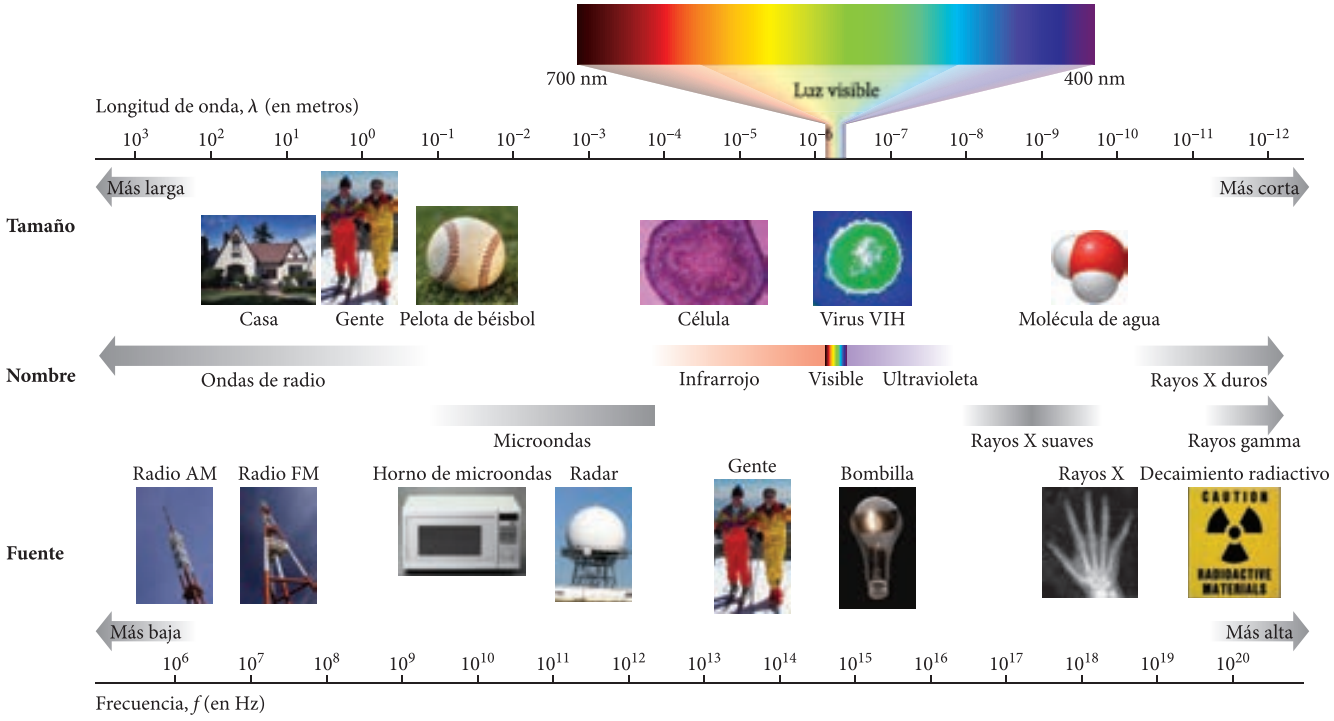


FIGURA 31.10 El espectro electromagnético.

31.2 Oportunidad de autoevaluación

Una estación de radio FM transmite a 90.5 MHz y una estación de radio AM transmite a 870 kHz. ¿Cuáles son las longitudes de onda de estas ondas electromagnéticas?

tormentosa. La figura 31.9*b*) muestra una imagen por radar de la superficie de Venus, que siempre está oscura por nubes que bloquean la luz visible.

- Los **rayos X**, usados para producir imágenes médicas, como la que muestra la figura 31.9*c*), tienen longitudes de onda del orden de 10^{-10} m. Esta longitud es aproximadamente la misma que la distancia entre átomos en un cristal sólido, de modo que los rayos X pueden usarse para determinar la estructura molecular detallada de cualquier material que pueda cristalizarse.
- Los **rayos gamma**, emitidos en el decaimiento de núcleos radiactivos, tienen longitudes de onda muy cortas, del orden de 10^{-12} m, y pueden dañar las células humanas. Se usan a menudo en medicina para destruir células cancerosas o tejidos malignos difíciles de investigar.

Bandas de frecuencia de comunicación

La figura 31.11 muestra los rangos de frecuencia asignados para transmisión por radio y televisión. El rango de frecuencias asignadas a la radio AM (amplitud modulada) va de 535 kHz a 1 705 kHz. La radio FM (frecuencia modulada) usa las frecuencias entre 88.0 MHz y 108.0 MHz. La televisión VHF (frecuencia muy alta) opera en dos rangos: de 54.0 MHz a 88.0 MHz para los canales 2 a 6, y 174.0 MHz a 216.0 MHz para los canales 7 a 13. Los canales de televisión UHF (frecuencia ultraalta) 14 a 83 transmiten en el rango de 512.0 MHz a 698.0 MHz. La mayor parte de las transmisiones de la televisión de alta definición (HDTV) usa una banda UHF y los canales 14 a 83.

Una estación de radio o televisión transmite una señal portadora sobre una frecuencia dada. La señal portadora es una onda senoidal cuya frecuencia es igual a la de la estación transmisora. En el caso de transmisiones AM, la amplitud de la onda portadora es modificada por la información que se transmite, como ilustra la figura 31.12*a*). La modulación de la amplitud de la señal portadora lleva el mensaje transmitido. La figura 31.12*a*) muestra una onda sinoidal muy simple, que indica que se está transmitiendo un tono simple. La señal es recibida por un circuito RLC sintonizado cuya frecuencia de resonancia es igual a la frecuencia de la señal portadora. La corriente inducida en el circuito es proporcional al mensaje que se transmite. La transmisión AM es vulnerable al ruido y pérdida de señal porque el mensaje es proporcional a la amplitud de la señal, que puede cambiar si varían las condiciones.

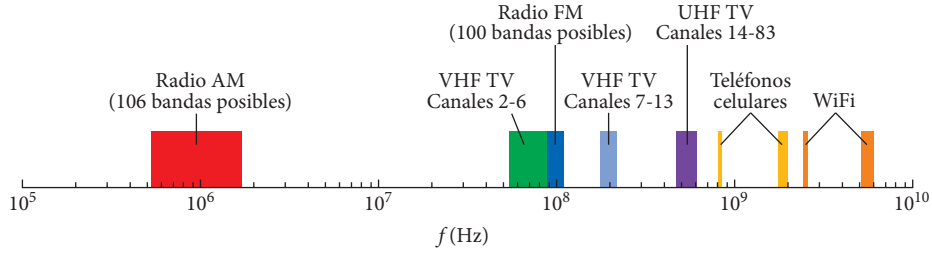


FIGURA 31.11 Bandas de frecuencia asignadas a transmisiones de radio, televisión, teléfonos celulares y conexiones WiFi para computadoras en Estados Unidos.

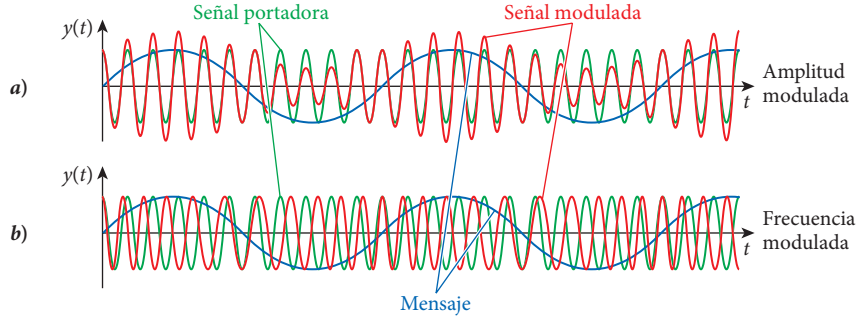


FIGURA 31.12 *a*) Amplitud modulada. *b*) Frecuencia modulada. Para ambos casos, la curva verde representa la señal portadora; la curva roja, la señal modulada y la curva azul significa la información que se está transmitiendo.

Para transmisión FM, la frecuencia de la señal portadora es modificada por el mensaje a fin de producir una señal modulada, como indica la figura 31.12*b*). Este tipo de transmisión resulta mucho menos afectada por el ruido y la pérdida de señal, porque el mensaje se extrae de desplazamientos de frecuencia de la señal portadora, en lugar de extraerla de cambios en la amplitud de la señal portadora. Los receptores de radio FM suelen usar un discriminador Foster-Seeley para demodular la señal FM. Un discriminador Foster-Seeley usa un circuito RLC sintonizado a la frecuencia de la señal portadora y está conectado a dos diodos, semejante al rectificador de onda completa analizado en el capítulo 30. Si la entrada es igual a la frecuencia portadora, las dos mitades del circuito sintonizado producen el mismo voltaje rectificado y la salida es cero. Cuando la frecuencia de la señal portadora cambia, el equilibrio entre las dos mitades del circuito rectificador cambia, resultando en un voltaje proporcional a la desviación de frecuencia de la señal portadora. Un discriminador Foster-Seeley es sensible a variaciones de amplitud y suele acoplarse con una etapa de limitación de amplificación para desensibilizarlo a las variaciones en la intensidad de la onda portadora, permitiendo el paso de señales de más baja potencia, sin afectarlas, mientras elimina los picos de las señales que exceden cierto nivel de potencia.

Los transmisores HDTV emiten información digitalmente en forma de ceros y unos. Un byte de información contiene ocho bits, donde un bit es un cero o un uno. La pantalla se subdivide en elementos de imagen (pixeles) con representaciones digitales del color rojo, verde y azul de cada pixel. Hoy en día, la resolución más alta para HDTV es 1 080i, que tiene 1 920 pixeles en la dirección horizontal y 1 080 pixeles en la dirección vertical. La mitad de la imagen (cualquier otra línea horizontal) se actualiza 60 veces cada segundo, y las dos mitades de la imagen se entrelazan para formar la imagen completa. (Vea la sección 31.10 para más información sobre formatos de video.) La transmisión HDTV usa una técnica de compresión-descompresión (codec), que suele ser la norma conocida como MPEG-2, para reducir la cantidad de datos que deben transmitirse. Una estación HDTV típica transmite alrededor de 17 megabytes de información por segundo.

Las transmisiones por teléfono celular ocurren en las bandas de frecuencia de 824.04 a 848.97 MHz y de 1.85 a 1.99 GHz. Las conexiones inalámbricas Wifi de datos para computadoras operan en los rangos de 2.401 a 2.484 GHz (para la norma internacional; la banda estándar en Estados Unidos tiene un límite superior de 2.473 GHz) y de 5.15 a 5.85 GHz. Estas frecuencias están en el rango de las microondas, y algunas personas se preocupan por la exposición prolongada a ondas electromagnéticas emitidas por los teléfonos celulares y WiFi. No obstante, la potencia relativamente baja de estos dispositivos combinada con el hecho de que la energía de estas ondas es mucho menor que la de otras ondas que suelen encontrarse, como la luz visible, es suficiente argumento para pensar que hay poco peligro en el uso de teléfonos celulares y WiFi. En el capítulo 37 sobre mecánica cuántica se analizará la energía de los fotones asociados con las ondas electromagnéticas.

31.7 Ondas electromagnéticas viajeras

Los procesos subatómicos pueden producir ondas electromagnéticas como rayos gamma, rayos X y luz. Las ondas electromagnéticas también pueden producirse con un circuito RLC conectado a una antena (figura 31.13). La conexión entre el circuito RLC y la antena ocurre por medio de un transformador. Una antena dipolo se usa para aproximar un dipolo eléctrico. El voltaje y la corriente en la antena varían sinusoidalmente con el tiempo y hacen que el flujo de carga en la antena oscile con la frecuencia, ω_0, del circuito RLC. Las cargas aceleradas crean **ondas electromagnéticas viajeras**, las cuales se desplazan desde la antena a una velocidad c y frecuencia $f = \omega_0/(2\pi)$.

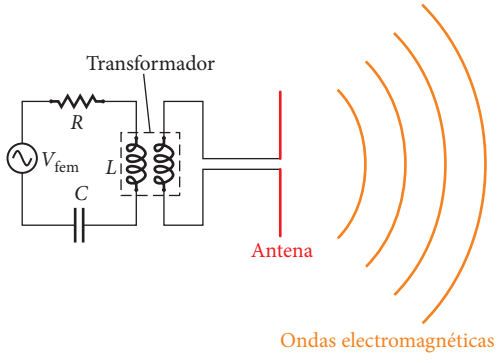


FIGURA 31.13 Circuito RLC acoplado con una antena que emite ondas electromagnéticas viajeras.

Las ondas electromagnéticas viajeras se propagan como frentes de onda que se distribuyen esféricamente desde la antena. No obstante, a una gran distancia de la antena, los frentes de onda parecen casi planos o planos. Así, una de estas ondas viajeras es descrita por la ecuación 31.8. Si un segundo circuito RLC se sintoniza a la misma frecuencia, ω_0, cuando el circuito emisor se coloca en la trayectoria de estas ondas electromagnéticas, en el segundo circuito se inducen voltaje y corriente. Estas oscilaciones inducidas constituyen la idea básica de la transmisión y recepción por radio. Si el segundo circuito tiene $\omega = 1/\sqrt{LC}$, diferente de ω_0, se inducen voltajes y corrientes mucho menores. Sólo si la frecuencia de resonancia del circuito receptor es la misma o es muy próxima a la frecuen-

cia transmitida, se induce alguna señal en el circuito receptor. Por lo tanto, el receptor puede escoger una transmisión con una frecuencia dada y rechazar todas las demás.

El principio de transmisión de ondas electromagnéticas fue descubierto por Heinrich Hertz en 1888, según se describió en la sección 31.3, y fue usado por el físico italiano Guglielmo Marconi (1874-1937) para transmitir señales inalámbricas.

31.8 Vector de Poynting y transporte de energía

Cuando usted camina bajo la luz solar siente calor. Si permanece mucho tiempo bajo dicha luz, usted presentará quemaduras de piel. Estos fenómenos son ocasionados por las ondas electromagnéticas emitidas por el Sol. Estas ondas electromagnéticas transportan energía generada en las reacciones nucleares en el núcleo del Sol.

La razón a la que una onda electromagnética transporta energía suele definirse en términos de un vector, $\vec{S}$, dado por

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0}\vec{E}\times\vec{B}. \tag{31.23}$$

Esta cantidad se denomina **vector de Poynting**, en honor del físico británico John Poynting (1852-1914), quien fue el primero en analizar sus propiedades. La magnitud de $\vec{S}$ está relacionada con la razón instantánea a la que la energía es transportada por una onda electromagnética sobre un área dada, o simplemente, la potencia instantánea por unidad de área:

$$S = |\vec{S}| = \left(\frac{\text{potencia}}{\text{área}}\right)_{\text{instantánea}}. \tag{31.24}$$

Así, las unidades del vector de Poynting son watts por metro cuadrado (W/m^2).

Para una onda electromagnética, donde $\vec{E}$ es perpendicular a $\vec{B}$, la ecuación 31.23 produce

$$S = \frac{1}{\mu_0}EB.$$

Según la ecuación 31.15, las magnitudes del campo eléctrico y del magnético están relacionadas directamente por $E/B = c$. Por lo tanto, podemos expresar la potencia instantánea por unidad de área de una onda electromagnética en términos de la magnitud del campo eléctrico o de la magnitud del campo magnético. Puesto que suele ser más fácil medir un campo eléctrico que un campo magnético, la potencia instantánea por unidad de área está dada por

$$S = \frac{1}{c\mu_0}E^2. \tag{31.25}$$

Ahora podemos sustituir una forma sinusoidal para el campo eléctrico, $E = E_{\text{máx}}\,\text{sen}(\kappa x - \omega t)$, y obtener una expresión para la potencia transmitida por unidad de área. No obstante, la forma usual para describir la potencia por unidad de área en una onda electromagnética es la intensidad, I, de la onda, dada por

$$I = S_{\text{prom}} = \left(\frac{\text{potencia}}{\text{área}}\right)_{\text{prom}} = \frac{1}{c\mu_0}\left[E_{\text{máx}}^2\,\text{sen}^2(\kappa x - \omega t)\right]_{\text{prom}}.$$

Las unidades de intensidad son las mismas que las del vector de Poynting, W/m^2. El valor promediado en el tiempo de $\text{sen}^2(\kappa x - \omega t)$ es $\frac{1}{2}$, de modo que podemos expresar la intensidad como

$$I = \frac{1}{c\mu_0}E_{\text{rcm}}^2, \tag{31.26}$$

donde $E_{\text{rcm}} = E_{\text{máx}}/\sqrt{2}$.

Debido a que las magnitudes de los campos eléctrico y magnético de una onda electromagnética están relacionados por $E = cB$ y c es un número muy grande, podríamos concluir que la energía transportada por el campo eléctrico es mucho mayor que la energía transportada por el campo magnético. En realidad, estas energías *son iguales*. Para ver esto, recuerde de los capítulos 24 y 29 que la densidad de energía de un campo eléctrico está dada por

$$u_E = \tfrac{1}{2}\epsilon_0 E^2,$$

y que la densidad de energía de un campo magnético está dada por

$$u_B = \frac{1}{2\mu_0} B^2.$$

Si sustituimos $E = cB$ y $c = 1/\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}$ en la expresión para la densidad de energía del campo eléctrico, obtenemos

$$u_E = \frac{1}{2}\epsilon_0 (cB)^2 = \frac{1}{2}\epsilon_0 \left(\frac{B}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}\right)^2 = \frac{1}{2\mu_0} B^2 = u_B. \tag{31.27}$$

Así, la densidad de energía del campo eléctrico es la misma que la densidad de energía del campo magnético en todas partes en la onda electromagnética.

EJEMPLO 31.1 Uso de paneles solares para cargar un automóvil eléctrico

Paneles solares fotovoltaicos (potencia solar a potencia eléctrica) [figura 31.14*a*)] pueden instalarse en el techo de una casa a un costo por área de $\eta = \$1\ 430/\text{m}^2$. Suponga que usted tiene un automóvil eléctrico [figura 31.14*b*)] que requiere una carga correspondiente a una energía de $U = 8.0$ kW h para un día de uso normal. Los paneles solares convierten potencia solar en electricidad con una eficiencia de $\epsilon = 10.7\%$ y tienen un área A. Suponga que a sus paneles solares llega luz solar durante $\Delta t = 8.0$ h con una intensidad media de $S_{\text{prom}} = 600\ \text{W/m}^2$.

a)

b)

FIGURA 31.14 *a*) Paneles solares fotovoltaicos instalados sobre el techo de una casa. *b*) Automóvil eléctrico capaz de funcionar durante 40 millas con potencia eléctrica.

PROBLEMA

¿Cuánto requiere gastar en paneles solares para suministrar esta carga diaria a su automóvil?

SOLUCIÓN

Igualamos la cantidad total de energía producida por los paneles solares con la energía requerida para cargar el automóvil:

$$U_{\text{producida}} = P\Delta t = U.$$

La cantidad de potencia que incide en los paneles solares es la intensidad media de la luz solar multiplicada por los paneles solares, multiplicado por la eficiencia de los paneles solares:

$$P = \epsilon A S_{\text{prom}}.$$

Por lo tanto, la energía requerida es

$$A = \frac{P}{\epsilon S_{\text{prom}}} = \frac{(U/\Delta t)}{\epsilon S_{\text{prom}}} = \frac{U}{\epsilon S_{\text{prom}} \Delta t}.$$

De modo que el costo total es

$$\text{Costo} = \eta A = \frac{\eta U}{\epsilon S_{\text{prom}} \Delta t}.$$

Al escribir los valores numéricos, obtenemos

$$\text{Costo} = \frac{\eta U}{\epsilon S_{\text{prom}} \Delta t} = \frac{(\$1\ 430/\text{m}^2)(8.00\ \text{kW h})}{(0.107)(0.6\ \text{kW/m}^2)(8.0\ \text{h})} = \$22\ 000.$$

Si usted utiliza su automóvil eléctrico 40 millas diarias durante 10 años, le costaría 15 centavos por milla. En contraste, el costo sería de 20 centavos por milla para un automóvil a gasolina con un rendimiento de 20 millas por galón y un precio de $4.00 por galón de gasolina.

Resulta evidente que este ahorro en costos no es sustancial. Sin embargo, su automóvil activado por energía solar sería un medio de transporte completamente neutral de carbono, con cero emisiones de carbono (igual que ir en bicicleta, sin los beneficios del ejercicio). Especialistas en ciencia de materiales trabajan intensamente para incrementar la eficiencia de celdas solares disponibles comercialmente, y se espera que la producción en masa disminuya sustancialmente los costos. Así, los automóviles activados por energía solar pronto deberán ser una alternativa viable y atractiva a los automóviles de gasolina.

EJEMPLO 31.2 Campos eléctrico y magnético raíz cuadráticos medios de la luz solar

Si el Sol está en el cenit, la intensidad media de la luz solar en la superficie de la Tierra es aproximadamente 1 400 W/m^2.

PROBLEMA

¿Cuáles son los campos eléctrico y magnético raíz cuadráticos medios de estas ondas electromagnéticas?

SOLUCIÓN

La intensidad de la luz solar puede relacionarse con los campos eléctrico y magnético raíz cuadráticos medios usando la ecuación 31.26:

$$I = \frac{1}{c\mu_0} E_{\text{rcm}}^2.$$

Al despejar el campo eléctrico raíz cuadrático medio, obtenemos

$$E_{\text{rcm}} = \sqrt{Ic\mu_0} = \sqrt{\left(1\,400\ \text{W/m}^2\right)\left(3.00\cdot10^8\ \text{m/s}\right)\left(4\pi\cdot10^{-7}\ \text{T m/A}\right)}$$
$$= 730\ \text{V/m}.$$

Para comparar, el campo eléctrico raíz cuadrático medio en un hogar típico es entre 5 y 10 V/m. Cuando uno se para directamente abajo de una línea de transmisión eléctrica, se experimenta un campo eléctrico raíz cuadrático medio de entre 200 y 10 000 V/m, dependiendo de las condiciones.

El campo magnético raíz cuadrático medio es

$$B_{\text{rcm}} = \frac{E_{\text{rcm}}}{c} = \frac{730\ \text{V/m}}{3.00\cdot10^8\ \text{m/s}} = 2.4\ \mu\text{T}.$$

En comparación, el valor raíz cuadrático medio del campo magnético de la Tierra es 50 μT, el campo magnético raíz cuadrático medio en un hogar típico es 0.5 μT y el campo magnético raíz cuadrático medio bajo una línea de transmisión eléctrica es 2 μT.

31.5 Ejercicio en clase

Cuando el Sol está en el cenit, la intensidad promedio de la luz solar en la superficie de la Tierra es aproximadamente 1 400 W/m^2. La distancia media entre la Tierra y el Sol es $1.50\cdot10^{11}$ m. ¿Cuál es la potencia promedio emitida por el Sol?

a) $99.9\cdot10^{25}$ W *d*) $4.3\cdot10^{28}$ W

b) $4.0\cdot10^{26}$ W *e*) $5.9\cdot10^{29}$ W

c) $6.3\cdot10^{27}$ W

31.9 Presión de radiación

Cuando usted camina bajo la luz del Sol, tiene una sensación de calor, aunque no experimenta ninguna fuerza proveniente del Sol. La luz del Sol ejerce una presión sobre usted, pero tan pequeña que no la percibe. Debido a que las ondas electromagnéticas que componen la luz solar son irradiadas por el Sol y se desplazan hacia la Tierra, se denominan **radiación**. En el capítulo 18 analizamos la radiación como una forma de transmisión de calor. Como veremos en el capítulo 40 sobre física nuclear, este tipo de radiación no necesariamente es el mismo que la radiación radiactiva que resulta del decaimiento de núcleos inestables. No obstante, las ondas de radio, las ondas infrarrojas, la luz visible y los rayos X son fundamentalmente la misma radiación electromagnética. (Que no es lo mismo que decir, sin embargo, que todos los tipos de radiación electromagnética tienen el mismo efecto en el cuerpo humano. Por ejemplo, la luz UV puede producir quemaduras cutáneas e incluso provocar cáncer, pero no hay evidencia creíble de que la radiación emitida por los teléfonos celulares produzca cáncer.)

Calculemos la magnitud de la presión ejercida por las ondas electromagnéticas irradiadas. Estas ondas transportan energía, U, como muestra la figura 31.8. Las ondas electromagnéticas también tienen cantidad de movimiento lineal, $\vec{p}$. Este concepto es sutil porque las ondas electromagnéticas no tienen masa, y en el capítulo 7 vimos que la cantidad de movimiento es igual a la masa multiplicada por la velocidad. Maxwell demostró que si una onda plana de radiación es completamente absorbida por una superficie (perpendicular a la dirección de la onda plana) durante un intervalo de tiempo, Δt, y una cantidad de energía, ΔU, es absorbida por la superficie durante este proceso, entonces la magnitud de la cantidad de movimiento transferida a esa superficie por la onda en ese intervalo de tiempo es

$$\Delta p = \frac{\Delta U}{c}.$$

En el capítulo 35 sobre relatividad se demostrará que esta relación entre energía y cantidad de movimiento se cumple para objetos sin masa; por el momento, se afirma como un hecho sin demostración.

Entonces, la magnitud de la fuerza sobre la superficie es $F = \Delta p/\Delta t$ (segunda ley de Newton). La energía total, ΔU, absorbida por el área A de la superficie durante el intervalo de tiempo Δt es igual al producto del área, el intervalo de tiempo y la intensidad de la radiación, I (introducida en la sección 31.8): $\Delta U = IA\Delta t$. En consecuencia, la magnitud de la fuerza ejercida por la onda electromagnética sobre esta área es

$$F = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{\Delta U}{c\Delta t} = \frac{IA\Delta t}{c\Delta t} = \frac{IA}{c}.$$

Puesto que la presión se define como fuerza (magnitud) por unidad de área, la presión de la radiación, p_r, es

$$p_r = \frac{F}{A},$$

y, por consiguiente,

$$p_r = \frac{I}{c} \quad \text{(para absorción total).} \tag{31.28}$$

La ecuación 31.28 establece que la presión de la radiación debida a ondas electromagnéticas es simplemente la intensidad dividida entre la velocidad de la luz, pero sólo para el caso de absorción total de la radiación en la superficie.

El otro caso limitante es la reflexión total de las ondas electromagnéticas. En ese caso, la transferencia de la cantidad de movimiento es el *doble* que para el caso de absorción total, justo como la transferencia de la cantidad de movimiento de una pelota a una pared es el doble en colisiones perfectamente elásticas que en colisiones perfectamente inelásticas. En el caso de colisiones perfectamente elásticas, la cantidad de movimiento inicial de la pelota se invierte y $\Delta p = p_i - (-p_i) = 2p_i$, mientras que para colisiones totalmente inelásticas, $\Delta p = p_i - 0 = p_i$, como se explicó en el capítulo 7. Así, la presión de la radiación para el caso de reflexión perfecta de las ondas electromagnéticas en una superficie es

$$p_r = \frac{2I}{c} \quad \text{(para reflexión perfecta).} \tag{31.29}$$

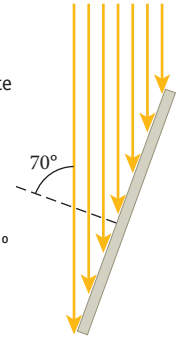
La presión de la radiación proveniente de la luz del Sol es comparativamente pequeña. La intensidad de la luz solar en la superficie de la Tierra es cuando mucho 1 400 W/m^2 cuando el Sol se encuentra en el cenit y el cielo está despejado. (Esto sólo puede ocurrir entre los Trópicos de Cáncer y Capricornio, situados a ±23° de latitud con respecto al Ecuador.) Así, la máxima presión de la radiación de la luz solar que es totalmente absorbida es

$$p_r = \frac{I}{c} = \frac{1\,400\ \text{W/m}^2}{3\cdot 10^8\ \text{m/s}} = 4.67\cdot 10^{-6}\ \text{N/m}^2 = 4.67\ \mu\text{Pa}.$$

Para comparar, la presión atmosférica es 101 kPa (vea el capítulo 13), que es mayor que la presión de la radiación de la luz solar sobre la superficie de la Tierra por más de un factor de 20 mil millones. Otra comparación útil es la mínima diferencia de presión que puede percibir el oído humano, que suele citarse como de aproximadamente 20 μPa para sonidos en el rango de frecuencias de l kHz, donde el oído humano es más sensible (capítulo 16).

31.6 Ejercicio en clase

¿Cuál es la presión de la radiación debida a la luz solar que incide sobre una superficie perfectamente absorbente, cuyo vector normal a la superficie forma un ángulo de 70° con respecto a la luz incidente?



a) (4.67 μPa)(cos 70°)

b) (4.67 μPa)(sen 70°)

c) (4.67 μPa)(tan 70°)

d) (4.67 μPa)(cot 70°)

31.7 Ejercicio en clase

¿Cuál es la máxima presión de radiación debida a la luz solar que incide sobre una superficie perfectamente reflejante?

a) 0 *c*) 4.67 μPa

b) 2.34 μPa *d*) 9.34 μPa

EJEMPLO 31.3 Presión de radiación de un apuntador láser

La potencia de un apuntador láser verde es 1.00 mW. Una persona dirige el haz del apuntador en forma perpendicular a una hoja de papel blanca, que refleja la luz. El punto de luz sobre el papel mide 2.00 mm de diámetro.

PROBLEMA

¿Qué fuerza ejerce la luz del apuntador láser sobre el papel?

SOLUCIÓN

La intensidad de la luz está dada por

$$I = \frac{\text{potencia}}{\text{área}} = \frac{1.00\cdot 10^{-3}\ \text{W}}{\pi\left(1.00\cdot 10^{-3}\ \text{m}\right)^2} = 318\ \text{W/m}^2.$$

(*continúa*)

(*continuación*)

La presión de la radiación para una superficie perfectamente reflejante está dada por la ecuación 31.29 y también es igual a la fuerza ejercida por la luz dividida entre el área sobre la que actúa:

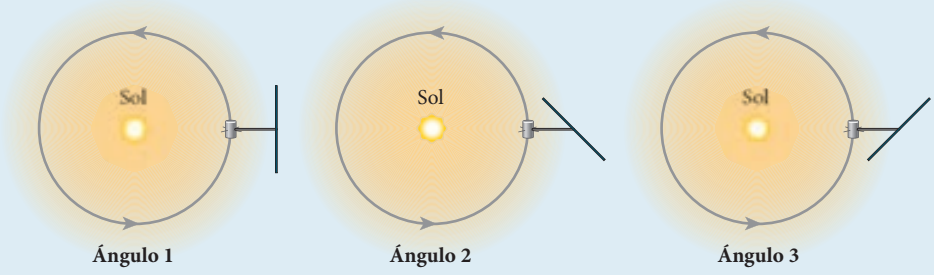
$$p_r = \frac{\text{fuerza}}{\text{área}} = \frac{2I}{c}.$$

Por lo tanto, la fuerza ejercida sobre el papel es

$$\text{Fuerza} = (\text{área})\left(\frac{2I}{c}\right) = \pi\left(1.0\cdot10^{-3}\ \text{m}\right)^2 \frac{2\left(318\ \text{W/m}^2\right)}{3.00\cdot10^{8}\ \text{m/s}} = 6.66\cdot10^{-12}\ \text{N}.$$

31.3 Oportunidad de autoevaluación

Suponga un satélite en órbita alrededor del Sol, como muestra la figura. La órbita es en dirección contraria al movimiento de las manecillas del reloj viendo hacia abajo desde el polo norte del Sol. Usted quiere desplegar una vela solar que consta de un gran espejo reflejante que es posible orientar de modo que sea perpendicular a la luz proveniente del Sol o que forme un ángulo con respecto a ésta. Describa el efecto sobre la órbita del satélite para los tres ángulos de despliegue indicados en la figura.



PROBLEMA RESUELTO 31.1 Satélite solar estacionario

Suponga que un equipo de investigadores desea poner un satélite arriba del polo norte del Sol, estacionario con respecto al Sol a fin de estudiar las características rotacionales de éste a largo plazo. El satélite consta de una vela solar totalmente reflejante y estará situado a una distancia de $1.50\cdot10^{11}$ m del centro del Sol. La intensidad de la luz solar a esa distancia es 1 400 W/m^2. El plano de la vela solar es perpendicular a la recta que une el satélite con el centro del Sol. La masa del satélite y la vela es 100.0 kg.

PROBLEMA

¿Cuál es el área requerida para la vela solar?

SOLUCIÓN

PIENSE

En una posición de equilibrio para el satélite, el área de la vela solar multiplicada por la presión de radiación del Sol produce una fuerza equilibrada por la fuerza gravitacional entre el satélite y el Sol. Podemos igualar estas dos fuerzas y despejar el área de la vela solar.

ESBOCE

La figura 31.15 es un diagrama del satélite con una vela solar cerca del Sol.

FIGURA 31.15 Satélite con una vela solar cerca del Sol.

INVESTIGUE

El satélite permanecerá estacionario si la fuerza de gravedad, F_g, es equilibrada por la fuerza de la presión de radiación de la luz solar, F_{rp}:

$$F_g = F_{rp}.$$

La fuerza correspondiente a la presión de radiación de la luz solar es igual a la presión de radiación, p_r, multiplicada por el área de la vela solar, A:

$$F_{rp} = p_r A.$$

La presión de radiación puede expresarse en términos de la intensidad de la luz solar, I, que incide sobre la vela solar totalmente reflejante:

$$p_r = \frac{2I}{c}.$$

La fuerza de gravedad entre el satélite y el Sol está dada por

$$F_g = G\frac{mm_{Sol}}{d^2},$$

donde G es la constante de gravitación universal, m es la masa del satélite y la vela, m_{Sol} es la masa del Sol y d es la distancia entre el satélite y el Sol.

SIMPLIFIQUE

Podemos combinar estas tres ecuaciones para obtener

$$\left(\frac{2I}{c}\right)A = G\frac{mm_{Sol}}{d^2}.$$

Al despejar el área de la vela solar, obtenemos

$$A = G\frac{cmm_{Sol}}{2Id^2}.$$

CALCULE

Al escribir los valores numéricos, obtenemos

$$A = \left(6.67\cdot10^{-11}\ \text{m}^3\ \text{kg}^{-1}\ \text{s}^{-2}\right)\frac{\left(3.00\cdot10^{8}\ \text{m/s}\right)\left(100.0\ \text{kg}\right)\left(1.99\cdot10^{30}\ \text{kg}\right)}{2\left(1\ 400\ \text{W/m}^2\right)\left(1.50\cdot10^{11}\ \text{m}\right)^2} = 63\ 206.2\ \text{m}^2.$$

REDONDEE

Mostramos nuestro resultado con tres cifras:

$$A = 6.32\cdot10^{4}\ \text{m}^2.$$

VUELVA A REVISAR

Si la vela solar fuese circular, su radio sería

$$R = \sqrt{\frac{A}{\pi}} = \sqrt{\frac{6.32\cdot10^{4}\ \text{m}^2}{\pi}} = 142\ \text{m},$$

que es un tamaño alcanzable. Podemos relacionar el grosor de la vela, t, multiplicada por la densidad, ρ, del material con el que se elabora la vela con la masa por unidad de área de la vela:

$$t\rho = \frac{m}{A}.$$

Si la vela está elaborada con un material resistente como kapton (ρ = 1 420 kg/m^3) y su masa fuera de 75 kg, entonces su grosor sería

$$t = \frac{75\ \text{kg}}{\left(1\ 420\ \text{kg/m}^3\right)\left(6.32\cdot10^{4}\ \text{m}^2\right)} = 8.36\cdot10^{-7}\ \text{m} = 0.836\ \mu\text{m}.$$

El kapton es una película de poliimida desarrollada para permanecer estable en el amplio intervalo de temperaturas que hay en el espacio; desde casi el cero absoluto hasta más de 600 K. Con las técnicas de producción actuales no es posible producir kapton de este grosor. Sin embargo, la densidad de área requerida puede lograrse usando otros materiales en el futuro.

31.10 Polarización

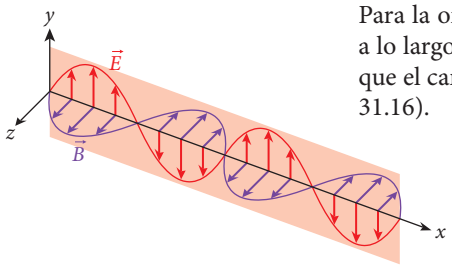


FIGURA 31.16 Onda electromagnética con el plano de oscilación del campo eléctrico mostrada en rosa.

Para la onda electromagnética representada en la figura 31.5, el campo eléctrico siempre apunta a lo largo del eje *y*. La dirección en la que se desplaza la onda es la dirección *x* positiva, de modo que el campo eléctrico de la onda electromagnética está dentro de un plano de oscilación (figura 31.16).

Podemos visualizar la polarización de una onda electromagnética al considerar el vector de campo eléctrico de la onda en el plano *yz*, que es perpendicular a la dirección en la que se desplaza la onda [figura 31.17*a*)]. El vector de campo eléctrico cambia de la dirección *y* positiva a la dirección *y* negativa y de vuelta a medida que la onda se desplaza. El campo eléctrico de la onda oscila sólo en la dirección *y*; nunca cambia de orientación. Este tipo de onda se denomina **onda plana polarizada** en la dirección *y*.

Las ondas electromagnéticas que constituyen la luz emitida por las fuentes de luz más comunes, como el Sol o una bombilla incandescente, tienen polarizaciones aleatorias. Cada onda tiene su vector de campo eléctrico oscilando en un plano diferente. Este tipo de luz se denomina **luz no polarizada**. La luz proveniente de una fuente no polarizada puede representarse por muchos vectores como los que se muestran en la figura 31.17*a*), pero con orientaciones aleatorias [figura 31.17*b*)]. La luz no polarizada también puede representarse al sumar las componentes *y* y las componentes *z* por separado a fin de obtener las componentes *y* y *z* netas. La luz no polarizada tiene componentes iguales en las direcciones *y* y *z* [figura 31.18*a*)]. Si hay menos polarización neta en la dirección *y* que en la dirección *z*, entonces se dice que la luz está parcialmente polarizada en la dirección *z* [figura 31.18*b*)].

La luz no polarizada puede transformarse en luz polarizada al hacerla pasar por un polarizador. Un **polarizador** sólo permite el paso de una componente de los vectores de campo eléctrico de la luz. Una forma de elaborar un polarizador consiste en producir un material que conste de largas cadenas paralelas de moléculas, que efectivamente dejen que pasen las componentes de la luz con polarización paralela a las cadenas y bloqueen las componentes de la luz con polarización perpendicular a esa dirección.

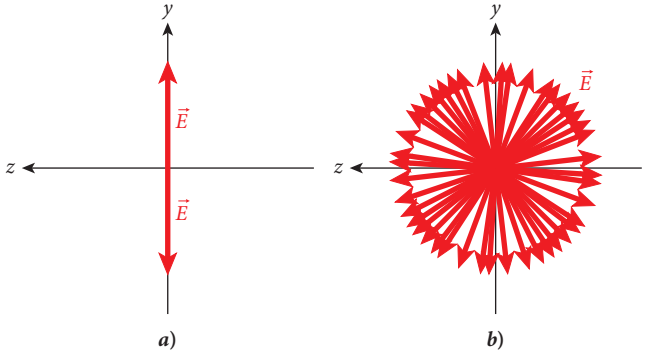


FIGURA 31.17 *a*) Vectores de campo eléctrico en el plano *yz*, que definen que el plano de polarización está en el plano *xy*. *b*) Vectores de campo eléctrico orientados a ángulos aleatorios.

Este análisis no aborda los detalles de la estructura molecular, ya que simplemente caracteriza cada polarizador según una dirección de polarización. La luz no polarizada que pasa por un polarizador emerge en la dirección de polarización (figura 31.19). Las componentes de la luz que tienen la misma dirección que el polarizador son transmitidas, pero las componentes de la luz que son perpendiculares al polarizador son absorbidas.

Ahora consideremos la intensidad de la luz que pasa por un polarizador. La luz no polarizada con intensidad I_0 tiene componentes iguales en las direcciones *y* y *z*. Después de pasar por un

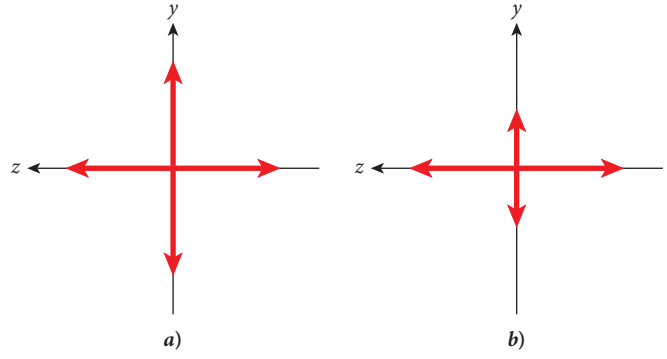


FIGURA 31.18 *a*) Componentes netas del campo eléctrico para luz no polarizada. *b*) Componentes netas del campo eléctrico para luz parcialmente polarizada.

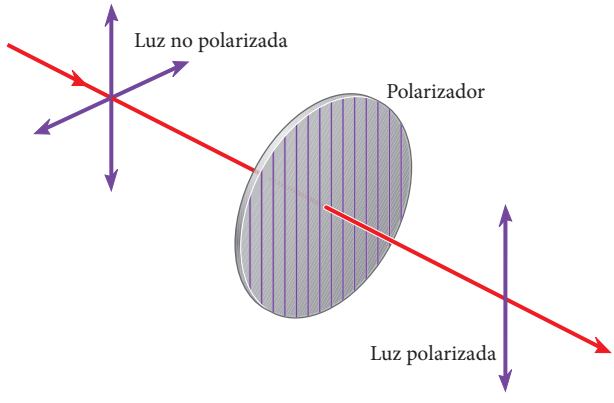


FIGURA 31.19 Luz no polarizada que pasa a través de un polarizador vertical. Después de que la luz pasa por el polarizador, está verticalmente polarizado.

polarizador vertical, sólo quedan las componentes y (la componente vertical). La intensidad, I, de la luz que pasa por el polarizador está dada por

$$I = \tfrac{1}{2} I_0, \tag{31.30}$$

porque la luz no polarizada tiene contribuciones iguales de las componentes y y z y sólo las componentes y son transmitidas por el polarizador. El factor $\frac{1}{2}$ sólo es válido para el caso de luz no polarizada que pasa por un polarizador.

Ahora consideremos luz polarizada que pasa por un polarizador (figura 31.20). Si el eje del polarizador es paralelo a la dirección de polarización de la luz polarizada incidente, toda la luz es transmitida con la polarización original [figura 31.20*a*)]. Si el ángulo de polarización del polarizador es perpendicular a la polarización de luz polarizada, no se transmite nada de luz [figura 31.20*b*)].

¿Qué ocurre cuando luz polarizada incide en un polarizador y la polarización de la luz no es paralela ni perpendicular al ángulo de polarización del polarizador (figura 31.21)? Supongamos que el ángulo entre la luz polarizada y el ángulo de polarización es θ. La magnitud del campo eléctrico transmitido, E, está dada por

$$E = E_0 \cos\theta,$$

donde E_0 es la magnitud del campo eléctrico de la luz polarizada incidente. Por la ecuación 31.26, podemos ver que la intensidad de la luz antes de pasar por el polarizador, I_0, está dada por

$$I_0 = \frac{1}{c\mu_0} E_{\text{rcm}}^2 = \frac{1}{2c\mu_0} E_0^2.$$

Después de que la luz pasa por el polarizador, la intensidad, I, está dada por

$$I = \frac{1}{2c\mu_0} E^2.$$

Podemos expresar la intensidad transmitida en términos de la intensidad inicial como sigue:

$$I = \frac{1}{2c\mu_0} E^2 = \frac{1}{2c\mu_0} \left(E_0 \cos\theta\right)^2 = I_0 \cos^2\theta. \tag{31.31}$$

Esta ecuación se denomina **ley de Malus** y sólo es válida para luz polarizada incidente en un polarizador.

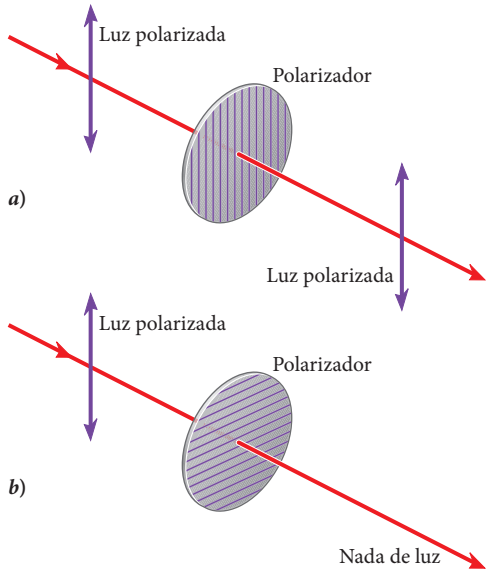


FIGURA 31.20 *a*) Luz polarizada verticalmente que incide sobre un polarizador vertical. *b*) Luz polarizada verticalmente que incide sobre un polarizador horizontal.

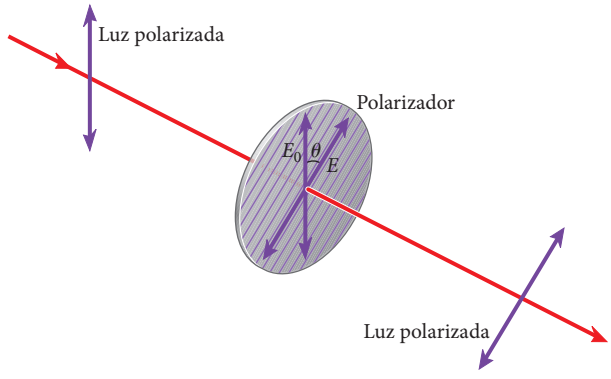


FIGURA 31.21 Luz polarizada verticalmente que incide sobre un polarizador cuyo ángulo de polarización no es paralelo ni perpendicular a la polarización de la luz incidente.

EJEMPLO 31.4 Tres polarizadores

Suponga que luz no polarizada con intensidad I_0 inicialmente incide sobre el primero de tres polarizadores colocados en línea recta. La dirección de polarización del primer polarizador es vertical. El segundo polarizador tiene una dirección de polarización que forma un ángulo de 45° con respecto a la vertical. El tercer polarizador tiene una dirección de polarización que forma un ángulo de 90° con respecto a la vertical.

PROBLEMA

¿Cuál es la intensidad de la luz después de pasar por los tres polarizadores, en términos de la intensidad inicial?

SOLUCIÓN

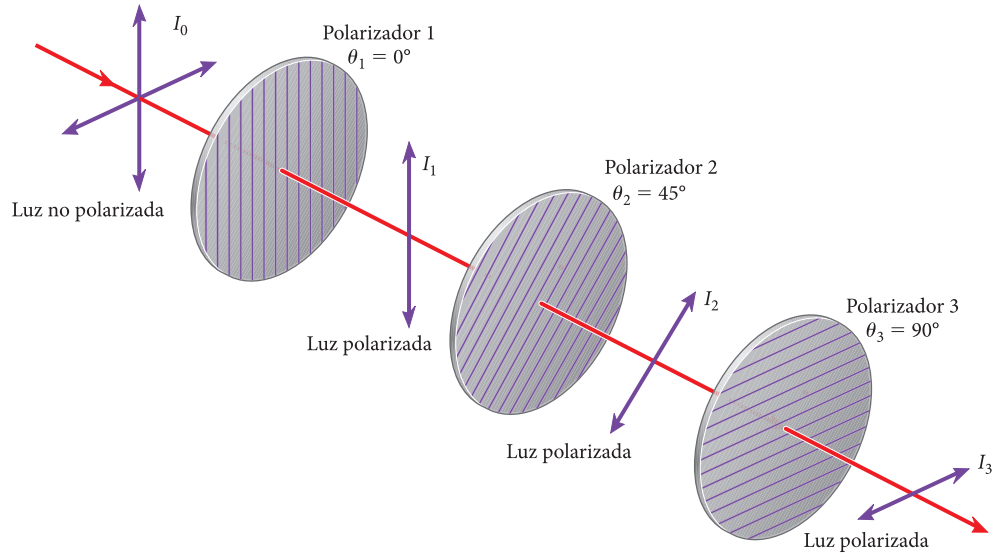
La figura 31.22 ilustra la luz que pasa por los tres polarizadores. La intensidad de la luz no polarizada es I_0. La intensidad de la luz después de pasar por el primer polarizador es

$$I_1 = \tfrac{1}{2} I_0.$$

(*continúa*)

FIGURA 31.22 Luz no polarizada que pasa por tres polarizadores.

(*continuación*)



La intensidad de la luz después de pasar por el segundo polarizador es

$$I_2 = I_1 \cos^2\left(45° - 0°\right) = I_1 \cos^2 45° = \tfrac{1}{2} I_0 \cos^2 45°.$$

La intensidad de la luz después de pasar por el tercer polarizador es

$$I_3 = I_2 \cos^2\left(90° - 45°\right) = I_2 \cos^2 45° = \tfrac{1}{2} I_0 \cos^4 45°,$$

o bien, $I_3 = I_0/8$.

El hecho de que $\frac{1}{8}$ de la intensidad inicial de la luz se transmita es algo sorprendente porque los polarizadores 1 y 3 forman ángulos de polarización que son perpendiculares entre sí. Al actuar por sí mismos, los polarizadores 1 y 3 bloquearían toda la luz. Pero el hecho de agregar otro obstáculo (polarizador 2) entre estos dos polarizadores, $\frac{1}{8}$ de la intensidad inicial puede pasar. Por lo tanto, una serie de polarizadores con pequeñas diferencias en sus ángulos de polarización puede usarse para rotar la dirección de polarización de la luz con pérdidas modestas en intensidad.

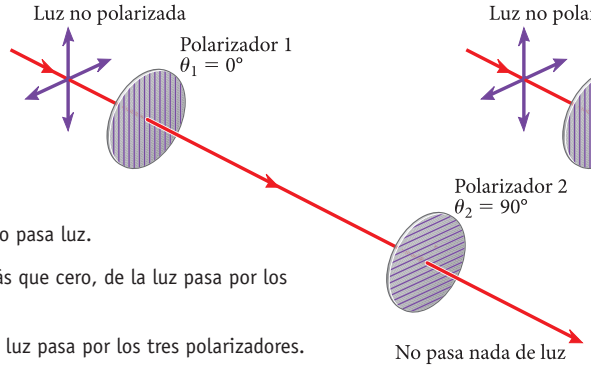
31.8 Ejercicio en clase

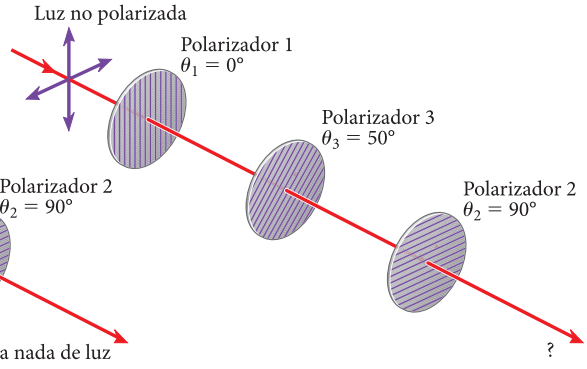
Luz no polarizada con intensidad $I_{entrada}$ = 1.87 W/m^2 pasa por dos polarizadores. La luz polarizada emergente tiene una intensidad I_{salida} = 0.383 W/m^2. ¿Cuál es el ángulo entre los polarizadores?

a) 23.9°
b) 34.6°
c) 50.2°
d) 72.7°
e) 88.9°

31.9 Ejercicio en clase

La figura muestra luz no polarizada que incide sobre un polarizador 1 con ángulo de polarización $\theta_1 = 0°$ y luego por el polarizador 2 con ángulo de polarización $\theta_2 = 90°$, lo cual resulta en el bloqueo de luz. Si el polarizador 3 con ángulo de polarización $\theta_3 = 50°$ se coloca entre los polarizadores 1 y 2, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?





a) Por los tres polarizadores no pasa luz.
b) Menos de la mitad, pero más que cero, de la luz pasa por los tres polarizadores.
c) Exactamente la mitad de la luz pasa por los tres polarizadores.
d) Más de la mitad de, pero no toda, la luz pasa por los tres polarizadores.
e) Toda la luz pasa por los tres polarizadores.

Aplicaciones de la polarización

FIGURA 31.23 Monitor LCD de computadora.

La polarización tiene muchas aplicaciones prácticas. Los anteojos para sol cuentan con un recubrimiento polarizado que bloquea la luz reflejada, que suele estar polarizada. La pantalla de cristal líquido (LCD) de una computadora o una televisión cuenta con un arreglo de cristales líquidos intercalados entre dos polarizadores cuyos ángulos de polarización se han rotado 90° entre sí. Normalmente, el cristal líquido rota la polarización de la luz entre los dos polarizadores, de modo que la luz pasa a través de ellos. Un arreglo de electrodos manipulables aplica un voltaje variable a través de cada uno de los cristales líquidos, haciendo que éstos roten menos la polarización, oscureciendo la zona cubierta por el electrodo. Así, la pantalla de una televisión o el monitor de una computadora (figura 31.23) pueden mostrar un gran número de elementos de imagen, o pixeles, que producen una imagen de alta resolución.

La figura 31.24*a*) muestra una vista superior de las capas de una pantalla LCD. Una luz de fondo emite luz no polarizada. Esta luz pasa por un polarizador vertical. Luego, la luz polarizada pasa por una capa transparente de pixeles conductores. Esta capa está diseñada para aplicar cantidades variables de voltaje a través de la capa siguiente, que está compuesta por cristales líquidos, con respecto al electrodo común transparente. Si a través de los cristales líquidos no se aplica ningún voltaje, éstos rotan 90° la polarización de la luz incidente. Luego, esta luz con polarización rotada puede pasar por el electrodo común transparente, el filtro de color, el polarizador horizontal y la cubierta de pantalla. Cuando a la capa de pixeles se aplica un voltaje de magnitud variable, los cristales líquidos rotan en una cantidad variable la polarización de la luz incidente. Cuando todo el voltaje se aplica a la capa de pixeles, la polarización de la luz incidente no se rota, y el polarizador horizontal bloquea toda la luz transmitida a través del electrodo común transparente y el filtro de color.

La figura 31.24*b*) muestra una vista frontal de un pequeño segmento de la pantalla LCD, ilustrando la manera en la que la pantalla produce una imagen. La imagen es creada por medio de un arreglo de pixeles. Cada pixel está subdividido en tres subpixeles: uno rojo, uno verde y uno azul. Al variar el voltaje a través de cada subpixel, se origina una superposición de luz roja, verde y azul, produciendo un color sobre ese pixel. No obstante, resulta difícil conectar un solo alambre a cada subpixel. Una pantalla LCD de alta definición de 1 080p tiene 1 080 veces 1 920 veces 3 subpixeles, o 6 220 800 subpixeles. Estos subpixeles están conectados en renglones y columnas, como muestra la figura 31.24*b*). Para encender un subpixel es necesario aplicar un voltaje desde una columna y un renglón. Por lo tanto, los subpixeles se encienden en un renglón a la vez. Con el voltaje de un renglón encendido, se encienden los voltajes de los subpixeles en las columnas deseadas. Un capacitor más pequeño retiene el voltaje hasta que el renglón vuelve a encenderse.

Una pantalla LCD de alta definición de 1 080p se escanea 60 veces por segundo, produciendo una imagen completa en cada escaneo. En una pantalla de alta definición de 1 080i, todos los demás renglones de la imagen se escanean 60 veces por segundo y luego las dos imágenes de entrelazan. Otro estándar de alta definición es 720p, que escanea 720 renglones 60 veces por segundo con una resolución horizontal de 1 280 pixeles. Los estándares 720p y 1 080i son de uso común en transmisiones por televisión. La resolución estándar para una imagen de televisión es 480p, donde 480 renglones se actualizan 60 veces por segundo y producen 640 columnas de pixeles.

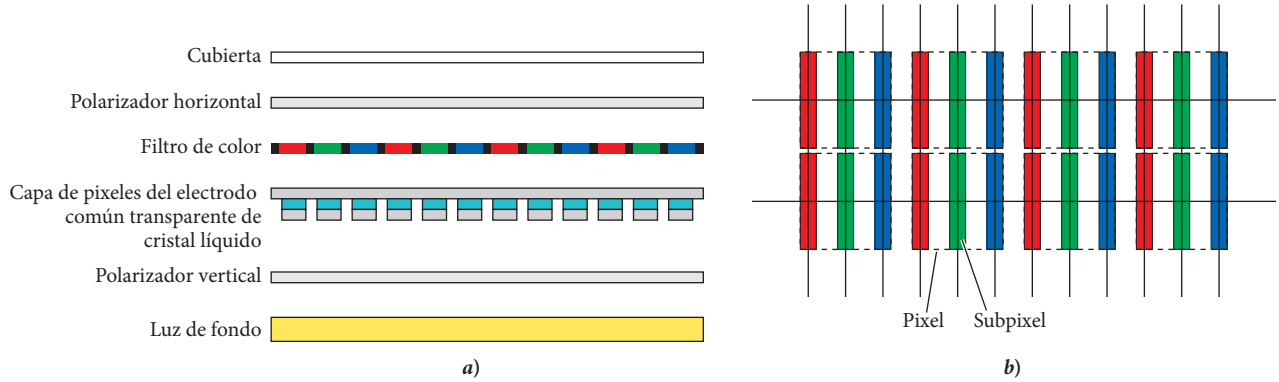


FIGURA 31.24 *a*) Vista superior de las capas que componen una pantalla LCD. *b*) Vista frontal de pixeles y subpixeles en una pantalla LCD.

31.11 Deducción de la ecuación de onda

La tabla 31.1 enumera en forma de integrales cuatro ecuaciones conocidas como ecuaciones de Maxwell. También hay una versión diferencial equivalente de estas ecuaciones, que es la forma en la que suelen imprimirse en camisetas y carteles:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E}=\frac{\rho}{\epsilon_0},$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{E}=-\frac{\partial}{\partial t}\vec{B},$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0,$$

y

$$\vec{\nabla}\times\vec{B}=\epsilon_0\mu_0\frac{\partial}{\partial t}\vec{E}+\mu_0\vec{j},$$

donde ρ es la densidad de carga (carga q por unidad de volumen) y $\vec{j}$ es la densidad de corriente. En el vacío y sin cargas, ambos son cero; $\rho = 0$ y $\vec{j} = 0$. El símbolo $\vec{\nabla}$ se presentó en el capítulo 6 y representa el vector con derivadas parciales en cada dirección espacial. En coordenadas cartesianas, es $\vec{\nabla}=(\partial/\partial x,\partial/\partial y,\partial/\partial z)$.

En la sección 31.4 vimos que las ondas electromagnéticas según son descritas por la ecuación 31.8 son soluciones válidas de todas las ecuaciones de Maxwell en el vacío. No obstante, hablando estrictamente, aún no hemos escrito la ecuación de onda a la que obedecen el campo eléctrico y el campo magnético. Ahora, con ayuda de la forma diferencial de las ecuaciones de Maxwell, podemos obtener la ecuación de onda para el campo eléctrico, que es

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{E}-c^2\nabla^2\vec{E}=0. \tag{31.32}$$

La ecuación de onda para el campo magnético es

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{B}-c^2\nabla^2\vec{B}=0. \tag{31.33}$$

DEDUCCIÓN 31.1 Ecuación de onda para el campo eléctrico en el vacío

Para obtener la ecuación de onda para el campo eléctrico en el vacío, tomamos el producto vectorial de la segunda ecuación de Maxwell y el operador gradiente, $\vec{\nabla}$:

$$\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\times\vec{E}=-\vec{\nabla}\times\frac{\partial}{\partial t}\vec{B}. \tag{i}$$

En el miembro derecho de la ecuación (i), podemos intercambiar el orden de la derivada con respecto al tiempo y la derivada espacial:

$$-\vec{\nabla}\times\frac{\partial}{\partial t}\vec{B}=-\frac{\partial}{\partial t}(\vec{\nabla}\times\vec{B})=-\frac{\partial}{\partial t}\left(\epsilon_0\mu_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right)=-\epsilon_0\mu_0\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{E}. \tag{ii}$$

Para el segundo paso de esta transformación usamos la tercera ecuación de Maxwell con $\vec{j} = 0$, que es idónea en el vacío. El miembro izquierdo de la ecuación (i) contiene un doble producto vectorial. En el capítulo 10 se presentó la regla BAC-CAB para productos vectoriales dobles: $\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C})=\vec{B}(\vec{A}\cdot\vec{C})-\vec{C}(\vec{A}\cdot\vec{B})$. Al aplicar esta regla, encontramos

$$\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\times\vec{E}=\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{E})-\nabla^2\vec{E}=-\nabla^2\vec{E}, \tag{iii}$$

donde la primera ecuación de Maxwell (en el vacío: $\vec{\nabla}\cdot\vec{E}=0$) se usa en el segundo paso. El símbolo ∇^2 es el producto escalar del operador gradiente consigo mismo: $\nabla^2=\partial^2/\partial x^2+\partial^2/\partial y^2+\partial^2/\partial z^2$. Si sustituimos las ecuaciones (ii) y (iii) en la ecuación (i) y usamos el hecho de que la velocidad de la luz es $c=1/\sqrt{\mu_0\epsilon_0}$ (ecuación 31.20), obtenemos la ecuación de onda deseada:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{E}-\frac{1}{\epsilon_0\mu_0}\nabla^2\vec{E}=\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{E}-c^2\nabla^2\vec{E}=0.$$

Esto implica que las ondas electromagnéticas que se mueven a la velocidad de la luz son, en efecto, una solución de las ecuaciones de Maxwell, como se analizó (aunque sin demostrar) en la sección 31.4.

31.4 Oportunidad de autoevaluación

Obtenga la ecuación de onda para el campo magnético (ecuación 31.33) de la misma forma en la que se presenta en la deducción 31.1 para la ecuación de onda para un campo eléctrico.

31.5 Oportunidad de autoevaluación

Demuestre que $\vec{E}(\vec{r},t) = E_{\text{máx}}\,\text{sen}(\kappa x-\omega t)\hat{y}$ y $\vec{B}(\vec{r},t) = B_{\text{máx}}\,\text{sen}(\kappa x-\omega t)\hat{z}$ son, en efecto, soluciones de la ecuación de onda para los campos eléctrico y magnético.

LO QUE HEMOS APRENDIDO | GUÍA DE ESTUDIO PARA EXAMEN

- Cuando un capacitor se carga, es posible visualizar una corriente de desplazamiento entre las placas, dada por $i_d = \epsilon_0 d\Phi_E/dt$, donde Φ_E es el flujo eléctrico.
- Las ecuaciones de Maxwell describen cómo las cargas eléctricas, las corrientes eléctricas, los campos eléctricos y los campos magnéticos se afectan entre sí, constituyendo una teoría unificada de electromagnetismo.
  - La ley de Gauss para campos eléctricos, $\oiint \vec{E}\cdot d\vec{A} = q_{enc}/\epsilon_0$, relaciona el flujo eléctrico neto a través de una superficie cerrada con la carga eléctrica neta encerrada.
  - La ley de Gauss para campos magnéticos, $\oiint \vec{B}\cdot d\vec{A} = 0$, establece que el flujo magnético neto a través de cualquier superficie cerrada es cero.
  - La ley de inducción de Faraday, $\oint \vec{E}\cdot d\vec{s} = -d\Phi_B/dt$, relaciona el campo eléctrico inducido con el flujo magnético variable.
  - La ley de Maxwell-Ampère, $\oint \vec{B}\cdot d\vec{s} = \mu_0\epsilon_0 d\Phi_E/dt + \mu_0 i_{enc}$, relaciona el campo magnético inducido con el flujo eléctrico variable y la corriente.
- Para una onda electromagnética que se desplaza en la dirección x positiva, los campos eléctrico y magnético pueden ser descritos por $\vec{E}(\vec{r},t) = E_{máx}\,\text{sen}(\kappa x - \omega t)\,\hat{y}$ y $\vec{B}(\vec{r},t) = B_{máx}\,\text{sen}\,(\kappa x - \omega t)\hat{z}$, donde $\kappa = 2\pi/\lambda$ es el número de onda y $\omega = 2\pi f$ es la frecuencia angular.
- Las magnitudes de los campos eléctrico y magnético de una onda electromagnética en cualquier instante y lugar fijos están relacionadas por la velocidad de la luz, $E = cB$.
- La velocidad de la luz puede relacionarse con las dos constantes electromagnéticas básicas: $c = 1/\sqrt{\mu_0\epsilon_0}$.
- La potencia instantánea por unidad de área transportada por una onda electromagnética es la magnitud del vector de Poynting $S = [1/(c\mu_0)]E^2$, donde E es la magnitud del campo eléctrico.
- La intensidad de una onda electromagnética se define como la potencia promedio por unidad de área transportada por la onda, $I = S_{prom} = [1/(c\mu_0)]E_{rcm}^2$, donde E_{rcm} es la magnitud raíz cuadrática media del campo eléctrico.
- Para una onda electromagnética, la densidad de energía transportada por el campo eléctrico es $u_E = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2$, y la densidad de energía transportada por el campo magnético es $u_B = [1/(2\mu_0)]B^2$. Para una onda así, $u_E = u_B$.
- La presión de radiación ejercida por las ondas electromagnéticas de intensidad I está dada por $p_r = I/c$ si las ondas electromagnéticas son absorbidas totalmente, o $p_r = 2I/c$ si las ondas se reflejan perfectamente.
- La polarización de una onda electromagnética está dada por la dirección del vector de campo eléctrico.
- La intensidad de luz no polarizada que ha pasado por un polarizador es $I = I_0/2$, donde I_0 es la intensidad de la luz no polarizada incidente sobre el polarizador.
- La intensidad de luz polarizada que ha pasado por un polarizador es $I = I_0\cos^2\theta$, donde I_0 es la intensidad de la luz polarizada incidente sobre el polarizador y θ es el ángulo entre la polarización de la luz polarizada incidente y el ángulo de polarización del polarizador.

TÉRMINOS CLAVE

ley de inducción de Maxwell, p. 993
ley de Maxwell-Ampère, p. 994
corriente de desplazamiento, p. 944
ecuaciones de Maxwell, p. 996
electromagnetismo, p. 996
ondas electromagnéticas, p. 996
onda plana, p. 997
espectro electromagnético, p. 1001
luz visible, p. 1001
ondas infrarrojas, p. 1001
rayos ultravioleta, p. 1001
ondas de radio, p. 1001
microondas, p. 1001
rayos X, p. 1002
rayos gamma, p. 1002
ondas electromagnéticas viajeras, p. 1003
vector de Poynting, p. 1004
radiación, p. 1006
onda plana polarizada, p. 1010
luz no polarizada, p. 1010
polarizador, p. 1010
ley de Malus, p. 1011

NUEVOS SÍMBOLOS Y ECUACIONES

$i_d = \dfrac{\epsilon_0 d\Phi_E}{dt}$, corriente de desplazamiento

$\kappa = \dfrac{2\pi}{\lambda}$, número de onda

$S = \dfrac{E^2}{c\mu_0}$, magnitud del vector de Poynting, que representa la potencia instantánea por unidad de área transportada por una onda electromagnética.

$I = S_{prom} = \dfrac{E_{rcm}^2}{c\mu_0}$, potencia promedio por unidad de área transportada por una onda electromagnética

RESPUESTAS A LAS OPORTUNIDADES DE AUTOEVALUACIÓN

31.1 $t = \dfrac{d}{c} = \dfrac{8.30 \cdot 10^{16}\ \text{m}}{3.00 \cdot 10^{8}\ \text{m/s}} = 2.77 \cdot 10^{8}\ \text{s} = 8.77\ \text{años}.$

31.2 $c = \lambda f \Rightarrow \lambda = \dfrac{c}{f}$

$$\lambda_{\text{FM}} = \frac{3.00 \cdot 10^{8}\ \text{m}}{90.5 \cdot 10^{6}\ \text{Hz}} = 3.31\ \text{m}$$

$$\lambda_{\text{AM}} = \frac{3.00 \cdot 10^{8}\ \text{m}}{870 \cdot 10^{3}\ \text{Hz}} = 345\ \text{m}.$$

31.3 El ángulo de despliegue 1 produce una órbita elíptica con el Sol en uno de los focos. La fuerza de la presión de radiación depende del inverso del cuadrado de la distancia, justo como ocurre con la fuerza de gravedad. Por lo tanto, la órbita se vuelve una elipse justo como si la masa del Sol o la masa del objeto se redujeran poco repentinamente. Debido a que la fuerza es perpendicular a la velocidad del satélite, la energía de éste no resultará afectada.

El ángulo de despliegue 2 resulta en una órbita creciente. La fuerza resultante de la luz reflejada produce una componente de fuerza que está en la misma dirección que la velocidad de la nave espacial. Por lo tanto, la nave espacial gana energía y el radio de la órbita crece. Observe que la velocidad de la nave espacial decrece, pero la energía total crece.

El ángulo de despliegue 3 resulta en una órbita que se encoge. La fuerza resultante de la luz reflejada produce una componente de fuerza que está en la dirección opuesta a la velocidad de la nave espacial. Por lo tanto, la nave espacial pierde energía y el radio de la órbita decrece. Observe que la velocidad de la nave espacial crece, pero su energía total decrece.

31.4 Tome el producto vectorial del operador gradiente $\vec{\nabla}$ y la cuarta ecuación de Maxwell: $\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{B} = \epsilon_0 \mu_0 \vec{\nabla} \times \dfrac{\partial}{\partial t} \vec{E}.$

El miembro derecho de esta ecuación es

$$\epsilon_0 \mu_0 \vec{\nabla} \times \frac{\partial}{\partial t} \vec{E} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) = -\epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{B}.$$

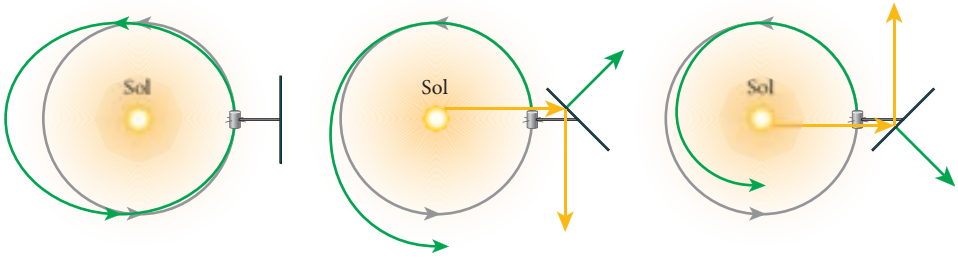
El miembro izquierdo es $\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{B} = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) - \nabla^2 \vec{B} = -\nabla^2 \vec{B}.$

31.5 $\dfrac{\partial^2}{\partial t^2} \operatorname{sen}(\kappa x - \omega t) = -\omega^2 \operatorname{sen}(\kappa x - \omega t)$

y

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \operatorname{sen}(\kappa x - \omega t) = -\kappa^2 \operatorname{sen}(\kappa x - \omega t).$$

Por lo tanto, esta función es una solución de $c = \omega/\kappa$.



Ángulo 1 Ángulo 2 Ángulo 3

PRÁCTICA PARA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Lineamientos para resolución de problemas

1. Las mismas relaciones básicas que caracterizan cualquier onda también son válidas para las ondas electromagnéticas. Recuerde que $c = \lambda f$ y $\omega = c\kappa$, donde c es la velocidad de una onda electromagnética. En caso de ser necesario, revise el capítulo 15.

2. A menudo es útil trazar un diagrama que muestre la dirección de movimiento de la onda y la orientación de los campos eléctrico y magnético. Recuerde las relaciones entre $\vec{E}$ y $\vec{B}$ para las magnitudes y las direcciones, incluyendo $E/B = (\mu_0 \epsilon_0)^{-1/2} = c$ para las ondas electromagnéticas.

PROBLEMA RESUELTO 31.2 Polarizadores múltiples

Suponga que usted tiene luz polarizada en la dirección vertical y desea rotar la polarización a la dirección horizontal ($\theta = 90.0°$). Si usted pasa la luz polarizada verticalmente a través de un polarizador cuyo ángulo de polarización es horizontal, toda la luz es bloqueada. Pero si en lugar de lo anterior usa una serie de diez polarizadores, cada uno de los cuales tiene un ángulo de polarización θ que es 9.00° más que el del precedente, con el primer polarizador teniendo $\theta = 9.00°$, usted puede rotar la polarización por 90.0° y aún así hay luz que continúa pasando.

PROBLEMA

¿Qué fracción de la intensidad de la luz incidente es transmitida a través de los diez polarizadores?

SOLUCIÓN

PIENSE

Cada polarizador se rota 9.00° con respecto al polarizador precedente. Por lo tanto, cada polarizador transmite una fracción de la intensidad igual a $f = \cos^2 9°$. Entonces, la fracción transmitida es f^{10}.

ESBOCE

La figura 31.25 muestra la dirección de la polarización inicial y la orientación de los diez polarizadores.

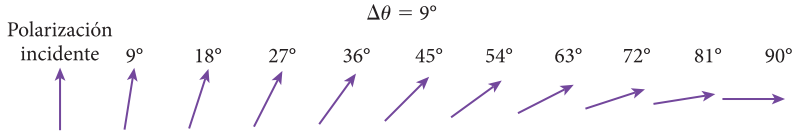


FIGURA 31.25 La dirección de polarización de la luz incidente y la dirección de los ángulos de polarización de diez polarizadores.

INVESTIGUE

La intensidad, I, de luz polarizada que pasa por un polarizador, cuya dirección de polarización forma un ángulo θ con la polarización de la luz incidente está dada por

$$I = I_0 \cos^2\theta,$$

donde I_0 es la intensidad de la luz polarizada incidente. En este caso, la dirección de polarización de cada polarizador sucesivo es $\Delta\theta = 9°$ mayor que la dirección de polarización del polarizador precedente. Por lo tanto, cada polarizador reduce la intensidad por el factor

$$\frac{I}{I_0} = \cos^2\Delta\theta.$$

SIMPLIFIQUE

La reducción en la intensidad después de que la luz ha pasado por diez polarizadores, cada uno con su dirección de polarización diferente de la del polarizador precedente por $\Delta\theta$ es

$$\frac{I_{10}}{I_0} = \left(\cos^2\Delta\theta\right)^{10}.$$

CALCULE

Al escribir los valores numéricos, obtenemos

$$\frac{I_{10}}{I_0} = \left(\cos^2 9°\right)^{10} = 0.780546.$$

REDONDEE

Mostramos nuestro resultado con tres cifras:

$$\frac{I_{10}}{I_0} = 0.781 = 78.1\%.$$

VUELVA A REVISAR

Al usar diez polarizadores, cada uno rotado por 9° más que el precedente, la polarización de la luz incidente ha sido rotada por 90° y fue transmitido 78.1% de la luz, mientras que usar un polarizador rotado por 90° hubiera bloqueado toda la luz incidente. Para ver si nuestra respuesta es razonable, supongamos que en lugar de diez polarizadores usamos n polarizadores, cada uno rotado por un ángulo $\Delta\theta = \theta_{máx}/n$, donde $\theta_{máx} = 90°$. Para cada polarizador, el ángulo entre ese polarizador y el polarizador precedente es pequeño, de modo que podemos usar la aproximación de ángulo pequeño para $\cos\Delta\theta$ para escribir

$$\frac{I_1}{I_0} \approx \left(1 - \frac{(\Delta\theta)^2}{2}\right)^2.$$

(*continúa*)

(*continuación*)

Entonces, la intensidad de la luz que pasa por los n polarizadores es

$$\frac{I_n}{I_0} \approx \left(1 - \frac{\left(\theta_{\text{máx}}/n\right)^2}{2}\right)^{2n} = \left(1 - \frac{\theta_{\text{máx}}^2}{2n^2}\right)^{2n}.$$

Para n grande,

$$\frac{I_n}{I_0} \approx 1 = 100\%.$$

Al usar diez polarizadores para rotar la polarización de la luz polarizada incidente se permitió el paso de 78.1% de la luz. El uso de más de diez polarizadores con menores cambios en la dirección de polarización permitiría que la transmisión tendiera a 100%. Por lo tanto, nuestro resultado parece razonable.

PROBLEMA RESUELTO 31.3 Velas solares propulsadas por láser

Una idea para propulsar naves espaciales de largo alcance implica el uso de un haz láser de alta potencia, más que la luz solar, enfocada sobre una gran vela totalmente reflejante. Así, la nave espacial podría ser propulsada desde la Tierra. Suponga que un láser de 10.0 GW puede enfocarse a largas distancias. La nave espacial tiene una masa de 200.0 kg, y su vela reflejante es suficientemente grande para interceptar toda la luz emitida por el láser.

PROBLEMA

Si se ignora la gravedad, ¿en cuánto tiempo la nave espacial alcanza una velocidad de 30.0% de la velocidad de la luz, empezando desde el reposo?

SOLUCIÓN

PIENSE

La presión de radiación proveniente del láser produce una fuerza constante sobre la nave espacial, resultando en una aceleración constante. Si usamos la aceleración constante, podemos calcular el tiempo necesario para alcanzar la velocidad final a partir del reposo.

ESBOCE

La figura 31.26 es un diagrama de un haz láser que dirige luz hacia la nave espacial con una vela totalmente reflejante.

FIGURA 31.26 Láser que dirige su luz hacia una nave espacial con una vela totalmente reflejante.

INVESTIGUE

La presión de radiación, p_r, de la luz con intensidad I producida por el láser es

$$p_r = \frac{2I}{c}.$$

La presión se define como fuerza, F, por unidad de área, A, del punto producido por el haz sobre la vela, de modo que podemos escribir

$$\frac{2I}{c} = \frac{F}{A}.$$

La intensidad del láser está dada por la potencia, P, del láser dividida entre el área del punto, A. En el supuesto de que la vela de la nave espacial puede interceptar todo el haz láser, podemos escribir

$$\frac{F}{A} = \frac{2(P/A)}{c}.$$

Al despejar la fuerza ejercida por el haz láser sobre la vela y al usar la segunda ley de Newton, podemos escribir

$$F = \frac{2P}{c} = ma. \qquad \text{(i)}$$

SIMPLIFIQUE

Podemos despejar la aceleración en la ecuación (i):

$$a = \frac{2P}{mc}.$$

En el supuesto de que toda la potencia del láser permanece enfocada sobre la vela de la nave espacial, ésta experimentará una aceleración constante. Entonces, la velocidad final, v, de la nave espacial puede relacionarse con el tiempo necesario para alcanzar esa velocidad por medio de

$$v = at = 0.300c.$$

Al despejar el tiempo, obtenemos

$$t = \frac{0.300c}{2P/mc} = \frac{0.300mc^2}{2P}.$$

CALCULE

Al escribir los valores numéricos, obtenemos

$$t = \frac{0.300mc^2}{2P} = \frac{0.300(200.0\text{ kg})(3.00\cdot 10^8\text{ m/s})^2}{2(10.0\cdot 10^9\text{ W})} = 270\,000\,000\text{ s}.$$

REDONDEE

Mostramos nuestro resultado con tres cifras:

$$t = 270\,000\,000\text{ s} = 8.56\text{ años}.$$

VUELVA A REVISAR

Para corroborar nuestro resultado, calculamos la aceleración de la nave espacial:

$$a = \frac{2P}{mc} = \frac{2(10.0\cdot 10^9\text{ W})}{(200\text{ kg})(3.00\cdot 10^8\text{ m/s})} = 0.333\text{ m/s}^2.$$

Esta aceleración es 3% de la aceleración debida a la gravedad en la superficie de la Tierra. Esta aceleración es producida por un láser cuya potencia es 10 veces la potencia de una estación de energía típica, que debe operar de manera continua durante 8.56 años. La distancia recorrida por la nave espacial durante ese tiempo es

$$x = \tfrac{1}{2}at^2 = \tfrac{1}{2}(0.333\text{ m/s}^2)(2.70\cdot 10^8\text{ s})^2 = 1.21\cdot 10^{16}\text{ m} = 1.28\text{ años luz},$$

que es ligeramente más de $1\frac{1}{4}$ veces la distancia recorrida por la luz en un año. El láser debe permanecer enfocado sobre la nave a esta distancia. Por lo tanto, aunque nuestros cálculos parecen razonables, parece difícil satisfacer los requerimientos para una nave espacial con vela propulsada por láser. En el capítulo 35 veremos que debemos modificar este cálculo porque la velocidad implicada constituye una fracción importante de la velocidad de la luz.

PREGUNTAS DE OPCIÓN MÚLTIPLE

31.1 ¿Cuál de los siguientes fenómenos puede observarse para ondas electromagnéticas, pero no para ondas sonoras?

a) Interferencia.
b) Difracción.
c) Polarización.
d) Absorción.
e) Dispersión.

31.2 ¿Cuáles de las siguientes afirmaciones sobre ondas electromagnéticas son incorrectas? (Seleccione todas las válidas.)

a) En el vacío, las ondas electromagnéticas viajan a la velocidad de la luz.

b) Las magnitudes del campo eléctrico y del campo magnético son iguales.

c) Sólo el vector de campo eléctrico es perpendicular a la dirección de propagación de la onda.

d) Tanto el vector de campo eléctrico como el vector de campo magnético son perpendiculares a la dirección de propagación.

e) Una onda electromagnética transporta energía sólo cuando $E = B$.

31.3 La estación de radio internacional Voz de Slobbovia anuncia que está "transmitiendo hacia América del Norte en la banda de 49 metros". ¿A qué frecuencia está transmitiendo la estación?

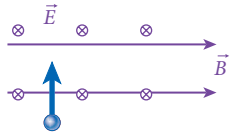
a) 820 kHz
b) 6.12 MHz
c) 91.7 MHz
d) La información proporcionada no dice nada sobre la frecuencia.

31.4 ¿Cuál de lo siguiente ejerce la mayor cantidad de presión de radiación?

a) Un láser de 1 mW apuntado sobre un punto de 2 mm situado a 1 m de distancia.
b) Una bombilla de 200 W en un punto de 4 mm de diámetro situado a 10 m de distancia.
c) Una bombilla de 100 W en un punto de 2 mm de diámetro situado a 4 m de distancia.
d) Una bombilla de 200 W en un punto de 2 mm de diámetro situado a 5 m de distancia.
e) Todas las anteriores ejercen la misma presión.

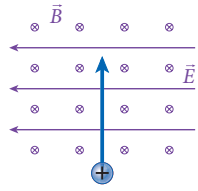
31.5 ¿Cuál es la dirección de la fuerza neta sobre la carga positiva en movimiento en la figura?

a) Hacia la página.
b) Hacia la derecha.
c) Hacia fuera de la página.
d) Hacia la izquierda.



31.6 Un protón se mueve perpendicularmente hacia campos eléctrico y magnético que se cruzan como ilustra la figura. ¿Cuál es la dirección de la fuerza neta del protón?

a) Hacia la izquierda.
b) Hacia la derecha.
c) Hacia la página.
d) Hacia fuera de la página.



31.7 Se ha especulado que en alguna parte del universo pueden existir "cargas" magnéticas aisladas (monopolos magnéticos). ¿Cuál de las ecuaciones de Maxwell: 1) ley de Gauss para campos eléctricos, 2) ley de Gauss para campos magnéticos, 3) ley de inducción de Faraday y/o 4) ley de Maxwell-Ampère, puede ser modificada por la existencia de monopolos magnéticos?

a) Sólo la 2).
b) La 1) y la 2).
c) La 2) y la 3).
d) Sólo la 3).

31.8 Según la ley de Gauss para campos magnéticos, todas las líneas de campo magnético forman un bucle completo. En consecuencia, la dirección del campo magnético $\vec{B}$ apunta del polo _____ al polo _____ fuera de una barra imantada normal y del polo _____ al polo _____ dentro del imán.

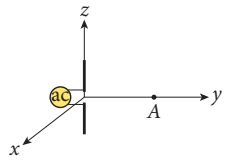
a) Norte, sur, norte, sur.
b) Norte, sur, sur, norte.
c) Sur, norte, sur, norte.
d) Sur, norte, norte, sur.

PREGUNTAS

31.9 En un experimento con luz polarizada se usa un arreglo semejante al de la figura 31.22. Luz no polarizada con intensidad I_0 incide sobre el polarizador 1. Los polarizadores 1 y 3 están cruzados (a un ángulo de 90°) y sus orientaciones están fijas durante el experimento. Inicialmente, el polarizador 2 tiene su ángulo de polarización a 45°. Luego, en el instante t = 0 s, el polarizador 2 empieza a rotar con una velocidad angular ω alrededor de la dirección de propagación de la luz en sentido contrario a la dirección del movimiento de las manecillas del reloj, según lo ve un observador que mira hacia la fuente de luz. Para monitorear la intensidad de la luz que emerge del polarizador 3 se usa un fotodiodo.

a) Determine una expresión para la intensidad como una función del tiempo.
b) ¿Cómo cambiaría la expresión del inciso *a*) si el polarizador 2 rota alrededor de un eje paralelo a la dirección de propagación de la luz, pero está desplazado una distancia $d < R$, donde R es el radio del polarizador?

31.10 Una antena dipolar está ubicada en el origen con su eje a lo largo del eje z. Cuando por la antena circula corriente hacia arriba y hacia abajo, radiación electromagnética polarizada se aleja de la antena a lo largo del eje y positivo. ¿Cuáles son las direcciones posibles de los campos eléctrico y magnético en el punto A sobre el eje y? Explique.



31.11 ¿La información en la sección 31.10 afecta la respuesta del ejemplo 31.2 sobre la magnitud raíz cuadrática media del campo eléctrico proveniente del Sol en la superficie terrestre?

31.12 Las ecuaciones de Maxwell pronostican que no hay monopolos magnéticos. Si estos monopolos existen, ¿cómo cambiaría el movimiento de partículas cargadas al aproximarse a un monopolo así?

31.13 Si se envían hacia la Luna dos señales de comunicación al mismo tiempo, una como ondas de radio y la otra como luz visible, ¿cuál llega primero a la Luna?

31.14 Demuestre que la ley de Ampère no necesariamente es consistente si la superficie a través de la cual el flujo a calcular es una superficie cerrada, pero que la ley de Maxwell-Ampère sí es consistente. (Por lo tanto, la introducción a la ley de inducción de Maxwell y la introducción a la corriente de desplazamiento no son opcionales; son lógicamente necesarias.) Demuestre también que la ley de inducción de Faraday no presenta este problema de consistencia.

31.15 Las ecuaciones de Maxwell y las leyes de movimiento de Newton son mutuamente inconsistentes; el gran edificio de la física clásica es fatalmente defectuoso. Explique por qué.

31.16 Prácticamente todos los que han estudiado el espectro electromagnético se han preguntado cómo sería el mundo si pudiéramos ver sobre un rango de frecuencias de las diez octavas sobre el que podemos oír, en lugar de menos de una

octava sobre lo que podemos ver. (Una octava se refiere a un factor de 2 en frecuencia.) Pero esto es fundamentalmente imposible. ¿Por qué?

31.17 Las ondas electromagnéticas provenientes de una pequeña fuente isotrópica no son ondas planas, que tienen amplitudes máximas constantes.

a) ¿Cómo varía, con la distancia a la fuente, la amplitud máxima del campo eléctrico de la radiación de una pequeña fuente isotrópica?

b) Compare lo anterior con el campo electrostático de una carga puntual.

31.18 Un par de anteojos de sol se mantiene de frente a un monitor de computadora plano (que está encendida), de modo que los lentes siempre son paralelos a la pantalla. A medida que los lentes rotan, se observa que la intensidad de la luz que proviene de la pantalla y pasa a través de los lentes varía. ¿Por qué?

31.19 Dos filtros polarizantes están cruzados a 90°, de modo que cuando desde atrás del par de filtros proviene una luz, nada de ésta pasa a través de los filtros. Entre los dos primeros filtros se inserta un tercero, que inicialmente está alineado con éstos. Describa qué ocurre cuando el filtro intermedio se hace rotar un ángulo de 360°.

PROBLEMAS

Una • y dos •• indican un nivel creciente de dificultad del problema.

Sección 31.1

31.20 Un campo eléctrico de magnitud 200. V/m está dirigido perpendicularmente a una superficie circular plana de 6.00 cm. Si el campo eléctrico crece a razón de 10.0 V/(m s), determine la magnitud y la dirección del campo magnético a una distancia radial de 10.0 cm al centro del área circular.

•**31.21** Un alambre de 1.0 mm de radio conduce una corriente de 20.0 A. El alambre está conectado a un capacitor de placas paralelas con placas circulares de radio $R = 4.0$ cm y separación entre las placas de $s = 2.0$ mm. ¿Cuál es la magnitud del campo magnético debido al campo eléctrico variable en un punto situado a una distancia radial $r = 1.0$ cm al centro de las placas paralelas? Ignore los efectos de borde.

•**31.22** La corriente que fluye en un solenoide de 20.0 cm de longitud, 2.00 cm de radio y 500 vueltas decrece desde 3.00 A hasta 1.00 A en 0.100 s. Determine la magnitud del campo eléctrico inducido dentro del solenoide a 1.00 cm de su centro.

Sección 31.2

31.23 Un capacitor de placas paralelas tiene aire entre sus placas en forma de disco de 4.0 mm de radio, las cuales son coaxiales y están separadas por una distancia de 1.0 mm. Sobre las placas del capacitor se acumula carga. ¿Cuál es la corriente de desplazamiento entre las placas en un instante cuando la razón de acumulación de carga sobre las placas es 10.0 μC/s?

•**31.24** Un capacitor de placas paralelas tiene placas circulares de radio 10.0 cm, separadas por una distancia de 5.0 mm. El potencial a través del capacitor se incrementa a razón constante de 1 200 V/s. Determine la magnitud del campo magnético entre las placas a una distancia $r = 4.0$ cm del centro.

•**31.25** El voltaje a través de un conductor cilíndrico de radio r, longitud L y resistencia R varía con el tiempo. El voltaje que varía con el tiempo produce una corriente, i, que varía con el tiempo, que circula en el cilindro. Demuestre que la corriente de desplazamiento es igual a $\epsilon_0 \rho di/dt$, donde ρ es la resistividad de conductor.

Sección 31.5

31.26 La amplitud del campo eléctrico de una onda electromagnética es 250 V/m. ¿Cuál es la amplitud del campo magnético de la onda electromagnética?

31.27 Determine la distancia en pies que la luz puede recorrer en el vacío durante 1.00 ns.

31.28 ¿En cuánto tiempo la luz recorre la distancia de la Luna a la Tierra? ¿Del Sol a la Tierra? ¿De Júpiter a la Tierra?

31.29 Alicia hizo una llamada desde el teléfono de su casa en Nueva York a su novio en Bagdad, a una distancia aproximada de 10 000 km, y la señal fue transportada por un cable de teléfono. Al día siguiente, Alicia llamó de nuevo a su novio desde su teléfono celular, y la señal fue transmitida por medio de un satélite situado a 36 000 km sobre la superficie terrestre, a la mitad del camino entre Nueva York y Bagdad. Estime el tiempo necesario para que las señales enviadas por *a*) el cable de teléfono y *b*) el satélite lleguen a Bagdad, en el supuesto de que la velocidad de la señal en ambos casos es igual a la velocidad de la luz, *c*. ¿Habría algún retraso observable en alguno de los dos casos?

•**31.30** Los campos eléctrico y magnético en muchos materiales pueden analizarse usando las mismas relaciones que para campos en el vacío, sólo sustituyendo los valores relativos de la permitividad y la permeabilidad, $\epsilon = \kappa\epsilon_0$ y $\mu = \kappa_m\mu_0$, por sus valores en el vacío, donde κ es la constante dieléctrica y κ_m es la permeabilidad relativa del material. Calcule la razón de la velocidad de las ondas electromagnéticas en el vacío a su velocidad en ese material.

Sección 31.6

31.31 El rango de la longitud de onda de la luz visible en el aire va de 400 nm a 700 nm (vea la figura 31.10). ¿Cuál es el rango de frecuencias de la luz visible?

31.32 La antena de un teléfono celular es una barra recta de 8.0 cm de longitud. Calcule la frecuencia de operación de la señal de este teléfono, en el supuesto de que la longitud de la antena es $\frac{1}{4}$ de la longitud de onda de la señal.

•**31.33** Suponga que un circuito RLC en resonancia se usa para producir una onda de radio de 150 m de longitud de onda. Si el circuito tiene un capacitor de 2.0 pF, ¿cuál es el tamaño del inductor usado?

•**31.34** Tres estaciones de radio FM que cubren la misma zona geográfica transmiten a frecuencias 91.1, 91.3 y 91.5 MHz, respectivamente. ¿Cuál es el máximo ancho de la longitud de onda permisible del filtro pasa-banda en un receptor de radio de modo que la estación FM de 91.3 pueda escucharse sin interferencia desde las frecuencias FM 91.1 o FM 91.5? Use $c = 3.00 \cdot 10^8$ m/s, y calcule la longitud de onda dentro de una incertidumbre de 1 mm.

Sección 31.8

31.35 Una fuente de luz monocromática emite 1.5 W de potencia electromagnética de manera uniforme en todas las direcciones. Encuentre el vector de Poynting en un punto situado en cada una de las siguientes ubicaciones:

a) A 0.30 m de la fuente.

b) A 0.32 m de la fuente.

c) A 1.00 m de la fuente.

31.36 Considere un electrón en un átomo de hidrógeno, que se encuentra a 0.050 nm del protón en el núcleo.

a) ¿Qué campo eléctrico experimenta el protón?

b) Para producir un campo eléctrico cuya magnitud raíz cuadrática media es la misma que la del campo en el inciso *a*), ¿qué intensidad debe tener una luz láser?

31.37 Un láser de dióxido de carbono de 3.00 kW se usa para soldadura láser. Si el haz mide 1.00 mm de diámetro, ¿cuál es la amplitud del campo eléctrico en el haz?

31.38 Suponga que cargas en una antena de dipolo oscilan lentamente a razón de 1.00 ciclo/s y que la antena irradia ondas electromagnéticas en una región del espacio. Si alguien mide el campo magnético que varía con el tiempo en la región y encuentra que su máximo es 1.00 m T, ¿cuál es el campo eléctrico máximo, *E*, en la región, en unidades de voltios por metro? ¿Cuál es el periodo de oscilación de las cargas? ¿Cuál es la magnitud del vector de Poynting?

31.39 Calcule el valor promedio del vector de Poynting, S_{prom}, para una onda electromagnética cuyo campo eléctrico tiene una amplitud de 100. V/m.

a) ¿Cuál es la densidad media de esta onda?

b) ¿Cuán grande es la amplitud del campo magnético?

•**31.40** El haz de luz más intenso que puede propagarse por aire seco debe tener un campo eléctrico cuya amplitud máxima no sea mayor que el valor de disrupción para el aire $E_{\text{máx}}^{\text{aire}} = 3.0 \cdot 10^6$ V/m, en el supuesto de que este valor no es afectado por la frecuencia de la onda.

a) Calcule la amplitud máxima del campo magnético que puede tener esta onda.

b) Calcule la intensidad máxima de esta onda.

c) ¿Qué ocurre a una onda más intensa que ésta?

••**31.41** Un haz láser de onda continua (oc) de iones de argón tiene una potencia media de 10.0 W y un diámetro de haz de 1.00 mm. Suponga que la intensidad del haz es la misma en todas partes de la sección transversal del haz (lo cual no es cierto, ya que la distribución real de la intensidad es una función gaussiana).

a) Calcule la intensidad del haz láser. Compare este resultado con la intensidad media de la luz solar en la superficie de la Tierra (1 400. W/m^2).

b) Encuentre el campo eléctrico raíz cuadrático medio en el haz láser.

c) Encuentre el valor medio del vector de Poynting a lo largo del tiempo.

d) Si la longitud de onda sobre el haz láser es 514.5 nm en el vacío, escriba una expresión para el vector de Poynting instantáneo, donde el vector de Poynting instantáneo es cero en $t = 0$ y $x = 0$.

e) Calcule el valor raíz cuadrático medio del campo magnético en el haz láser.

••**31.42** A través de un conductor cilíndrico de radio *r*, longitud *L* y resistencia *R*, se aplica un voltaje, *V*. Como resultado, por el conductor circula una corriente, *i*, lo cual origina un campo magnético, *B*. El conductor está colocado a lo largo del eje *y*, y la corriente fluye en la dirección *y* positiva. Suponga que el campo eléctrico es uniforme en todo el conductor.

a) Encuentre la magnitud y la dirección del vector de Poynting en la superficie del conductor.

b) Demuestre que $\int \vec{S} \bullet d\vec{A} = i^2 R$.

Sección 31.9

31.43 La radiación del Sol llega a la Tierra a razón de 1.40 kW/m^2 por arriba de la atmósfera y a razón de 1.00 kW/m^2 sobre la playa de un océano.

a) Calcule los valores máximos de *E* y *B* por arriba de la atmósfera.

b) Encuentre la presión y la fuerza ejercidas por la radiación sobre una persona acostada en la playa expuesta al Sol y cuya área es 0.750 m^2.

31.44 Algunos científicos han propuesto utilizar la presión de la radiación del Sol para viajar a otros planetas en el Sistema Solar. Si la intensidad de la radiación electromagnética producida por el Sol es de alrededor de 1.40 kW/m^2 cerca de la Tierra, ¿cuál debe ser el tamaño de una vela para acelerar a 1.00 m/s^2 una nave espacial cuya masa es de 10.0 toneladas métricas?

a) Suponga que la vela absorbe toda la radiación incidente.

b) Suponga que la vela refleja perfectamente toda la radiación incidente.

31.45 Una vela solar es un círculo gigantesco (de radio R = 10.0 km) hecho de un material perfectamente reflejante por un lado y totalmente absorbente por el otro. En el espacio sideral, lejos de otras fuentes de luz, el fondo cósmico de microondas constituye la principal fuente de radiación incidente sobre la vela. En el supuesto de que esta radiación es la de un cuerpo negro ideal a $T = 2.725$ K, calcule la fuerza neta sobre la vela debida a su reflexión y absorción.

•**31.46** Dos astronautas están en reposo en el espacio exterior, uno a 20.0 m del transbordador espacial, y el otro, a 40.0 m del transbordador. Usando un láser de 100.0 W, el astronauta que está a 40.0 m del transbordador decide propulsar al otro astronauta hacia el transbordador. Enfoca el láser sobre un trozo de

tela totalmente reflejante del traje espacial del astronauta. Si la masa total del astronauta con equipo es 100.0 kg, ¿en cuánto tiempo llega al transbordador?

•**31.47** Un láser que produce un punto de luz de 1.00 mm de diámetro brilla perpendicularmente sobre el centro de una placa de aluminio circular perfectamente reflejante (de 2.00 mm de diámetro), montada verticalmente sobre un trozo plano de corcho que flota en la superficie del agua en un gran vaso de precipitados. La masa de este "velero" es 0.100 g, y recorre 2.00 mm en 63.0 s. Suponga que la potencia del láser es constante en la región en la que está ubicado el velero durante su movimiento. ¿Cuál es la potencia del láser? (Ignore la resistencia del aire y la viscosidad del agua.)

•**31.48** Una pequeña partícula de densidad 2 000. kg/m^3 está a la misma distancia del Sol que la distancia de la Tierra al Sol ($1.50 \cdot 10^{11}$ m). Suponga que la partícula es esférica y perfectamente reflejante. ¿Cuál debe ser su radio para que la presión hacia fuera de la radiación sobre ella sea 1.00% de la atracción gravitacional hacia dentro del Sol? (Considere que la masa del Sol es $2.00 \cdot 10^{30}$ kg.)

•**31.49** El aerogel de sílice, un material aislante extremadamente poroso hecho a base de sílice, tiene una densidad de 1.00 mg/cm^3. Una rebanada delgada de este aerogel mide 2.00 mm de diámetro y 0.10 mm de grosor.

a) ¿Cuál es el peso de la rebanada de aerogel (en newtons)?

b) ¿Cuáles son la intensidad y la presión de radiación de un haz láser de 5.00 mW de 2.00 mm de diámetro que incide sobre la muestra?

c) ¿Cuántos rayos láser de 5.00 mW de 2.00 mm de diámetro son necesarios para que la rebanada flote en el campo gravitacional de la Tierra? Use $g = 9.81$ m/s^2.

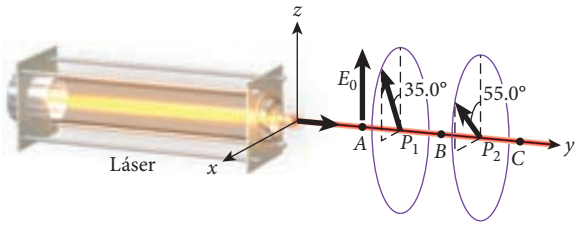
Sección 31.10

31.50 Dos polarizadores están desalineados por 30.0°. Si luz de intensidad 1.00 W/m^2 polarizada inicialmente a la mitad de los ángulos de polarización de los dos filtros pasa por los dos filtros, ¿cuál es la intensidad de la luz transmitida?

31.51 Un haz láser de 10.0 mW polarizado verticalmente pasa por un polarizador cuyo ángulo de polarización es 30.0° con respecto a la horizontal. ¿Cuál es la potencia del haz láser cuando emerge del polarizador?

•**31.52** Luz no polarizada de intensidad I_0 incide sobre una serie de cinco polarizadores, cada uno rotado 10.0° con respecto al polarizador precedente. ¿Qué fracción de la luz incidente pasa por la serie de polarizadores?

•**31.53** Un láser produce luz polarizada en la dirección vertical. La luz se desplaza en la dirección *y* positiva y pasa por dos polarizadores, cuyos ángulos de polarización son 35.0° y 55.0° con respecto a la vertical, como muestra la figura. El haz láser es colimado (no se hace convergente ni se expande), tiene una sección transversal circular con diámetro de 1.00 mm y su potencia media es de 15.0 mW en el punto *A*. En el punto *C*, ¿cuáles son las magnitudes de los campos eléctrico y magnético, y cuál es la intensidad del haz láser?



Problemas adicionales

31.54 Un haz láser requiere 50.0 ms para ser reflejado de regreso en una vela totalmente reflejante en una nave espacial. ¿A qué distancia está la vela?

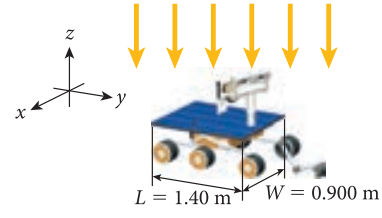
31.55 Una casa con un techo orientado hacia el sur tiene una celda fotovoltaica en el techo. Los paneles fotovoltaicos tienen una eficiencia de 10.0% y ocupan un área de 3.00 m por 8.00 m. La radiación solar media que incide en los paneles es 300. W/m^2, promediada sobre todas las condiciones durante un año. ¿Cuántos kilovatios hora de electricidad generan los paneles solares en un mes de 30 días?

31.56 ¿Cuál es la presión de radiación debida a Betelgeuse (que tiene una luminosidad, o potencia de salida, igual a 10 000 veces la del Sol) a una distancia igual a la de la órbita de Urano a su alrededor?

31.57 Un láser de 200. W produce un haz de área de sección transversal de 1.00 mm^2 y longitud de onda de 628 m. ¿Cuál es la amplitud del campo eléctrico en el haz?

31.58 ¿Cuál es la longitud de onda de las ondas electromagnéticas usadas para comunicaciones con teléfonos celulares en la banda de 850 MHz?

31.59 Como muestra la figura, luz solar incide directamente (dirección *z* negativa) sobre un panel solar (de longitud $L = 1.40$ m y ancho $W = 0.900$ m) sobre el robot *Spirit* en Marte. La amplitud del campo eléctrico en la radiación solar es 673 V/m y es uniforme (la radiación tiene la misma amplitud en todas partes). Si la eficiencia del panel solar es 18.0% al convertir radiación solar en energía eléctrica, ¿cuánta potencia debe generar el panel?



31.60 Un capacitor de 14.9 μF, un resistor de 24.3 kΩ, un interruptor y una batería de 25 V están conectados en serie. ¿Cuál es la razón de cambio del campo eléctrico entre las placas del capacitor en $t = 0.3621$ s después de que se cierra el interruptor? El área de las placas es 1.00 cm^2.

31.61 Un punto de luz enfocado de 300 W suministra 40% de su luz dentro de un área circular de 2 m de diámetro. ¿Cuál es el campo eléctrico raíz cuadrático medio en el área iluminada?

31.62 ¿Cuál es la amplitud del campo eléctrico de una onda electromagnética cuya amplitud de campo magnético es $5.00 \cdot 10^{-3}$ T?

31.63 ¿Cuál es la distancia entre antinodos de calefacción sucesivos en la cavidad de un horno de microondas? Un horno de microondas suele operar a una frecuencia de 2.4 GHz.

31.64 La constante solar medida para satélites terrestres es aproximadamente 1 400 W/m^2.

a) Encuentre el campo eléctrico máximo de la radiación electromagnética proveniente del Sol.

b) Encuentre el campo magnético máximo de estas ondas electromagnéticas.

•**31.65** El campo eléctrico máximo a una distancia de 2.25 m de una bombilla es 21.2 V/m.

a) ¿Cuál es el campo magnético máximo ahí?

b) ¿Cuál es la potencia de salida de la bombilla?

•**31.66** Si el campo eléctrico máximo debido a una estrella, cuyo radio es el doble que el del Sol, es 0.015 V/m a una distancia de 15 AU, ¿cuál es su temperatura? Considere que la estrella es un cuerpo negro.

•**31.67** El diámetro de un apuntador láser de 5.00 mW mide 2.00 mm.

a) ¿Cuál es el valor raíz cuadrático medio del campo eléctrico en este haz láser?

b) Calcule la energía electromagnética total en 1.00 m de este haz láser.

•**31.68** En la superficie de la Tierra, el Sol suministra una energía estimada en 1.00 kW/m^2. Suponga que luz solar incide en un techo de 10.0 m por 30.0 m a un ángulo de 90.0°.

a) Estime la potencia total incidente sobre el techo.

b) Encuentre la presión de radiación sobre el techo.

•**31.69** La National Ignition Facility cuenta con el láser más poderoso del mundo, en el que se usan 192 haces láser para enfocar 500. TW de potencia en una bolita pequeña esférica de 2.00 mm de diámetro. ¿Cuán rápido se mueve una bolita de 2.00 g/cm^3 de densidad si un único láser incide sobre ésta y se refleja 1.00% de la luz?

•**31.70** Un resistor consta de un cilindro sólido de radio r y longitud L. La resistencia del resistor es R y conduce una corriente i. Use el vector de Poynting para calcular la potencia irradiada fuera de la superficie del resistor.

•**31.71** ¿Cuál es el vector de Poynting a una distancia de 12.0 km de una torre de radio que transmite con $3.00 \cdot 10^4$ W de potencia? Suponga que las ondas de radio que inciden en la Tierra se reflejan de vuelta en el espacio.

a) ¿Están polarizadas, o no lo están, las ondas provenientes de este transmisor?

b) ¿Cuál es el valor raíz cuadrático medio de la fuerza eléctrica sobre un electrón en este sitio?

•**31.72** La teoría cuántica establece que las ondas electromagnéticas en realidad constan de paquetes discretos —fotones—, cada uno con energía $E = \hbar\omega$, donde $\hbar = 1.054573 \cdot 10^{-34}$ J s es la constante de Planck reducida y ω es la frecuencia angular de la onda.

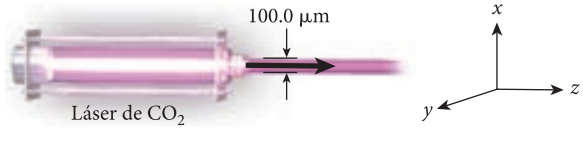
a) Encuentre la cantidad de movimiento de un fotón.

b) Encuentre la cantidad de movimiento angular de un fotón. Los fotones están *polarizados circularmente*; es decir, están descritos por una superposición de dos ondas planas polarizadas con amplitudes de campo iguales, frecuencias iguales y polarizaciones perpendiculares, fuera de fase por un cuarto de ciclo (90° o $\pi/2$ rad) de modo que los vectores de campo eléctrico y magnético en cualquier punto fijo rotan en un círculo con la frecuencia angular de las ondas. Es posible demostrar que una onda polarizada circularmente de energía U y frecuencia angular ω tiene una magnitud de cantidad de movimiento angular $L = U/\omega$. (La dirección de la cantidad de movimiento angular está dada por el pulgar de la mano derecha, cuando los dedos se curvan en la dirección en la que circulan los vectores de campo.)

c) La relación de la cantidad de movimiento angular de una partícula a $\hbar$ es su número cuántico de espín. Determine el número cuántico de espín del fotón.

•**31.73** Un horno de microondas opera a 250. W. En el supuesto de que las ondas emergen desde un emisor de una fuente puntual sobre un lado del horno, ¿en cuánto tiempo se derrite un cubo de hielo de 2.00 cm de arista que está a 10.0 cm del emisor si 10.0% de los fotones son absorbidos por el cubo? ¿Cuántos fotones de 10.0 cm de longitud de onda llegan al cubo de hielo por segundo? Suponga una densidad de cubo de 0.960 g/cm^3.

•**31.74** Un láser industrial de dióxido de carbono produce un haz de radiación con una potencia media de 6.00 kW a una longitud de onda de 10.6 μm. Este láser puede usarse para cortar acero hasta de 25 mm de grosor. La luz láser está polarizada en la dirección x positiva, se desplaza en la dirección z positiva y está colimada (no diverge ni converge) a un diámetro *constante* de 100.0 μm. Escriba las ecuaciones para la luz láser de los campos eléctrico y magnético como una función del tiempo y en la posición z a lo largo del haz. Recuerde que $\vec{E}$ y $\vec{B}$ son vectores. Deje sin especificar la fase global, pero asegúrese de revisar la fase relativa entre $\vec{E}$ y $\vec{B}$.



PARTE 7 ÓPTICA

32 Óptica geométrica

FIGURA 32.1 Arcoíris primario y secundario formados por refracción y reflexión de la luz en gotas de agua sobre la playa Ka'anapali en Maui, Hawai.

LO QUE APRENDEREMOS 1026

32.1 Rayos de luz y sombras 1026
Problema resuelto 32.1 Sombra de una bola 1027
32.2 Reflexión y espejos planos 1029
Imagen formada por un espejo plano 1030
Ejemplo 32.1 Espejo de longitud completa 1032
32.3 Espejos curvos 1033
Enfoque de espejos esféricos 1033
Espejos esféricos divergentes 1036
Ejemplo 32.2 Imagen formada por un espejo convergente 1038
Aberración esférica 1039
Espejos parabólicos 1040
Parábolas en rotación 1041
32.4 Refracción y ley de Snell 1041
Principio de Fermat 1043
Ejemplo 32.3 Profundidad aparente 1043
Problema resuelto 32.2 Desplazamiento de rayos de luz en material transparente 1044
Reflexión interna total 1046
Fibras ópticas 1047
Problema resuelto 32.3 Fibra óptica 1048
Espejismos 1049
Dispersión cromática 1050
Polarización por reflexión 1051

LO QUE HEMOS APRENDIDO/ GUÍA DE ESTUDIO PARA EXAMEN 1052
Práctica para resolución de problemas 1053
Preguntas de opción multiple 1053
Preguntas 1053
Problemas 1055

LO QUE APRENDEREMOS

- En los casos cuya la longitud de onda es pequeña en comparación con otras escalas de longitud en un sistema físico, las ondas de luz pueden ser modeladas mediante rayos de luz que se mueven en trayectorias rectas y representan la dirección de una luz que se propaga.
- La ley de reflexión establece que el ángulo de incidencia es igual al ángulo de reflexión.
- Los espejos pueden enfocar la luz y producir imágenes gobernadas por la ecuación del espejo, que establece que el inverso de la distancia del objeto más el inverso de la distancia de la imagen es igual al inverso de la longitud focal del espejo.
- La luz se refracta (cambia de dirección) cuando incide en una frontera entre dos medios ópticamente transparentes.
- La ley de Snell afirma que el producto del índice de refracción del medio del rayo de luz incidente por el seno del ángulo de incidencia en la frontera es igual al producto del índice de refracción del medio del rayo de luz refractado por el seno del ángulo de la luz transmitida.
- Cuando la luz cruza el límite entre dos medios y el índice de la refracción del segundo medio es menor que el índice de refracción del primer medio, hay un ángulo crítico de incidencia sobre el cual la refracción no puede tener lugar, donde, en cambio, la luz es totalmente reflejada.

El estudio de la luz se divide en tres campos: óptica geométrica, óptica ondulatoria y óptica de los cuantos. En el capítulo 31 aprendimos que la luz es una onda electromagnética, y en el capítulo 34 trataremos las propiedades ondulatorias de la luz. Este capítulo analiza la **óptica geométrica**, en la que la luz se caracteriza como rayos. La óptica de los cuantos considera que la luz está cuantizada, que su energía está localizada en partículas puntuales llamadas fotones (capítulos 36 y 37).

Los arcoíris (figura 32.1) pueden verse sólo cuando hay pequeñas gotas de agua en el aire y el Sol está detrás del observador. ¿Por qué pasa eso? La razón tiene que ver con la manera en que las pequeñas gotas de agua reflejan y refractan la luz; los dos procesos ópticos que son los temas principales de este capítulo.

Hemos visto que la luz es una onda, pero en este capítulo examinaremos sistemas en los que su longitud de onda es pequeña en comparación con otras dimensiones físicas del sistema. Entonces podemos ignorar el carácter ondulatorio de la luz y considerar sólo cómo viaja la luz por el aire; o vidrio, o agua o cualquier otro medio. Resulta que pensar en la luz de este modo es suficiente para explicar la óptica de los espejos, lentes y otros dispositivos ópticos, como prismas e incluso el arcoíris. Después, en el capítulo 34, examinaremos sistemas en los que la longitud de onda no es insignificantemente pequeña y veremos cómo eso da lugar a otros efectos ópticos.

En este capítulo se considera principalmente la luz visible, pero se tiene en mente que las leyes de reflexión, refracción y formación de imágenes también se aplican a otras clases de ondas electromagnéticas. Por ejemplo, muchas propiedades útiles de las ondas de radio se basan en la reflexión y refracción.

32.1 Rayos de luz y sombras

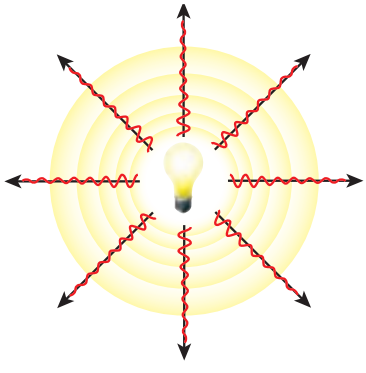


FIGURA 32.2 Luz que se dispersa desde una fuente. Amarilla: frentes de onda esféricos; rojo: campo eléctrico oscilante; negro: rayos.

En el capítulo 31 vimos que las ondas electromagnéticas se dispersan esféricamente desde una fuente puntual. Las esferas amarillas concéntricas de la figura 32.2 representan la dispersión de **frentes de onda** esféricos de la luz emitida desde un foco. (Un frente es un lugar de puntos que tienen el mismo valor instantáneo para el campo eléctrico.) Las flechas negras son los **rayos de luz**, que son perpendiculares a los frentes de onda en todo punto del espacio y apuntan en la dirección de propagación de la luz. Las líneas rojas ondulantes representan el campo eléctrico oscilante.

Las ondas de luz lejos de su fuente pueden tratarse como ondas planas cuyos frentes de onda están viajando en línea recta (figura 32.3). Estos planos que viajan se pueden representar mediante vectores paralelos o flechas perpendiculares a la superficie de los planos. En este capítulo se tratará la luz como un rayo que viaja en una línea recta mientras está en un medio homogéneo. Ver la luz como rayos nos permitirá analizar y resolver un amplio ámbito de problemas prácticos, tanto de manera geométrica como por medio de diversas construcciones.

La experiencia diaria nos dice que la luz viaja en línea recta. No podemos ver con facilidad que la luz tiene una estructura ondulatoria o una estructura de cuanto. La razón

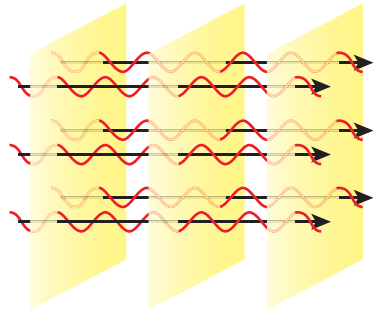


FIGURA 32.3 Planos que representan frentes de onda de una onda de luz que viaja. Las oscilaciones sinusoidales rojas representan el campo eléctrico oscilante o el campo magnético. Las flechas negras son los rayos de luz correspondientes, que son siempre perpendiculares al frente de onda.

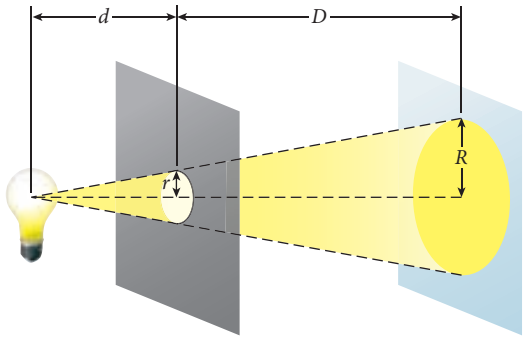


FIGURA 32.4 Luz que brilla por una abertura en una pantalla.

de esto es simplemente que las longitudes de onda de la luz visible (400-700 nm) son pequeñas comparadas con las estructuras que forman nuestras experiencias diarias. (Las pocas excepciones notables, como películas de jabón, se analizarán en el capítulo 34.)

Una persona de pie afuera en la claridad del Sol ve sombras proyectadas por los objetos bajo la luz solar. Los bordes de las sombras aparecen razonablemente nítidos, así que la persona supone que la luz viaja en línea recta y los objetos bloquean los rayos de luz provenientes del Sol cuando chocan con el objeto. Se crea una sombra donde se intercepta la luz, mientras que las áreas brillantes se crean donde la luz no interceptada continúa en línea recta y choca con el suelo u otra superficie. La sombra no es completamente negra, porque la luz se dispersa desde otras fuentes e ilumina parcialmente el área sombreada. Y el borde de la sombra tampoco es completamente nítido, porque el Sol tiene un diámetro que no es insignificante. No obstante, la creación de sombras da credibilidad a la hipótesis de movimiento en línea recta de la luz.

Esta observación puede hacerse de una manera más controlada colocando una pieza de cartón que contiene un pequeño orificio enfrente de un foco brillante de proyector (figura 32.4). Esto produce un punto redondo brillante en la pantalla (la imagen). Un orificio más pequeño produce una imagen más pequeña en la pantalla. Un orificio más grande produce una imagen más grande.

Si el tamaño de la fuente de luz es suficientemente pequeño (como punto), los triángulos similares de la figura 32.4 pueden usarse para hallar la relación entre el tamaño del orificio (r), el tamaño de la imagen (R), la distancia entre la fuente de luz y el orificio (d), y la distancia entre el orificio y la pantalla (D):

$$\frac{r}{d} = \frac{R}{d+D}. \tag{32.1}$$

Esta ecuación se denomina a veces **ley de los rayos**.

PROBLEMA RESUELTO 32.1 Sombra de una bola

La luz de una bombilla pequeña crea una sombra de una bola sobre una pared. El diámetro de la bola es 14.3 cm y el diámetro de la sombra de la bola en la pared es de 27.5 cm. La bola está a 1.99 m de la pared.

PROBLEMA

¿Qué tan lejos de la pared está la bombilla?

SOLUCIÓN

PIENSE

La bombilla es pequeña, lo que significa que se puede ignorar su tamaño y tratarla como una fuente puntual. El triángulo formado por la bombilla y la bola es similar al triángulo formado

(*continúa*)

(*continuación*)

por la bombilla y la sombra. Se da la distancia de la bola a la pared, así que podemos determinar la distancia de la bombilla a la bola, sumar esa distancia a la distancia de la bola desde la pared y obtener la distancia de la bombilla desde la pared.

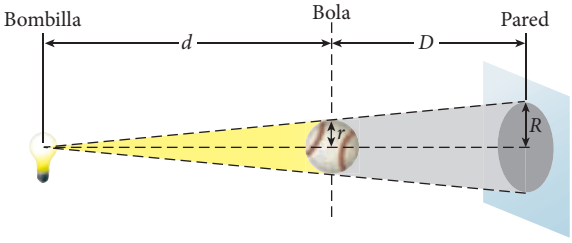


FIGURA 32.5 Una bombilla proyecta una sombra de una bola sobre una pared.

ESBOCE

La figura 32.5 ilustra un bosquejo de una bombilla que proyecta una sombra de una bola sobre una pared.

INVESTIGUE

El triángulo formado por la bombilla y la bola es similar al triángulo formado por la bombilla y la sombra. Por medio de la ecuación 32.1 se puede escribir

$$\frac{r}{d}=\frac{R}{d+D},$$

donde r es el radio de la bola, R es el radio de la sombra proyectada sobre la pared, d es la distancia de la bombilla desde la bola y D es la distancia de la bola desde la pared.

SIMPLIFIQUE

Se puede reordenar la ley de los rayos para obtener

$$d+D=\frac{Rd}{r}.$$

Al reunir los términos involucrados con la distancia desde la bombilla a la bola en el lado izquierdo, obtenemos

$$d\left(1-\frac{R}{r}\right)=-D.$$

Al despejar de la ecuación la distancia de la bombilla a la bola, se obtiene

$$d=\frac{D}{\frac{R}{r}-1}=\frac{rD}{R-r}.$$

La distancia de la bombilla desde la pared d_{bombilla} es entonces

$$d_{\text{bombilla}}=d+D=\frac{rD}{R-r}+D.$$

CALCULE

Al sustituir por los valores numéricos, obtenemos

$$d_{\text{bombilla}}=\frac{rD}{R-r}+D=\frac{(1.99\text{ m})(0.143\text{ m})}{(0.275\text{ m})-(0.143\text{ m})}+1.99\text{ m}=2.15583+1.99=4.14583\text{ m}.$$

REDONDEE

Mostramos nuestro resultado con tres cifras:

$$d_{\text{bombilla}}=4.15\text{ m}.$$

VUELVA A REVISAR

Para comprobar nuestro resultado, calculamos la relación de r/d y comparamos ese resultado con la relación $R/(d + D)$, que debe ser igual de acuerdo con la ley de rayos, ecuación 32.1. De lo anterior observamos que el valor de d, la distancia desde la bombilla a la bola, es 2.16 m. La primera relación es

$$\frac{r}{d}=\frac{0.143\text{ m}}{2.16\text{ m}}=0.0662.$$

La segunda relación es

$$\frac{R}{d+D}=\frac{0.275\text{ m}}{4.15\text{ m}}=0.0663.$$

Nuestras relaciones concuerdan hasta dentro de los errores de redondeo, así que nuestra respuesta parece razonable.

Como una segunda comprobación podemos examinar los casos límite y ver si concuerdan con nuestras expectativas. ¿Qué sucede con nuestro resultado en el caso límite en el que la distancia d de la bombilla a la bola es grande comparada con la distancia D de la bola a la pared? Éste es un caso similar a la luz del Sol que choca con la bola y proyecta una sombra. Sabemos que la sombra tiene más o menos el mismo tamaño que la bola en este caso. Y lo confirma el caso límite de nuestra fórmula $r/d = R/(d + D)$ porque para $d \gg D$ vemos que $r/d = R/(d + D) \approx R/d$ y, por lo tanto, $r \approx R$.

¿Qué sucede en el caso inverso, con $d \ll D$, donde la bombilla está muy cercana a la bola, en comparación con la distancia entre la bola y la pared? El tamaño de la sombra diverge. Nuestra fórmula muestra también este caso límite, porque en este caso $R = (d + D)r/d \approx rD/d \gg r$, es decir, el radio de la sombra se vuelve muy grande con respecto al radio de la bola.

Terminemos este análisis introductorio de rayos de luz y trazo de rayos con una observación muy importante. La dirección de los rayos es reversible. En las siguientes discusiones de reflexión de superficies y refracción por fronteras entre distintos medios, los rayos de luz se dibujan con una dirección implícita que emerge desde los objetos y luego se dispersa o difracta. Pero todos los dibujos son igualmente válidos si se invierte la dirección de los rayos. Tenga esto en mente conforme se procede en los siguientes ejemplos y deducciones.

32.2 Reflexión y espejos planos

Algunos objetos (bombillas, fuego, el Sol...) emiten luz y, por lo tanto, son fuentes luminosas. Los objetos que no son fuentes primarias de luz se pueden ver porque la reflejan. Hay dos clases de reflexión: difusa y especular. En la reflexión difusa, las ondas de luz que golpean la superficie del objeto se dispersan en forma aleatoria. En la reflexión especular, se reflejan en el mismo sentido. La mayor parte de objetos muestran reflexión difusa, donde el color de la luz reflejada es una propiedad no sólo de la longitud de onda de la luz entrante antes de la reflexión, sino también de las propiedades de la superficie del objeto que refleja la luz. La diferencia entre reflexión difusa y especular radica en la rugosidad de la superficie en la escala de la longitud de onda de la luz. Para una superficie que muestra reflexión especular, los vectores normales a la superficie local (flechas rojas en la figura 32.6*b*) están alineados, mientras no sean para una superficie que muestra reflexión difusa [figura 32.6*a*)].

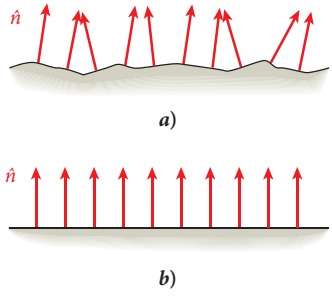


FIGURA 32.6 Orientación de los vectores normales de superficie para una superficie que muestra *a*) reflexión difusa y una que muestra *b*) reflexión especular.

Un **espejo** es una superficie que refleja luz de modo especular. Aquí tratamos sólo con espejos "perfectos". Un espejo de esta clase no absorbe ninguna luz y refleja 100% de la luz entrante, sin importar la intensidad de la luz entrante. En el capítulo 31 vimos que la luz es un tipo de onda electromagnética. La luz visible consta de ondas electromagnéticas con longitudes de onda de alrededor de 400 nm a 700 nm. Para que un espejo sea considerado perfecto, debe reflejar 100% de la luz entrante en por lo menos este intervalo de longitudes de onda. La perfección de espejo no se logra con facilidad.

Los espejos de baño comunes constan de una pieza de vidrio con una cubierta metálica en la parte posterior. Por lo común son suficientes para nuestros propósitos, pero no son espejos perfectos. Usted puede ver esto con ayuda de un botiquín de medicinas con tres puertas pulimentadas. Doble las puertas izquierda y derecha hasta el punto en el que queden una frente a la otra y se vean paralelas; luego, meta su cabeza entre ellas. Usted verá un enorme número de sus propias reflexiones, con la luz emitida desde su cabeza rebotando en vaivén muchas veces entre los dos espejos hasta que llega a sus ojos. Las imágenes formadas desde la luz que ha experimentado múltiples reflexiones son notablemente más oscuras (figura 32.7). La razón es que cada reflexión absorbe una fracción de la intensidad entrante de la luz, quizá del orden de 1%.

FIGURA 32.7 Reflexión de la luz entre dos espejos planos casi paralelos.

En 1998, Yoel Fink, un estudiante con licenciatura del MIT, inventó el "espejo dieléctrico omnidireccional", que puede ser considerado perfecto en el sentido definido antes, con pérdidas de absorción menores que 0.0001%. Esto lo logró usando muchas capas alternantes, de alrededor de 1 μm de espesor, de un polímero y un vidrio semiconductor. Si bien esto se hizo al principio con una beca de la Agencia de Defensa para Proyectos de Investigación Avanzados (DARPA, por sus siglas en inglés), esta tecnología se ha puesto en práctica de forma exitosa para crear herramientas para intervención quirúrgica láser muy mejoradas. Esto es otro ejemplo de cómo la

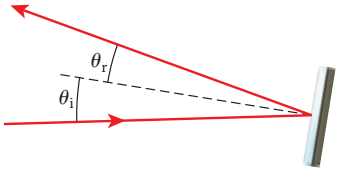


FIGURA 32.8 El ángulo de incidencia es igual al ángulo de reflexión para la reflexión de la luz en un espejo plano. La línea discontinua es la normal (perpendicular) al espejo.

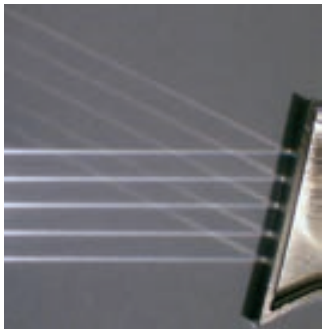
investigación de la física moderna avanzada continúa dando lugar a contundentes avances tecnológicos, incluso en un campo tan establecido por largo tiempo como la óptica geométrica.

Empezamos con espejos planos. Para la reflexión desde espejos planos, hay una regla simple para los rayos de luz que inciden en la superficie del espejo, conocida como la **ley de reflexión**: el ángulo de incidencia θ_i es igual al ángulo de reflexión θ_r. Estos ángulos se miden siempre desde la normal a la superficie, que se define como una línea perpendicular a la superficie del espejo plano. Además, el rayo incidente, la normal, y el rayo reflejado yacen en el mismo plano (figura 32.8).

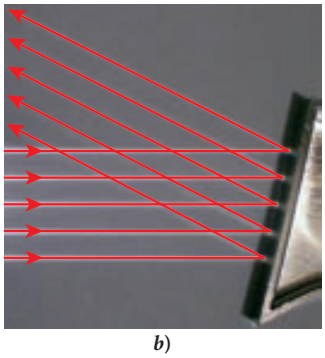
Matemáticamente, la ley de reflexión está dada por

$$\theta_r = \theta_i . \tag{32.2}$$

Los rayos paralelos que inciden en un espejo plano son reflejados de tal modo que los rayos reflejados también son paralelos (figura 32.9), porque toda normal a la superficie (línea discontinua en la figura 32.8) es paralela a las otras normales.



a)



b)

FIGURA 32.9 *a*) Rayos de luz paralelos reflejados en un espejo plano. *b*) Flechas superpuestas en los rayos de luz.

Imagen formada por un espejo plano

Una **imagen** se puede formar mediante la luz reflejada desde un espejo plano. Por ejemplo, cuando se para frente a un espejo, ve una imagen de usted que parece estar detrás del espejo. Esta percepción ocurre debido a que el cerebro supone que los rayos de luz que llegan a los ojos han viajado en líneas rectas sin ningún cambio de dirección. Así, si los rayos de luz parecen originarse en un punto (detrás del espejo), el ojo (o una cámara) ve una fuente de luz en ese punto, ya sea que ahí haya una fuente de luz real o no. Este tipo de imagen, de la cual no emana la luz, se denomina **imagen virtual**. Por su naturaleza, las imágenes virtuales no se pueden mostrar en una pantalla. En contraste, las **imágenes reales** se forman en un lugar en el que usted podría colocar físicamente un objeto, como una pantalla o un dispositivo acoplado a carga (DAC) desde una cámara.

Un ejemplo aclarará la noción de imagen virtual. En la figura 32.10, todo punto en la superficie de la flama de la vela emite luz, con los rayos de luz moviéndose en direcciones radiales. Un observador puede localizar la flama de la vela en el espacio siguiendo los rayos de luz hasta el punto donde se intersecan. La mayor parte de estos rayos de luz se dibujan en color gris. Los rayos que chocan con el espejo se resaltan en negro. Cada uno de ellos se refleja de acuerdo con la ley básica de reflexión (ecuación 32.2), con el ángulo de reflexión respecto a la normal a la superficie igual al ángulo de incidencia. Los rayos reflejados tienen también un punto en el que se intersecan. Este punto se halla continuando los rayos reflejados detrás del espejo (líneas negras discontinuas). Por lo tanto, para el observador, la luz parece venir de un punto detrás del espejo. Este punto es la ubicación de la imagen formada por el espejo.

Las imágenes formadas mediante espejos planos parecen estar invertidas de izquierda a derecha debido a que los rayos de luz incidentes en la superficie del espejo se reflejan en el otro lado de la normal. Así, tenemos el término *imagen especular*. Se profundizará un poco más sobre este punto más adelante con ayuda de las figuras 32.12 y 32.13.

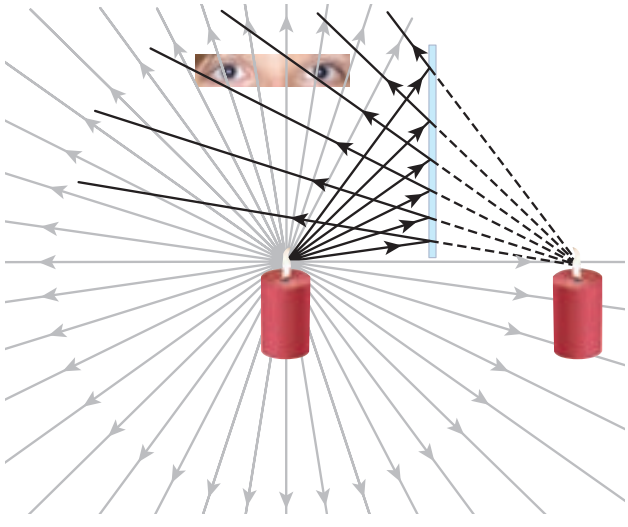


FIGURA 32.10 Imagen de una vela, vista en un espejo (línea azul).

Pero primero consideremos cuantitativamente el proceso de formar imágenes con un espejo plano (figura 32.11) usando las técnicas de trazo de rayos. Resulta que unos cuantos rayos son suficientes para construir la imagen y tenemos la libertad de elegir los más convenientes.

Para esta construcción de imagen, elegimos el caso en el que un objeto con altura h_o se coloca a una distancia d_o del espejo. Siguiendo la convención común, el objeto se representa por una flecha, que indica la altura y orientación del objeto. Éste está orientado de tal modo que la cola de la flecha está sobre el **eje óptico**, que se define como una normal al plano del espejo. (Para un espejo plano, el eje óptico se puede mostrar pasando por cualquier punto del espejo, pero después, cuando examinemos espejos curvos, hallaremos que hay un lugar único del eje óptico.) Tres rayos de luz determinan dónde se forma la imagen.

1. El primer rayo de luz emana del fondo de la flecha a lo largo del eje óptico. Este rayo se refleja directamente sobre sí mismo. La extrapolación de este rayo reflejado a lo largo del eje óptico a la derecha del espejo indica que el fondo de la imagen se localiza sobre el eje óptico.
2. El segundo rayo de luz comienza en la parte superior de la flecha paralelo al eje óptico y se refleja directamente sobre sí mismo. La extrapolación de este rayo después del espejo se muestra en la figura 32.11 como una línea discontinua.
3. El tercer rayo comienza en la parte superior de la flecha, choca con el espejo donde lo interseca el eje óptico y se refleja con un ángulo igual a su ángulo de incidencia. La extrapolación de rayo reflejado se muestra como una línea discontinua en la figura 32.11.

Las extrapolaciones de estos dos últimos rayos se cruzan en el punto donde se forma la parte superior de la imagen (figura 32.11). Resulta que todos los rayos desde la punta de la flecha que chocan con el espejo, no sólo los dos rayos mostrados aquí, se extrapolan de tal modo que se intersecan en la imagen. Así, el espejo produce una imagen virtual en el lado opuesto del espejo. Esta imagen tiene una altura h_i y está localizada a una distancia d_i a la derecha del espejo. En la figura 32.11, el triángulo amarillo es congruente con el triángulo azul. Por lo tanto,

$$h_i = h_o \tag{32.3}$$

y

$$|d_i| = |d_o|. \tag{32.4}$$

Por convención, el signo de la distancia de la imagen para una imagen virtual producida por un espejo es negativo. Así, usamos el valor absoluto de la distancia de la imagen en la ecuación 32.4. La imagen producida por un espejo plano está a la misma distancia detrás del espejo que la del objeto que está enfrente del espejo. Además, la imagen aparece derecha y con el mismo tamaño que el objeto.

¿Por qué las imágenes especulares parecen estar invertidas de izquierda a derecha, pero no de cabeza? Una persona de pie frente a un espejo plano ve una imagen de sí misma parada a la misma distancia detrás del espejo como ella está parada enfrente del espejo (figura 32.12). La imagen vista por la persona se puede construir con dos rayos de luz como se ilustra, pero por supuesto los rayos de luz provienen de todo punto visible de la persona. La imagen está derecha (tiene la misma

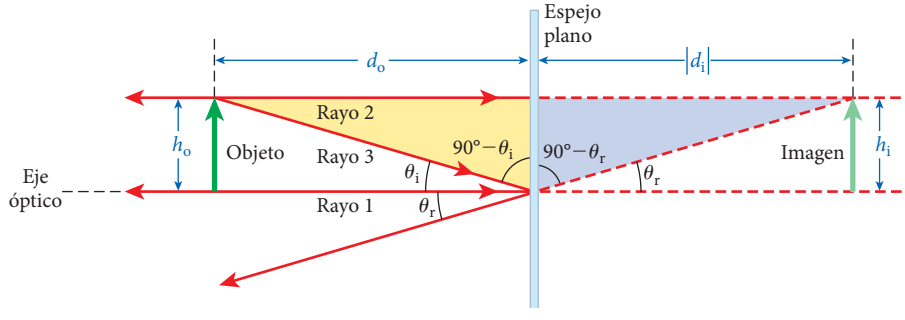


FIGURA 32.11 Diagrama de rayos para la imagen formada por un espejo plano.

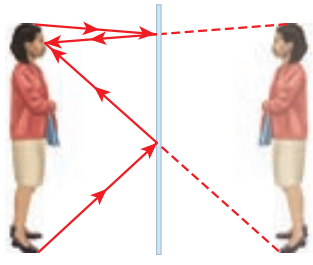


FIGURA 32.12 Una persona de pie frente a un espejo ve una imagen virtual de sí misma.

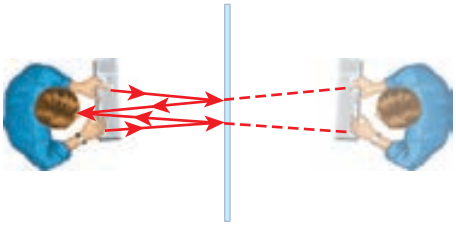


FIGURA 32.13 Una persona sentada frente a un espejo ve una imagen especular de sí misma.

orientación que el objeto, no de cabeza) y es virtual (la imagen se forma detrás de la superficie del espejo).

¿Qué hay acerca de la aparente inversión izquierda-derecha? En la figura 32.13, la imagen virtual se construyó de nuevo con dos rayos, pero los otros rayos se comportan de la misma manera. La figura muestra que el espejo hace en realidad una inversión del frente hacia atrás, no una de izquierda a derecha o de la parte superior al fondo. Si usted sostiene una flecha que apunta a la derecha y ve en el espejo, ¡la flecha aún apunta a la derecha! Usted puede ver que la persona viva real tiene su reloj en su brazo derecho. Él percibe que su yo virtual tiene su reloj en su brazo izquierdo porque el cerebro imagina que la imagen se formó mediante una rotación de 180° por el eje vertical, y no mediante una inversión frente-atrás. Si usted encuentra esto muy complicado, quizá la siguiente representación funcione: suponga que pinta las letras de su universidad en su frente para prepararse para el gran juego. Luego, toma un tramo de cinta de empaque transparente y la pega sobre las letras de su frente. Cuando despega la cinta parte de la pintura se adhiere. Si coloca frente a usted la cinta, verá el lado posterior de la cinta que tuvo contacto con la pintura, y las letras sobre ésta invertidas. Ver su imagen en el espejo es ver sólo el lado posterior de la cinta.

Si usted ve una imagen de sí mismo por medio de una cámara web en su computadora, se ve a sí mismo como lo ve otra persona, la imagen de la cámara web no se invierte de detrás hacia el frente. Esta imagen de sí mismo es confusa después de su larga experiencia de verse en un espejo. Cada movimiento que usted hace parece ir en dirección opuesta en la imagen de lo que usted espera. Por esta razón, algún software de videoconferencia presenta una imagen invertida que representa la inversión de detrás hacia delante inherente en una imagen especular, lo que hace una experiencia más natural.

EJEMPLO 32.1 Espejo de longitud completa

PROBLEMA

Una persona que mide 184 cm (6 pies ½ pulgada) de alto quiere comprar un espejo en el que pueda ver todo su cuerpo. Sus ojos están a 8 cm de la parte superior de su cabeza. ¿Cuál es la altura mínima del espejo que se requiere?

SOLUCIÓN

Por simplicidad, se representa a la persona como un poste de 184 cm de alto con "ojos" a 8 cm desde la parte superior del poste (este número no importa, como se mostrará en el análisis siguiente), según muestra la figura 32.14.

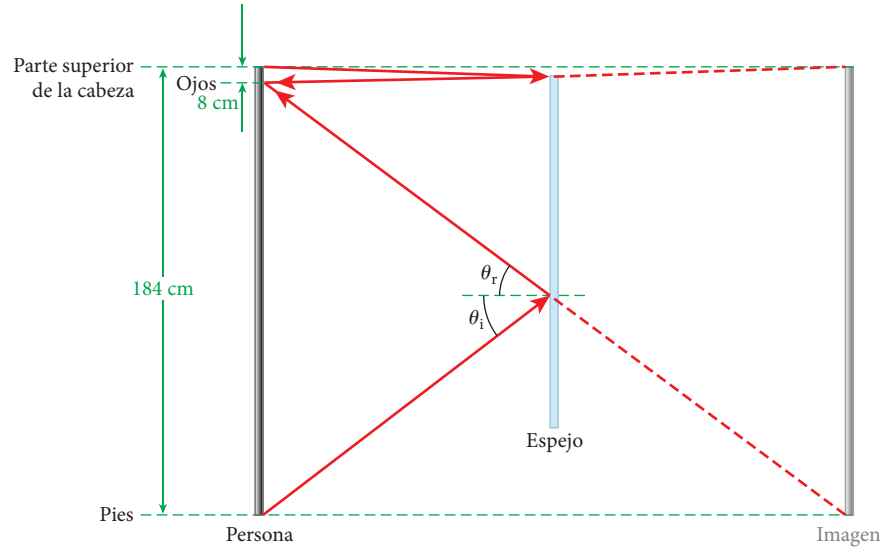


FIGURA 32.14 Distancias y ángulos para una persona de pie frente a un espejo, que es la línea azul.

Primero, considere dónde debe viajar la luz desde los pies de la persona para alcanzar sus ojos. La luz que sale de los pies se representa mediante una flecha roja en la figura 32.14. El ángulo de incidencia en el espejo, θ_i, es igual al ángulo de reflexión desde el espejo, θ_r. Podemos dibujar dos triángulos que incluyen estos ángulos (figura 32.15).

Estos dos triángulos son congruentes porque $\theta_i = \theta_r$, tienen cada uno un ángulo recto y comparten un lado común. Así, los lados verticales de cada triángulo deben tener la misma longitud. La suma de estos dos lados es igual a la altura de la persona menos la distancia desde la parte superior de la cabeza de la persona a sus ojos. Por lo tanto, el lado vertical de cada triángulo tiene la longitud (184 cm – 8 cm)/2, como indica la figura 32.15.

Ahora podemos ver que el fondo del espejo sólo necesita extenderse hasta una altura de (184 cm – 8 cm)/2 = 88 cm sobre el piso. Un análisis similar de dos triángulos congruentes nos da el borde superior del espejo, que necesita estar a (8 cm)/2 = 4 cm debajo de la parte superior de la cabeza de la persona. Por lo tanto, la altura mínima del espejo es 184 cm – 4 cm – 88 cm = 92 cm. Este espejo es exactamente la mitad de la altura de la persona. Así, un espejo que es la mitad de la altura de una persona permite que ésta vea una longitud completa. Este resultado no depende de la distancia de los ojos desde la parte superior de la cabeza de la persona, o de qué tan cerca del espejo se para la persona. Sin embargo, depende de cómo está colgado el espejo. Debe colocarse de modo que la parte superior del espejo esté a la mitad entre sus ojos y la parte superior de su cabeza.

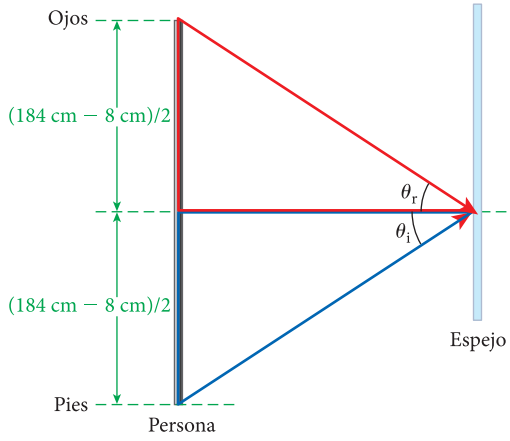


FIGURA 32.15 Dos triángulos congruentes formados por la luz desde los pies de la persona.

32.3 Espejos curvos

Cuando la luz se refleja desde la superficie de un espejo curvo, los rayos de luz siguen la ley de la reflexión en cada punto sobre la superficie. Los rayos de luz que son paralelos antes de que choquen con el espejo son reflejados en distintas direcciones, según la parte del espejo con la que chocan. Dependiendo de si un espejo es cóncavo o convexo, se puede hacer que los rayos de luz converjan o diverjan.

Enfoque de espejos esféricos

Considere un espejo esférico con una superficie reflejante en su interior. Éste es un **espejo cóncavo**. La figura 32.16 representa esta superficie reflejante esférica como un segmento de un círculo. El eje óptico del espejo, representado en este dibujo mediante una línea discontinua horizontal, es una línea por el centro de la esfera, marcada como *C* en la figura 32.16. Imagine que un rayo de luz horizontal sobre el eje óptico incide en la superficie del espejo, paralelo al eje óptico. La ley de reflexión se aplica en el punto donde el rayo de luz choca con el espejo. La normal a la superficie en este punto, una línea discontinua en la figura 32.16, es una línea radial que pasa por el centro de la esfera. En el triángulo isósceles de la figura 32.16, se puede ver que cada lado corto del triángulo es casi la mitad de la longitud del lado largo, siempre que θ_r sea pequeño. Así, el rayo reflejado cruza el eje óptico aproximadamente a la mitad entre el espejo y el punto *C*.

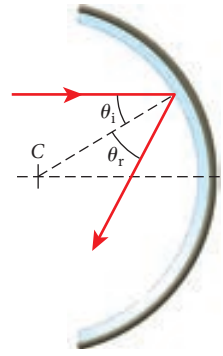


FIGURA 32.16 Un rayo de luz horizontal se refleja por el punto focal de un espejo cóncavo.

Ahora suponga que hay muchos rayos de luz horizontales incidentes sobre este espejo esférico (figura 32.17). Cada rayo de luz obedece la ley de reflexión en cada punto. Así, cada rayo cruzará el eje óptico a la mitad entre el espejo y el punto *C*. Este punto de cruce *F* se llama **punto focal**. Observe que sólo los rayos horizontales incidentes en el espejo cercanos al eje óptico se reflejarán a través del punto focal. A menos que se especifique lo contrario, se supone que todos los rayos horizontales están lo suficientemente cerca del eje óptico para pasar por *F* en la reflexión.

El punto *F* está a la mitad entre el punto *C* y la superficie del espejo. El punto *C* se localiza en el centro de la esfera, así que la distancia de *C* desde la superficie del espejo es sólo el radio del espejo, *R*. Por consiguiente, la **longitud focal** *f* de un espejo esférico convergente es

$$f = \frac{R}{2} \quad \text{(espejo convergente)}. \tag{32.5}$$

Los rayos de luz incidentes en un espejo convergente real se muestran en la figura 32.18.

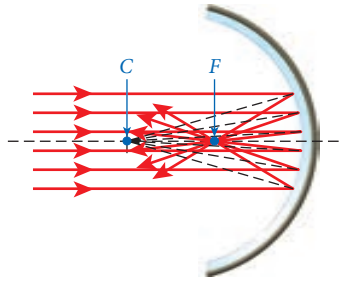
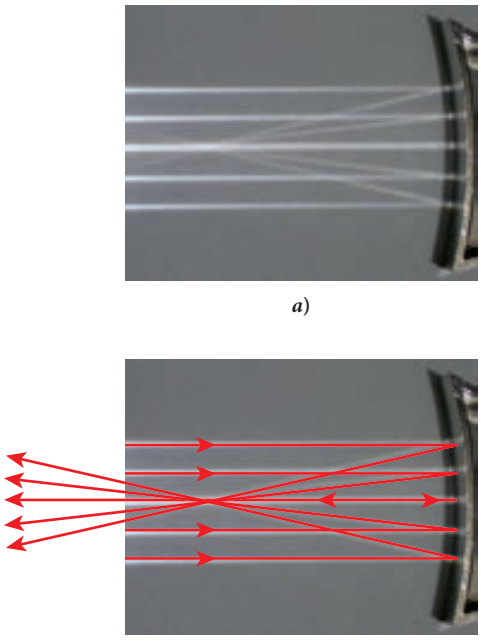


FIGURA 32.17 Muchos rayos de luz paralelos reflejados por el punto focal de un espejo cóncavo.



a)

b)

FIGURA 32.18 *a*) Rayos de luz paralelos reflejados al punto focal mediante un espejo convergente. *b*) La misma imagen con flechas superpuestas.

Consideremos ahora la formación de imágenes reales con un espejo convergente, como el de la figura 32.19. Un objeto con la altura h_o se coloca a una distancia d_o del espejo, donde $d_o > f$. El objeto es representado por una flecha, que indica la altura y orientación del objeto. Éste está orientado de modo que la cola de la flecha esté sobre el eje óptico, que, como antes, es una normal a la superficie del espejo esférico a lo largo de una línea que pasa por el centro C de la esfera. Cuatro rayos de luz determinan dónde se forma la imagen.

1. El primer rayo de luz emana del fondo de la flecha a lo largo del eje óptico y, por lo general, no se muestra. Este rayo solamente indica que el fondo de la imagen se localiza en el eje óptico.
2. El segundo rayo de luz empieza desde la parte superior de la flecha, paralelo al eje óptico, y se refleja a través del punto focal del espejo.
3. El tercer rayo comienza desde la parte superior de la flecha, pasa por el centro de la esfera, C, y se refleja sobre sí mismo.
4. El cuarto rayo empieza desde la parte superior de la flecha, pasa por el punto focal, F, y se refleja paralelo al eje óptico.

Los últimos tres rayos se intersecan en el punto en el que se forma la imagen de la parte superior del objeto (figura 32.19). Resulta que todos los rayos de la punta de la flecha que chocan con el espejo, no sólo los tres mostrados aquí, se intersecan en la imagen. Así, decimos que el espejo enfoca los rayos para formar la imagen.

La reconstrucción del caso especial mostrado en la figura 32.19 muestra una imagen real (en el mismo lado del espejo que el objeto, no detrás del espejo) con altura h_i a una distancia d_i de la superficie del espejo. Esta imagen tiene una altura h_i, a la que se asigna un valor negativo para denotar que la imagen está invertida, y está a una distancia d_i del espejo. Por convención, esta distancia a la imagen se define como positiva porque la imagen está del mismo lado del espejo que el objeto. La imagen está invertida y en este ejemplo se reduce en tamaño respecto al objeto que produjo la imagen. Una imagen se llama real cuando una pantalla colocada en el lugar de la imagen obtiene una proyección nítida de la imagen en ese punto. Para una imagen virtual, los rayos de luz no pasan por la imagen y, por lo tanto, no llega ninguna luz a la pantalla colocada en el lugar de la imagen.

Reconstruyamos ahora otro caso para un espejo convergente, donde $d_o < f$ (figura 32.20). El objeto está sobre el eje óptico, y los tres rayos determinan dónde se forma la imagen.

1. El primer rayo indica solamente que la cola de la imagen yace sobre el eje óptico y, por lo general, no se muestra.
2. El segundo rayo comienza desde la parte superior del objeto paralelo al eje óptico y se refleja por el punto focal.
3. El tercer rayo sale de la parte superior del objeto a lo largo de un radio y se refleja sobre sí mismo por el centro de la esfera.

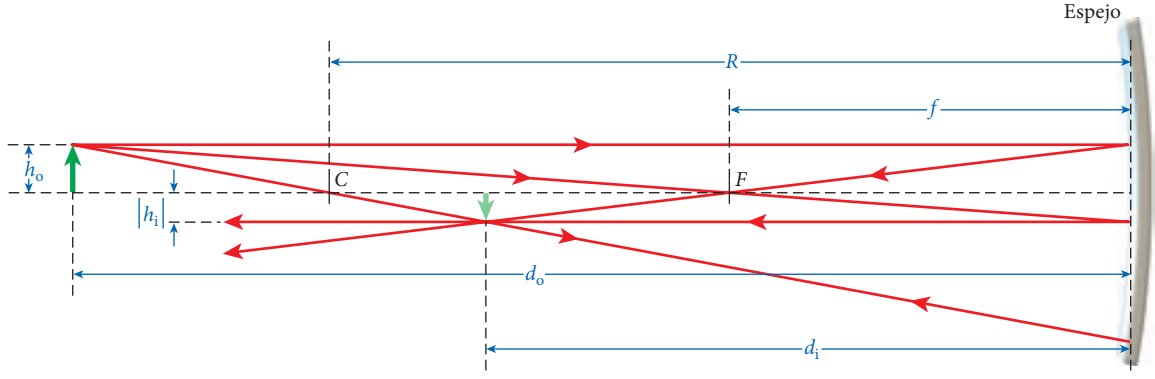


FIGURA 32.19 Imagen producida mediante un espejo convergente de un objeto con distancia al objeto mayor que la longitud focal del espejo.

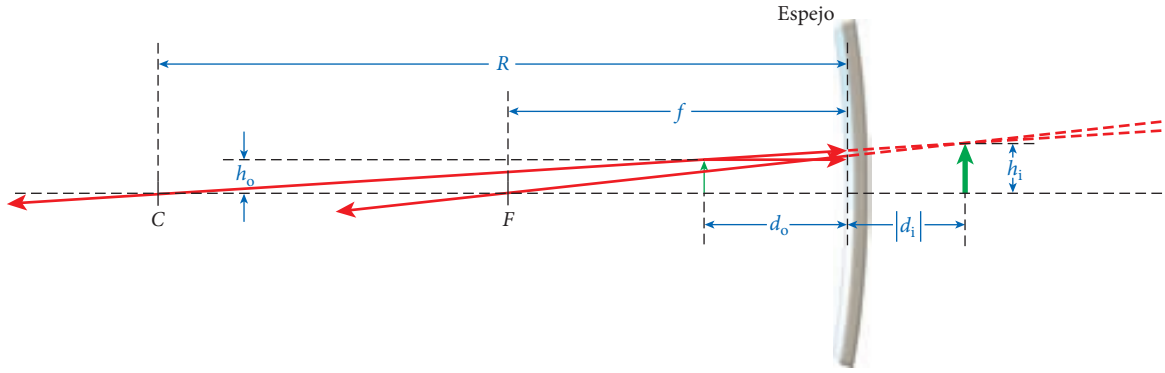


FIGURA 32.20 Imagen producida mediante un espejo convergente con una distancia al objeto menor que la longitud focal del espejo.

Los rayos reflejados son claramente divergentes. Para determinar el lugar de la imagen, se deben extrapolar los rayos reflejados al otro lado del espejo. Estos dos rayos se intersecan a una distancia d_i de la superficie del espejo, produciendo una imagen con altura h_i.

En este caso, la imagen se formó del lado opuesto del espejo desde el objeto, una imagen virtual. (Por convención, a la cantidad d_i se le asigna un valor negativo para denotar que la imagen es virtual.) Para un observador, la imagen parece estar detrás del espejo, como fue el caso para el espejo plano. La imagen está de pie y es más grande que el objeto. Estos resultados para $d_o < f$ son muy distintos de los que corresponden a $d_o > f$. Los espejos usados para rasurarse o aplicarse cosméticos son, por lo general, convergentes; se usan con la cara colocada más cerca que la longitud focal, produciendo una gran imagen de pie.

Antes de tratar los espejos divergentes, formalicemos las convenciones de signos para distancias y alturas.

1. Todas las distancias del mismo lado del espejo que el objeto se definen como positivas, y las distancias del lado opuesto del espejo desde el objeto se definen como negativas. Así, f y d_o son positivas para espejos convergentes.
2. Para imágenes reales, d_i es positiva. Para imágenes virtuales, d_i es negativa.
3. Si la imagen está de pie, entonces h_i es positiva, mientras que si la imagen está invertida, h_i es negativa.

Se puede deducir la **ecuación del espejo** (ecuación 32.6), que relaciona la distancia al objeto d_o, la distancia a la imagen d_i y la longitud focal del espejo f:

$$\frac{1}{d_o}+\frac{1}{d_i}=\frac{1}{f}. \qquad (32.6)$$

Los signos de los términos en esta ecuación se basan en las convenciones recién definidas.

DEDUCCIÓN 32.1 Ecuación de espejo esférico

La ecuación de espejo esférico se puede deducir comenzando con un espejo convergente que tiene una longitud focal f. Un objeto de altura h_o está de pie a una distancia d_o desde la superficie del espejo sobre el eje óptico (figura 32.21).

Trace un rayo desde la parte superior del objeto paralelo al eje óptico y refléjelo por el punto focal. Trace un segundo rayo desde la parte superior del objeto por el punto focal que se refleje paralelo al eje óptico. La imagen se forma con altura h_i a la distancia d_i desde el espejo. Forma un ángulo recto con altura h_o y base d_o (triángulo verde 1 en la figura 32.21). Forma un segundo ángulo recto con $-h_i > 0$ como la altura y d_i como la base (triángulo verde 2 en la figura 32.21). Dada la ley de reflexión para

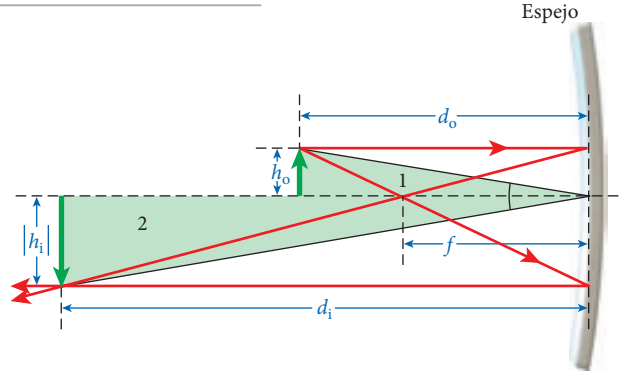


FIGURA 32.21 Los dos triángulos similares 1 y 2 en la deducción de la ecuación de espejo esférico.

(*continúa*)

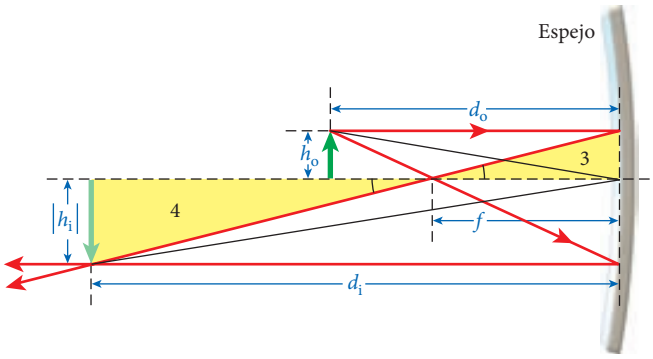


FIGURA 32.22 Los dos triángulos similares 3 y 4 en la deducción de la ecuación de espejo esférico.

(*continuación*)

un rayo que choca con el espejo sobre el eje óptico, los ángulos indicados en los dos triángulos son los mismos, de modo que los dos triángulos son similares. Así,

$$\frac{h_o}{d_o} = \frac{-h_i}{d_i} \quad \text{o} \quad \frac{-h_i}{h_o} = \frac{d_i}{d_o}. \tag{i}$$

Examinemos ahora la misma configuración geométrica, pero consideremos dos triángulos distintos. Un triángulo recto (triángulo amarillo 4 en la figura 32.22) está definido por la altura $-h_i$ y la longitud de la base $d_i - f$. El segundo triángulo (triángulo amarillo 3 en la figura 32.22) está definido por la altura h_o y la base f. Los dos triángulos son similares, de modo que

$$\frac{h_o}{f} = \frac{-h_i}{d_i - f} \quad \text{o} \quad \frac{-h_i}{h_o} = \frac{d_i - f}{f}.$$

Al sustituir la ecuación (i) por la relación de las alturas obtenida antes, se obtiene

$$\frac{d_i}{d_o} = \frac{d_i - f}{f}.$$

Al multiplicar ambos miembros de esta ecuación por f:

$$\frac{fd_i}{d_o} = d_i - f \Rightarrow \frac{fd_i}{d_o} + f = d_i.$$

Por último, al dividir ambos miembros de esta ecuación entre el producto fd_i, se obtiene la ecuación de espejo esférico:

$$\frac{1}{d_o} + \frac{1}{d_i} = \frac{1}{f}.$$

La **amplificación** m del espejo se define como

$$m = \frac{h_i}{h_o} = -\frac{d_i}{d_o}. \tag{32.7}$$

Observe que la amplificación m es negativa para la situación usada en la deducción. En forma algebraica, esto ocurre porque $h_i < 0$. La importancia de una m negativa es que $m < 0$ nos dice que la imagen está invertida. En la tabla 32.1 se resumen las características de las imágenes formadas por un espejo convergente para cinco clases diferentes de distancias al objeto.

Espejos esféricos divergentes

Suponga que tenemos un espejo esférico con la superficie reflejante en el exterior de la esfera (figura 32.23).

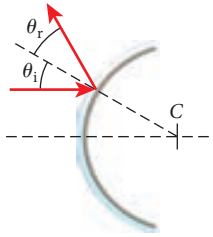


FIGURA 32.23 Reflexión de una luz horizontal desde un espejo esférico divergente.

Tabla 32.1 Características de la imagen para espejos convergentes

Caso	Tipo de imagen	Orientación de la imagen	Amplificación
$d_o < f$	Virtual	De pie	Aumentada
$d_o = f$	Real	De pie	Imagen al infinito
$f < d_o < 2f$	Real	Invertida	Aumentada
$d_o = 2f$	Real	Invertida	Mismo tamaño
$d_o > 2f$	Real	Invertida	Reducida

Éste es un **espejo convexo**, y los rayos reflejados divergen. En la figura 32.23 esta superficie reflejante esférica está indicada por un semicírculo. El eje óptico del espejo es una línea por el centro de la esfera, representado por la línea discontinua horizontal. Imagine que un rayo de luz horizontal sobre el eje óptico incide en la superficie del espejo. En el punto donde el rayo de luz choca con el espejo, se aplica la ley de reflexión.

En contraste con el espejo convergente, los puntos normales *se alejan* del centro de la esfera. Cuando se extrapola la norma que pasa por la superficie de la esfera, interseca el eje óptico de la esfera en su centro, marcado como *C* en la figura 32.23. Cuando se observa el rayo reflejado, parece venir del interior de la esfera.

Suponga que muchos rayos de luz horizontales inciden en este espejo esférico (figura 32.24). Cada rayo de luz obedece la ley de reflexión. Los rayos divergen y no parecen formar ningún tipo de imagen. Sin embargo, si los rayos reflejados se extrapolan a través de la superficie del espejo, ellos intersecan el eje óptico en ese punto. Este punto se llama el punto focal de este espejo divergente.

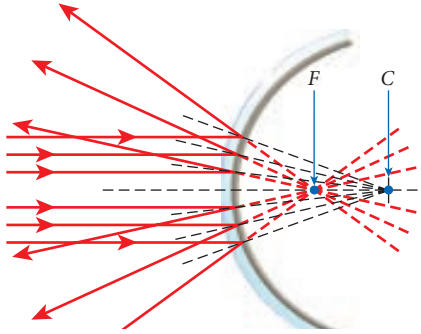
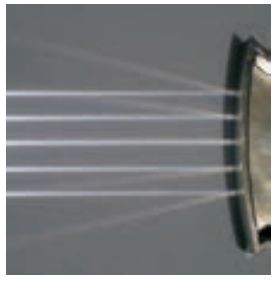
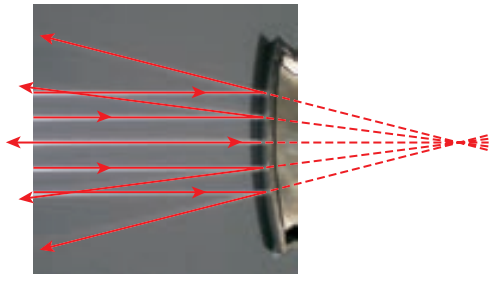


FIGURA 32.24 Reflexión de rayos de luz paralelos desde la superficie de un espejo divergente.

La figura 32.25*a*) muestra cinco rayos de luz paralelos que inciden en un espejo esférico divergente. Las líneas discontinuas de la figura 32.25*b*) representan la extrapolación de los rayos reflejados para mostrar el punto focal.



a)



b)

FIGURA 32.25 *a*) Rayos de luz paralelos reflejados desde un espejo esférico divergente. *b*) Las flechas corresponden a los rayos de luz, y las flechas discontinuas representan los rayos de luz extrapolados.

Analicemos ahora las imágenes formadas por espejos divergentes (figura 32.26). De nuevo usemos tres rayos.

1. El primer rayo establece que la cola de la flecha yace en el eje óptico y, por lo común, no se muestra.
2. El segundo rayo comienza desde la parte superior del objeto, viajando paralelo al eje óptico, y se refleja desde la superficie del espejo de tal modo que su extrapolación cruza el eje óptico a una distancia desde la superficie del espejo igual a la longitud focal del espejo.
3. El tercer rayo comienza en la parte superior del objeto y está dirigido de tal manera que su extrapolación intersecaría el centro de la esfera. Este rayo se refleja sobre sí mismo.

Los rayos reflejados divergen, pero los rayos extrapolados convergen a una distancia d_i de la superficie del espejo del lado del espejo opuesto al objeto. Los rayos convergen a una distancia h_i sobre el eje óptico, formando una imagen de pie, reducida del lado del espejo opuesto al objeto. Esta imagen es virtual porque los rayos de luz no pasan en realidad por ella. Estas características (de pie, reducida, virtual) son válidas para todas las distancias del objeto para un espejo divergente. Esta clase de espejos se utilizan con frecuencia en tiendas para dar a los dependientes en el frente de la tienda una amplia vista de los pasillos y para los espejos laterales de visión lejana en los automóviles.

En el caso de un espejo divergente, la longitud focal f es negativa porque el punto focal del espejo está del lado opuesto del objeto. Se asigna también un valor negativo al radio de un espejo divergente. Por lo tanto,

$$f = \frac{R}{2} \quad (\text{con } R < 0 \text{ para un espejo divergente}).$$

La distancia al objeto d_o se toma siempre como positiva. Al reacomodar la ecuación del espejo (ecuación 32.6), que es también válida para un espejo divergente, se obtiene

$$d_i = \frac{d_o f}{d_o - f}. \tag{32.8}$$

Si d_o es siempre positiva y f es siempre negativa, d_i es siempre negativa. Aplicando la ecuación 32.7 para la amplificación, encontramos que m es siempre positiva. Al examinar la figura 32.26 se convencerá también de que la imagen es siempre de tamaño reducido. Así, un espejo divergente (incluso si $d_o > |f|$) produce siempre una imagen virtual, de pie y reducida.

32.1 Oportunidad de autoevaluación

Usted está de pie a 2.50 m de un espejo divergente con longitud focal $f = -0.500$ m. ¿Qué ve en el espejo? (¡La respuesta "yo mismo" no es suficientemente buena!)

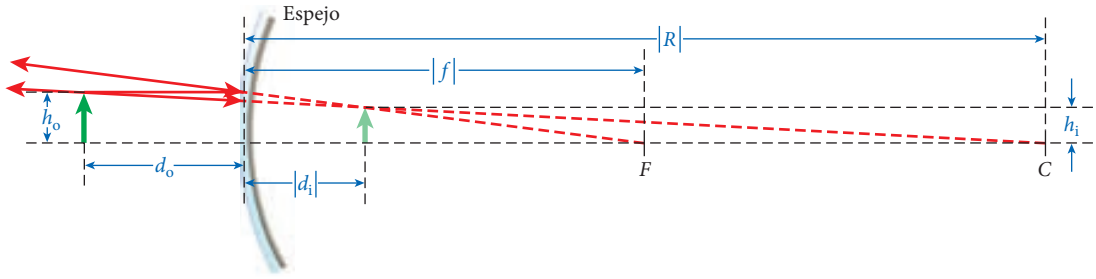
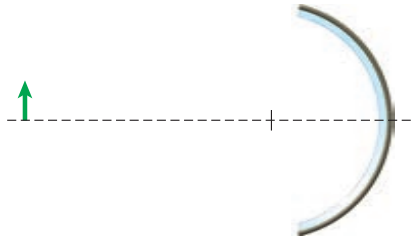


FIGURA 32.26 Imagen formada por un objeto colocado enfrente de un espejo esférico divergente.

EJEMPLO 32.2 Imagen formada por un espejo convergente

Considere un objeto de 5.00 cm de alto colocado a 55.0 cm de un espejo convergente con longitud focal 20.0 cm (figura 32.27).

FIGURA 32.27 Un objeto (flecha verde) que forma una imagen por medio de un espejo convergente.



PROBLEMA 1
¿Dónde se produce la imagen?

SOLUCIÓN 1
Se puede usar la ecuación del espejo para hallar la distancia a la imagen d_i en términos de la distancia al objeto d_o y la longitud focal del espejo f,

$$\frac{1}{d_o}+\frac{1}{d_i}=\frac{1}{f}.$$

Se especifica que el espejo es convergente, de modo que la longitud focal es positiva. La distancia a la imagen es

$$d_i=\frac{d_o f}{d_o-f}=\frac{(55.0\text{ cm})(20.0\text{ cm})}{55.0\text{ cm}-20.0\text{ cm}}=31.4\text{ cm}.$$

PROBLEMA 2
¿Cuáles son el tamaño y la orientación de la imagen producida?

SOLUCIÓN 2
La amplificación m está dada por

$$m=\frac{h_i}{h_o}=-\frac{d_i}{d_o},$$

donde h_o es la altura del objeto y h_i es la altura de la imagen producida. La altura de la imagen es entonces

$$h_i=-h_o\frac{d_i}{d_o}=-(5.00\text{ cm})\frac{31.4\text{ cm}}{55.0\text{ cm}}=-2.85\text{ cm}.$$

La amplificación es

$$m=\frac{h_i}{h_o}=\frac{-2.85\text{ cm}}{5.00\text{ cm}}=-0.570.$$

Así, la imagen producida es invertida y reducida.

32.1 Ejercicio en clase
Se coloca un objeto pequeño enfrente de un espejo convergente con radio $R = 7.50$ cm, tal que la distancia a la imagen es igual a la distancia al objeto. ¿Qué tan lejos está del espejo este objeto pequeño?

a) 2.50 cm
b) 5.00 cm
c) 7.50 cm
d) 10.0 cm
e) 15.0 cm

Aberración esférica

Las ecuaciones deducidas para espejos esféricos $\left(\frac{1}{d_o}+\frac{1}{d_i}=\frac{1}{f} \text{ y } m=\frac{h_i}{h_o}=-\frac{d_i}{d_o}\right)$ se aplican solamente a rayos de luz que están cerca del eje óptico. Si los rayos de luz están lejos del eje óptico, no se enfocarán a través el punto focal del espejo, lo que da lugar a una imagen distorsionada. En términos estrictos, no hay punto focal preciso en esta situación. Esta condición se llama **aberración esférica**.

La figura 32.28 muestra varios rayos de luz no cercanos al eje óptico que inciden en un espejo convergente esférico. Los rayos apartados del eje óptico se reflejan de tal modo que cruzan el eje óptico más cerca del espejo que los que chocan con el espejo más cerca del eje. Conforme los rayos se aproximan al eje óptico, se reflejan por los puntos cada vez más cerca del punto focal.

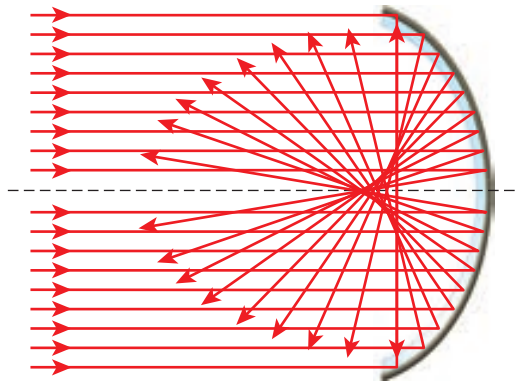


FIGURA 32.28 Rayos de luz paralelos que inciden en un espejo convergente esférico, lo cual demuestra la aberración esférica.

DEDUCCIÓN 32.2 Aberración esférica para espejos convergentes

Hasta ahora se ha supuesto que los rayos de luz paralelos al eje óptico que están cerca del eje óptico se reflejan de tal modo que cruzan el eje óptico en el punto focal del espejo. El punto focal está a la mitad del radio de curvatura del espejo. Sin embargo, los rayos de luz que están lejos del eje óptico no son reflejados a través del punto focal. Para deducir una expresión para el punto en el que los rayos paralelos al eje óptico, pero lejos de él, cruzan el eje, se traza la configuración geométrica de la figura 32.29.

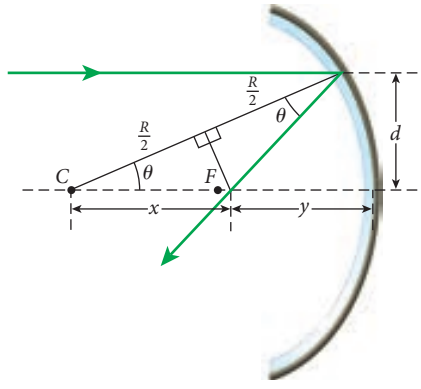


FIGURA 32.29 Configuración geométrica para la aberración esférica de un espejo esférico convergente.

Comience con un rayo de luz paralelo al eje óptico y a una distancia d de él. El rayo se refleja y cruza el eje a una distancia y del espejo. El rayo forma un ángulo θ con respecto a la normal a la superficie del espejo, que es un radio R del espejo esférico. La ley de reflexión nos dice que el ángulo de incidencia del rayo en la superficie del espejo es igual al ángulo de reflexión.

Defina como x la distancia desde el centro del espejo esférico al punto en el que el rayo reflejado cruza el eje óptico. Dibuje una línea desde el punto donde el rayo cruza el eje perpendicular a la normal. Esto forma dos triángulos rectos congruentes con ángulo θ, hipotenusa x y lado adyacente $R/2$, tal que

$$\cos\theta=\frac{R/2}{x}\Rightarrow x=\frac{R}{2\cos\theta}.$$

Podemos expresar también θ en términos de d como

$$\text{sen}\,\theta=\frac{d}{R}\Rightarrow\theta=\text{sen}^{-1}\left(\frac{d}{R}\right).$$

La distancia y está dada por

$$y=R-x=R-\frac{R}{2\cos\theta}=R\left(1-\frac{1}{2\cos\theta}\right)=R\left(1-\frac{1}{2\cos\left(\text{sen}^{-1}\left(\frac{d}{R}\right)\right)}\right).$$

Recordando la identidad trigonométrica $\cos(\text{sen}^{-1}(x))=\sqrt{1-x^2}$, podemos escribir nuestro resultado para y como

$$y=R\left(1-\frac{1}{2\sqrt{1-\left(\frac{d}{R}\right)^2}}\right)=\frac{R}{2}\left(2-\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{d}{R}\right)^2}}\right)=\frac{R}{2}\left(2-\left[1-\left(\frac{d}{R}\right)^2\right]^{-1/2}\right).$$

(*continúa*)

32.2 Oportunidad de autoevaluación

Considere un espejo esférico convergente con $R = 7.20$ cm sin suponer que los rayos de luz incidente están cerca del eje óptico del espejo. Sin embargo, los rayos de luz incidentes son paralelos al eje. Calcule la posición en la que los rayos de luz reflejados intersecan el eje óptico si el rayo entrante está a

a) 0.720 cm del eje óptico.

b) 0.800 cm del eje óptico.

c) 1.80 cm del eje óptico.

d) 3.60 cm del eje óptico.

(*continuación*)

Se puede ver que para $d \ll R$, $1 - (d/R)^2 \approx 1$ y $y \approx R/2$, lo cual concuerda con la ecuación 32.5. Podemos hacer una mejor aproximación escribiendo el desarrollo en serie de Maclaurin

$$\left(1-x^2\right)^{-1/2} \approx 1+\frac{x^2}{2} \quad (x \ll 1).$$

Tomando $x = (d/R) \ll 1$, podemos hacer la aproximación

$$y=\frac{R}{2}\left(2-\left[1-\left(\frac{d}{R}\right)^2\right]^{-1/2}\right)\approx\frac{R}{2}\left(2-\left[1+\frac{1}{2}\left(\frac{d}{R}\right)^2\right]\right)=\frac{R}{2}\left(1-\frac{d^2}{2R^2}\right).$$

Así, la cantidad de aberración esférica está dada aproximadamente por

$$\frac{R}{2}-y\approx\frac{d^2}{4R} \quad \left(\frac{d}{R}\ll 1\right).$$

Espejos parabólicos

Los espejos parabólicos tienen una superficie que refleja la luz desde una fuente distante al punto focal, desde cualquier parte del espejo. Por consiguiente, se puede usar el tamaño completo del espejo para colectar la luz y formar imágenes que no sufren de aberraciones esféricas. La figura 32.30 ilustra rayos de luz verticales que inciden sobre un espejo parabólico. Los rayos se reflejan a través del punto focal del espejo.

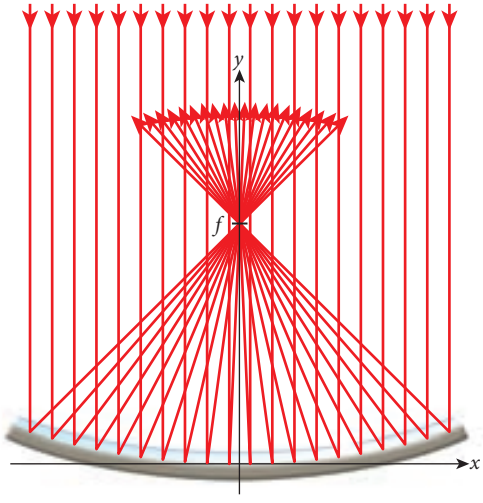


FIGURA 32.30 Rayos de luz reflejados por un espejo parabólico.

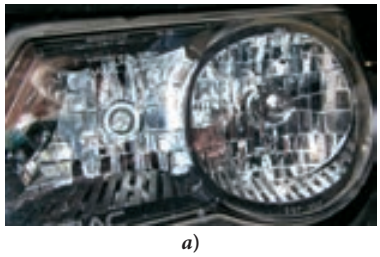
Si mediante una ecuación $y(x) = ax^2$, se describe una parábola, entonces su punto focal se localiza en el punto $(x = 0, y = 1/(4a))$. Su longitud focal es, por lo tanto,

$$f=\frac{1}{4a}. \tag{32.9}$$

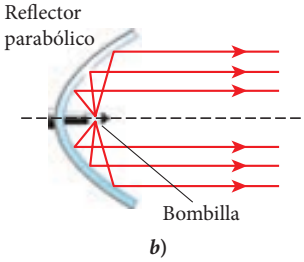
Los espejos parabólicos son más difíciles de producir que los espejos esféricos y, en consecuencia, son más caros. Los telescopios reflectores más grandes usan espejos parabólicos a fin de evitar la aberración esférica. Muchos faros de automóviles usan reflectores parabólicos con la misma idea pero envían luz en la dirección opuesta: la fuente luminosa se coloca en el punto focal y el reflector envía la luz en un intenso haz paralelo al eje óptico, como se muestra en la figura 32.31. (Sin embargo, en el futuro no tan distante, es probable que los faros incandescentes sean reemplazados con faros de LED, que usarán lentes más pequeñas para lograr lo mismo.)

La figura 32.31*a*) muestra las luces bajas y altas de un automóvil. Los reflectores parabólicos para faros están facetados. Una faceta es un área plana en el reflector. Estas facetas ayudan a producir la distribución de luz requerida para el faro. La figura 32.31*b*) muestra la bombilla para el faro de haz alto en el foco de un espejo parabólico que funciona como reflector para la luz generada por la bombilla, produciendo un haz paralelo de luz enfocado.

Las antenas de TV satelital (*dishes*) halladas en muchas azoteas son también en forma parabólica. Estas antenas no son espejos en el sentido de que no reflejan luz visible en forma especular. No obstante, aún son espejos parabólicos reflejantes en el intervalo de longitud de onda utilizado para la transmisión de TV vía satélite.



a)



b)

FIGURA 32.31 *a*) Conjunto de faro para un automóvil. La luz izquierda es el faro del haz bajo y la luz derecha es el faro del haz alto. *b*) Dibujo que muestra el faro del haz alto con la bombilla en el foco del reflector parabólico.

Parábolas en rotación

Para aplicaciones ópticas precisas, es mejor tener espejos parabólicos. Por ejemplo, en el capítulo 33 se verá que en los telescopios se usan enormes espejos parabólicos. Una forma muy interesante de crear espejos parabólicos es poner un líquido en movimiento rotacional. En todo punto de la superficie del líquido, la superficie será perpendicular a la fuerza desde el líquido que actúa sobre ese elemento de superficie. Esta fuerza, $\vec{F}$, tiene que sumarse a la fuerza de gravedad que actúa en el elemento de superficie, $-mg\hat{y}$, para proporcionar la fuerza centrípeta neta que se requiere para mantener el elemento de superficie en una trayectoria circular (figura 32.32). En el sistema coordenado xy elegido aquí, la fuerza centrípeta es $-m\omega^2 x\hat{x}$ (compare el capítulo 9 sobre movimiento circular).

El ángulo θ del elemento de superficie con respecto a la horizontal está dado por $\tan\theta = dy/dx$ (vea la figura 32.32). Se puede usar el mismo ángulo para expresar los componentes de la fuerza $\vec{F}$. El componente vertical de $\vec{F}$ tiene que equilibrar la fuerza de gravedad, y el componente horizontal tiene que proporcionar la fuerza centrípeta neta.

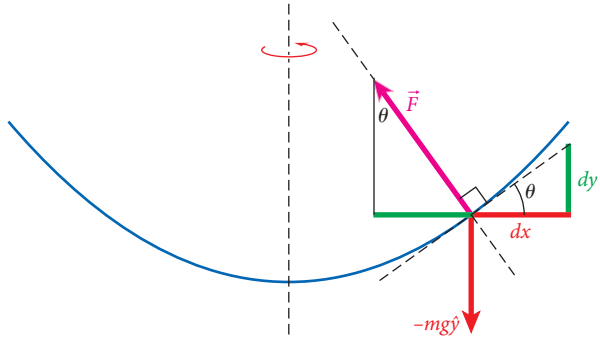


FIGURA 32.32 Configuración geométrica de una parábola de rotación y diagrama de cuerpo libre para un elemento de fluido en su superficie. La fuerza $\vec{F}$ ejercida por el fluido sobre un elemento de superficie se muestra en color magenta. Necesita equilibrar la fuerza de gravedad (roja) y proporcionar la fuerza centrípeta (verde) necesaria para mantener el elemento de superficie moviéndose en una trayectoria circular.

$$F\cos\theta = mg$$

$$F\,\text{sen}\,\theta = m\omega^2 x.$$

Al dividir estas dos ecuaciones entre sí, se obtiene $\tan\theta = (\omega^2/g)x$. Ya se demostró que $\tan\theta = dy/dx$, por lo tanto,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\omega^2}{g}x.$$

La integración da como resultado la forma deseada de la superficie

$$y(x) = \frac{\omega^2}{2g}x^2,$$

que es una parábola. Debido a que la longitud focal de una parábola de la forma $y = ax^2$ es $f = 1/(4a)$, la longitud focal de este espejo parabólico hecho de líquido rotatorio es

$$f = \frac{g}{2\omega^2}.$$

La rotación de superficies líquidas se ha usado de forma exitosa para construir grandes espejos telescópicos. Un espejo de esta clase se muestra en la figura 32.33. En la actualidad hay diseños para construir una versión muy grande de tal telescopio en la Luna. Si bien esto podría sonar como ciencia ficción en el presente, la construcción de tal telescopio resultaría más económica que la de uno con un espejo sólido. Puesto que la Luna no tiene atmósfera, el telescopio no experimentaría las distorsiones atmosféricas que sufren los telescopios terrestres. Y podría construirse a una escala mucho más grande que la que es posible con telescopios basados en satélites como el telescopio espacial Hubble. (En el capítulo 33 se cubrirán en detalle telescopios mucho más grandes.)

32.2 Ejercicio en clase

Suponga que tiene un telescopio de espejo líquido de longitud focal f_1, y que usted desea duplicar esta longitud focal. ¿Qué ajuste tiene que hacer para la velocidad rotacional angular de su espejo líquido?

a) Reducirlo por un factor de 0.5.
b) Reducirlo por un factor de 0.707.
c) Mantenerlo igual.
d) Incrementarlo por un factor de 0.707.
e) Incrementarlo por un factor de 2.

32.3 Oportunidad de autoevaluación

Muestre que la deducción de $y(x) = (\omega^2/2g)x^2$ para la superficie de un líquido rotatorio se puede realizar por medio de argumentos de energía.

FIGURA 32.33 Telescopio de espejo líquido de la Universidad de British Columbia.

32.4 Refracción y ley de Snell

La luz viaja a diferentes velocidades en materiales transparentes distintos ópticamente. La relación de la velocidad de la luz en el vacío dividida entre la velocidad de la luz en un material se llama **índice de refracción** del material. El índice de refracción n está dado por

$$n = \frac{c}{v}, \qquad (32.10)$$

Tabla 32.2 Índices de refracción para algunos materiales comunes*

Material	Índice de refracción
Gases	
Aire	1.000271
Helio	1.000036
Dióxido de carbono	1.00045
Líquidos	
Agua	1.333
Alcohol metílico	1.329
Alcohol etílico	1.362
Glicerina	1.473
Benceno	1.501
Aceite típico	1.5
Sólidos	
Hielo	1.310
Fluoruro de calcio	1.434
Cuarzo fundido	1.46
Sal	1.544
Poliestireno	1.49
Lucita	1.5
Vidrio	1.5
Cuarzo	1.544
Diamante	2.417

*Para luz con longitud de onda de 589.3 nm

donde c es la velocidad de la luz en el vacío y v es la velocidad de la luz en el medio. La velocidad de la luz en un medio físico como el vidrio es siempre menor que la velocidad de la luz en el vacío. Por lo tanto, el índice de refracción de un material es siempre mayor que o igual a 1 y, por definición, el índice de refracción del vacío es 1. En la tabla 32.2 se enumeran los índices de refracción para algunos materiales comunes. En general, el índice de refracción es una función de la longitud de onda de la luz, pero la tabla da valores promedio representativos de la luz visible. Al final de esta sección volveremos a la dependencia de la longitud de onda en el análisis de la dispersión cromática.

Cuando la luz cruza la frontera entre dos materiales transparentes, parte de ella se refleja, pero por lo común parte de la luz cruza el límite hacia el otro material y en el proceso se refracta. **Refracción** significa que los rayos de luz no viajan en línea recta por la frontera, sino que cambian de dirección. Cuando la luz cruza una frontera desde un medio con un índice de refracción menor n_1 a un medio con un mayor índice de refracción n_2, los rayos de luz cambian de dirección y se curvan *hacia* la normal respecto a la frontera (figura 32.34). Cambiar la dirección hacia la normal significa que el ángulo de refracción θ_2 es menor que el ángulo de incidencia θ_1.

La figura 32.35 muestra los rayos luminosos reales en el aire que inciden en la frontera entre el aire y el vidrio. Los rayos de luz se refractan hacia la normal. (Se puede observar también la luz reflejada.)

Cuando la luz cruza una frontera de un medio con un índice de refracción más alto n_1 hacia un medio con un índice de refracción menor n_2, los rayos de luz se curvan *lejos de* la normal (figura 32.36). Curvarse lejos de la normal significa que $\theta_2 > \theta_1$.

La figura 32.37 muestra los rayos de luz reales en vidrio que inciden en la frontera entre el vidrio y el aire. Los rayos de luz se refractan lejos de la normal.

De las mediciones de los ángulos de los rayos incidente y refractado en los medios con diferentes índices de refracción, podemos construir la ley de refracción con base en observaciones empíricas. Esta ley de refracción se puede expresar como

$$n_1 \operatorname{sen} \theta_1 = n_2 \operatorname{sen} \theta_2, \tag{32.11}$$

donde n_1 y θ_1 son el índice de refracción y el ángulo de incidencia (respecto a la normal a la superficie) en el primer medio, y n_2 y θ_2 son el índice de refracción y el ángulo del rayo transmitido (respecto a la normal a la superficie) en el segundo medio. Esta ley de refracción se llama también **ley de Snell**. No se puede demostrar sólo por medio de óptica de rayos; sin embargo, en el capítulo 34 esta ley se deduce usando óptica de ondas.

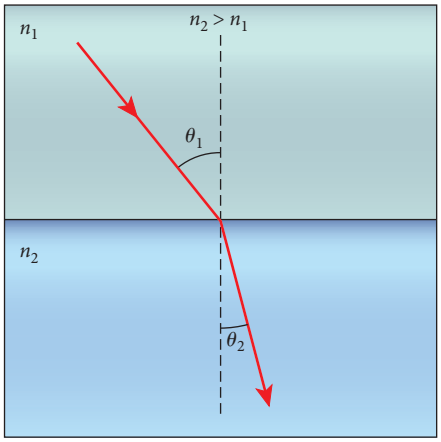
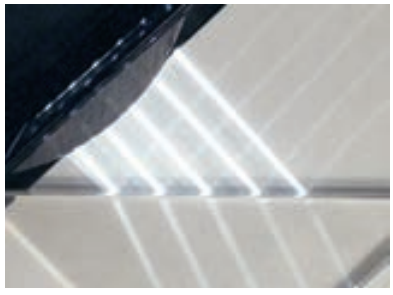
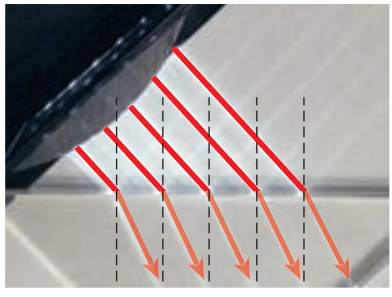


FIGURA 32.34 Rayos de luz refractados en la frontera entre dos medios ópticos con $n_1 < n_2$. (No se muestra el rayo de luz reflejado.)



a)



b)

FIGURA 32.35 *a*) Los rayos de luz se refractan cuando cruzan la frontera entre el aire y el vidrio. *b*) Flechas superpuestas en los rayos de luz. Las líneas discontinuas son normales a la superficie.

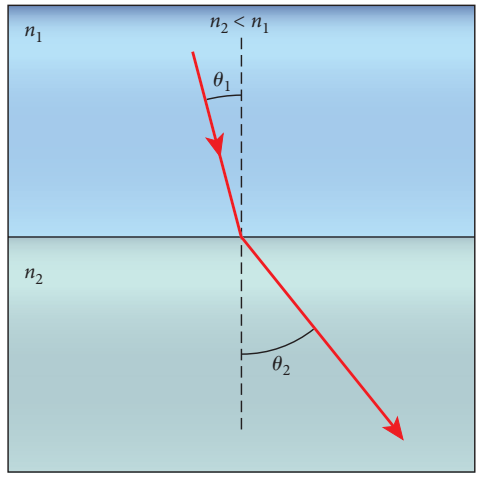


FIGURA 32.36 Rayos de luz refractados en la frontera entre dos medios ópticos con $n_1 > n_2$.

El índice de refracción del aire es muy cercano a 1, como se muestra en la tabla 32.2, y en este libro se supondrá siempre que el índice de refracción del aire $n_{aire} = 1$. Es muy común que la luz incida en varios medios desde el aire, así que escribiremos la fórmula para la refracción de la luz que incide en una superficie con índice de refracción n_{medio} como

$$n_{medio} = \frac{\operatorname{sen}\theta_{aire}}{\operatorname{sen}\theta_{medio}}, \tag{32.12}$$

donde θ_{aire} es el ángulo de incidencia (respecto a la normal a la superficie) para la luz en el aire y θ_{medio} es el ángulo de la luz refractada (respecto a la normal a la superficie) en el medio. Observe que ¡θ_{aire} es siempre mayor que θ_{medio}!

Observe también que para la luz que proviene de un medio hacia el aire, ¡la fórmula es la misma (ecuación 32.12)! Éste es un caso especial de la declaración general presentada antes: todas las figuras trazadoras de rayos siguen siendo válidas si se invierte la dirección de los rayos de luz. Por ejemplo, cambiar la dirección de las flechas en la línea roja de la figura 32.36 produce todavía una trayectoria válida físicamente para un rayo de luz que cruza la frontera entre los dos medios.

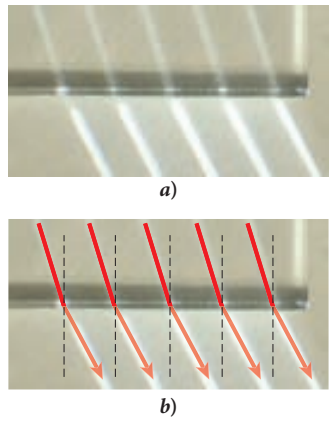


FIGURA 32.37 *a*) Rayos luminosos refractados al cruzar la frontera entre el vidrio y el aire. *b*) Flechas superpuestas en los rayos de luz. Las líneas discontinuas son normales a la superficie.

Principio de Fermat

Acabamos de determinar que la ley de Snell no puede demostrarse solamente mediante óptica de rayos. Pero hay un calificador para esta declaración, en el que si se acepta el principio de Fermat, entonces surge de forma automática la ley de Snell: el **principio de Fermat**, o el **principio del tiempo mínimo**, como lo expresó Fermat en 1657, afirma que la trayectoria seguida por un rayo de luz entre dos puntos en el espacio es la trayectoria que toma el tiempo mínimo.

¿Cómo podemos demostrar la ley de Snell de esta forma? La clave es la conexión entre la velocidad de la luz en un medio, v, y el índice de refracción, n, que se estableció en la ecuación 32.10. Si la luz se mueve a diferentes velocidades en dos medios, entonces el principio de Fermat es completamente equivalente a ganar la competencia de acuatlón, que ya se resolvió en el capítulo 2, ejemplo 2.6, y el texto siguiente. En ese problema, calculamos el ángulo al que debe nadar un competidor hasta la orilla en una competencia que consiste en nadar hasta la orilla (con una determinada velocidad) y correr a lo largo de la orilla (con otra velocidad). Ganar la competencia significa tomar el tiempo mínimo, que es exactamente lo que postula el principio de Fermat.

Si usted acepta el principio de Fermat y desea demostrar la ley de Snell, entonces todo lo que tiene que hacer es revisar la solución del ejemplo 2.6. Pero por supuesto usted puede preguntar de dónde viene el principio de Fermat. Usar el tiempo mínimo para ganar una competencia parece obvio. Pero ¿qué hace a los rayos de luz entender que deben tomar el tiempo mínimo para ir del punto A al punto B? La respuesta a esto se puede hallar en el principio de Huygens. Sin embargo, para entender la física que sustenta ese principio, se requiere esperar hasta el capítulo 34, cuando revisemos el modelo de la luz como una onda.

EJEMPLO 32.3 Profundidad aparente

Usted está de pie sobre el borde de un estanque y ve el agua a un ángulo de $\theta_2 = 45.0°$ respecto a la vertical, como se ilustra en la figura 32.38.

Usted ve un pez en el estanque. La profundidad real del pez es $d_{real} = 1.50$ m.

PROBLEMA

¿Cuál es la profundidad aparente del pez desde su posición de observación?

SOLUCIÓN

Los rayos de luz desde el pez se refractan en la superficie del agua hacia sus ojos a un ángulo de 45°, como indica la figura

(*continúa*)

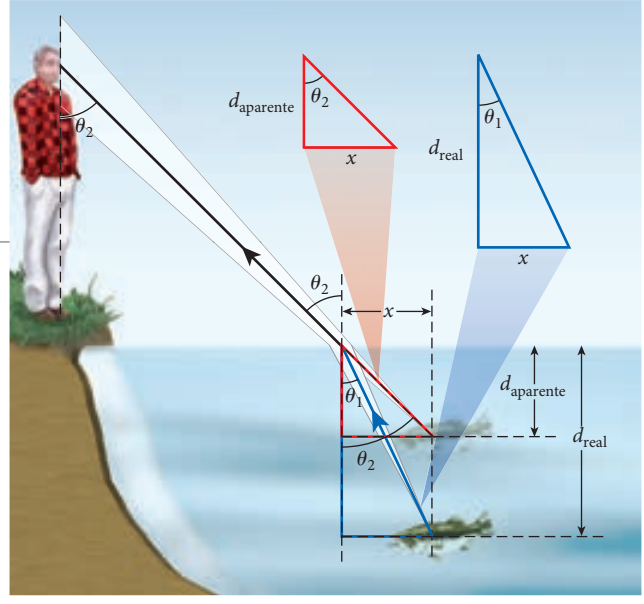


FIGURA 32.38 Usted está observando la superficie de un estanque a un ángulo de $\theta_2 = 45.0°$, y ve un pez debajo del agua. Los rayos emitidos desde un punto sobre el cuerpo del pez que llegan a su ojo se muestran como el cono semitransparente, con la línea del centro del cono representada por una línea continua.

(*continuación*)

32.38. En la figura se muestra no sólo un rayo, sino un conjunto de rayos emitidos desde un punto del cuerpo del pez alrededor de este rayo central (cono semitransparente). Donde los ojos ven que se intersecan estos rayos es donde se localiza el pez.

La profundidad aparente del pez se localiza a lo largo de la línea roja discontinua mostrada en la figura 32.28, extrapolada desde la dirección de los rayos de luz conforme entran a su ojo. Esta línea extrapolada forma un ángulo $\theta_2 = 45.0°$ con la normal a la superficie del agua.

Al utilizar la ley de Snell podemos calcular el ángulo θ_1 que los rayos de luz desde el pez deben formar en la superficie del agua:

$$n_{\text{aire}} \operatorname{sen} \theta_2 = n_{\text{agua}} \operatorname{sen} \theta_1 .$$

Tomando $n_{\text{aire}} = 1.00$ y $n_{\text{agua}} = 1.333$ de la tabla 32.2, podemos calcular θ_1:

$$\theta_1 = \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{\operatorname{sen}\theta_2}{n_{\text{agua}}}\right) = \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{\operatorname{sen} 45.0°}{1.333}\right) = 32.0°.$$

Definimos la distancia horizontal entre el punto en el que los rayos de luz intersecan la superficie del agua y el pez como x, según ilustra la figura 32.38. Podemos definir entonces el triángulo rojo y el triángulo azul. Del triángulo rojo obtenemos

$$\tan\theta_2 = \frac{x}{d_{\text{aparente}}},$$

y del triángulo azul obtenemos

$$\tan\theta_1 = \frac{x}{d_{\text{real}}}.$$

Al despejar x de estas dos ecuaciones e igualarlas entre sí, nos da

$$d_{\text{real}} \tan\theta_1 = d_{\text{aparente}} \tan\theta_2 ,$$

de la cual se puede despejar la profundidad aparente del pez:

$$d_{\text{aparente}} = \frac{d_{\text{real}} \tan\theta_1}{\tan\theta_2} = \frac{(1.50\ \text{m})\tan(32.0°)}{\tan(45.0°)} = 0.937\ \text{m}.$$

Así, al parecer el pez está más cerca de la superficie del agua de lo que en realidad está.

32.3 Ejercicio en clase

Si otro observador ve el mismo pez nadando a la misma profundidad, pero ese observador ve el pez a un ángulo θ_2 más grande que el valor especificado en el ejemplo 32.3, entonces lo ve a una profundidad aparente que es:

a) Más grande que la calculada en el ejemplo 32.3.

b) La misma que la calculada en el ejemplo 32.3.

c) Más pequeña que la calculada en el ejemplo 32.3.

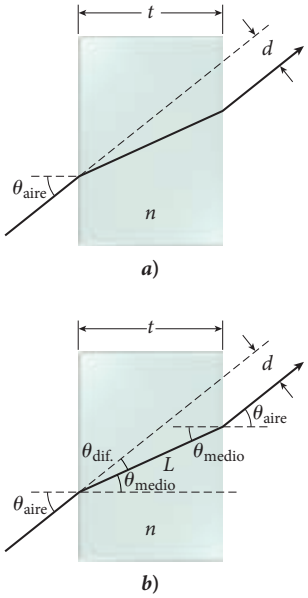


FIGURA 32.39 *a*) Rayo de luz que incide en una hoja de material transparente con espesor t e índice de refracción n. *b*) Ángulos de incidencia y refracción cuando el rayo entra y sale de la hoja.

PROBLEMA RESUELTO 32.2 Desplazamiento de rayos de luz en material transparente

Un rayo de luz incide en una hoja de material transparente con espesor $t = 5.90$ cm y con índice de refracción $n = 1.50$. El ángulo de incidencia es $\theta_{\text{aire}} = 38.5°$ [figura 32.39*a*)].

PROBLEMA

¿Cuál es la distancia d que se desplaza el rayo de luz después de pasar por la hoja?

SOLUCIÓN

PIENSE

El rayo de luz se refracta hacia la normal cuando entra a la hoja transparente y se refracta lejos de la normal cuando sale de la hoja transparente. Después de pasar por la hoja, el rayo de luz es paralelo al rayo de luz incidente, pero está desplazado. Usando la ley de Snell se puede calcular el ángulo de refracción en la hoja transparente. Con ese ángulo, se puede usar trigonometría para calcular el desplazamiento del rayo de luz que pasa por la hoja.

ESBOCE

En la figura 32.39*b*) se observa un bosquejo del rayo de luz que pasa por una hoja transparente.

INVESTIGUE

El rayo de luz incide en la hoja con un ángulo θ_{aire}. La ley de Snell relaciona el ángulo incidente con el ángulo refractado θ_{medio} a través del ángulo de refracción del material transparente n,

$$n = \frac{\operatorname{sen}\theta_{\text{aire}}}{\operatorname{sen}\theta_{\text{medio}}}.$$

De esta ecuación podemos despejar el ángulo de refracción:

$$\theta_{\text{medio}} = \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{\operatorname{sen}\theta_{\text{aire}}}{n}\right). \tag{i}$$

Llamamos L a la distancia que recorre el rayo de luz en la hoja transparente. Usando la figura 32.39*b*), se puede relacionar el espesor de la hoja t con el ángulo de refracción:

$$\cos\theta_{\text{medio}} = \frac{t}{L}. \tag{ii}$$

Si $\theta_{\text{dif.}}$ es la diferencia entre el ángulo incidente y el ángulo de refracción, como muestra la figura 32.39*b*), entonces

$$\theta_{\text{dif.}} = \theta_{\text{aire}} - \theta_{\text{medio}}. \tag{iii}$$

Podemos ver en la figura 32.39*b*) que el desplazamiento del rayo de luz d se puede relacionar con la distancia que viaja el rayo de luz en la hoja y la diferencia entre el ángulo incidente y el ángulo refractado,

$$\operatorname{sen}\theta_{\text{dif.}} = \frac{d}{L}. \tag{iv}$$

SIMPLIFIQUE

Podemos combinar las tres ecuaciones anteriores (ii), (iii) y (iv) para obtener

$$d = L\operatorname{sen}\theta_{\text{dif.}} = \frac{t}{\cos\theta_{\text{medio}}}\operatorname{sen}\left(\theta_{\text{aire}} - \theta_{\text{medio}}\right), \tag{v}$$

donde de la ecuación (i)

$$\theta_{\text{medio}} = \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{\operatorname{sen}\theta_{\text{aire}}}{n}\right).$$

CALCULE

Primero calculamos el ángulo de refracción con la ecuación (i)

$$\theta_{\text{medio}} = \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{\operatorname{sen}(38.5°)}{1.50}\right) = 24.5199°.$$

Luego calculamos el desplazamiento del rayo de luz con la ecuación (v)

$$d = \frac{5.90\text{ cm}}{\cos(24.5199°)}\operatorname{sen}(38.5° - 24.5199°) = 1.56663\text{ cm}.$$

REDONDEE

Mostramos nuestro resultado con tres cifras:

$$d = 1.57\text{ cm}.$$

VUELVA A REVISAR

Si el rayo de luz estuviera incidiendo perpendicularmente sobre la hoja ($\theta_{\text{aire}} = 0°$), el desplazamiento del rayo sería cero. Para calcular cuál sería el desplazamiento en el límite cuando el ángulo incidente se aproxima a $\theta_{\text{aire}} = 90°$, se puede reescribir la ecuación (v) como

$$d = \frac{t\operatorname{sen}\left(\theta_{\text{aire}} - \theta_{\text{medio}}\right)}{\cos\theta_{\text{medio}}} = t\frac{\operatorname{sen}\theta_{\text{aire}}\cos\theta_{\text{medio}} - \cos\theta_{\text{aire}}\operatorname{sen}\theta_{\text{medio}}}{\cos\theta_{\text{medio}}},$$

(*continúa*)

32.4 Ejercicio en clase

En el problema resuelto 32.2 supusimos que el material transparente estaba rodeado de aire. Si está envuelto en otro medio, por ejemplo, agua, ¿qué esperaría para el desplazamiento del rayo de luz bajo el mismo ángulo de incidencia? (Suponga que el índice de refracción del material transparente es aún más grande que el del agua.)

a) Sería mayor.

b) Sería el mismo.

c) Sería más pequeño.

(*continuación*)

usando la identidad trigonométrica sen $(\alpha - \beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta - \cos\alpha\operatorname{sen}\beta$. Si se toma $\theta_{\text{aire}} = 90°$, obtenemos

$$d = t\frac{1(\cos\theta_{\text{medio}}) - 0(\operatorname{sen}\theta_{\text{medio}})}{\cos\theta_{\text{medio}}} = t.$$

Así, nuestro resultado debe estar entre cero y el espesor de la hoja. Nuestro resultado es $d = 1.57$ cm comparado con $d = 5.90$ cm para $\theta_{\text{aire}} = 90°$, de modo que nuestro resultado parece razonable.

Reflexión interna total

Consideremos ahora luz que viaja en un medio óptico con índice de refracción n_1 que cruza una frontera con otro medio óptico con un menor índice de refracción n_2 tal que $n_2 < n_1$. En este caso, la luz se curva lejos de la normal. A medida que se incrementa el ángulo de incidencia θ_1, el ángulo de la luz transmitida θ_2 se aproxima a 90°. Cuando θ_1 sobrepasa el ángulo para el cual $\theta_2 = 90°$, la **reflexión interna total** tiene lugar en vez de la refracción; toda la luz se refleja internamente. El ángulo crítico θ_c al que tiene lugar la reflexión total interna está dado por

$$\frac{n_2}{n_1} = \frac{\operatorname{sen}\theta_1}{\operatorname{sen}\theta_2} = \frac{\operatorname{sen}\theta_c}{\operatorname{sen}90°}$$

o bien,

$$\operatorname{sen}\theta_c = \frac{n_2}{n_1} \quad (n_2 \leq n_1), \tag{32.13}$$

porque sen 90° = 1. Usted puede ver de esta ecuación que la reflexión interna total puede ocurrir sólo para luz que viaja de un medio con un índice de refracción más alto a uno con un menor índice de refracción, debido a que el seno del ángulo no puede ser mayor que 1. A ángulos menores que θ_c, algo de luz se refleja y se transmite. A ángulos mayores que θ_c, toda la luz se refleja y ninguna se transmite.

Si el segundo medio es aire, entonces se puede tomar $n_2 = 1$ y obtener una expresión para el ángulo crítico para la reflexión interna total de la luz que sale de un medio con índice de refracción n y entra a aire:

$$\operatorname{sen}\theta_c = \frac{1}{n}. \tag{32.14}$$

La figura 32.40 ilustra la reflexión interna total. En esta figura, los rayos de luz están viajando en vidrio con índice de refracción n de la esquina inferior derecha a la esquina superior izquierda. En la figura 32.40*a*), los rayos de luz inciden en la frontera entre el vidrio y el aire y se refractan de acuerdo con la ley de Snell. En la figura 32.40*b*), los rayos de luz inciden en la frontera al ángulo crítico de reflexión interna total, θ_c. A este ángulo, los rayos refractados tendrían un ángulo de $\theta_2 = 90°$, según se ilustra mediante la flecha discontinua. Los rayos de luz de la figura 32.40*c*) inciden en la frontera con un ángulo mayor que el ángulo crítico de reflexión interna total, $\theta_1 > \theta_c$, de modo que toda la luz se refleja.

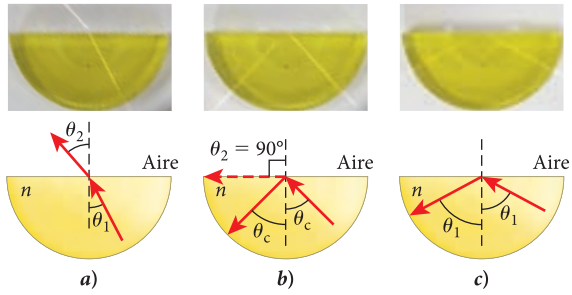


FIGURA 32.40 Los rayos de luz que viajan por vidrio con índice de refracción n, de la esquina inferior derecha a la esquina superior izquierda, inciden en la frontera entre el vidrio y el aire. Los paneles superiores son fotografías y los paneles inferiores son dibujos que ilustran las trayectorias de los rayos de luz. *a*) La luz se refracta en la frontera. (Una pequeña cantidad de luz es reflejada también por la frontera, pero es demasiado débil para aparecer en la fotografía.) *b*) La luz incide en la frontera al ángulo crítico para la reflexión interna total. *c*) La luz es reflejada por completo internamente en la frontera.

Fibras ópticas

FIGURA 32.41 Luz transportada desde una fuente de luz por fibra óptica.

Una aplicación importante de la reflexión interna total es la transmisión de luz en **fibras ópticas**. La luz se introduce en una fibra de modo que el ángulo de incidencia en la superficie externa de la fibra es mayor que el ángulo crítico para la reflexión interna total. La luz es entonces transportada a lo largo de la fibra a medida que rebota de forma repetida desde la superficie de la fibra. Así, las fibras ópticas se pueden usar para transportar luz de una fuente a un destino. La figura 32.41 ilustra un haz de fibras ópticas con el extremo de las fibras abierto a la cámara. El otro extremo de la fibra está conectado ópticamente a una fuente de luz. Note que las fibras ópticas pueden transportar luz en direcciones distintas a una línea recta. La fibra puede ser curvada, siempre que el radio de curvatura no sea tan pequeño como para permitir que la luz que viaja en la fibra óptica tenga ángulos de incidencia θ_i menores que θ_c. Si $\theta_i < \theta_c$, el revestimiento alrededor de la superficie de la fibra absorberá la luz. Estos argumentos son aplicables a fibras ópticas con diámetros de núcleo mayores que 10 μm, es decir, un diámetro de núcleo grande comparado con la longitud de onda de la luz.

Un tipo de fibra óptica usado para comunicaciones digitales consiste en un núcleo de vidrio rodeado de revestimiento, compuesto de vidrio con un menor índice de refracción que el del núcleo. Así, el revestimiento se cubre para evitar que se dañe (figura 32.42).

Para una fibra óptica comercial representativa, el material del núcleo es SiO_2 dopado con Ge para incrementar su índice de refracción. La fibra comercial común puede transmitir luz a través de 500 m con pérdidas pequeñas. La luz se genera mediante diodos emisores de luz (LED) que producen luz con una longitud de onda larga. La luz se genera como pulsos cortos. Las pequeñas pérdidas de luz no afectan las señales digitales porque éstas se transmiten como bits binarios, en vez de señales analógicas. Siempre que los bits sean registrados correctamente, la información se transmite a la perfección, lo contrario de las señales análogas, que serían degradadas directamente por cualquier pérdida de señal. Cada 500 m se reciben las señales, se amplifican y retransmiten. Por consiguiente, se pueden transmitir por grandes distancias tasas de datos muy altas que son inmunes a la interferencia. Este escenario explica la física detrás del soporte de fibra óptica de internet.

Las fibras ópticas se usan también para la transmisión de señales análogas, si la distancia por la que la señal tiene que ser transportada no es demasiado larga, hasta algunos metros. Una aplicación de la fibra óptica de transmisión de señales análogas es el endoscopio, y dispositivos relacionados como el boroscopio. Un endoscopio se usa para ver dentro del cuerpo humano sin realizar ninguna intervención quirúrgica, mientras que el boroscopio se usa para ver lugares difíciles de alcanzar en maquinaria. Un endoscopio común se muestra en la figura 32.43*a*). Un endoscopio

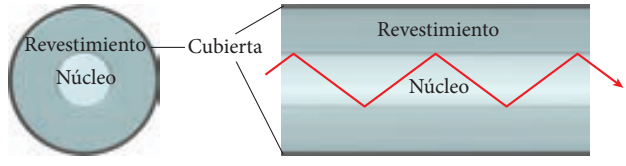
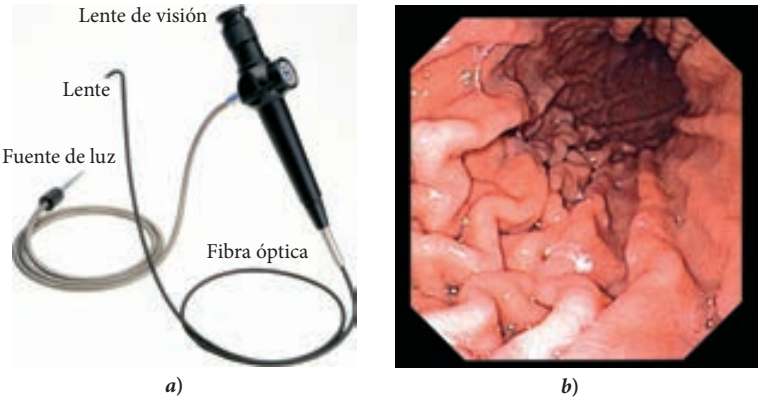


FIGURA 32.42 La estructura de una fibra óptica que incorpora reflexión interna total.



a) *b*)

FIGURA 32.43 *a*) Un endoscopio. *b*) Una imagen interna del estómago por medio de un endoscopio.

usa lentes pequeñas para producir una imagen del área de interés. La imagen producida por la lente se enfoca en un extremo de un haz de miles de fibras ópticas. El haz de fibra óptica es bastante pequeño en diámetro y lo suficientemente flexible para ser insertado en el cuerpo humano por varios orificios, como el esófago. Cada fibra transporta un pixel de la imagen al otro extremo del haz de fibras donde una segunda lente reproduce la imagen que verá el profesional de la salud. Un endoscopio podría tener 7 000 a 25 000 fibras productoras de imagen. Además, otro conjunto de fibras ópticas lleva luz para iluminar la región de interés. Con frecuencia se puede mover a distancia el extremo del endoscopio (articulado) para ver el área deseada.

PROBLEMA RESUELTO 32.3 Fibra óptica

Considere una fibra óptica larga con índice de refracción $n = 1.265$ que está rodeada de aire. (No hay revestimiento.) El extremo de la fibra está pulido para que esté plano y sea perpendicular a la longitud de la fibra. Un rayo de luz de un láser incide desde el aire en el centro de la cara circular de la fibra óptica.

PROBLEMA

¿Cuál es el ángulo de incidencia máximo para este rayo de luz tal que se confinará y transportará mediante fibra óptica? (Ignore cualquier reflexión cuando el rayo de luz entra a la fibra.)

SOLUCIÓN

PIENSE

El rayo de luz se refractará cuando entre a la fibra óptica. Una vez dentro de la fibra, si el ángulo de incidencia en la superficie de la fibra óptica es mayor que el ángulo crítico para la reflexión interna total, entonces la luz se transmite sin pérdida.

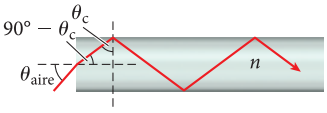


FIGURA 32.44 Luz que entra a una fibra óptica y experimenta reflexión interna total.

ESBOCE

La figura 32.44 muestra un dibujo del rayo de luz que entra a la fibra óptica y se refleja en su superficie interna.

INVESTIGUE

El ángulo crítico para la reflexión interna total θ_c en la fibra para la luz que entra desde el aire está dado por

$$\operatorname{sen}\theta_c = \frac{1}{n}, \tag{i}$$

donde n es el índice de refracción de la fibra óptica. Para la luz que entra a la fibra óptica, la ley de Snell establece que como $n_{aire} = 1$,

$$\operatorname{sen}\theta_{aire} = n \operatorname{sen}\theta_{medio}, \tag{ii}$$

donde θ_{medio} es el ángulo del rayo de luz refractado en la fibra. De la figura 32.44 podemos ver que

$$\theta_{medio} = 90° - \theta_c. \tag{iii}$$

SIMPLIFIQUE

Podemos resolver la ecuación (ii) para obtener el ángulo máximo de incidencia,

$$\theta_{aire} = \operatorname{sen}^{-1}\left(n \operatorname{sen}\theta_{medio}\right).$$

Por medio de la ecuación (iii) podemos escribir

$$\theta_{aire} = \operatorname{sen}^{-1}\left(n \operatorname{sen}\left(90° - \theta_c\right)\right) = \operatorname{sen}^{-1}\left(n\cos\theta_c\right)$$

donde hemos usado la identidad trigonométrica $\operatorname{sen}(90° - \alpha) = \cos\alpha$. Así, podemos usar la ecuación (i) para obtener

$$\theta_{aire} = \operatorname{sen}^{-1}\left(n\cos\left(\operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right).$$

CALCULE

Al colocar los valores numéricos, obtenemos

$$\theta_{\text{aire}} = \text{sen}^{-1}\left((1.265)\cos\left(\text{sen}^{-1}\left(\frac{1}{1.265}\right)\right)\right) = 50.7816°.$$

REDONDEE

Mostramos nuestro resultado con cuatro cifras, porque el índice de refracción se dio con extrema exactitud:

$$\theta_{\text{aire}} = 50.78°.$$

VUELVA A REVISAR

El ángulo crítico de la reflexión total interna para la fibra óptica es

$$\theta_c = \text{sen}^{-1}\left(\frac{1}{1.265}\right) = 52.23°.$$

La ley de Snell en la entrada de la fibra óptica nos da

$$\theta_{\text{medio}} = \text{sen}^{-1}\left(\frac{\text{sen}(50.78°)}{1.265}\right) = 37.77°.$$

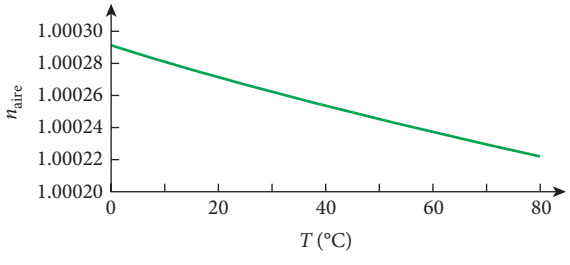
Así, $\theta_{\text{medio}} = 37.77° = 90° - \theta_c = 90° - 52.23° = 37.77°$, y nuestro resultado parece razonable.

Espejismos

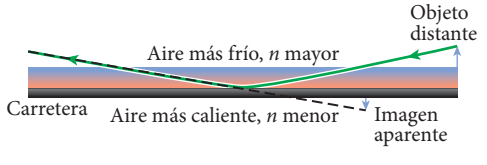
Un espejismo se relaciona con frecuencia con viajar en el desierto. A usted le parece ver un oasis a la distancia. Conforme se aproxima la visión desaparece. Sin embargo, no tiene que viajar en el desierto para ver este fenómeno. Usted puede ver un espejismo cuando viaja a lo largo de una vía recta en un día cálido. En la figura 32.45*a*) se muestra un ejemplo de tal espejismo.

El espejismo es causado por la refracción en el aire cerca de la superficie de la carretera caliente. El aire cerca de la superficie de la carretera está más caliente que el aire lejos de la superficie. Como se ilustra en la figura 32.45*b*), el índice de refracción del aire disminuye a medida que aumenta su temperatura. Así, el aire cerca de la carretera tiene un índice de refracción menor que el aire más frío sobre él. Cuando la luz de objetos distantes pasa por esta capa, se refracta hacia arriba, como muestra la figura 32.45*c*). La apariencia de agua se crea mediante la luz refractada del cielo. Usted puede ver la imagen como si fuera luz reflejada de la superficie del agua, como puede ver en la figura 32.45*a*). Otros objetos son visibles también en el espejismo mostrado en la figura

a)



b)



c)

FIGURA 32.45 *a*) Un espejismo sobre una carretera caliente. Parece haber agua sobre la carretera y los objetos parecen reflejarse en la superficie del agua. *b*) El índice de refracción del aire es función de la temperatura. *c*) Un diagrama de rayos que muestra la luz desde un objeto distante que es refractado en la capa de aire cerca de una superficie caliente.

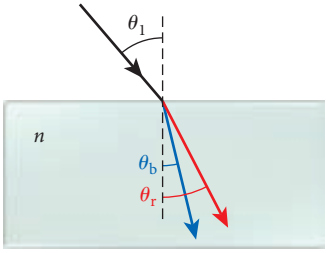


FIGURA 32.46 Dispersión cromática para luz refractada en el límite de dos medios ópticos.

32.45*a*), como árboles y faros de automóviles. Conforme avance por la carretera, pronto hallará que no hay agua sobre ella.

Dispersión cromática

El índice de refracción de un medio óptico depende de la longitud de onda de la luz que viaja en ese medio. Esta dependencia del índice de refracción sobre la longitud de onda de la luz significa que luz de diferentes colores se refracta de modo distinto en la frontera entre dos medios ópticos. Este efecto se llama **dispersión cromática**.

En general, el índice de refracción para un determinado medio óptico es mayor para las longitudes de onda más cortas que para las más largas. Por lo tanto, la luz azul se refracta más que la luz roja. Se puede ver que $\theta_b < \theta_r$ en la figura 32.46.

La luz blanca consta de una superposición de todas las longitudes de onda visibles. Cuando un haz de luz blanca se proyecta sobre un prisma de vidrio (figura 32.47), la luz blanca incidente se separa en las distintas longitudes de onda visibles, porque cada longitud de onda se refracta a un ángulo diferente. La figura 32.47 muestra tres rayos refractados, para luz roja, verde y azul, pero por supuesto la luz blanca contiene un continuo de longitudes de onda, como se ve en un arcoíris.

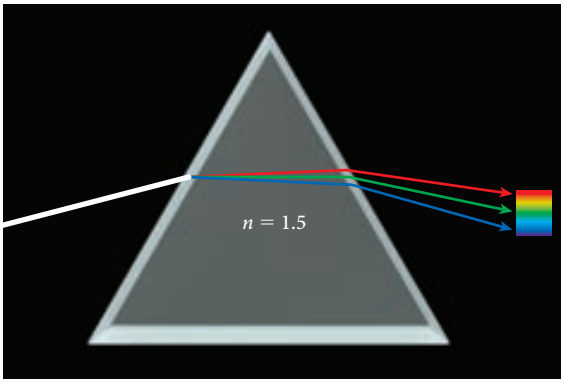


FIGURA 32.47 La luz blanca que incide en un prisma de vidrio se separa en sus colores componentes mediante dispersión cromática.

Un arcoíris es un ejemplo común de dispersión cromática (figura 32.48). Cuando las gotas de agua se suspenden en el aire y usted las observa con el Sol a su espalda, ve un arcoíris. La luz blanca del Sol entra a la gota de agua, se refracta en la superficie de la gota y se transmite por la gota hasta el lado lejano. Aquí se refleja por completo internamente y se transmite de nuevo a la superficie de la gota, donde sale y se refracta de nuevo. En los dos pasos de refracción, el índice de refracción es diferente para longitudes de onda distintas. El índice de refracción para la luz verde en agua es 1.333, mientras que el índice de refracción para la luz azul es 1.337, y para la luz roja es 1.331. Para todos los colores ocurre un continuo de índices de refracción.

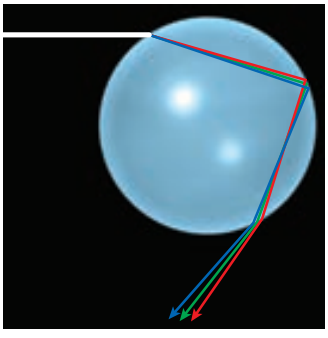


FIGURA 32.48 La dispersión cromática en una gota esférica de agua produce un arcoíris.

La figura 32.1 muestra un arcoíris común. Usted puede ver la luz azul en la parte interna del arcoíris y la luz roja en el exterior. El arco de arcoíris representa un ángulo promedio de 42° desde la dirección de la luz solar. Otra de sus características es evidente en esta fotografía: la región dentro del arco parece ser más brillante que la región fuera del arco. Usted puede entender este fenómeno observando la trayectoria que toman los rayos de luz cuando son refractados y reflejados en las gotas de agua (figura 32.49).

En el diagrama se puede ver que la mayor parte de la luz que se refracta y se refleja de regreso al observador tiene un ángulo menor que 42°. A ángulos más pequeños que 42°, la mayor parte de la luz se refracta y refleja hacia el observador, aunque no se observa ninguna separación de las diferentes longitudes de onda porque los colores dispersados de un rayo se combinan con los de otro rayo y forman luz blanca. A ángulos más grandes, no se envía ninguna luz hacia el observador mediante este proceso; por lo tanto, fuera del arco del arcoíris, aparece mucha menos luz. Sin embargo, algo de luz aparece aún porque se dispersa desde otras fuentes.

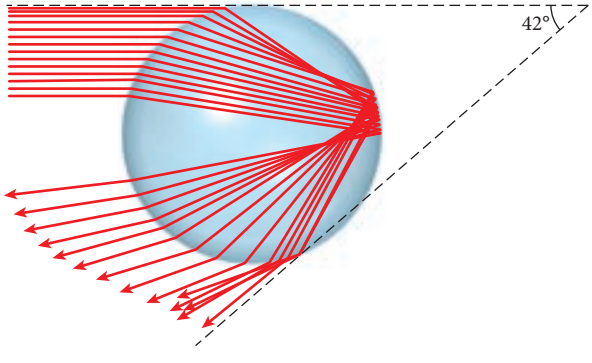


FIGURA 32.49 Trayectorias que toman los rayos de luz paralelos en una gota de agua esférica.

La figura 32.1 contiene también un arcoíris secundario. Éste aparece a un ángulo más grande que el arcoíris primario, y en éste el orden de los colores está invertido. El secundario se crea mediante luz que se refleja dos veces dentro de la gota de agua (figura 32.50). En contraste con la situación mostrada en la figura 32.48, cuando el rayo de la figura 32.50 choca con la superficie de la gota la tercera vez (después de una refracción y una reflexión), no toda la luz se refracta y sale de la gota de agua. En cambio, parte de ésta se refleja internamente de nuevo y luego se refracta fuera de la gota, formando un arcoíris secundario. En la figura 32.50, se puede ver que el ángulo de la luz azul y roja emergente se invierte en comparación con la luz azul y roja mostrada en la figura 32.48 para el arcoíris primario. (Para el arcoiris secundario hay también un ángulo preferido, en este caso aproximadamente de 50°, en el que se dispersan los rayos paralelos que entran a la gota para el arcoíris secundario.)

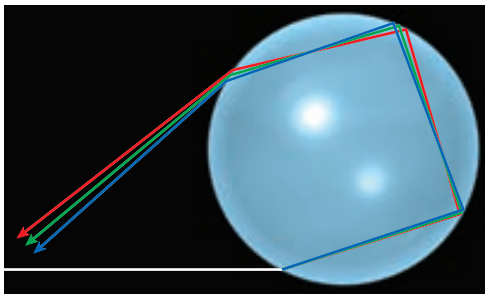


FIGURA 32.50 Dispersión cromática y reflexión doble en un arcoíris que produce uno secundario.

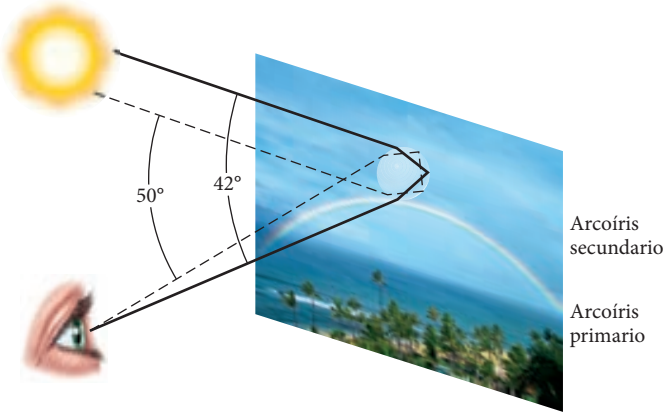


FIGURA 32.51 Configuración geométrica de la dispersión de luz en la formación de arcoíris primario y secundario.

Finalmente, combinando nuestras observaciones para los arcoíris primario y secundario se obtiene una comprensión cuantitativa de los fenómenos físicos que sustentan la figura 32.1. Los ángulos observados de estos arcoíris con respecto a la luz del Sol se bosquejan en la figura 32.51.

Polarización por reflexión

El fenómeno de polarización se describió en el capítulo 31. Aquí tratamos con una forma especial de crear luz polarizada o por lo menos parcialmente polarizada. Cuando la luz incide desde el aire sobre un medio óptico como vidrio o agua, parte de la luz se refleja y parte se refracta. La luz reflejada en esta situación es parcialmente polarizada. Cuando la luz se refleja a un cierto ángulo, llamado **ángulo de Brewster**, θ_B, la luz reflejada es polarizada por completo horizontalmente, como se ilustra en la figura 32.52.

El ángulo de Brewster es en honor del físico escocés sir David Brewster (1781-1868), quien demostró este efecto en 1815. El ángulo de Brewster se presenta cuando los rayos reflejados son perpendiculares a los rayos refractados. La ley de Snell nos dice que

$$n_{\text{aire}} \operatorname{sen}\theta_B = n_{\text{vidrio}} \operatorname{sen}\theta_r,$$

donde θ_r es el ángulo del rayo refractado. La figura 32.52 muestra que

$$180° = \theta_B + \theta_r + 90°$$

porque los rayos reflejados y los rayos refractados son perpendiculares entre sí. La relación entre los ángulos se puede reescribir como

$$\theta_r = 90° - \theta_B.$$

Al sustituir este resultado en la ley de Snell, se obtiene

$$n_{\text{aire}} \operatorname{sen}\theta_B = n_{\text{vidrio}} \operatorname{sen}(90° - \theta_B) = n_{\text{vidrio}} \cos(\theta_B),$$

que se puede reordenar para obtener finalmente

$$\frac{n_{\text{vidrio}}}{n_{\text{aire}}} = \tan(\theta_B), \qquad (32.15)$$

donde hemos hecho uso de la identidad trigonométrica $\tan\theta = \operatorname{sen}\theta/\cos\theta$. La ecuación 32.15 se llama **ley de Brewster**.

El hecho de que la luz en el aire sea reflejada en la superficie del agua y sea polarizada parcialmente en dirección horizontal, significa que el resplandor de la luz del Sol fuera de las superficies de agua puede ser bloqueado por lentes para sol que estén cubiertos con un filtro de polarización que sólo permite pasar la luz polarizada verticalmente.

32.5 Ejercicio en clase

La luz del Sol choca con una pieza de vidrio a un ángulo de incidencia de $\theta_i = 33.4°$. ¿Cuál es la diferencia en el ángulo de refracción entre un rayo de luz roja ($\lambda = 660.0$ nm) y un rayo de luz violeta ($\lambda = 410.0$ nm) dentro del vidrio? El índice de refracción para la luz roja es $n = 1.520$, y el índice de refracción para la luz violeta es $n = 1.538$.

a) 0.03° *d*) 0.26°

b) 0.12° *e*) 0.82°

c) 0.19°

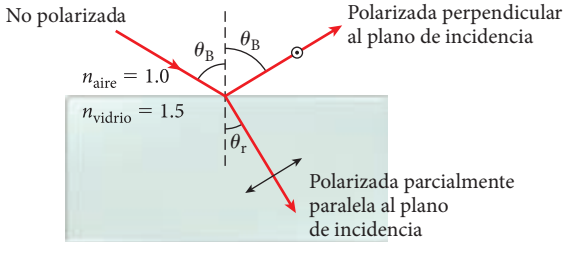


FIGURA 32.52 Luz no polarizada que incide desde el aire sobre vidrio. Cuando el ángulo de incidencia es igual al ángulo de Brewster, θ_B, la luz reflejada es polarizada 100% perpendicular al plano de incidencia. La luz refractada es polarizada parcialmente respecto al plano de incidencia.

LO QUE HEMOS APRENDIDO | GUÍA DE ESTUDIO PARA EXAMEN

- El ángulo de incidencia es igual al ángulo de reflexión, $\theta_i = \theta_r$.
- La longitud focal de un espejo esférico es igual a la mitad de su radio de curvatura, $f = \frac{1}{2}R$. El radio R es positivo para espejos convergentes (cóncavos) y negativo para espejos divergentes (convexos).
- Para imágenes formadas con espejos esféricos, la distancia al objeto, la distancia a la imagen y la longitud focal del espejo se relacionan mediante la ecuación del espejo, $\frac{1}{d_o} + \frac{1}{d_i} = \frac{1}{f}$. Aquí d_o es siempre positiva, mientras que d_i es positiva si la imagen está del mismo lado del espejo que el objeto y negativa si la imagen está del otro lado. La longitud focal f es positiva para espejos convergentes (cóncavos) y negativa para espejos divergentes (convexos).
- La luz se refracta (cambia de dirección) cuando cruza la frontera entre dos medios con distintos índices de refracción. Esta refracción está gobernada por la ley de Snell: $n_1 \operatorname{sen}\theta_1 = n_2 \operatorname{sen}\theta_2$.
- El ángulo crítico para la reflexión interna total en el límite entre dos medios con índices de refracción diferentes está dada por $\operatorname{sen}\theta_c = \frac{n_2}{n_1}$ $(n_2 \leq n_1)$.
- El ángulo de Brewster, θ_B, es el ángulo de incidencia de luz en el aire hacia un medio con un índice de refracción mayor en el cual la luz reflejada está polarizada por completo en dirección horizontal. El ángulo está dado por la ley de Brewster: $\tan\theta_B = n_2/n_1$, donde $n_2 > n_1$.

TÉRMINOS CLAVE

óptica geométrica, p. 1026
frentes de onda, p. 1026
rayos de luz, p. 1026
ley de los rayos, p. 1027
espejo, p. 1029
ley de reflexión, p. 1030
imagen, p. 1030
imagen virtual, p. 1030
imagen real, p. 1030
eje óptico, p. 1031
espejo cóncavo, p. 1033
punto focal, p. 1033
longitud focal, p. 1033
ecuación del espejo, p. 1035
amplificación, p. 1036
espejo convexo, p. 1037
aberración esférica, p. 1039
índice de refracción, p. 1041
refracción, p. 1042
ley de Snell, p. 1042
principio de Fermat, p. 1043
principio del tiempo mínimo, p. 1043
reflexión interna total, p. 1046
fibras ópticas, p. 1047
dispersión cromática, p. 1050
ángulo de Brewster, p. 1051
ley de Brewster, p. 1051

NUEVOS SÍMBOLOS Y ECUACIONES

θ_i, ángulo de incidencia
θ_r, ángulo de reflexión
$\theta_r = \theta_i$, ley de reflexión
θ_c, ángulo crítico de reflexión total
d_o, distancia al objeto
d_i, distancia a la imagen
f, longitud focal
h_o, altura del objeto
h_i, altura de la imagen
$n = \frac{c}{v}$, índice de refracción
$n_1 \operatorname{sen}\theta_1 = n_2 \operatorname{sen}\theta_2$, ley de Snell
$\tan\theta_B = n_2/n_1$, $n_2 > n_1$, ley de Brewster

RESPUESTAS A LAS OPORTUNIDADES DE AUTOEVALUACIÓN

32.1 $d_i = \frac{d_o f}{d_o - f} = \frac{(2.50\text{ m})(-0.500\text{ m})}{(2.50\text{ m}) - (-0.500\text{ m})} = -0.417\text{ m}$

$$m = -\frac{d_i}{d_o} = -\frac{-0.417\text{ m}}{2.50\text{ m}} = 0.167$$

Así, usted ve una versión de pie más pequeña de usted mismo.

32.2 Podemos usar el resultado de la deducción 32.2

$$y = R\left(1 - \frac{1}{2\cos\left(\operatorname{sen}^{-1}(d/R)\right)}\right)$$

Podemos ver que conforme nos acercamos más al eje óptico, la distancia del punto de cruce se aproxima más a la longitud focal $f = R/2 = 3.60$ cm.

Distancia desde el eje (cm)	Distancia desde el espejo (cm)
0.72	3.58
0.8	3.58
1.8	3.48
3.6	3.04

32.3 Energía cinética de rotación $K = \frac{1}{2}m\omega^2x^2$; energía potencial $U = mgy$. Se igualan y se encuentra que $y = x^2\omega^2/2g$.

PRÁCTICA PARA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Lineamientos para resolución de problemas

1. Trazar un diagrama grande, claro, bien rotulado debe ser el primer paso para resolver casi cualquier problema de óptica. Incluya toda la información que conozca y toda la información que necesite hallar. Recuerde que los ángulos se miden con respecto a la normal a la superficie, no a la superficie misma.

2. Normalmente necesita dibujar sólo dos rayos principales para localizar una imagen formada por espejos, pero debe dibujar un tercer rayo como comprobación de que están dibujados de modo correcto. Incluso cuando necesita resolver un problema por medio de la ecuación del espejo, un dibujo preciso puede ayudarlo a aproximar las respuestas como una comprobación de sus cálculos.

3. Cuando calcule distancias para espejos, recuerde las convenciones de signos y sea cuidadoso de usarlas correctamente. Si un diagrama indica una imagen invertida, por ejemplo, pero su cálculo no tiene un signo negativo, regrese a la ecuación de partida y compruebe los signos de todas las distancias y las longitudes focales.

PREGUNTAS DE OPCIÓN MÚLTIPLE

32.1 La leyenda dice que Arquímedes incendió la flota romana cuando ésta estaba invadiendo Siracusa. Arquímedes creó un enorme espejo _____ y enfocó los rayos del Sol sobre los navíos romanos.

a) Plano
b) Divergente paralelo
c) De enfoque paralelo

32.2 ¿Cuáles de las siguientes combinaciones de interfaz tiene el ángulo crítico más pequeño?

a) Luz que viaja del hielo al diamante.
b) Luz que viaja del cuarzo al lucite.
c) Luz que viaja del diamante al vidrio.
d) Luz que viaja del lucite al diamante.
e) Luz que viaja del lucite al cuarzo.

32.3 Para reflexión especular de un rayo de luz, el ángulo de incidencia:

a) Debe ser igual al ángulo de reflexión.
b) Es menor siempre que el ángulo de reflexión.
c) Es mayor siempre que el ángulo de reflexión.
d) Es igual a 90°, el ángulo de reflexión.
e) Puede ser mayor que, menor que o igual al ángulo de reflexión.

32.4 Al estar de pie en la orilla de una alberca llena de agua, ¿en qué condición verá una reflexión del escenario en el lado opuesto a través de una reflexión interna total de la luz del escenario?

a) Sus ojos están a nivel con el agua.
b) Usted observa la alberca a un ángulo de 41.8°.
c) Bajo ninguna condición.
d) Usted observa la alberca a un ángulo de 48.2°.

32.5 Usted está usando un espejo y una cámara para hacerse un autorretrato. Usted enfoca la cámara sobre sí mismo a través del espejo. El espejo está a una distancia D de usted. ¿A qué distancia debe fijar el alcance de enfoque de la cámara?

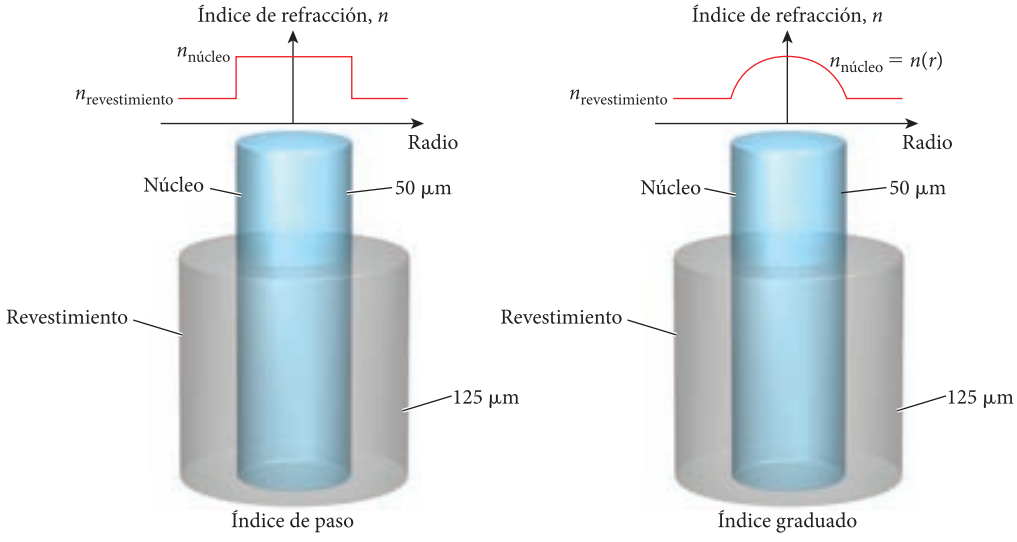
a) D *b*) 2D *c*) D/2 *d*) 4D

32.6 ¿Cuál es la amplificación para un espejo plano?

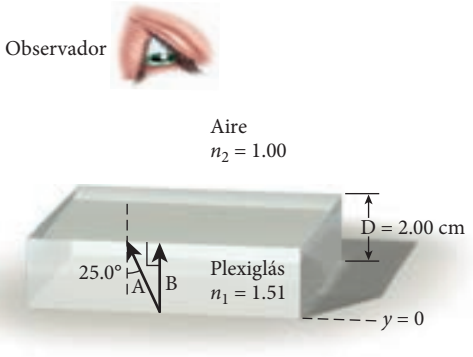
a) +1
b) −1
c) Mayor que +1
d) No definida para un espejo plano

PREGUNTAS

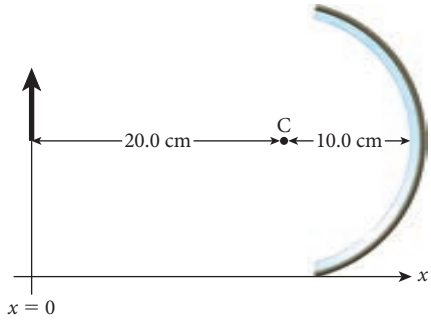
32.7 La figura muestra la diferencia entre el perfil del índice de refracción de una denominada *fibra de índice de paso* contra el perfil del índice de refracción de una denominada *fibra de índice graduado*. Al analizar la propagación de luz por la fibra desde una perspectiva de óptica de rayos, comente acerca de la trayectoria seguida por un rayo de luz que entra a cada una de las dos fibras.



32.8 Una placa de plexiglás de 2.00 cm de espesor con índice de refracción 1.51 se coloca sobre un texto de física. La placa tiene lados paralelos. El texto está a la altura $y = 0$. Considere dos rayos de luz que salen de la letra "*t*" en el texto bajo el plexiglás y van hacia un observador que está sobre el plexiglás, viendo hacia abajo. ***Trace*** en la figura la posición y aparente del texto bajo el plexiglás vista por el observador. *Sugerencia*: ¿De qué parte del plexiglás parecen originarse estos rayos para el observador? Usando los dos rayos A y B después de que han salido del plexiglás, determine la altura aparente (posición y) del texto debajo del plexiglás visto por el observador. Usted puede realizar fácilmente este experimento. Si no tiene un bloque de vidrio o plexiglás, pruebe colocando un vaso de fondo plano sobre el texto.



32.9 Un espejo esférico cóncavo simple se usa para crear una imagen de una fuente de 5.00 cm de alto que se localiza en la posición $x = 0$ cm, la cual está a 20.0 cm a la izquierda del punto C, el centro de curvatura del espejo, como muestra la figura. La magnitud del radio de curvatura del espejo es 10 cm. Sin cambiar el espejo, ¿cómo se puede reducir la aberración esférica producida por este espejo? ¿Habrá algunas desventajas de su método para reducir la aberración esférica?



32.10 Si usted ve un objeto en el fondo de una alberca, ésta se ve menos profunda de lo que en realidad es.

a) De lo que usted aprendió, calcule qué tan profunda parece ser una alberca si en realidad tiene cuatro pies de profundidad y usted ve directamente hacia abajo sobre ella. El índice de refracción del agua es 1.33.

b) ¿La alberca se vería más o menos profunda si la ve desde un ángulo distinto al vertical? Conteste esto cualitativamente, sin usar una ecuación.

32.11 ¿Por qué sucede la refracción? Es decir, ¿cuál es la razón física de que una onda se mueva en un medio nuevo con una velocidad diferente a la del medio original?

32.12 Muchos dispositivos de fibra óptica tienen ángulos mínimos de curvatura especificados. ¿Por qué?

32.13 Una estudiante de física está viendo un tambor de acero cuya parte superior tiene la forma aproximada de una superficie esférica cóncava. La superficie está suficientemente pulida, de modo que apenas puede hacer la reflexión de su dedo cuando lo coloca sobre el tambor. Cuando ella mueve su dedo lentamente hacia la superficie y luego lo aleja, usted le pregunta qué está haciendo. Ella contesta que está estimando el radio de curvatura del tambor. ¿Cómo puede hacer eso?

32.14 Conteste como verdadero o falso con una explicación para lo siguiente: *la longitud de onda de la luz láser He-Ne en agua es menor que su longitud de onda en el aire.* (El índice de refracción del agua es 1.33.)

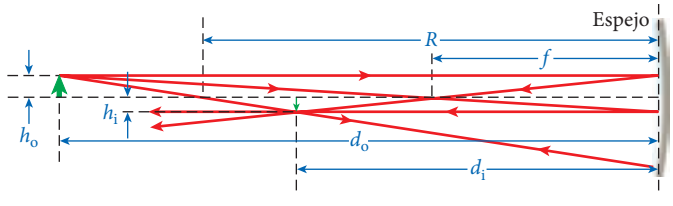
32.15 Entre los instrumentos que los astronautas del *Apolo* dejaron en la Luna, había reflectores usados para hacer rebotar haces de láser hacia la Tierra. Éstos hicieron posible medir la distancia de la Tierra a la Luna con precisión, sin precedente (incertidumbres de pocos milímetros de 384 000 km), para estudio de la mecánica celeste y de placas tectónicas en la Tierra. Los reflectores consistieron no en espejos ordinarios, sino configuraciones de *cubos en esquina*, cada uno con tres espejos planos en cuadro fijos, perpendiculares entre sí, como caras adyacentes de un cubo. ¿Por qué? Explique la función y ventajas del diseño.

32.16 Un prisma triangular de 45°-45°-90° se puede usar para invertir un haz de luz: la luz entra perpendicular a la hipotenusa del prisma, se refleja en cada cateto y emerge de nuevo perpendicular a la hipotenusa. Las superficies del prisma *no* están pulidas. Si el prisma está hecho de vidrio con índice de refracción $n_{\text{vidrio}} = 1.520$ y el prisma está rodeado de aire, el haz de luz se reflejará con una pérdida mínima de intensidad (hay pérdidas de reflexión cuando la luz entra y sale del prisma).

a) ¿Funcionará esto si el prisma está *bajo el agua*, que tiene un índice de refracción $n_{H_2O} = 1.333$?

b) Esta clase de prismas se utilizan, en lugar de espejos, para curvar la trayectoria óptica en binoculares de calidad. ¿Por qué?

32.17 La imagen de un objeto se obtiene mediante un espejo esférico convergente como muestra la figura 32.19, repetida a continuación. Suponga que se coloca una tela oscura entre el objeto y el espejo de tal modo que cubre todo sobre el eje del espejo. ¿Cómo se afectará la imagen?



32.18 Usted está bajo el agua en una alberca y mira hacia la superficie lisa del agua, observando el Sol en el cielo. ¿Está en realidad el Sol más alto en el cielo de lo que le parece mientras está bajo el agua o está más abajo?

32.19 Sosteniendo una cuchara frente a su cara, con el lado convexo hacia usted, estime la ubicación de la imagen y su amplificación.

32.20 Un *horno solar* utiliza un gran espejo parabólico (se han construido espejos de varios pisos de alto) para enfocar la luz del Sol con el fin de calentar un objetivo. Un gran horno solar puede fundir metales. ¿Es posible lograr temperaturas por arriba de 6 000 K (la temperatura de la fotosfera del Sol) en un horno solar? Cómo, o ¿por qué no?

PROBLEMAS

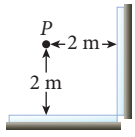
Una • y dos •• indican un nivel creciente de dificultad.

Sección 32.2

32.21 Una persona se sienta enfrente de un espejo plano a 1.0 m. ¿Cuál es la ubicación de la imagen?

32.22 Un periscopio consta de dos espejos planos y se usa para ver objetos cuando un obstáculo impide la visión directa. Suponga que Jorge el curioso está viendo por un periscopio al hombre de sombrero amarillo, cuyo sombrero está a $d_o = 3.00$ m del espejo superior, y suponga que los dos espejos planos están separados por una distancia $L = 0.400$ m. ¿Cuál es la distancia D de la imagen final del sombrero amarillo desde el espejo inferior?

32.23 Una persona está de pie en un punto P respecto a dos espejos planos orientados a 90°, como ilustra la figura. ¿Qué tan lejos aparecen entre sí las imágenes de la persona respecto al observador?

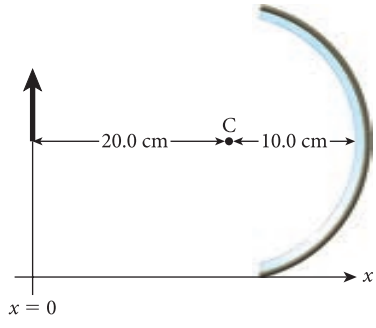


•**32.24** Incluso los mejores espejos absorben o transmiten parte de la luz que incide sobre ellos. Los espejos de la más alta calidad podrían reflejar 99.997% de la intensidad de la luz incidente. Suponga que una habitación cúbica, de 3.00 m de arista, se construyó con tales espejos para paredes, piso y techo. ¿Qué tan lento se oscurecería tal habitación? Estime el tiempo requerido para que el nivel de luz en dicha habitación disminuya a 1.00% de su valor inicial después de que se desconecta la única fuente de luz en la habitación.

Sección 32.3

32.25 El radio de curvatura de un espejo convexo es −25 cm. ¿Cuál es la longitud focal?

32.26 Un espejo esférico cóncavo simple se usa para crear una imagen de una fuente de 5.00 cm de altura que se localiza en una posición $x = 0$ cm, que está a 20.0 cm a la izquierda del punto C, el centro de curvatura del espejo, como muestra la figura. La magnitud del radio de curvatura para el espejo es 10.0 cm. Calcule la posición x_i donde se forma la imagen. Use el sistema de coordenadas dado en el dibujo. ¿Cuál es la altura h_i de la imagen? ¿La imagen está de pie o invertida (de pie = apuntando hacia arriba, invertida = apuntando hacia abajo)? ¿Es real o virtual?



32.27 Los espejos convexos se utilizan con frecuencia en los espejos retrovisores de los automóviles. Muchos de esos espejos muestran la advertencia "Los objetos en el espejo están más cerca de lo que aparentan". Suponga que un espejo convexo tiene un radio de curvatura de 14.0 m y que hay un automóvil que está 11.0 m detrás del espejo. Para un espejo plano, la distancia a la imagen sería 11.0 m y la amplificación sería 1. Determine la distancia a la imagen y la amplificación para este espejo.

32.28 Un objeto de 5.00 cm se coloca a 30.0 cm de un espejo convexo con una longitud focal de −10.0 cm. Determine el tamaño, la orientación y la posición de la imagen.

32.29 La amplificación de un espejo convexo es 0.60× para un objeto a 2.0 m del espejo. ¿Cuál es la longitud focal de este espejo?

•**32.30** Un objeto se localiza a una distancia de 100. cm de un espejo cóncavo de longitud focal 20. cm. Otro espejo cóncavo de longitud focal 5.00 cm se localiza a 20. cm frente al primer espejo cóncavo. Los lados reflejantes de los dos espejos están uno frente a otro. ¿Cuál es la ubicación de la imagen final formada por los dos espejos y la amplificación total por la combinación?

••**32.31** La forma de un espejo *elíptico* se describe mediante la curva $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, con el semieje mayor a y el semieje menor b. Los focos de esta elipse están en los puntos $(c, 0)$ y $(-c, 0)$, con $c = (a^2 - b^2)^{1/2}$. Demuestre que cualquier rayo de luz en el plano xy, que pasa por un foco, se refleja por el otro. Las galerías con eco hacen uso de este fenómeno con ondas sonoras.

Sección 32.4

32.32 ¿Cuál es la velocidad de la luz en vidrio tipo crown, cuyo índice de refracción es 1.52?

32.33 Una fibra óptica con un índice de refracción de 1.5 se usa para transportar luz de longitud de onda 400 nm. ¿Cuál es el ángulo crítico para que la luz se transporte por esta fibra sin pérdida? ¿Si la fibra está sumergida en agua? ¿En aceite?

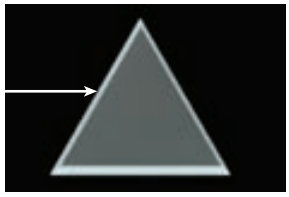
32.34 Un láser de helio-neón produce luz de longitud de onda $\lambda_{vac} = 632.8$ nm en el vacío. Si esta luz pasa hacia el agua con índice de refracción $n = 1.333$, ¿cuál será entonces su

a) Velocidad? *c*) Longitud de onda?
b) Frecuencia? *d*) Color?

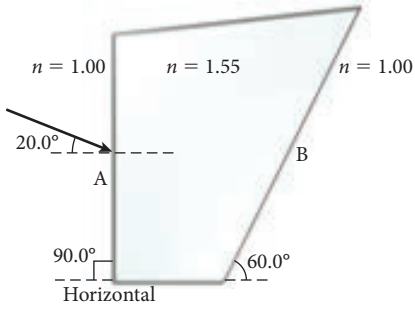
32.35 Un rayo de luz incide desde agua de índice de refracción 1.33 sobre una placa de vidrio cuyo índice de refracción es 1.73. ¿Cuál es el ángulo de incidencia para tener luz reflejada completamente polarizada?

•**32.36** Suponga que usted está de pie en el fondo de una alberca viendo hacia la superficie, que se supone está en calma. Mirando hacia arriba, usted verá una ventana circular hacia el "mundo exterior". Si sus ojos están aproximadamente 2.00 metros debajo de la superficie, ¿cuál es el diámetro de esta ventana circular?

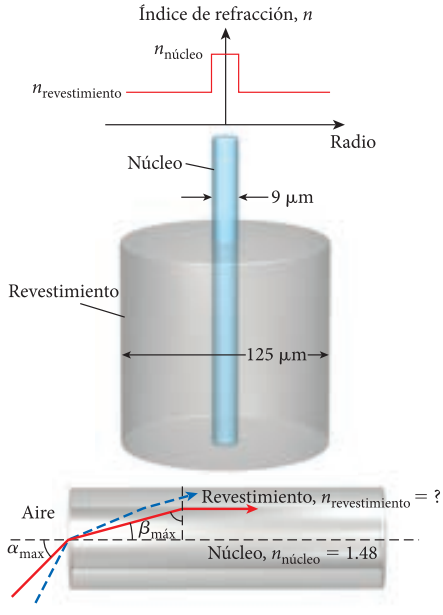
•**32.37** Un rayo de luz de una longitud de onda particular incide en un prisma triangular equilátero con un índice de refracción de 1.23. El rayo es paralelo a la base del prisma cuando se aproxima a éste. El rayo entra al prisma en el punto medio de uno de sus lados, como se muestra en la figura. ¿Cuál es la dirección del rayo cuando sale del prisma triangular?



•**32.38** Un haz láser colimado choca con el lado izquierdo (A) de un bloque de vidrio a un ángulo de 20.0° con respecto a la horizontal, como se muestra en la figura. El bloque tiene un índice de refracción de 1.55 y está rodeado de aire con un índice de 1.00. El lado izquierdo del bloque de vidrio es vertical (90.0° desde la horizontal), mientras que el lado derecho (B) está a 60.0° de la horizontal. Determine el ángulo θ_{BT} **con respecto a la horizontal** al que sale la luz de la superficie B.



•**32.39** En una fibra de índice de paso, el índice de refracción experimenta una discontinuidad (salto) en la superficie de contacto revestimiento-núcleo, como muestra la figura. La luz infrarroja con longitud de onda 1 550 nm se propaga por tal fibra de índice de paso por reflexión interna total en la interface núcleo-revestimiento. El índice de refracción para el núcleo a 1 550 nm es $n_{\text{núcleo}} = 1.48$. Si el ángulo máximo $\alpha_{\text{máx}}$ al que la luz se puede acoplar en la fibra de tal forma que ninguna luz salga hacia el revestimiento es $\alpha_{\text{máx}} = 14.033°$, calcule la diferencia en por ciento entre el índice de refracción del núcleo y el índice de refracción del revestimiento.



••**32.40** Refiérase a la figura 32.49 y demuestre que el arco del arcoíris primario representa el ángulo de 42° desde la dirección de la luz del Sol.

••**32.41** Use el principio de Fermat para deducir la ley de reflexión.

••**32.42** El principio de Fermat, del cual se puede deducir la óptica geométrica, establece que la luz viaja por una trayectoria que reduce el tiempo de recorrido entre los puntos. Considere un haz de luz que recorre una distancia horizontal D y una distancia vertical h, por dos placas planas grandes de material, con una superficie de contacto vertical entre los materiales. Un material tiene un espesor $D/2$ y un índice de refracción n_1, y el segundo material tiene un espesor $D/2$ y un índice de refracción n_2. Determine la ecuación que relaciona los índices de refracción y los ángulos desde la horizontal que la luz hace en la interfaz (θ_1 y θ_2) que reduce el tiempo para este intervalo.

Problemas adicionales

32.43 Suponga que su estatura es de 2.0 m y que está de pie frente a un espejo plano a 50 cm.

a) ¿Cuál es la distancia a la imagen?

b) ¿Cuál es la altura de la imagen?

c) ¿La imagen está invertida o de pie?

d) ¿La imagen es real o virtual?

32.44 Un rayo de luz de longitud de onda 700. nm que viaja en aire ($n_1 = 1.00$) incide en una frontera con un líquido ($n_2 = 1.63$).

a) ¿Cuál es la frecuencia del rayo refractado?

b) ¿Cuál es la velocidad del rayo refractado?

c) ¿Cuál es la longitud de onda del rayo refractado?

32.45 Usted tiene un espejo esférico con un radio de curvatura de +20.0 cm (de modo que la concavidad queda frente a usted). Usted está observando un objeto cuyo tamaño se desea duplicar en la imagen, para poder verla mejor. ¿Dónde debe colocar el objeto? ¿Dónde estará la imagen, y será real o virtual?

32.46 Usted está sumergido en una alberca. ¿Cuál es el ángulo máximo al que usted puede ver la luz que llega de arriba de la superficie de la alberca? Es decir, ¿cuál es el ángulo para la reflexión interna total desde el agua hacia el aire?

32.47 La luz choca con la superficie del agua a un ángulo de incidencia de 30.0° con respecto a la línea normal. ¿Cuál es el ángulo entre el rayo reflejado y el rayo refractado?

32.48 Un ornamento de árbol de Navidad metálico esférico tiene un diámetro de 8.00 cm. Si San Nicolás está a 1.56 m de la chimenea, ¿dónde verá su reflexión en el ornamento? ¿La imagen es real o virtual?

32.49 Uno de los factores que causan que un diamante destelle es su ángulo crítico relativamente pequeño. Compare el ángulo crítico del diamante en el aire con el del diamante en el agua.

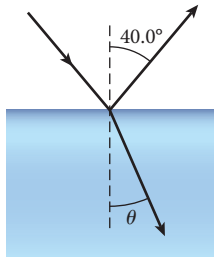
32.50 ¿Qué clases de imágenes, virtual o real, se forman mediante un espejo convergente cuando el objeto se coloca a una distancia del espejo que está

a) más allá del centro de curvatura del espejo,

b) entre el centro de curvatura y la mitad del centro de curvatura, y

c) más cerca de la mitad del centro de curvatura.

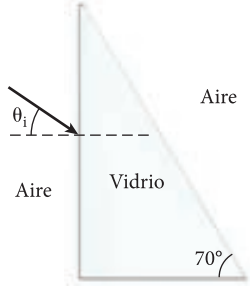
32.51 ¿A qué ángulo θ mostrado en el diagrama debe entrar un haz de luz al agua de tal forma que el haz reflejado forme un ángulo de 40.0° con respecto a la normal de la superficie del agua?



•**32.52** Un espejo cóncavo forma una imagen real el doble de grande que el objeto. El objeto se mueve entonces de tal forma que la nueva imagen real producida es tres veces el tamaño del objeto. Si la imagen se movió 75 cm desde su posición inicial, ¿qué tan lejos estaba el objeto movido y cuál es la longitud focal del espejo?

•**32.53** ¿Qué tan profundo aparece un punto a la mitad de una alberca de 3.00 m de profundidad para una persona de pie fuera de ella, a 2.00 metros horizontalmente del punto? Tome el índice de refracción de la alberca como 1.30 y el del aire como 1.00.

•**32.54** En la figura, ¿cuál es el ángulo incidente más pequeño θ_i para que el haz experimente reflexión interna total en la superficie del prisma que tiene un índice de refracción de 1.5?



32.55 La reflexión y la refracción, como todas las características clásicas de la luz y otras ondas electromagnéticas, están gobernadas por las ecuaciones de Maxwell. Las ecuaciones de Maxwell son *invariantes para la inversión del tiempo*, lo que significa que cualquier solución de las ecuaciones invertidas en el tiempo es también una solución.

a) Suponga que cierta configuración de la densidad de carga eléctrica ρ, la densidad de corriente $\vec{j}$, el campo eléctrico $\vec{E}$ y el campo magnético $\vec{B}$ es una solución de las ecuaciones de Maxwell. ¿Cuál es la solución de tiempo invertido correspondiente?

b) ¿Cómo funcionan entonces los espejos de una vía?

••**32.56** Refiérase al ejemplo 32.3 y use los números proporcionados ahí. Además, suponga que sus ojos están a una altura de 1.70 m sobre el agua.

a) Calcule el tiempo que toma a la luz viajar en la trayectoria desde el pez a sus ojos.

b) Calcule el tiempo que tardaría la luz en una trayectoria de línea recta desde el pez hasta sus ojos.

c) Calcule el tiempo que tardaría la luz en una trayectoria desde el pez verticalmente hacia arriba hasta la superficie del agua y luego directo a sus ojos.

d) Calcule el tiempo que tardaría la luz en la trayectoria de línea recta desde la ubicación aparente del pez hasta sus ojos.

e) ¿Qué puede decir acerca del principio de Fermat de los números anteriores?

32.57 Si usted desea construir un espejo líquido de longitud focal 2.50 m, ¿con qué velocidad angular tiene que rotar su líquido?

••**32.58** Una propuesta para un telescopio en el espacio es colocar un gran espejo líquido rotatorio en la Luna. Suponga que desea usar un espejo líquido de 100 m de diámetro y quiere que tenga una longitud focal de 347.5 m. La aceleración gravitacional de la Luna es 1.62 m/s^2.

a) ¿Qué velocidad angular tiene su espejo?

b) ¿Cuál es la velocidad lineal de un punto en el perímetro del espejo?

c) ¿Qué tan alto por arriba del centro está el perímetro del espejo?

33 Lentes e instrumentos ópticos

LO QUE APRENDEREMOS 1059

33.1 Lentes 1059
Lentes convergentes 1062
Lentes divergentes 1064
Ejemplo 33.1 Imagen formada por una lente delgada 1066
33.2 Lupa 1067
33.3 Sistemas de dos o más elementos ópticos 1068
Problema resuelto 33.1 Imagen producida por dos lentes 1069
33.4 El ojo humano 1071
Ejemplo 33.2 Lentes correctivos 1072
Lentes de contacto 1073
Intervención quirúrgica LASIK 1073
33.5 Cámara fotográfica 1074
Ejemplo 33.3 Longitud focal de una cámara sencilla de "apuntar y disparar" 1077
33.6 El microscopio 1077
Ejemplo 33.4 Amplificación de un microscopio 1078
33.7 Telescopio 1078
Telescopio refractor 1079
Ejemplo 33.5 Amplificación de un telescopio refractor 1080
Telescopio reflector 1080
Telescopio Espacial Hubble 1081
Telescopio Espacial James Webb 1082
Observatorio CHANDRA de rayos X 1082
33.8 Trampas de rayos láser 1083

LO QUE HEMOS APRENDIDO/ GUÍA DE ESTUDIO PARA EXAMEN 1084

Práctica para resolución de problemas 1085
Problema resuelto 33.2 Imagen de la Luna 1085
Problema resuelto 33.3 Imagen producida con una lente y un espejo 1086
Problema resuelto 33.4 Dos posiciones de una lente convergente 1088
Preguntas de opción múltiple 1089
Preguntas 1090
Problemas 1091

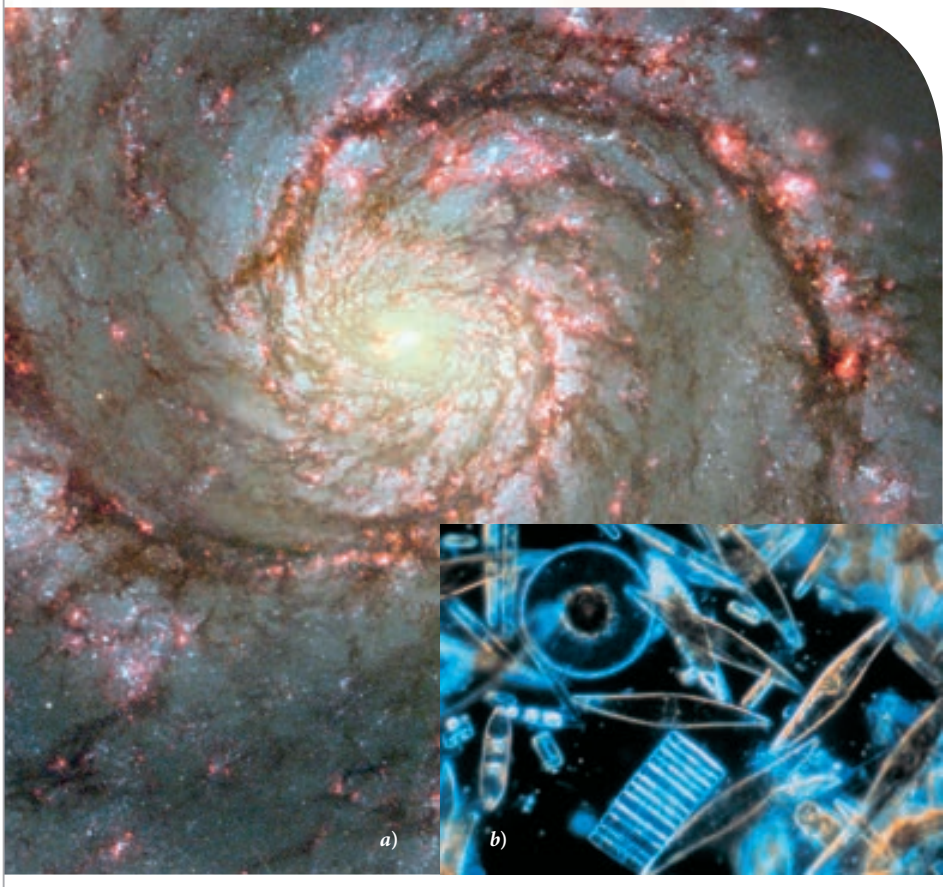


FIGURA 33.1 *a*) Galaxia del Remolino. *b*) Diatomáceas marinas que viven en la Antártida.

LO QUE APRENDEREMOS

- Las lentes enfocan la luz y producen imágenes de acuerdo con la ecuación de las lentes delgadas, la cual establece que el inverso de la distancia del objeto más el inverso de la distancia de la imagen es igual al inverso de la distancia focal de la lente.
- Los instrumentos ópticos son combinaciones de espejos y lentes.
- Una simple lente convergente se puede usar como una lupa.
- A menudo, se utilizan los sistemas de dos lentes en los instrumentos ópticos.
- Al colocar una lente convergente junto a una lente divergente se obtiene una lente teleobjetivo.
- Una cámara es un instrumento óptico que registra las imágenes reales producidas por una lente.
- El ojo humano es un instrumento óptico que sigue la ecuación de las lentes delgadas. Se utilizan varios tipos de lentes para corregir los defectos en la vista.
- Los microscopios son sistemas de lentes diseñados para amplificar la imagen de objetos cercanos, pero muy pequeños.
- Los telescopios son sistemas de lentes o espejos diseñados para amplificar la imagen de objetos distantes, pero muy grandes.

Las dos imágenes de la figura 33.1 son algunos de los objetos más grandes y más pequeños que podemos observar ópticamente con la luz visible. La imagen de la figura 33.1*a*) es la Galaxia del Remolino (M51), cuyo diámetro es de alrededor de 76 000 años luz ($7 \cdot 10^{20}$ m), y está a una distancia de la Tierra de casi 23 millones de años luz ($2 \cdot 10^{23}$ m). En la imagen de la figura 33.1*b*) se pueden ver unas diatomáceas que se encontraron viviendo entre cristales de hielo anual de mar de la Antártida. Las diatomáceas miden unos 20 micrones ($2 \cdot 10^{-5}$m) de longitud. Con el paso de los años, la capacidad para formar imágenes de estas clases de objetos ha cambiado por completo la manera en la que entendemos la biología, astronomía, geología, ingeniería; de hecho, todas las ramas de la ciencia y la técnica.

Todos los instrumentos que forman imágenes ópticas funcionan a partir de una combinación de lentes o de espejos. En un sentido, las ideas de este capítulo son simplemente aplicaciones de los principios estudiados en el capítulo 32. No obstante, entender cómo se forma una imagen es esencial para interpretar el tema de la imagen. En este capítulo se estudia una variedad de instrumentos que forman imágenes, sin olvidar el ojo humano. Los mismos principios de la óptica geométrica rigen la formación de imágenes cuando se usa otra clase de radiación; también trataremos algunos ejemplos.

33.1 Lentes

Cuando la luz se refracta al atravesar una superficie curva entre dos medios distintos, los rayos de luz siguen la ley de la refracción en todos los puntos de la superficie. El ángulo al cual los rayos luminosos atraviesan la superficie (con respecto a la normal local de la superficie) es diferente a lo largo de la curva, por lo que el ángulo refractado es diferente en distintos puntos a lo largo de la curva. Una frontera curvada esféricamente entre dos medios ópticamente transparentes forma una superficie esférica. Si la luz entra a un medio a través de una superficie esférica, y luego regresa al medio original a través de otra superficie esférica, el dispositivo que tiene las superficies esféricas se denomina **lente**. Los rayos de luz, que inicialmente son paralelos antes de chocar contra la lente, se refractan en diferentes direcciones, dependiendo de la parte de la lente en la que ellos choquen. Según la forma de la lente, los rayos de luz pueden ser enfocados o pueden divergir.

Si la superficie frontal de una lente cuyo índice de refracción n es parte de la superficie de una esfera de radio de curvatura R_1 y la superficie posterior de la lente es parte de la superficie de una esfera cuyo radio de curvatura es R_2, entonces podemos determinar la distancia focal f de una lente delgada usando la **fórmula del fabricante de lentes**,

$$\frac{1}{f} = (n-1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right). \qquad (33.1)$$

Deducimos esta ecuación, la cual se aplica a las lentes delgadas en el aire, en la deducción 33.1. Vemos que una *lente delgada* se define como una lente cuyo espesor es mucho más pequeño que las distancias a cualquier objeto e imágenes, por lo que el espesor es insignificante. Aprenderemos una convención de signos para los radios, porque pueden ser positivos o negativos.

DEDUCCIÓN 33.1 Fórmula del fabricante de lentes y la ecuación de las lentes delgadas

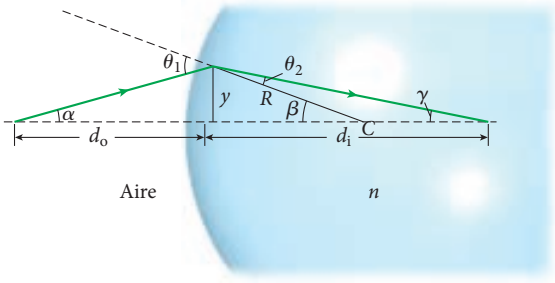


FIGURA 33.2 Luz que al viajar por el aire incide sobre una superficie esférica de un medio óptico cuyo índice de refracción es n.

Empezamos la deducción de la fórmula del fabricante de lentes suponiendo que tenemos luz que viaja por el aire y que incide sobre una superficie esférica de un medio óptico cuyo índice de refracción es n y cuyo radio de curvatura es R (figura 33.2). Trazamos el eje óptico como una recta perpendicular a la cara esférica del medio y que pasa por el centro C de la cara esférica. Suponemos un rayo de luz que se origina en un punto fuente a una distancia d_o desde la lente y con un ángulo α con respecto al eje óptico. Este rayo forma un ángulo θ_1 con respecto a una normal a la superficie del medio óptico. Según la ley de Snell de la refracción (ver capítulo 32) y haciendo $n_1 = 1$ y $n_2 = n$, obtenemos

$$\operatorname{sen}\theta_1 = n \operatorname{sen}\theta_2,$$

donde θ_2 es el ángulo que forma el rayo de luz refractado con respecto a la normal a la superficie. Si α es un ángulo pequeño, entonces los ángulos θ_1 y θ_2 serán pequeños y podemos escribir $\theta_1 = n\theta_2$.

Al observar la figura 33.2, podemos ver la relación entre los ángulos $\theta_1 = \alpha + \beta$ y $\beta = \theta_2 + \gamma$. Podemos volver a escribir estas ecuaciones como $n\theta_2 = \alpha + \beta$ y $\theta_2 = \beta - \gamma$. Sustituimos la segunda en la primera para eliminar θ_2, y llegamos a

$$\frac{\alpha+\beta}{n} = \beta - \gamma,$$

que podemos reacomodar para obtener

$$\alpha + n\gamma = \beta(n-1). \tag{i}$$

A partir de la figura 3.2 y haciendo la aproximación de ángulo pequeño, podemos escribir

$$\alpha \approx \tan\alpha \approx \frac{y}{d_o}, \quad \beta \approx \tan\beta \approx \frac{y}{R}, \quad \gamma \approx \tan\beta \approx \frac{y}{d_i}. \tag{ii}$$

Al sustituir las expresiones para α, β y γ de la ecuación (ii) en la ecuación (i) podemos escribir

$$\frac{y}{d_o} + \frac{ny}{d_i} = \frac{(n-1)y}{R}$$

o bien,

$$\frac{1}{d_o} + \frac{n}{d_i} = \frac{(n-1)}{R}. \tag{iii}$$

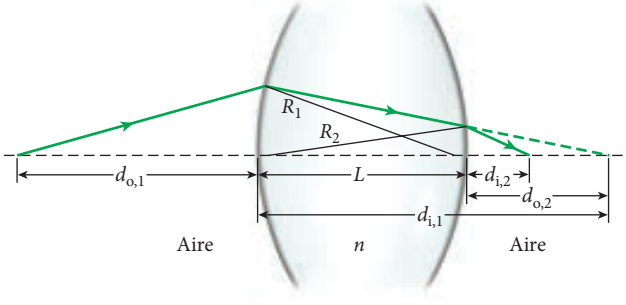


FIGURA 33.3 Lente de espesor L compuesta por un medio óptico cuyo índice de refracción es n en el aire. La cara izquierda de la lente tiene un radio R_1 y la cara derecha de la lente, R_2.

Ya dedujimos una expresión para la distancia de la imagen formada por una superficie. Puesto que d_i es independiente de α, toda la luz de la fuente va por el mismo punto y, por lo tanto, la luz se concentra. Ahora juntemos dos superficies para formar una lente (figura 33.3).

El haz luminoso que se origina desde la izquierda de la lente es el resultado (iii) para la distancia de la imagen y la distancia del objeto deducidas antes (con el subíndice agregado "1" para denotar la primera superficie):

$$\frac{1}{d_{o,1}} + \frac{n}{d_{i,1}} = \frac{(n-1)}{R_1}. \tag{iv}$$

En cuanto a la segunda superficie, el haz luminoso pasa desde el medio óptico cuyo índice de refracción es $n_1 = n$ al aire con índice de refracción $n_2 = 1$. La imagen de la fuente que es producida por la primera superficie de refracción actúa como el "objeto" para esta segunda superficie. Por lo tanto, podemos representar la relación entre distancia de la imagen y distancia del objeto para la segunda superficie como

$$\frac{n}{d_{o,2}} + \frac{1}{d_{i,2}} = \frac{(1-n)}{R_2}, \tag{v}$$

donde $d_{o,2}$ es la distancia del "objeto" desde la segunda superficie. A partir de la figura 33.3 podemos ver que

$$|d_{i,1}| = L + |d_{o,2}|.$$

Si suponemos una lente delgada, entonces L es mucho más pequeña que cualquier otra distancia del objeto o distancia de la imagen, y podemos considerar que es insignificante el espesor de la lente. Por lo tanto,

$$|d_{i,1}| \approx |d_{o,2}|.$$

Luego escogemos una convención de signos para las distancias. Si estamos de acuerdo con que la luz va de izquierda a derecha, las distancias del objeto son positivas para los objetos de la izquierda de la lente y negativas en el caso de los objetos de la derecha de la lente. Las distancias de la imagen son positivas para los objetos de la derecha de la lente y negativas para las imágenes de la izquierda de la lente. Igual que en el caso de los espejos, las distancias de la imagen son positivas en el caso de las imágenes formadas donde la luz va finalmente, es decir, las imágenes reales. Debido a que el objeto de la segunda superficie de la lente está a la derecha de la lente, tenemos que

$$-d_{o,2} = d_{i,1}. \tag{vi}$$

Al sustituir esta ecuación (vi) en la ecuación (v) de la segunda superficie, obtenemos

$$-\frac{n}{d_{i,1}} + \frac{1}{d_{i,2}} = \frac{(1-n)}{R_2}$$

o bien,

$$\frac{n}{d_{i,1}} = \frac{1}{d_{i,2}} - \frac{(1-n)}{R_2}. \tag{vii}$$

Ya podemos usar la ecuación (vii) como nuestra expresión (iv) de la primera superficie para eliminar $d_{i,1}$:

$$\frac{1}{d_{o,1}} + \frac{1}{d_{i,2}} - \frac{(1-n)}{R_2} = \frac{(n-1)}{R_1}.$$

La distancia del objeto de la lente como un todo es la misma que la distancia del objeto de la primera superficie de la lente, $d_o = d_{o,1}$. La distancia de la imagen de la lente como un todo es la misma que la distancia de la imagen de la segunda superficie de la lente, $d_i = d_{i,2}$. Entonces, tenemos

$$\frac{1}{d_o} + \frac{1}{d_i} = (n-1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right).$$

La distancia focal se define como la distancia de la imagen cuando el objeto está en el infinito, lo cual nos da

$$\frac{1}{\infty} + \frac{1}{f} = \frac{1}{f} = (n-1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right).$$

Este resultado es la fórmula del fabricante de lentes. Dicha fórmula muestra que una lente delgada tiene un foco, o punto focal, en ambos lados de la lente y que son equidistantes de la lente.

Podemos tomar esta expresión de la fórmula del fabricante de lentes junto con la expresión que relaciona las distancias de la imagen y la del objeto, y llegar a la **ecuación de las lentes delgadas**,

$$\frac{1}{d_o} + \frac{1}{d_i} = \frac{1}{f}. \tag{33.2}$$

En las deducciones anteriores se supone implícitamente que la luz chocaría con una superficie *convexa como la ve la luz*. Si la superficie es cóncava *como la ve la luz*, los resultados siguen siendo válidos siempre que se use un valor negativo para el radio de curvatura.

Cuando observamos la segunda superficie de la lente, vemos desde la perspectiva opuesta desde donde ve la luz, por lo que se debe tener cuidado para asignar los signos adecuados al radio de curvatura. Lo que llamaríamos una lente doblemente convexa tendría $R_1 > 0$ y $R_2 < 0$ porque la luz percibiría la segunda superficie como si fuera cóncava. Estas complicaciones se pueden evitar

33.1 Ejercicio en clase

Una lente con dos superficies convexas está hecha de zafiro; su índice de refracción es n = 1.77 y el radio de curvatura de sus superficies es R_1 = 27.0 cm y R_2 = −27.0 cm. ¿Cuál es la longitud focal de esta lente en el aire?

a) 17.5 cm
b) 20.0 cm
c) 27.0 cm
d) 54.0 cm
e) 60.0 cm

si se adopta la convención siguiente: si la longitud focal de una lente es positiva, se dice que la lente es convergente, y si la longitud focal es negativa, se dice que la lente es divergente.

Las lentes no tienen necesariamente la misma curvatura en las superficies de entrada y de salida. Pueden estar formadas de varias maneras, según se ilustra en la figura 33.4. Por ejemplo, la luz incidente desde la izquierda sobre la lente con menisco convergente que se muestra en la figura 33.4 primero encontraría una superficie convexa ($R_1 > 0$) y luego una segunda superficie convexa ($R_2 > 0$). En el caso de la lente con menisco convergente, $R_1 < R_2$, por lo tanto $1/R_1 > 1/R_2$, por lo que la longitud focal de la lente dada por la fórmula del fabricante de lentes (ecuación 33.1) es positiva, lo cual produce una lente convergente. En lo que respecta a la lente con menisco divergente, que se muestra en la figura 33.4, la primera superficie es convexa ($R_1 > 0$) y la segunda superficie también es convexa ($R_2 > 0$). No obstante, en el caso de la lente con menisco divergente, $R_1 > R_2$ y $1/R_1 < 1/R_2$, por lo que la longitud focal es negativa, produciendo una lente divergente. Por lo general, las lentes con menisco se usan en los anteojos correctivos.

Lentes convergentes

Una **lente convergente**, que tiene $f > 0$, está conformada de tal manera que los rayos incidentes paralelos al eje óptico se enfocan por refracción en la distancia focal f desde el centro de la lente. La figura 33.5 ilustra un haz luminoso incidente sobre una lente de vidrio convergente. En la superficie de la lente, el haz luminoso se refracta hacia la normal. Cuando el haz sale de la lente, es refractado alejándose de la normal. El haz resultante doblemente refractado pasa por el punto focal de la lente en el lado opuesto de la misma desde el rayo incidente.

Considere el caso de varios haces luminosos horizontales que inciden en una lente convergente. Estos rayos se enfocan en un punto a una distancia f del centro de la lente en el lado opuesto de la lente de los rayos incidentes. La figura 33.6 es una fotografía de una lente convergente con cinco líneas paralelas de luz incidente en la superficie desde la izquierda.

En la figura 33.6*a*), las líneas paralelas de luz se enfocan en un punto de la derecha de la lente. En la figura 33.6*b*), las líneas rojas han sido sobrepuestas para representar los haces luminosos. Los rayos entran a la lente, se refractan en la primera superficie, atraviesan la lente en una línea recta y se refractan cuando salen de la lente. En la figura 33.6*c*) está trazada una línea de puntos negros en el centro de la lente. En este panel, los haces se trazan usando la aproximación de las lentes delgadas, de acuerdo con lo cual los rayos incidentes se refractan justo una vez que están en el centro de la lente. En lugar de seguir la trayectoria detallada de los haces luminosos en el interior de la lente delgada, los rayos incidentes se trazan hasta el eje central y luego al punto focal. Las lentes de la vida real [figura 33.6*a*)] es una lente gruesa, y el desplazamiento ocurre entre la refracción en las superficies de entrada y salida. En este libro sólo consideramos lentes delgadas y trataremos la lente como una línea en la que tiene lugar la refracción.

Las lentes convergentes se usan para formar imágenes. En la figura 33.7 se puede ver la construcción geométrica de la formación de una imagen usando una lente convergente. Un objeto, representado por la flecha verde, está sobre el eje óptico. Este objeto tiene una altura h_o y se ubica a una distancia d_o a partir del centro de la lente, tal que $d_o > f$. Con frecuencia son útiles cuatro rayos particulares para construir imágenes:

1. Un rayo desde el fondo del objeto se traza para que pase recto a través de la lente a lo largo del eje óptico. Este haz va por el fondo de la imagen, y, por lo regular, no se ve.
2. Luego se traza un segundo haz desde la parte superior del objeto, paralelo al eje óptico. Este rayo va por el punto focal del otro lado de la lente.

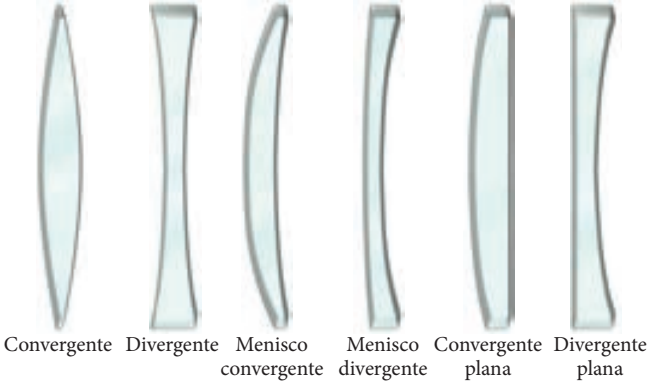


FIGURA 33.4 Tipos diferentes de lentes creados por distintos radios de curvatura sobre las superficies de entrada y salida.

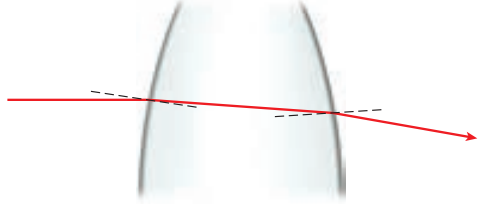


FIGURA 33.5 Refracción de un haz luminoso que pasa por una lente convergente.

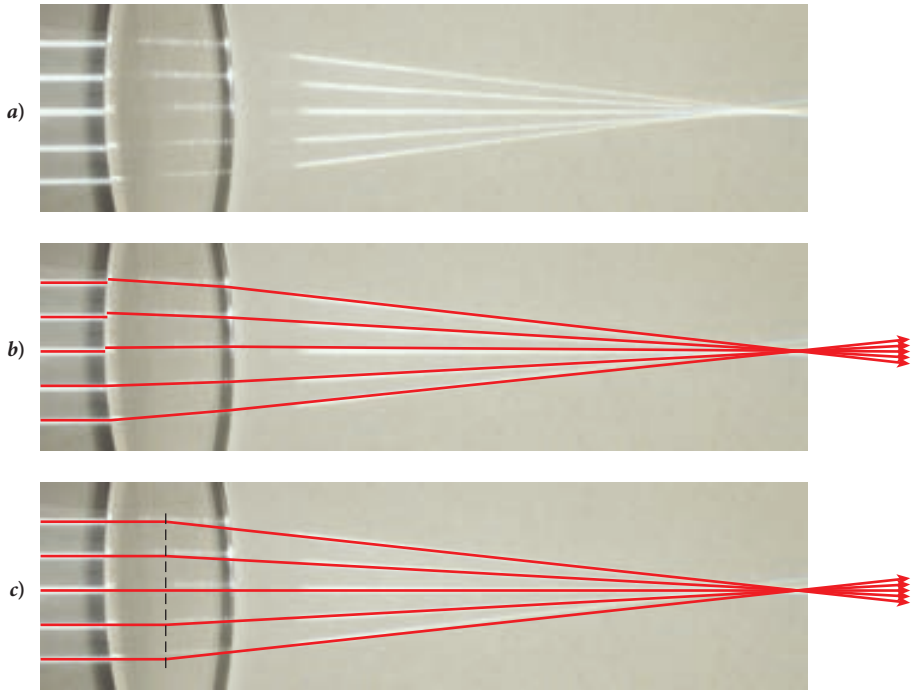


FIGURA 33.6 *a*) Haces luminosos paralelos que inciden en una lente convergente. *b*) Las fechas están sobrepuestas sobre los haces luminosos. *c*) El centro óptico de la lente se indica mediante una línea discontinua.

3. Un tercer haz se traza desde la parte superior del objeto y pasa por el centro de la lente; este rayo no tiene refracción neta en la aproximación de las lentes delgadas. (Va por las superficies que son aproximadamente paralelas, como en el problema resuelto 32.2.)
4. Un cuarto rayo se dibuja desde la parte superior del objeto y pasa por el punto focal del mismo lado de la lente, el cual es entonces paralelo al eje óptico después de la refracción.

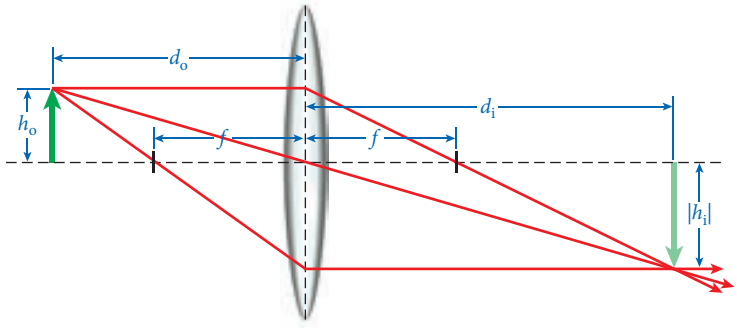


FIGURA 33.7 Imagen real producida por una lente convergente.

Los tres haces inician en la parte superior de la intersección del objeto, que se localiza en la parte superior de la imagen formada. Se puede usar cualquier par de rayos de estos tres que salen de la parte superior del objeto para localizar la parte superior de la imagen.

En este caso, con $d_o > f$, se forma una imagen real, invertida y alargada con altura $h_i < 0$ a una distancia $d_i > 0$ a partir del centro de la lente.

Consideremos ahora la imagen que forma un objeto con altura h_o colocada a una distancia d_o desde el centro de la lente tal que $d_o < f$ (figura 33.8). Una vez más, cuatro haces particulares se usan para construir la imagen:

1. El primer rayo nuevamente se traza desde el fondo del objeto a lo largo del eje óptico y por lo regular no se muestra.
2. Se traza un segundo haz desde la parte superior del objeto, paralelo al eje óptico y se refracta por el punto focal del lado opuesto de la lente.
3. Se traza un tercer rayo desde la parte superior del objeto recto por el centro de la lente.
4. Se dibuja un cuarto haz desde la parte superior del objeto tal que parece haberse originado desde el punto focal del mismo lado de la lente y luego se refracta paralelo al eje óptico.

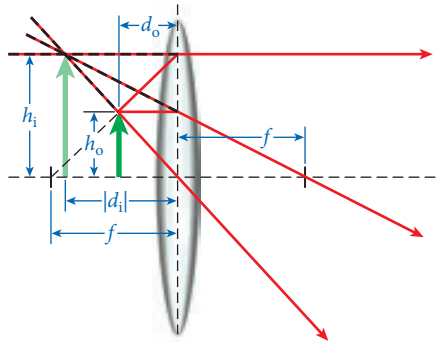


FIGURA 33.8 Imagen virtual producida por una lente convergente.

Usted puede ver que estos tres rayos son divergentes. Se forma una imagen virtual en el mismo lado de la lente que el objeto mediante la extrapolación de los tres rayos hasta que se corten. Las líneas discontinuas rojas y negras representan los rayos extrapolados. En este caso, con $d_o < f$, se forma una imagen virtual, vertical y alargada con $h_i > 0$ y $d_i < 0$.

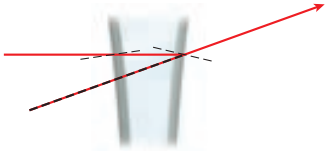


FIGURA 33.9 Haz luminoso horizontal refractado por una lente divergente.

Lentes divergentes

Una **lente divergente**, la cual tiene $f < 0$, está hecha de tal manera que los rayos que chocan contra la lente divergen por refracción. La extrapolación de los haces divergentes se intersecarían en la distancia focal, a partir del centro de la lente, en el mismo lado de la lente que el objeto. La figura 33.9 muestra un haz luminoso paralelo al eje óptico que incide en una lente divergente de vidrio. En la primera superficie de la lente, los haces luminosos se refractan hacia la normal. Cuando los rayos salen de la lente, se refractan alejándose de la normal. La recta extrapolada se muestra como una línea discontinua en rojo y negro, y señala el punto focal del mismo lado de la lente que el rayo incidente.

Considere el caso de varios haces luminosos horizontales que inciden en una lente divergente. Después de atravesar la lente, los haces divergen de tal manera que sus extrapolaciones se juntan en un punto a una distancia f desde el centro de la lente, en el mismo lado de la lente que los rayos incidentes. La figura 33.10 es una fotografía de una lente divergente con cinco rectas paralelas de luz desde la izquierda que incide en la superficie de una lente divergente.

La figura 33.10 ilustra rectas en color rojo, que representan los rayos luminosos. Éstos divergen después de atravesar la lente. Las rectas en rojo y negro muestran la extrapolación de los haces divergentes. Los haces extrapolados se juntan a una distancia igual a una longitud focal, alejándose del centro de la lente. En la figura 33.10*c*), los rayos divergentes se dibujan usando la aproximación de las lentes delgadas, de acuerdo con lo cual los rayos incidentes se refractan sólo una vez en el centro de la lente. Dichos rayos se dibujan de tal manera que sus extrapolaciones se intersecan en el punto focal.

Las lentes divergentes también se pueden usar para formar imágenes. La figura 33.11 ilustra la construcción geométrica de la formación de una imagen usando una lente divergente. Considere un objeto representado por una flecha verde más alta situada en el eje óptico. Este objeto tiene una altura h_o y se localiza a una distancia d_o a partir del centro de la lente, de tal manera que $d_o > |f|$.

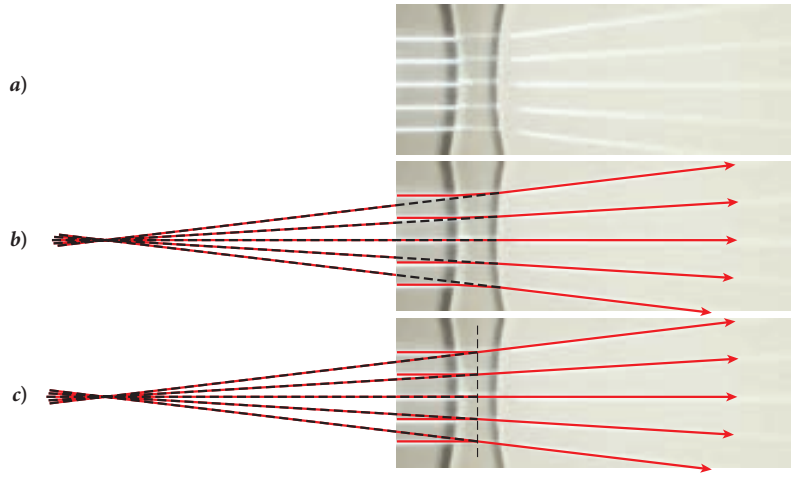


FIGURA 33.10 *a*) Haces luminosos paralelos que inciden en una lente divergente. *b*) Las flechas están sobrepuestas en los haces luminosos. *c*) El centro óptico de la lente está señalado mediante una línea discontinua vertical.

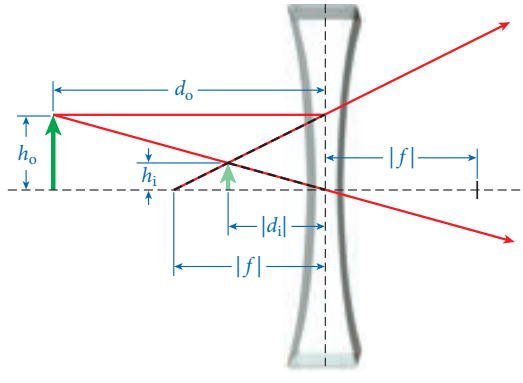


FIGURA 33.11 Imagen que produce una lente divergente de un objeto que está colocado a una distancia de la lente mayor que la longitud focal de la lente.

Son útiles tres rayos para construir la imagen:

1. Empiece con un rayo a lo largo del eje óptico de la lente, el cual pasa recto por la lente y define la parte inferior de la imagen. Este rayo casi nunca se muestra.
2. Luego dibuje un segundo rayo desde la parte superior del objeto, paralelo al eje óptico. Este rayo se refracta de tal manera que la extrapolación del haz divergente pasa por el punto focal del lado izquierdo de la lente.
3. Un tercer haz dibujado desde la parte superior del objeto y que pasa por el centro de la lente no se refracta en la aproximación de las lentes delgadas. Este rayo se extrapola una vez más a lo largo de su trayectoria original.

Los dos haces extrapolados se cortan en la parte superior de la imagen producida. La imagen formada es virtual, vertical y de tamaño reducido.

Todas las imágenes que hemos formado mediante el trazo de rayos se pueden representar algebraicamente mediante la ecuación de las lentes delgadas, deducida antes:

$$\frac{1}{d_o}+\frac{1}{d_i}=\frac{1}{f}.$$

Observe que es la misma relación entre longitud focal, distancia de la imagen y distancia del objeto que determinamos para los espejos.

Ahora introducimos y revisamos la convención de signos. Ya definimos que la longitud focal de una lente convergente es positiva y que la longitud focal de una lente divergente es negativa. Tanto la distancia del objeto d_o como la altura h_o son positivas en el caso de una sola lente. (En los sistemas compuestos de varias lentes, podemos tener distancias y alturas del objeto que son negativas.) Si la imagen está en el lado opuesto de la lente con respecto al objeto, la distancia de la imagen d_i es positiva y la imagen es real. Si la imagen está en el mismo lado de la lente que el objeto, la distancia de la imagen es negativa y la imagen es virtual. La fórmula de la amplificación lineal de las lentes es la misma que para los espejos,

$$m=\frac{h_i}{h_o}=-\frac{d_i}{d_o}.$$

Si la imagen es vertical, entonces h_i y la amplificación lineal m son positivas, pero si la imagen está invertida, tanto h_i como m son negativas.

En el caso de una lente convergente, determinamos que para $d_o > f$ siempre tendremos una imagen real e invertida formada en el lado opuesto de la lente. Si $d_o = f$, entonces $1/d_i = 0$ y la imagen se ubica en el infinito. En el caso de una lente convergente y $d_o < f$, siempre tendremos una imagen virtual, vertical y agrandada en el mismo lado de la lente que el objeto. Los resultados de todos los valores de d_o se resumen en la tabla 33.1.

Las lentes divergentes siempre producen una imagen que es virtual, vertical y de dimensiones reducidas.

Los fabricantes de instrumentos a menudo mencionan la potencia de una lente, en lugar de su longitud focal. La potencia de una lente D, en **dioptría**, una magnitud adimensional, se obtiene con la ecuación

$$D=\frac{1\text{ m}}{f} \tag{33.3}$$

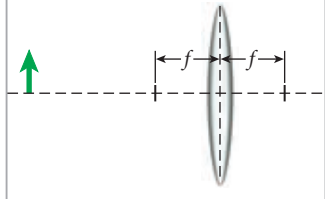
donde f es la longitud focal de la lente expresada en metros. En general, las lentes de los anteojos están caracterizadas en términos de dioptrías.

Tabla 33.1 Características de la imagen en lentes convergentes

Caso	Tipo de imagen	Orientación de la imagen	Amplificación
$f < d_o < 2f$	Real	Invertida	Agrandada
$d_o = 2f$	Real	Invertida	Mismo tamaño
$d_o > 2f$	Real	Invertida	Reducida
$d_o = f$			En el infinito
$d_o < f$	Virtual	Vertical	Agrandada

33.2 Ejercicio en clase

Un objeto está situado a 15.0 cm a la izquierda de una lente convergente cuya longitud focal es f = 5.00 cm, como muestra la figura. ¿Dónde se forma la imagen?



a) a 1.25 cm a la derecha de la lente

b) a 2.75 cm a la izquierda de la lente

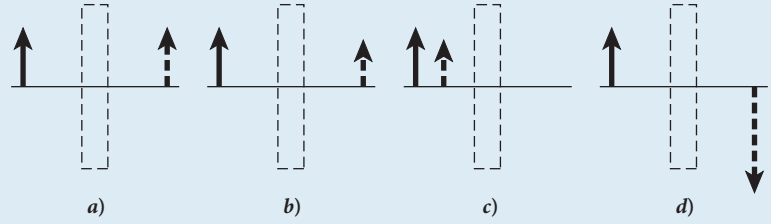
c) a 3.75 cm a la derecha de la lente

d) a 5.00 cm a la izquierda de la lente

e) a 7.50 cm a la derecha de la lente

33.1 Oportunidad de autoevaluación

En los cuatro diagramas mostrados en la figura siguiente, la flecha completa representa el objeto y la flecha discontinua representa la imagen. El rectángulo discontinuo representa un solo elemento óptico. Entre los posibles elementos ópticos están un espejo plano, un espejo convergente, un espejo divergente, una lente divergente y una lente convergente. Haga corresponder cada uno de los diagramas con su elemento óptico.



EJEMPLO 33.1 Imagen formada por una lente delgada

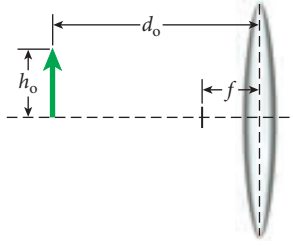


FIGURA 33.12 Objeto colocado enfrente de una lente convergente delgada.

Colocamos un objeto de altura $h_o = 5.00$ cm a una distancia $d_o = 16.0$ cm de una lente convergente delgada cuya longitud focal es $f = 4.00$ cm (figura 33.12).

PROBLEMA

¿Cuál es la distancia de la imagen? ¿Cuál es la amplificación lineal de la imagen? ¿Cuál es la altura de la imagen?

SOLUCIÓN

La distancia de la imagen se puede determinar usando la ecuación de las lentes delgadas (ecuación 33.2),

$$\frac{1}{d_o}+\frac{1}{d_i}=\frac{1}{f}.$$

Al despejar la distancia de la imagen, obtenemos

$$d_i=\frac{d_o f}{d_o-f}=\frac{(16.0\text{ cm})(4.00\text{ cm})}{16.0\text{ cm}-4.00\text{ cm}}=5.33\text{ cm}.$$

La distancia de la imagen es positiva. Por lo tanto, la imagen es real y aparece en el lado opuesto de la lente con respecto al objeto. La fórmula de la amplificación de las lentes está dada por

$$m=\frac{h_i}{h_o}=-\frac{d_i}{d_o}.$$

Por consiguiente, podemos calcular la amplificación usando la distancia del objeto dada y la distancia de la imagen calculada:

$$m=-\frac{d_i}{d_o}=-\frac{5.33\text{ cm}}{16.0\text{ cm}}=-0.333.$$

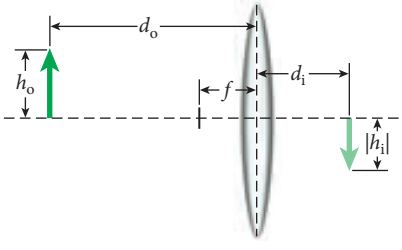


FIGURA 33.13 Imagen formada por una lente convergente delgada.

La amplificación es negativa, de modo que la imagen está invertida. La magnitud de la amplificación es menor que uno, por lo que la imagen es reducida. Ahora ya podemos determinar la altura de la imagen:

$$h_i = mh_o = (-0.333)(5.00\text{ cm}) = -1.67\text{ cm}.$$

La altura de la imagen es negativa, por lo que la imagen está invertida, como era de esperarse por la amplificación negativa.

La imagen resultante se ilustra en la figura 33.13.

33.2 Lupa

Una manera de hacer que un objeto se vea más grande es acercándolo. Sin embargo, si el objeto se acerca demasiado a los ojos, se verá borroso. La posición más cercana al ojo en la que un objeto se puede colocar y seguir estando en foco se llama "punto cercano", que trataremos en forma minuciosa a continuación. Otra forma de hacer que un objeto se vea más grande es utilizando una **lupa** (figura 33.14).

FIGURA 33.14 Lupa de vidrio común.

Una lupa es sólo una lente convergente que produce una imagen virtual y agrandada de un objeto. Esta imagen se produce a una distancia que está en el punto cercano del ojo o más allá de dicho punto, de modo que un observador es capaz de ver claramente la imagen. La **amplificación angular** m_θ de la lupa se define como la relación del ángulo aparente subtendido por la imagen al ángulo subtendido por el objeto cuando está situado en el punto cercano.

En la figura 33.15 se ven las características geométricas de una lupa. Suponga un objeto cuya altura es h_o. Sin una lupa, el mayor ángulo θ_1 que usted puede alcanzar y ver todavía el objeto con claridad se forma cuando usted coloca el objeto en el punto cercano d_{cercano} [figura 33.15*a*)]. Usted puede ver una imagen amplificada del objeto si lo sitúa justo dentro de la longitud focal de una lente convergente [figura 33.15*b*)]. Entonces usted ve por la lente la imagen, la cual se localiza deliberadamente por lo menos tan lejos como el punto cercano. Por lo tanto, usted es capaz de ver la imagen agrandada, vertical y virtual. El ángulo que subtiende la imagen es θ_2.

La amplificación angular de la lupa se define como

$$m_\theta = \frac{\theta_2}{\theta_1}. \tag{33.4}$$

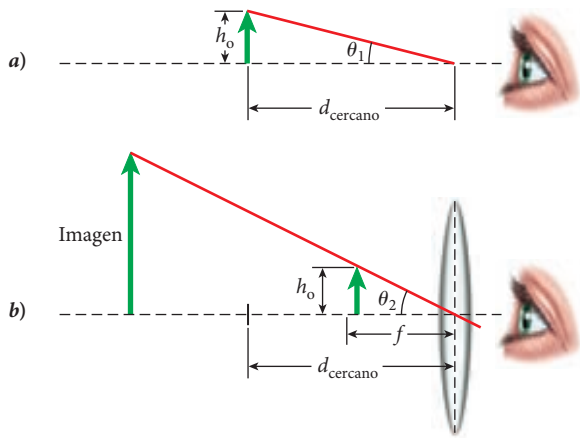


FIGURA 33.15 Propiedades geométricas de una lupa: *a*) al ver un objeto en el punto cercano; *b*) al ver una imagen amplificada del objeto.

La figura 33.15*a*) muestra que el ángulo subtendido por el objeto sin la lupa está dado por

$$\tan\theta_1 = \frac{h_o}{d_{\text{cercano}}}.$$

En la figura 33.15*b*) se ilustra que el ángulo que subtiende la imagen del objeto se obtiene mediante

$$\tan\theta_2 = \frac{h_o}{f},$$

donde f es la longitud focal de la lente. Suponemos que el objeto está situado en la longitud focal de la lente, de modo que la imagen está en menos infinito. (Recuerde que en la sección 33.1 se estableció que un haz que pasa por el centro de una lente no se desvía. Éste es el rayo que forma la hipotenusa del triángulo rectángulo que se utiliza en esta ecuación.) Luego formamos una aproximación de ángulo pequeño para obtener $\tan\theta_1 \approx \theta_1$ y $\tan\theta_2 \approx \theta_2$. Entonces, la amplificación angular de una lupa se puede escribir como

$$m_\theta = \frac{\theta_2}{\theta_1} \approx \frac{h_o/f}{h_o/d_{\text{cercano}}} = \frac{d_{\text{cercano}}}{f}.$$

Si suponemos un valor representativo para el punto cercano de 25 cm (el cual es el valor para una persona de edad media; para una de 20 años el punto cercano podría ser más cercano a 10 cm), la amplificación angular se representa con

$$m_\theta \approx \frac{d_{\text{cercano}}}{f} \approx \frac{0.25\text{ m}}{f}. \tag{33.5}$$

Otra posibilidad es que la imagen final se puede situar en el punto cercano. Si se aplica la ecuación de la lente con $d_i = -d_{\text{cercano}}$ para determinar d_o y luego se usa $\theta_2 = h_o/d_o$, obtenemos $m_\theta = (0.25\text{ m}/f) + 1$, si $d_{\text{cercano}} = 0.25$ m. De aquí en adelante, a menos que se establezca otra cosa, supondremos que la imagen está en el infinito y usaremos la ecuación 33.5.

33.3 Ejercicio en clase

¿Cuál es la longitud focal (en metros) de una lupa que da una amplificación angular de 6?

a) 0.010 m
b) 0.021 m
c) 0.035 m
d) 0.042 m
e) 0.055 m

33.3 Sistemas de dos o más elementos ópticos

Ya vimos que una lente o un espejo puede producir una imagen de un objeto. Esta imagen, a su vez, puede ser utilizada como el objeto por una segunda lente o espejo. El tema recurrente de todos los sistemas de dos lentes es que la imagen de la primera lente se vuelve el objeto de la segunda lente. Iniciemos el estudio de los sistemas formados por varias lentes considerando un sistema de dos lentes que consta de dos lentes convergentes colocadas como muestra la figura 33.16.

Un objeto cuya altura es $h_{o,1}$ se coloca a una distancia $d_{o,1}$ a partir de la primera lente, la cual tiene una longitud focal f_1. Una imagen se produce a una distancia $d_{i,1}$ dada por la ecuación de las lentes delgadas (33.2),

$$\frac{1}{d_{o,1}}+\frac{1}{d_{i,1}}=\frac{1}{f_1}.$$

Dado el valor de $d_{o,1}$ que hemos escogido, esta imagen es real e invertida. Esta imagen luego se vuelve el objeto de la segunda lente. La altura de este objeto es la misma que la altura de la imagen producida por la primera lente. El objeto se localiza a una distancia $d_{o,2}$ a partir de la segunda lente, cuya longitud focal es f_2. Se forma una imagen a una distancia $d_{i,2}$ que se rige una vez más por la ecuación de las lentes delgadas.

$$\frac{1}{d_{o,2}}+\frac{1}{d_{i,2}}=\frac{1}{f_2}.$$

Por lo que se refiere a los parámetros del sistema esbozado en la figura 33.16, la imagen final de la segunda lente es real pero invertida, en comparación con el segundo objeto (primera imagen). La amplificación lineal de la primera lente está dada por $m_1 = h_{i,1}/h_{o,1}$ y la amplificación lineal de la segunda lente se obtiene mediante $m_2 = h_{i,2}/h_{o,2}$. El producto de las amplificaciones lineales de las dos lentes da la amplificación lineal del sistema de dos lentes:

$$m_{12}=m_1m_2=\left(\frac{h_{i,1}}{h_{o,1}}\right)\left(\frac{h_{i,2}}{h_{o,2}}\right)=\frac{h_{i,2}}{h_{o,1}}. \tag{33.6}$$

En la ecuación 33.6 podemos ver que la imagen producida por este sistema de dos lentes es real y vertical. Por consiguiente, este sistema de lentes se usa para producir imágenes reales que no están invertidas. Esta clase de formación de imágenes no se puede efectuar con una sola lente convergente.

Ahora considérese un sistema de dos lentes con una lente convergente y una divergente (figura 33.17). Un objeto con altura $h_{o,1}$ se coloca a una distancia $d_{o,1}$ a partir de la primera lente, cuya longitud focal es f_1. Una vez más se produce una imagen a una distancia $d_{i,1}$ dada por la ecuación de las lentes delgadas (ecuación 33.2). Esta imagen particular es real, invertida y agrandada. Justo como en el caso anterior, esta imagen generada por la primera lente se vuelve entonces el

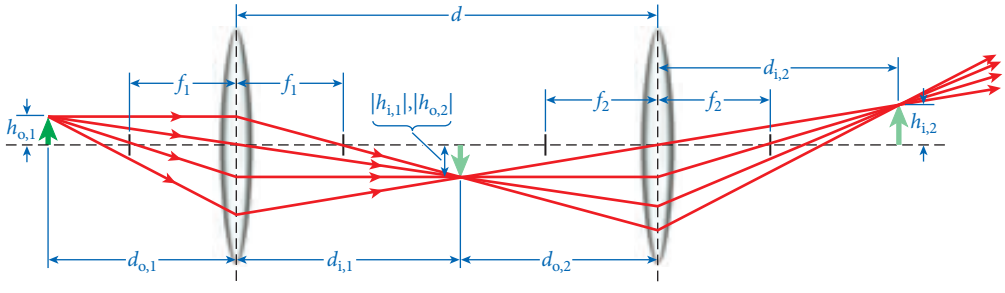


FIGURA 33.16 Sistema de dos lentes convergentes.

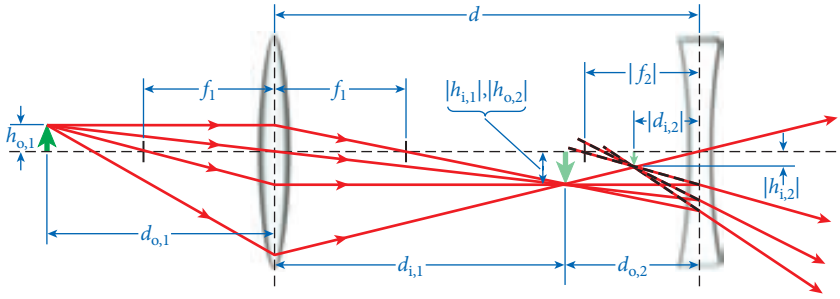


FIGURA 33.17 Sistema de dos lentes que consta de una lente convergente y una lente divergente.

objeto para la segunda lente. Esta segunda imagen es virtual, vertical, es decir, su parte superior queda arriba en comparación con la primera imagen, pero es de menores dimensiones. La amplificación lineal combinada de las dos lentes es de nuevo el producto de las amplificaciones lineales de las lentes individuales, y también se obtiene con $m_{12} = m_1 m_2 = h_{i,2}/h_{o,1}$, al igual que en el caso estudiado antes. La figura 33.17 muestra que la imagen final producida por este sistema de dos lentes es virtual e invertida con respecto al objeto original.

Ahora tomemos este mismo sistema de dos lentes de una lente convergente seguida por una lente divergente, y pongamos las dos lentes juntas. Coloquemos las dos lentes separadas a una distancia x (figura 33.18). Este sistema de dos lentes actúa como una lente convergente. Al variar la distancia x podemos variar la longitud focal efectiva del sistema de lente convergente. Este acomodo se llama **lente teleobjetivo**.

La longitud focal efectiva de este sistema de dos lentes se define como la distancia desde el centro de la primera lente hasta el lugar de la imagen final de un objeto originalmente situado en el infinito. La primera lente tiene una longitud focal f_1, lo cual significa que los objetos situados a una distancia muy grande generarán una imagen a una distancia de imagen de $d_{i,1} = f_1$. Podemos entender este resultado usando la ecuación de las lentes delgadas,

$$\frac{1}{d_{o,1}} + \frac{1}{d_{i,1}} = \frac{1}{\infty} + \frac{1}{d_{i,1}} = 0 + \frac{1}{d_{i,1}} = \frac{1}{d_{i,1}} = \frac{1}{f_1}.$$

Si se supone que $f_1 > x$, la imagen producida por la primera lente es generada en el lado derecho de la segunda lente. Esto quiere decir que la distancia del objeto para la segunda lente debe ser negativa en este caso, porque hemos definido que las distancias del objeto son positivas a la izquierda de una lente. La distancia del objeto en el caso de la segunda lente es

$$d_{o,2} = -\left(d_{i,1} - x\right) = x - d_{i,1} = x - f_1.$$

Si usamos esta imagen como el objeto de la segunda lente, tenemos

$$\frac{1}{d_{o,2}} + \frac{1}{d_{i,2}} = \frac{1}{x - f_1} + \frac{1}{d_{i,2}} = \frac{1}{f_2}.$$

Esta ecuación se puede resolver y llegar a conocer $d_{i,2}$ con lo que se determina la longitud focal efectiva del sistema de lentes teleobjetivo,

$$f_{ef} = x + d_{i,2} = x + \frac{f_2\left(x - f_1\right)}{x - \left(f_2 + f_1\right)}. \tag{33.7}$$

La ecuación 33.7 y la figura 33.18 muestran que, cuando las lentes están juntas, la longitud focal efectiva es mayor; cuando las lentes están alejadas, la longitud focal efectiva es menor. Por lo tanto, al ajustar la distancia entre la lente convergente y la lente divergente, podemos producir una lente efectiva con una longitud focal variable, como se hace con las lentes teleobjetivo en las cámaras. Observe que en las cámaras este resultado es útil sólo para $f_{ef} > x$ porque los objetos en el infinito tienen que producir una imagen real en el registrador o grabador de imágenes digital (en el caso de una cámara digital) o sobre la película, si se trata de las viejas cámaras comunes.

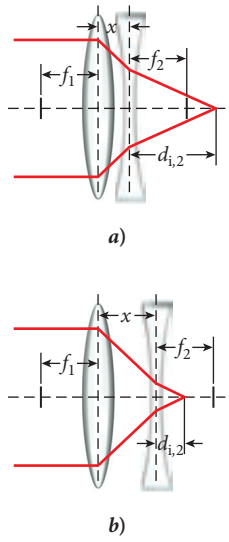


FIGURA 33.18 Un sistema de teleobjetivos que consta de una lente convergente seguida de una lente divergente. Se muestran dos distancias diferentes entre las dos lentes. *a*) Longitud focal mayor. *b*) Longitud focal corta.

PROBLEMA RESUELTO 33.1 Imagen producida por dos lentes

Considere un sistema de dos lentes. La primera lente es convergente con una longitud focal f_1 = 21.4 cm. La segunda lente es divergente con una longitud focal f_2 = −34.4 cm. El centro de la segunda lente está a d = 80.0 cm a la derecha del centro de la primera lente. Se coloca un objeto a una distancia $d_{o,1}$ = 63.5 cm a la izquierda de la primera lente. Estas lentes producen una imagen del objeto.

PROBLEMA

¿Dónde produce la imagen la segunda lente situada con respecto al centro de la segunda lente? ¿Cuáles son las características de la imagen? ¿Cuál es la amplificación lineal de la imagen final con respecto al objeto original?

SOLUCIÓN

PIENSE

La ecuación de las lentes delgadas, la cual llamamos aquí simplemente ecuación de las lentes, nos dice dónde la primera lente produce una imagen del objeto situado a la izquierda de la

(*continúa*)

33.2 Oportunidad de autoevaluación

Mediante la ecuación 33.7 demuestre que la longitud focal efectiva f_{ef} de dos lentes delgadas juntas con longitudes focales f_1 y f_2 se determina con

$$\frac{1}{f_{ef}} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2}.$$

33.3 Oportunidad de autoevaluación

Una cámara de 35 mm tiene una lente de longitud focal de 50 mm. Suponga que usted reemplaza la lente normal por una lente teleobjetivo cuya longitud focal puede variar de 50 mm a 200 mm, y utiliza la cámara para fotografiar un objeto que está a gran distancia. En comparación con una lente de 50 mm, ¿qué amplificación de la imagen se lograría usando la longitud focal de 200 mm?

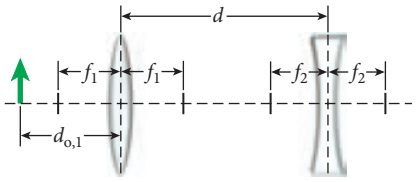


FIGURA 33.19 Sistema de dos lentes con longitudes focales y distancia del objeto marcadas.

(*continuación*)

misma primera lente. La imagen producida por la primera lente se vuelve el objeto de la segunda lente. De nuevo usamos la ecuación de las lentes para localizar la imagen producida por la segunda lente.

ESBOCE

La figura 33.19 ilustra el dibujo del objeto, la primera y la segunda lentes.

INVESTIGUE

Al aplicar la ecuación de las lentes a la primera lente, obtenemos

$$\frac{1}{d_{o,1}}+\frac{1}{d_{i,1}}=\frac{1}{f_1},$$

donde $d_{i,1}$ es la distancia de la imagen de la primera lente. Al determinar la distancia de la imagen de la primera lente, obtenemos

$$d_{i,1}=\frac{d_{o,1}f_1}{d_{o,1}-f_1}. \tag{i}$$

La ecuación de las lentes aplicada a la segunda lente da

$$\frac{1}{d_{o,2}}+\frac{1}{d_{i,2}}=\frac{1}{f_2},$$

donde $d_{o,2}$ es la distancia del objeto para la segunda lente y $d_{i,2}$ es la distancia de la imagen para la segunda lente. Podemos determinar la distancia de la imagen de la segunda lente

$$d_{i,2}=\frac{d_{o,2}f_2}{d_{o,2}-f_2}. \tag{ii}$$

El objeto de la segunda lente es la imagen que produce la primera lente. Por consiguiente, podemos relacionar la distancia del objeto de la segunda lente con la distancia de la imagen de la primera lente y la distancia entre las dos lentes:

$$d_{o,2}=d-d_{i,1}. \tag{iii}$$

SIMPLIFIQUE

Sustituimos la ecuación (iii) en la ecuación (ii) para llegar

$$d_{i,2}=\frac{(d-d_{i,1})f_2}{(d-d_{i,1})-f_2}. \tag{iv}$$

Luego podemos sustituir la ecuación (i) en la ecuación (iv) para obtener la expresión de la distancia de la imagen de la segunda lente en términos de las cantidades dadas en el problema:

$$d_{i,2}=\frac{\left(d-\left(\dfrac{d_{o,1}f_1}{d_{o,1}-f_1}\right)\right)f_2}{\left(d-\left(\dfrac{d_{o,1}f_1}{d_{o,1}-f_1}\right)\right)-f_2}.$$

CALCULE

Al sustituir los valores numéricos, tenemos

$$d_{i,2}=\frac{\left((80.0\text{ cm})-\left(\dfrac{(63.5\text{ cm})(21.4\text{ cm})}{(63.5\text{ cm})-(21.4\text{ cm})}\right)\right)(-34.4\text{ cm})}{\left((80.0\text{ cm})-\left(\dfrac{(63.5\text{ cm})(21.4\text{ cm})}{(63.5\text{ cm})-(21.4\text{ cm})}\right)\right)-(-34.4\text{ cm})}=-19.9902\text{ cm}.$$

REDONDEE

Mostramos nuestro resultado para la ubicación de la imagen con tres cifras:

$$d_{i,2}=-20.0\text{ cm}.$$

VUELVA A REVISAR

Para corroborar este resultado y calcular las cantidades necesarias para responder a las partes restantes del problema, determinamos la posición de la imagen que produce la primera lente:

$$d_{i,1} = \frac{d_{o,1} f_1}{d_{o,1} - f_1} = \left(\frac{(63.5 \text{ cm})(21.4 \text{ cm})}{(63.5 \text{ cm}) - (21.4 \text{ cm})} \right) = 32.3 \text{ cm}.$$

La distancia de la imagen de la primera lente es positiva, de modo que la imagen es real y se forma a 32.3 cm a la derecha de la primera lente. La distancia del objeto a la segunda lente es, entonces,

$$d_{o,2} = d - d_{i,1} = 47.7 \text{ cm}.$$

La imagen formada por la primera lente está a 47.7 cm a la izquierda de la segunda lente, lo cual parece razonable. Luego podemos calcular la distancia de la imagen para la segunda lente:

$$d_{i,2} = \frac{d_{o,2} f_2}{d_{o,2} - f_2} = \left(\frac{(47.7 \text{ cm})(-34.4 \text{ cm})}{(47.7 \text{ cm}) - (-34.4 \text{ cm})} \right) = -20.0 \text{ cm},$$

lo cual concuerda con nuestro resultado. Por consiguiente, nuestra respuesta sobre la distancia de la imagen desde el centro de la lente 2 parece razonable.

La imagen final es virtual porque está en el mismo lado de la lente 2 como el objeto de la lente 2, lo cual ya sabemos porque la distancia de la imagen para la lente 2 es negativa. La amplificación lineal de la imagen lineal comparada con el objeto original es

$$m = m_1 m_2 = \left(-\frac{d_{i,1}}{d_{o,1}} \right) \left(-\frac{d_{i,2}}{d_{o,2}} \right) = \left(-\frac{32.3 \text{ cm}}{63.5 \text{ cm}} \right) \left(-\frac{-20.0 \text{ cm}}{47.7 \text{ cm}} \right) = -0.213.$$

La imagen es reducida porque $|m| < 1$. La imagen es invertida porque $m < 0$.

33.4 El ojo humano

Se puede considerar que el ojo humano es un instrumento óptico. El ojo es casi esférico en cuanto a forma, mide alrededor de 2.5 cm de diámetro (figura 33.20). La parte frontal del ojo tiene mayor curvatura que el resto del ojo y está cubierto por la *córnea*. Atrás de la córnea hay un líquido denominado *humor acuoso*. Atrás del líquido está la *lente*, compuesta de una gelatina fibrosa. La lente se mantiene en su lugar por medio de unos ligamentos que la unen con los *músculos ciliares*, lo cual posibilita que la lente cambie de forma y, por consiguiente, cambie de foco. Atrás de la lente está el *humor vítreo*.

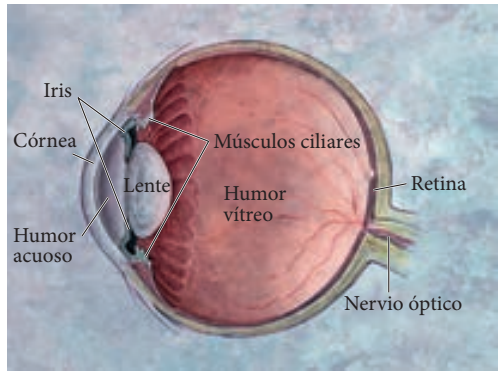


FIGURA 33.20 Esquema del ojo humano en el que se pueden ver sus principales características.

El índice de refracción de los dos líquidos del ojo es de 1.34, cercano al del agua (1.33). El índice de refracción del material para fabricar lentes es de casi 1.40. Por lo tanto, la mayor parte de la refracción de los haces luminosos ocurre en el límite aire/córnea, que tiene la relación más grande de índices de refracción.

La refracción en la córnea y en las superficies de la lente produce una imagen real, pero invertida en la *retina* del ojo. Las células de la retina se denominan bastones y conos, y convierten la imagen de luz a impulsos eléctricos. Luego, dichos impulsos son enviados al cerebro a través del *nervio óptico*. El cerebro interpreta la imagen invertida de modo que vemos la figura en posición correcta. Enfrente de la lente está el *iris*, la parte colorida del ojo, la cual se abre o se cierra en parte para regular la cantidad de luz que incide en la retina.

Para que un objeto pueda verse claramente, la imagen se tiene que formar en el lugar de la retina [figura 33.21*a*)]. La forma del ojo no se puede modificar; así que al cambiar la forma de la lente se controla la distancia de la imagen. En el caso de un objeto distante, al relajar la lente se enfoca la imagen en la retina. En el caso de objetos cercanos, el músculo ciliar aumenta la curvatura de la lente para enfocar la imagen en la retina. Este proceso se llama **acomodación**.

Los extremos en los cuales la visión clara es posible se llaman punto lejano y punto cercano. El **punto lejano** de un ojo normal es el infinito. El **punto cercano** de un ojo normal depende de la capa-

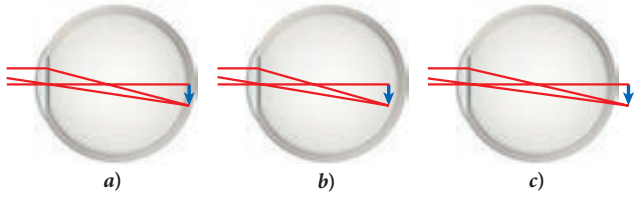


FIGURA 33.21 *a*) Imagen producida por la lente de una persona con vista normal; *b*) imagen producida por la lente de una persona miope; *c*) imagen producida por la lente de una persona con hipermetropía.

cidad del ojo para enfocar. Esta capacidad cambia con la edad. Un joven puede enfocar objetos hasta a 7 cm. A medida que una persona crece, el punto cercano se incrementa. Por lo general, una persona de 50 años de edad tiene un punto cercano de 40 cm.

Varios defectos comunes de la visión son resultado de las distancias focales incorrectas. En el caso de **miopía** (corto de vista), la imagen se produce enfrente de la retina [figura 33.21*b*)]. Por lo que toca a la **hiperopía o hipermetropía** (vista larga o ver sólo de lejos), la imagen se produciría atrás de la retina si se pudiera [figura 33.21*c*)], pero la retina absorbe la luz antes de que se pueda formar la imagen. Es posible corregir la miopía con lentes divergentes, y la hiperopía se corrige con lentes convergentes.

EJEMPLO 33.2 Lentes correctivos

PROBLEMA

Con frecuencia, los optometristas mencionan la potencia de una lente en lugar de su longitud focal. La potencia de una lente D, en dioptrías, está dada por la ecuación 33.3, $D = 1\ \text{m}/f$, donde f es la longitud focal de la lente expresada en metros. ¿Cuál es la potencia de la lente que corrige la miopía de una persona cuyo punto lejano incorrecto es de 15 cm?

SOLUCIÓN

La lente que corrija tiene que formar una imagen virtual y vertical de un objeto situado en el infinito, con una imagen localizada a 15 cm enfrente de la lente (figura 33.22).

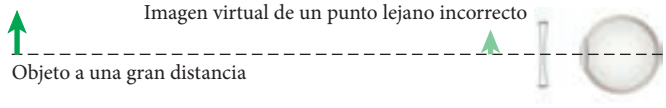


FIGURA 33.22 Características geométricas de una lente que corrige la miopía.

Por lo tanto, la distancia del objeto d_o es ∞ y la distancia de la imagen d_i es -15 cm. A partir de la ecuación de las lentes

$$\frac{1}{d_o} + \frac{1}{d_i} = \frac{1}{f}$$

tenemos

$$\frac{1}{\infty} + \frac{1}{-0.15\ \text{m}} = \frac{1}{f} = -6.7\ \text{dioptrías}.$$

La lente requerida es una lente divergente con una potencia de -6.7 dioptrías y una longitud focal de -0.15 m.

PROBLEMA

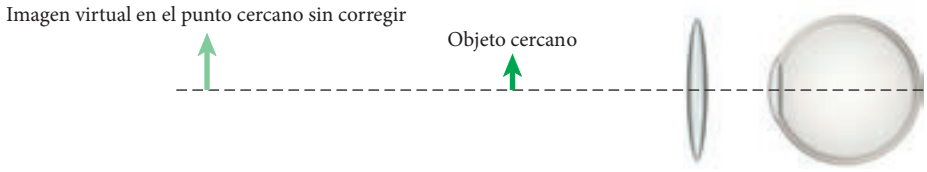
Una persona que padece hipermetropía cuyo punto cercano sin corregir es 75 cm desea leer un periódico a una distancia de 25 cm. ¿Cuál es la potencia de la lente correctora necesaria para que esta persona pueda leer el periódico?

SOLUCIÓN

La lente correctora tiene que producir una imagen virtual y vertical del periódico en el punto cercano sin corregir la visión de la persona (figura 33.23).

El objeto y la imagen están en el mismo lado de la lente, de modo que la distancia de la imagen es negativa. Por consiguiente, la distancia del objeto es 25 cm y la distancia de la imagen es de -75 cm:

$$\frac{1}{0.25\ \text{m}} + \frac{1}{-0.75\ \text{m}} = \frac{1}{f} = +2.7\ \text{dioptrías}.$$



La lente que se requiere es una lente convergente con una potencia de +2.7 dioptrías, que corresponde a una longitud focal de +0.37 m.

FIGURA 33.23 Características geométricas de una lente que corrige la hipermetropía.

33.4 Ejercicio en clase

Una persona que sufre hipermetropía es capaz de leer un periódico a una distancia de d = 125 cm, pero no más cerca. ¿Qué potencia deben tener las lentes que esta persona debe usar para leer si desea sostener el periódico a una distancia de 25 cm de sus ojos?

a) −3.5 dioptrías

b) −1.25 dioptrías

c) +0.50 dioptrías

d) +2.5 dioptrías

e) +3.2 dioptrías

Lentes de contacto

Las lentes correctoras descritas en el ejemplo 33.2 consisten en lentes convergentes y divergentes. Las lentes convergentes son convexas en ambas superficies y las divergentes son cóncavas en ambas superficies. Estas lentes corrigen bien la visión, pero pueden ser inconvenientes.

Un tipo más adecuado de lente correctora es la **lente de contacto**. Una lente de contacto se coloca directamente en la córnea del ojo, con lo cual la persona se libra de llevar anteojos. Esta lente es convexa en la superficie de entrada y cóncava en la superficie de salida, de manera similar a las lentes de menisco tratadas en la sección 33.1 (figura 33.4). La superficie de salida cóncava se coloca directamente en el ojo. Es posible producir lentes de contacto que sean convergentes o divergentes (figura 33.24).

Podemos aplicar la fórmula del fabricante de lentes (ecuación 33.1),

$$\frac{1}{f} = (n-1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$$

para calcular la longitud focal de una lente de contacto, donde R_1 es el radio de curvatura de la superficie de entrada y R_2 es el radio de curvatura de la superficie de salida. Puesto que la luz que entra a la lente de contacto ve una superficie convexa, $R_1 > 0$. La luz que sale de la lente de contacto ve también una superficie convexa, así que $R_2 > 0$ también.

La lente de contacto que ilustra la figura 33.24*a*) tiene $R_1 > R_2$ y, por lo tanto, la longitud focal es negativa, lo que corresponde a una lente divergente. La lente de contacto de la figura 33.24*b*) tiene $R_1 < R_2$, lo cual da una longitud focal positiva y lente convergente.

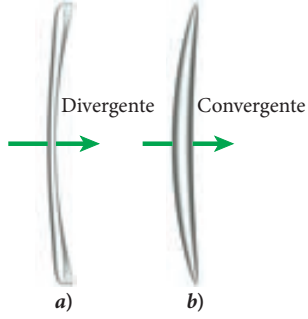


FIGURA 33.24 *a*) Lente de contacto divergente. *b*) Lente de contacto convergente. Las flechas verdes representan la dirección de la luz que viaja a través de las lentes.

33.5 Ejercicio en clase

Suponga que el radio de curvatura de la córnea de una persona miope es 8.0 mm. La superficie de salida de una lente de contacto se diseñaría para tener un radio de curvatura de 8.0 mm para que se ajuste a la superficie de la córnea. ¿Qué radio de curvatura debe tener en la superficie de entrada una lente de contacto construida con un material con n = 1.5 para producir una lente con una potencia de −1.5 dioptrías?

a) 7.6 mm

b) 7.8 mm

c) 8.0 mm

d) 8.2 mm

e) 8.4 mm

Intervención quirúrgica LASIK

Se ha perfeccionado una opción para no usar las lentes correctoras; en ésta se modifica la córnea para producir la respuesta óptica deseada del ojo humano. Uno de estos métodos, la **intervención quirúrgica** de queratomileusis con ayuda de láser (*laser-assisted in situ keratomileusis*, LASIK) recurre al láser para cambiar la curvatura de la córnea.

La figura 33.25 ilustra un ejemplo de la intervención quirúrgica LASIK para corregir la miopía. En la parte *a*) se muestra un ojo humano miope, con la imagen que produce enfrente de la retina. La longitud focal efectiva de este ojo es demasiado corta. El procedimiento LASIK inicia recortando una tira de la superficie de la córnea, que se dobla [figura 33.25*b*)], con lo que queda expuesta la

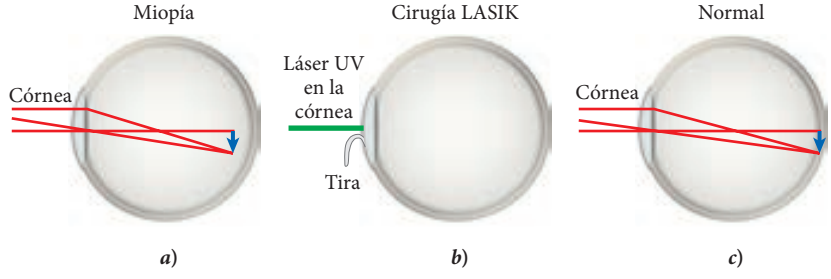


FIGURA 33.25 *a*) Ojo humano miope, donde la imagen se forma enfrente de la retina. *b*) En la cirugía LASIK se corta una tira de la superficie de la córnea y se retira parte del estroma con la ayuda de un láser UV. Luego la tira se devuelve a su sitio y la córnea sana. *c*) La visión normal se produce cuando se enfoca la imagen en la retina.

parte interna de la córnea, llamada estroma. Se aplica un rayo láser (longitud de onda de 193 nm) ultravioleta (UV) para retirar material del estroma con pulsos láser de duración muy corta del orden de 10 ns y energía del orden de 1 mJ, lo que produce una superficie más plana. Esta superficie aplanada corresponde a un radio de curvatura más grande de la córnea. (El láser funciona con luz ultravioleta, que rompe la estructura molecular de la córnea sin calentar la superficie.) La tira se desdobla luego y la córnea sana. La fórmula del fabricante de lentes (ecuación 33.1) nos señala que, al incrementar el radio R_1 del frente, aumenta la longitud focal efectiva f del ojo. Por consiguiente, la intervención quirúrgica posibilita que la imagen se produzca en la retina [figura 33.25*c*)].

La técnica descrita aquí es específica para pacientes con miopía. El procedimiento LASIK no se aplica a los pacientes con hipermetropía o a los que sufren astigmatismo (curvatura irregular de la córnea). Para tratar a los pacientes con hipermetropía, el láser tiene que eliminar material del estroma alrededor del centro de la córnea para aumentar la curvatura de la superficie.

33.5 Cámara fotográfica

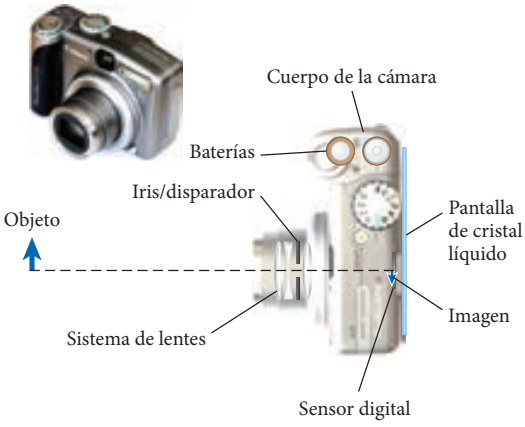


FIGURA 33.26 Una cámara digital característica produce una imagen sobre un sensor digital.

La **cámara** es un instrumento óptico que consiste en un cuerpo que impide el paso de luz y que contiene un sistema de lentes que enfoca la imagen de un objeto sobre un medio de registro, como una película fotográfica o un sensor digital. A menudo, una cámara con un sensor digital se denomina cámara digital, la cual es nuestro principal interés en la presente sección. La figura 33.26 presenta un esquema de una cámara digital.

Por lo regular nos referimos al sistema de lentes de la cámara como la lente de la misma, sin tomar en cuenta los múltiples elementos complejos que se requieren para producir una imagen de alta calidad. La lente de la cámara produce una imagen real e invertida de un objeto en el sensor digital. La lente de la cámara está diseñada para que se pueda desplazar y ofrecer una imagen nítida y enfocada sobre el registrador digital de imágenes, lo cual depende de la distancia de la imagen y la longitud focal de la lente. Muchas cámaras digitales están equipadas con lentes que se pueden ajustar para tener diferentes longitudes focales. Una cámara digital pequeña, como la de la figura 33.26, con una lente teleobjetivo 6×, puede variar la longitud focal de la lente desde 5.8 mm hasta 34.8 mm.

Las lentes tienen un área de abertura. Se puede usar un iris o diafragma para limitar esta área. Esta área se llama sólo **abertura** de la lente. La abertura es importante porque la cantidad de luz que la cámara puede reunir es proporcional a la abertura. Puesto que ésta es por lo regular un círculo, podemos caracterizar casi siempre la abertura mediante su diámetro.

Con frecuencia, a las dimensiones de la lente se les denomina **número *f*** de la lente. El número f de una lente se define como la longitud focal de la lente dividida entre el diámetro de la abertura de la lente:

$$\text{número } f = \frac{\text{longitud focal}}{\text{diámetro de la abertura}} = \frac{f}{D}. \tag{33.8}$$

La lente con un número f pequeño se llama lente rápida, y la lente con número f grande se denomina lente lenta. Un número f pequeño representa una abertura grande, lo cual significa que la lente tiene la aptitud de colectar una gran cantidad de luz. Un número f grande representa una abertura pequeña, lo cual significa que la lente no puede colectar una gran cantidad de luz. Por convención, el número f de una lente suele escribirse como f/#, donde # es la relación de la longitud focal de la lente dividida entre el diámetro de abertura. Por ejemplo, la cámara digital pequeña de la figura 33.26 tiene una lente con número f que va de f/2.8 a f/4.8.

La abertura de la cámara se puede controlar mediante un diafragma variable, lo cual limita la cantidad de luz incidente sobre el sensor digital. Según la práctica establecida, el número f de una lente se fijó al ajustar un anillo sobre la lente. El anillo tenía varios "dientes" colocados en saltos o pasos para ayudar a que el fotógrafo seleccionara la cantidad necesaria de luz. Estos **saltos o *stops* de *f*** se colocaron a intervalos que cambiaban la cantidad de luz aceptada por un factor de dos. Como la abertura depende del cuadrado del diámetro, los obturadores de f se espaciaron según un factor de $\sqrt{2}$. Algunos de los obturadores de f son f/2, f/2.8, f/4, f/5.6, f/8, f/11 y f/16. Las cámaras digitales modernas fijan de manera automática el número f requerido.

El sensor digital de imágenes requiere una cantidad específica de luz para formar una buena imagen. El diafragma funciona como un obturador para controlar la cantidad de tiempo en la que

el sensor ve y la cantidad de luz total que incide sobre el mismo. Al contrario de la cámara con película, el obturador de una cámara digital por lo regular está abierto para que el fotógrafo vea exactamente lo que la cámara ve en la pantalla de cristal líquido en la parte posterior de la cámara. La cantidad total de energía luminosa es el producto del tiempo en el que la luz incide en el sensor digital por la abertura por la intensidad de la luz. Asimismo, un sensor digital se puede programar para aceptar luz sólo sobre un intervalo dado sin el uso de un obturador mecánico. Un intervalo característico para una exposición varía de 1/60 de segundo a 1/1 000 de segundo. Los tiempos de exposición cortos permiten que la cámara capture una imagen en movimiento sin que se vea borrosa. Para evitar que una luz indeseable interfiera con una imagen grabada, el obturador se cierra mientras la imagen se está enviando o transmitiendo.

Además de controlar la cantidad de luz incidente sobre el sensor digital, el diafragma también puede afectar la imagen al cambiar la **profundidad de campo** de la misma, el cual es el valor de la distancia del objeto donde la imagen está en foco. Si el diafragma es pequeño (número *f* grande), los ángulos de la luz incidente se restringen y más valores de distancias del objeto producirán una imagen todavía enfocada en el sensor digital. Si el diafragma está muy abierto (número *f* pequeño), se admiten varios ángulos en la cámara, lo cual significa que sólo unos valores de distancias del objeto producirán una imagen enfocada en el sensor digital. Por lo tanto, el fotógrafo puede aumentar la profundidad de campo de una imagen disminuyendo la abertura y aumentando el tiempo de exposición, o bien, disminuir la profundidad de campo ampliando la abertura y disminuyendo el tiempo de exposición.

La película fotográfica estándar que se utilizó durante muchos años fue de 36 mm de ancho y 24 mm de altura, y por lo general se llamaba película de 35 mm. La mayor parte de los sensores digitales son mucho más pequeños que la película de 35 mm. Una cámara digital pequeña representativa contiene un sensor digital que mide 5.76 mm de ancho y 4.29 mm de alto. Este tamaño pequeño afecta la amplificación de la imagen que produce la cámara y depende de la longitud focal de la lente. El **ángulo de visión** de la cámara, α, es más importante que la amplificación para la fotografía. Se puede definir el ángulo de visión en función del ángulo horizontal, el ángulo vertical o el ángulo diagonal, donde lo horizontal y vertical se refiere a la forma geométrica de la película o sensor digital. Consideraremos aquí el ángulo horizontal de visión, pero las otras dos versiones se pueden calcular fácilmente a partir de nuestros resultados para el ángulo horizontal de visión.

Podemos deducir una expresión para el ángulo horizontal de visión, α, a partir de nuestra definición de amplificación lineal, m,

$$m = \frac{h_i}{h_o} = -\frac{d_i}{d_o}$$

donde h_i es la altura de la imagen, h_o es la altura del objeto, d_i es la distancia de la imagen y d_o es la distancia del objeto. Puesto que a los fotógrafos no les interesa si la imagen es vertical o está invertida, nosotros usamos el valor absoluto de las alturas y las distancias en este cálculo. En la figura 33.27 mostramos un esquema con un objeto, su imagen correspondiente sobre la película o en un sensor digital, y la lente.

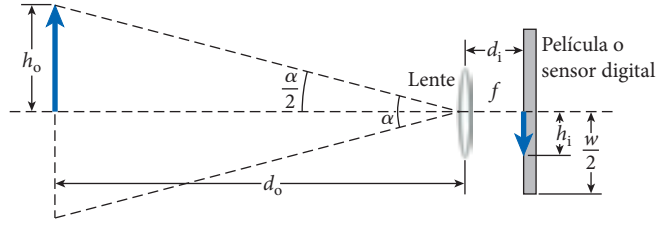


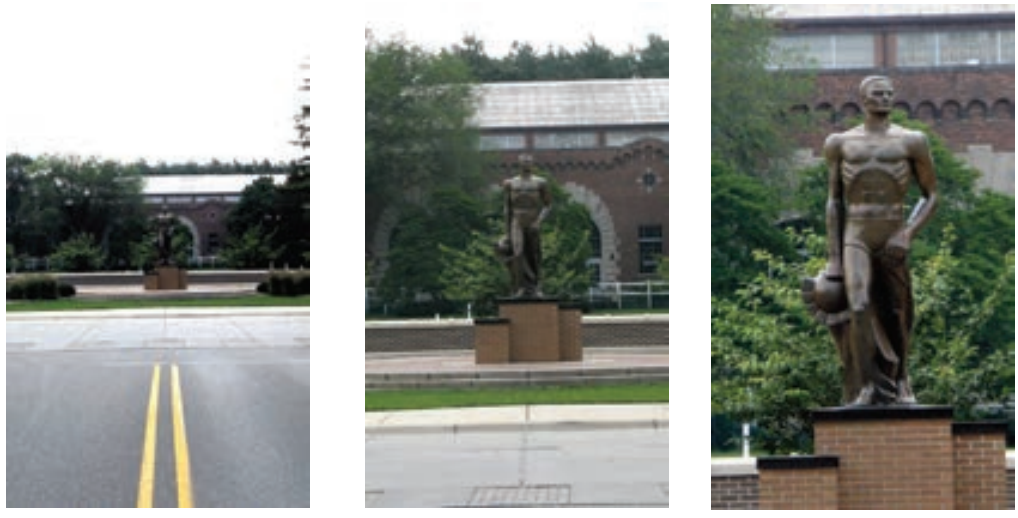
FIGURA 33.27 Esquema de una cámara que muestra el ángulo de visión.

El ancho horizontal del sensor es w. El objeto según se muestra en la figura 33.27 subtiende un ángulo $\alpha/2$ y el ángulo horizontal de visión es α. El tamaño máximo de la imagen que la película o el sensor digital es capaz de detectar ocurre cuando la altura de la imagen es igual a la mitad de la anchura de la película o del sensor digital, $h_i = w/2$. Si el objeto no está demasiado cerca de la cámara, la distancia de la imagen es aproximadamente igual a la longitud focal f de la lente, de modo que podemos usar la definición de la amplificación lineal para escribir

$$\frac{w/2}{h_o} = \frac{d_i}{d_o} \approx \frac{f}{d_o} \Rightarrow \frac{h_o}{d_o} \approx \frac{w}{2f}.$$

A partir de la figura 33.27 podemos ver que el ángulo de visión horizontal se relaciona con la altura del objeto y la distancia del mismo mediante

$$\frac{h_o}{d_o} = \tan(\alpha/2).$$



a) ***b)*** ***c)***

FIGURA 33.28 Fotografías de una estatua usando tres teleobjetivos (zooms) distintos: *a*) teleobjetivo 1x; *b*) teleobjetivo 3x, y *c*) teleobjetivo 6x.

Al combinar estas dos ecuaciones para la relación h_o/d_o tenemos

$$\frac{h_o}{d_o} = \frac{w}{2f} = \tan(\alpha/2).$$

Entonces, el ángulo de visión horizontal es

$$\alpha = 2\tan^{-1}\left(\frac{w}{2f}\right). \tag{33.9}$$

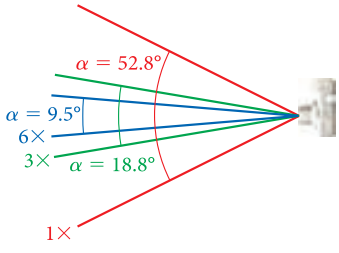


FIGURA 33.29 Ángulo de visión horizontal de una pequeña cámara digital con teleobjetivos de 1×, 3× y 6×.

Como un ejemplo del efecto de cambiar la longitud focal en una fotografía tomada con una cámara, mostramos en la figura 33.28 tres fotografías de una estatua tomadas con teleobjetivos diferentes.

El teleobjetivo 1× corresponde a una longitud focal de 5.8 mm, el de 3× corresponde a una longitud focal de 17.4 mm y el de 6× corresponde a una longitud focal de 34.8 mm. En la figura 33.29 se muestra el ángulo de visión horizontal para cada una de las tres lentes teleobjetivo.

El ángulo de visión horizontal para el teleobjetivo 1× de $\alpha = 52.8°$ es cercano al ángulo de visión horizontal de la visión humana normal de $\alpha \sim 50°–60°$. (Nuestra visión periférica abarca aproximadamente 180°, pero los 50°– 60° interiores dominan nuestra percepción.) El teleobjetivo 6× tiene un ángulo de visión horizontal angosto de $\alpha = 9.5°$, con lo que ofrece una imagen amplificada de la estatua. Para que la cámara tuviera un ángulo de visión horizontal más amplio (visión de gran angular) se requeriría una lente con una longitud focal menor que 5.8 mm.

El sensor digital está constituido por millones de elementos electrónicos de imagen (pixeles). Por ejemplo, la pequeña cámara digital de la figura 33.26 está equipada con un sensor digital con dispositivo de acoplamiento de carga (CCD, del inglés *charge-coupled device*) con un arreglo de 3 072 pixeles de ancho y 2 304 pixeles de alto, lo que da un total de 7 077 888 pixeles (7.1 megapixeles). Cada pixel responde a la luz liberando electrones. Un convertidor analógico a digital (ADC, del inglés *analog-to-digital*) envía la información de los pixeles mediante la digitalización de la cantidad de electrones liberados. Los pixeles de cada hilera se digitalizan en orden. Luego la siguiente hilera se desplaza hacia abajo y se digitalizan todos los pixeles. La pregunta que queda es: ¿cómo es que el CCD produce una imagen o fotografía a color? El CCD es sensible sólo a la intensidad de la luz, no a la longitud de onda. La respuesta es que la luz de la imagen enfocada en el CCD pasa primero por un filtro Bayer, que ilustra la figura 33.30.

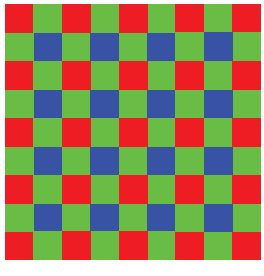


FIGURA 33.30 Una parte de un filtro Bayer que se usa para producir imágenes de color con sensores digitales.

El filtro Bayer consta de hileras de pixeles rojos y verdes alternados, seguidas de una hilera de pixeles azules y verdes. Hay más pixeles verdes que rojos o azules porque el ojo es más sensible al verde que al rojo o al azul. Un microprocesador pequeño que está en la cámara calcula el mejor color de cada pixel con base en la intensidad de la luz roja, verde y azul que atraviesa el filtro Bayer.

Un proyector para computadora funciona de manera muy parecida a una cámara digital, excepto que el objeto está en el foco de la lente, el cual proyecta una imagen sobre una pantalla

distante. El objeto para el proyector puede ser una pantalla de cristal líquido (LCD, del inglés *liquid crystal display*, vea capítulo 31) que transmite luz y que muestra la imagen que se desea proyectar. Una luz brillante irradia a través de la LCD para producir el objeto de la lente. Otro tipo de proyector es el procesador digital de luz (*digital light processor*, DLP), el cual está equipado con pequeños espejos tratados con ácido sobre un circuito integrado para computadora con el fin de producir la imagen. Cada espejo representa un pixel. Los colores se producen al alternar baños del circuito integrado con luz roja, verde y azul. La imagen producida por los espejos se vuelve el objeto de la lente, la cual proyecta la imagen sobre una pantalla. Por lo común, las salas de cine utilizan proyectores digitales que se basan en DLP.

EJEMPLO 33.3 Longitud focal de una cámara sencilla de "apuntar y disparar"

En muchas ocasiones es suficiente una cámara de "apuntar y disparar". Un ejemplo es una cámara barata que use película de 35 mm (36 mm de ancho y 24 mm de alto), como la que se ilustra en la figura 33.31. Usted puede imaginar otra versión que use un sensor digital que mida 4.0 mm de anchura y 3.0 mm de alto.

FIGURA 33.31 Una cámara sencilla de "apuntar y disparar" con longitud focal fija.

PROBLEMA

¿Cuáles son las longitudes focales de las lentes que se necesitan para estas cámaras si debe tener un ángulo de visión horizontal de $\alpha = 46°$?

SOLUCIÓN

La expresión del ángulo de visión horizontal se da mediante la ecuación 33.9:

$$\alpha = 2\tan^{-1}\left(\frac{w}{2f}\right).$$

Podemos reacomodar esta ecuación para obtener la longitud focal

$$f = \frac{w}{2\tan(\alpha/2)}.$$

La longitud focal para la versión de la película de 35 mm es

$$f = \frac{w}{2\tan(\alpha/2)} = \frac{36\text{ mm}}{2\tan(46°/2)} = 42\text{ mm}.$$

La longitud focal para la versión del sensor digital es

$$f = \frac{w}{2\tan(\alpha/2)} = \frac{4.0\text{ mm}}{2\tan(46°/2)} = 4.7\text{ mm}.$$

La versión de sensor digital sería considerablemente más pequeña que la versión para película de 35 mm.

33.6 El microscopio

El **microscopio** más sencillo es un sistema de dos lentes. Por ejemplo, la figura 33.32 ilustra un microscopio construido con dos lentes delgadas. La primera lente es una lente convergente de longitud focal corta, f_o, llamada **lente objetivo**. La segunda lente es otra lente convergente de mayor longitud focal, f_e, llamada **ocular**.

El objeto que se desea observar está situado justo fuera de la longitud focal f_o del objetivo, de modo que $d_{o,1} \approx f_o$. Este acomodo permite que la lente objetivo forme una imagen real, invertida y agrandada del objeto a alguna distancia desde la lente objetivo. Luego esta imagen se vuelve el objeto para la lente del ocular. Esta imagen intermedia está situada justo dentro de la longitud focal f_e de la lente ocular, de modo que esta lente produce una imagen virtual, vertical y agrandada de la imagen intermedia y $d_{o,2} \approx f_e$. La amplificación resultante del microscopio es el producto de la amplificación de cada lente.

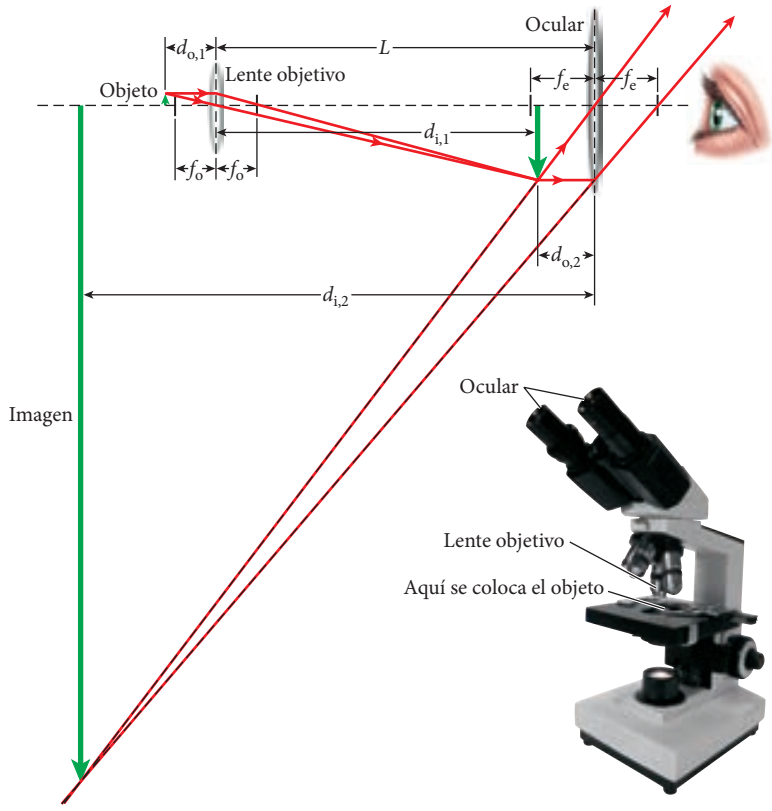


FIGURA 33.32 Características geométricas de la imagen que forma el microscopio. También se ilustra la lente del objetivo, el ocular y el objeto de un microscopio real.

Sea L la distancia entre las dos lentes, y suponga que $L \gg f_o, f_e$. Si usamos la notación de la sección 33.3, esto quiere decir que $d_{i,1} \approx L$. Entonces, la amplificación lineal del microscopio es

$$m = \frac{d_{i,1}d_{i,2}}{d_{o,1}d_{o,2}} = -\frac{(0.25\text{ m})L}{f_o f_e}, \tag{33.10}$$

donde hemos usado $d_{i,2} = -0.25$ m porque suponemos que la imagen final es producida a una distancia de visión confortable de 0.25 m.

33.6 Ejercicio en clase

Se desea que un microscopio tenga una amplificación lineal de magnitud 330. Si la lente objetivo tiene una potencia de 350 dioptrías y la lente ocular tiene una potencia de 10.0 dioptrías, ¿qué tan largo tiene que ser el microscopio? Se supone que la imagen final se produce a una distancia de 25 cm.

a) 37.7 cm
b) 40.0 cm
c) 51.3 cm
d) 65.0 cm
e) 75.0 cm

EJEMPLO 33.4 Amplificación de un microscopio

Considere un microscopio que consiste en una lente objetivo y una lente ocular separadas 15 cm. La longitud focal de la lente objetivo es 2 mm y la longitud focal de la lente ocular es 20 mm. Suponga que la imagen final se produce a una distancia de 25 cm.

PROBLEMA

¿Cuál es la magnitud de la amplificación lineal de este microscopio?

SOLUCIÓN

Si tomamos la expresión de la amplificación lineal de un microscopio (ecuación 33.10), tenemos

$$|m| = \frac{(0.25\text{ m})L}{f_o f_e} = \frac{(0.25\text{ m})(0.15\text{ m})}{(0.002\text{ m})(0.020\text{ m})} = 940.$$

33.7 Telescopio

Los telescopios tienen varias formas, incluso los **telescopios refractores** y los **telescopios reflectores o de reflexión**. En este capítulo estudiamos la amplificación del telescopio, la cual es una medida de la capacidad del telescopio para ayudarnos a ver objetos muy grandes, pero distantes. La resolución de un telescopio, que es la aptitud para distinguir dos objetos cercanos, es igualmente importante y se trata en el capítulo 34.

Telescopio refractor

El telescopio refractor está formado por dos lentes convergentes, a saber, el objetivo y el ocular. Un moderno telescopio refractor comercial que usan los astrónomos principiantes se muestra en la figura 33.33. En los ejemplos siguientes representamos un telescopio usando dos lentes delgadas. No obstante, un telescopio refractor real está equipado con lentes más complejas.

Puesto que el objeto que se quiere ver está a una gran distancia, se puede considerar que los rayos luminosos que llegan son paralelos. Entonces, la lente del objetivo forma una imagen real del objeto lejano a una distancia f_o (figura 33.34). El ocular está situado de tal modo que la imagen formada por el objetivo está a una distancia f_e a partir del ocular. Por consiguiente, el ocular forma una imagen virtual y amplificada en el infinito de la imagen formada por el objetivo, de nuevo produciendo rayos paralelos. En la figura 33.34 se muestra que los haces luminosos paralelos provenientes del objeto distante inciden en la lente objetivo. Las líneas discontinuas rojas y negras representan los haces luminosos que forman la imagen virtual.

Dado que el telescopio tiene que ver con objetos que están a grandes distancias, es inútil determinar la amplificación del telescopio mediante la fórmula de la amplificación lineal, la cual relaciona las distancias determinadas a partir de la ecuación de las lentes. Por lo tanto, definimos la amplificación angular del telescopio como -1 por el ángulo observado en el ocular θ_e dividido entre el ángulo subtendido por el objeto que está en observación θ_o (figura 33.34),

$$m_\theta = -\frac{\theta_e}{\theta_o} = -\frac{f_o}{f_e}. \tag{33.11}$$

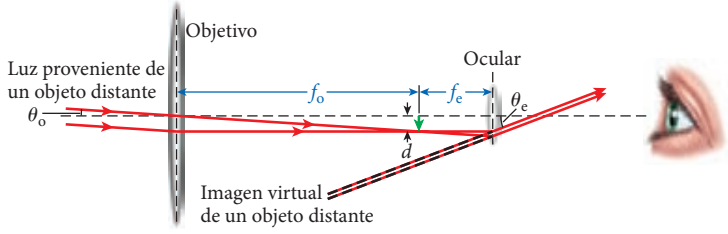


FIGURA 33.34 Esquema geométrico de una imagen formada por un telescopio refractor.

FIGURA 33.33 Moderno telescopio que usan los astrónomos novatos. El diámetro de la lente objetivo es de 80 mm en este telescopio, cuya longitud focal es de 400 mm.

DEDUCCIÓN 33.2 Amplificación angular

El ángulo θ_o es el que subtiende un objeto lejano. La altura de la imagen producida por la lente objetivo es d (figura 33.34). Esta imagen es producida a la longitud focal de la lente del objetivo f_o. Puesto que la longitud focal de la lente objetivo es grande en comparación con las dimensiones del objeto,

$$\theta_o \approx \tan\theta_o = \frac{d}{f_o}.$$

La imagen está colocada en el punto focal de la lente ocular. El ángulo aparente del ocular, θ_e, se escribe como

$$\theta_e \approx \tan\theta_e = \frac{d}{f_e},$$

de nuevo porque se supone que las dimensiones de la imagen son pequeñas en comparación con la longitud focal del ocular. La relación entre el ángulo aparente del ocular y el ángulo del objetivo da la amplificación angular:

$$\frac{\theta_e}{\theta_o} = \frac{d/f_e}{d/f_o} = \frac{f_o}{f_e}.$$

Por consiguiente, la amplificación angular de un telescopio refractor es

$$m_\theta = -\frac{f_o}{f_e},$$

donde el signo menos quiere decir que la imagen está invertida.

Por ejemplo, el telescopio refractor que se ilustra en la figura 33.33 está equipado con una lente objetivo cuya longitud focal f_o = 400 mm y la longitud focal f_e = 9.70 mm, lo cual da una amplificación de

$$m = -\frac{f_o}{f_e} = -\frac{400\text{ mm}}{9.7\text{ mm}} = -41.$$

EJEMPLO 33.5 Amplificación de un telescopio refractor

En su época, el telescopio refractor más grande del mundo fue terminado en 1897; todavía se usa y está en el Observatorio Yerkes en Williams Bay, Wisconsin, entre Chicago y Milwaukee, en Estados Unidos. Está equipado con una lente de diámetro de 1.0 m (40 pulgadas) y su longitud focal es de 19 m (62 pies).

PROBLEMA

¿Cuál debe ser la longitud focal de un ocular para dar una amplificación de magnitud 250?

SOLUCIÓN

La longitud focal de la lente objetivo es de f_o = 19 m. El valor absoluto de la amplificación será de $|m| = 250$. La amplificación se obtiene con $|m| = f_o/f_e$. Este valor nos da la longitud focal de la lente ocular:

$$f_e = \frac{f_o}{|m|} = \frac{19\text{ m}}{250} = 0.076\text{ m} = 7.6\text{ cm}.$$

FIGURA 33.35 El telescopio SOAR cuyo espejo principal mide 4.1 m de diámetro.

Telescopio reflector

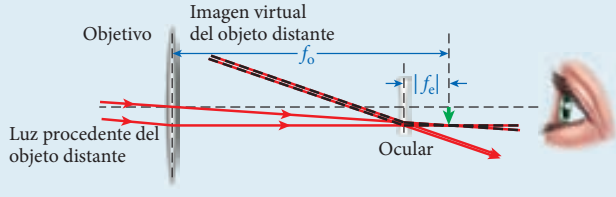
Los telescopios astronómicos más grandes son telescopios reflectores cuya lente del objetivo es un espejo cóncavo. (Aun así, el ocular de un telescopio reflector es una lente.) Un ejemplo de uno de tales telescopios es el de Investigación Astrofísica del Sur (SOAR, del inglés Southern Astrophysical Research), que se ilustra en la figura 33.35, cuyo espejo principal mide 4.1 m de diámetro. Los espejos grandes son necesarios para reunir tanta luz como sea posible para producir imágenes de alta calidad de objetos astronómicos distantes, apenas visibles. En la práctica, la capacidad de recolectar luz de un telescopio es más importante que la amplificación resultante del telescopio.

Es más fácil fabricar y conservar en posición a los grandes espejos que a las lentes enormes. Además, los espejos no tienen aberración cromática, de modo que son útiles para una gran gama de longitudes de onda. Finalmente, las dimensiones de los telescopios refractores son limitadas porque las grandes lentes, las cuales se tienen que apoyar sólo alrededor de los bordes, tienden a desviarse por su propio peso. En contraste, los modernos telescopios reflectores están equipados con una gran cantidad de servomotores de fuerza, alrededor de 100 controlados por computadora, que están en la parte posterior del espejo para mantenerlo tanto como sea posible en la forma parabólica ideal que se necesita para conseguir una calidad óptima de imagen. Por lo gene-

33.4 Oportunidad de autoevaluación

Con frecuencia, un telescopio refractor con dos lentes convergentes se denomina telescopio kepleriano. La lente objetivo está colocada a una distancia $d = f_o + f_e$ desde la lente objetivo. Otro tipo de telescopio refractor tiene una lente convergente para el objetivo y una lente divergente para el ocular.

La lente ocular en este telescopio está colocada a una distancia $d = f_o + f_e$ donde $f_e < 0$. A menudo, a este tipo de telescopio lo denominan telescopio galileano. Analice algunas de las ventajas de un telescopio galileano con respecto a uno kepleriano.



ral, estos servomotores son capaces de ejercer fuerzas del orden de 100 N sobre el espejo para jalarlo o empujarlo. Ellos permiten que la superficie del espejo se conserve a unas cuantas décimas de nanómetros de la forma parabólica ideal, incluso cuando el telescopio entero gire y se incline gradualmente para estar dirigido fijamente al objeto astronómico que está siguiendo a través de los cielos nocturnos durante la toma de imágenes de exposición prolongada.

Se han perfeccionado varios tipos de telescopios reflectores. En la figura 33.36 se muestran tres ejemplos sencillos. La forma más sencilla de telescopio reflector contiene un espejo parabólico y un ocular [figura 33.36*a*)]. Este acomodo es poco práctico porque el observador tiene que estar colocado en la dirección desde donde viene la luz. En la solución newtoniana de un telescopio reflector, un espejo plano a un ángulo de 45° refleja la luz fuera de la estructura del telescopio al ocular [figura 33.36*b*)]. En el acomodo de Cassegrain, un espejo hiperboloide convexo secundario, colocado en forma perpendicular al eje óptico del espejo, refleja la luz a través de un agujero en el centro del espejo [figura 33.36*c*)]. En los últimos dos casos, el espejo secundario es lo suficientemente pequeño como para absorber una fracción (pero nada insignificante) de la luz que entra. En los tres casos se usa un ocular para amplificar la imagen producida por el espejo objetivo. El telescopio SOAR que se ilustra en la figura 33.35 tiene un acomodo que se muestra en la figura 33.36*b*).

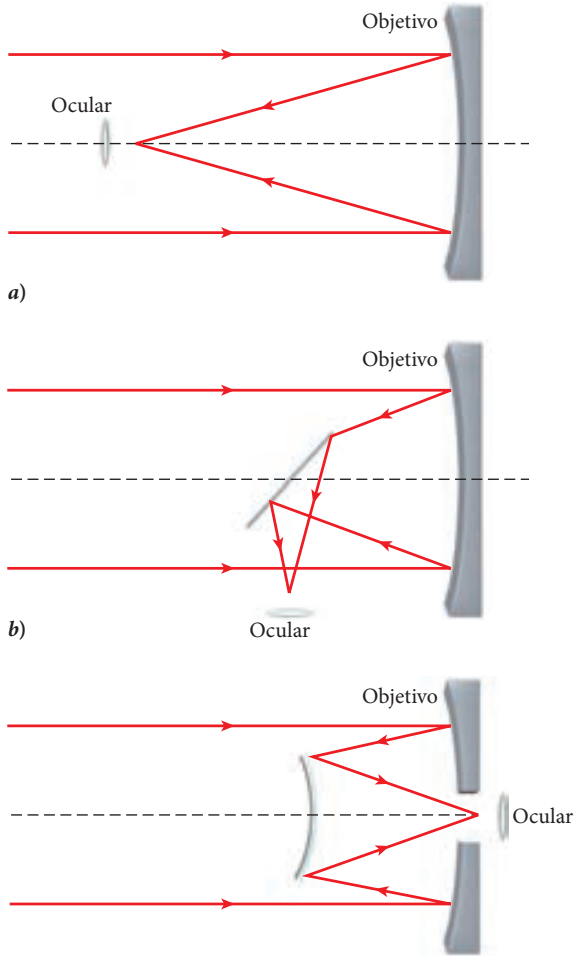


FIGURA 33.36 *a*) Acomodo del telescopio reflector estándar. *b*) Acomodo del telescopio reflector newtoniano cuyo ocular está al lado. *c*) Disposición del telescopio reflector de Cassegrain, con un espejo secundario y un ocular en la parte posterior. (Las dimensiones relativas del espejo secundario y de los oculares no están a escala con respecto al espejo primario, y están exageradas.)

Telescopio Espacial Hubble

El Telescopio Espacial Hubble (TEH), llamado así en honor del astrónomo estadounidense Edwin Hubble (1889-1953), fue desplegado el 25 de abril de 1990 desde el transbordador espacial (figura 33.37). Este telescopio orbita alrededor de la Tierra a 590 km por arriba de su superficie, muy por arriba de la atmósfera que altera las imágenes captadas por los telescopios que están sobre la Tierra. El TEH es un telescopio reflector de diseño de Ritchey-Chrétian, acomodado según la disposición de Cassegrain, pero con un espejo hiperboloide cóncavo en el objetivo, y no con un espejo paraboloide y espejo hiperbólico convexo secundario como se acostumbra en el diseño tradicional de Cassegrain. Este diseño da al TEH un amplio campo de visión y elimina la aberración esférica. El espejo objetivo mide 2.40 m de diámetro y su longitud focal efectiva es de 57.6 m. El

a) *b*)

FIGURA 33.37 El Telescopio Espacial Hubble es probablemente el instrumento óptico más famoso del mundo y ha cambiado la manera en la que comprendemos el universo. *a*) Telescopio Espacial Hubble en órbita. *b*) Fotografía del Hubble de las columnas gaseosas en la nebulosa de El Águila (M16): Pilares de la Creación en una región en la que se forman estrellas.

33.7 Ejercicio en clase

Suponga que hay un telescopio reflector que consta de un espejo esférico cóncavo de radio de curvatura R = 17.0 m y una lente en el ocular de longitud focal f_e = 29.0 cm. ¿Cuál es la magnitud de la amplificación de este telescopio?

a) 29.3
b) 45.0
c) 58.6
d) 66.1
e) 78.9

a)

b)

FIGURA 33.38 Dos imágenes de la galaxia M100. *a*) Imagen producida por el Telescopio Espacial Hubble justo después de ser puesto en funcionamiento. *b*) El mismo objeto fotografiado después de corregir las propiedades ópticas.

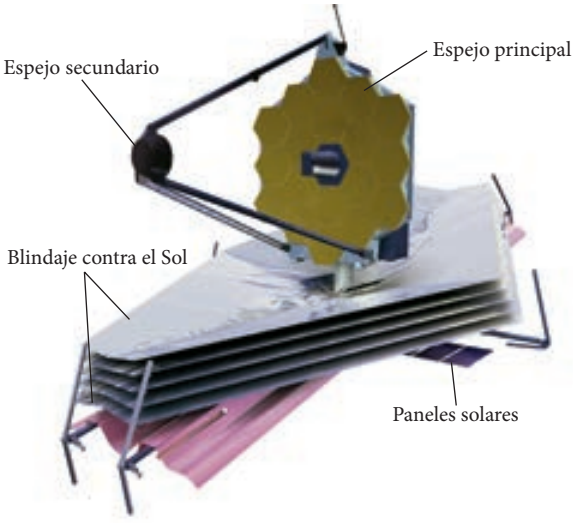


FIGURA 33.39 Esquema del proyecto para el Telescopio Espacial James Webb. (Dibujo del Instituto de Ciencia del Telescopio Espacial.)

espejo secundario mide 0.267 m de diámetro y se sitúa a 4.91 m a partir del espejo objetivo. El espejo secundario se puede mover desde la Tierra para lograr el mejor foco. El ocular está reemplazado por un conjunto de instrumentos electrónicos especializados para diversas tareas astronómicas.

El espejo original objetivo del TEH fue producido con una imperfección causada por un instrumento de prueba defectuoso. El espejo fue pulido con mucha precisión, pero desafortunadamente se le dio la forma incorrecta. La desviación máxima de la forma perfecta de espejo era sólo de 2.3 μm, pero las aberraciones esféricas resultantes fueron catastróficas [vea la figura 33.38*a*)]. En diciembre de 1993, una misión de reparación con transbordador espacial puso en funcionamiento el paquete Reemplazo axial de los instrumentos correctores ópticos del telescopio espacial (COSTAR, del inglés Corrective Optics Space Telescope Axial Replacement), el cual corrigió el desperfecto en el espejo objetivo y posibilitó que el TEH empezara a revolucionar nuestro entendimiento del universo. Las dos imágenes de la galaxia M100 que se ilustran en la figura 33.38 muestran la calidad de la imagen del TEH antes y después de la instalación del COSTAR. En febrero de 1997 se instalaron dos nuevos paquetes de instrumentos en el telescopio con ayuda de la Misión de Reparación 2. Estos instrumentos contenían sus propias correcciones ópticas. En diciembre de 1997 se envió a la Misión de Reparación 3A para corregir un grave problema del giroscopio estabilizador del TEH. En marzo de 2002, la Misión de Reparación 3B añadió diversos instrumentos nuevos. La Misión 4 de mayo de 2009 reemplazó dos instrumentos que habían fallado (el espectrógrafo y la cámara avanzada) e instaló otros dos nuevos instrumentos (espectrógrafo y cámara de campo amplio), así como nuevas baterías y giroscopios.

Telescopio Espacial James Webb

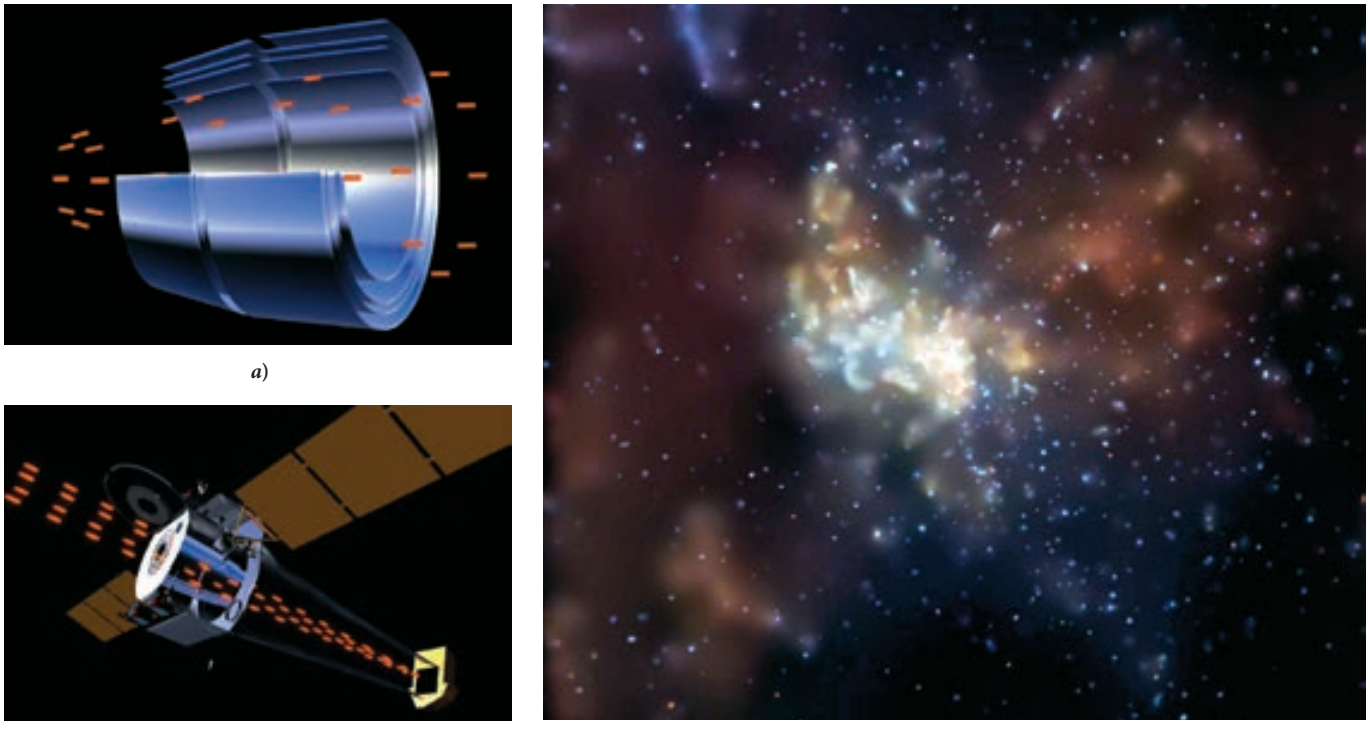
El reemplazo planeado del TEH es el Telescopio Espacial James Webb (TEJW), nombrado así en honor del segundo administrador de la NASA, James E. Webb (1906-1992). Está planeado lanzar este proyecto en el año 2014. El espejo objetivo del TEJW será de 6.5 m de diámetro y constará de 18 segmentos de espejo. La concepción artística de este telescopio se muestra en la figura 33.39.

El TEJW utilizará luz infrarroja para estudiar el universo. La luz infrarroja es capaz de atravesar las nubes de polvo presentes en nuestra galaxia y otros lugares y bloquear la luz visible. El TEJW orbitará alrededor de la Tierra a una distancia de 1.5 millones de km (casi cuatro veces la distancia de la Tierra a la Luna), de tal manera que la Tierra siempre estará entre el Sol y el TEJW. Al tener el Sol siempre bloqueado por la Tierra, el telescopio tendrá visión continua y protegerá los detectores infrarrojos criogénicos que están a bordo del TEJW contra los cambios de la luz del Sol. Este telescopio también contiene un escudo solar de varias capas como se ilustra en la figura 33.39.

Observatorio CHANDRA de rayos X

El TEJW ejecutará observaciones mediante luz infrarroja, la cual se refleja muy bien en los espejos. Sin embargo, hay otros tipos de ondas electromagnéticas que no se reflejan en las superficies de los espejos. Por ejemplo, si los rayos X inciden perpendicularmente sobre la superficie de un espejo, atraviesan la superficie del espejo en lugar de reflejarse. No obstante, si los rayos X inciden en la superficie de un espejo en un ángulo muy grande, los rayos X se reflejan. El Observatorio CHANDRA de rayos X produce imágenes con rayos X usando los espejos que se muestran en la figura 33.40*a*).

Los espejos del Observatorio CHANDRA de rayos X forman imágenes de igual manera que lo hacen las lentes y los espejos reflectores [figura 33.40*b*)], aunque las propiedades geométricas de las lentes de rayos X son diferentes. Las imágenes que se forman usando rayos X proporcionan información acerca de las regiones de alta energía del universo, como el centro galáctico muy activo de la Vía Láctea, que se ilustra en la figura 33.40*c*).



a) *b*) *c*)

FIGURA 33.40 Observatorio CHANDRA de rayos X. *a*) Los espejos cilíndricos utilizados para enfocar los rayos X. *b*) Trayectoria de los rayos X a través de CHANDRA. *c*) Imagen de rayos X del centro de la Vía Láctea producida por CHANDRA.

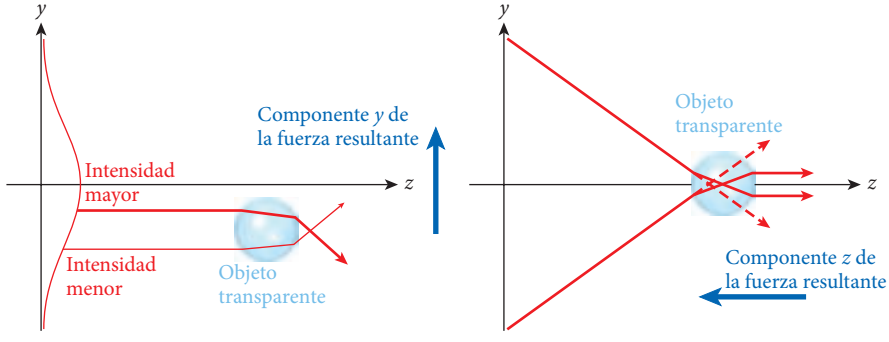
33.8 Trampas de rayos láser

Tras estudiar los instrumentos ópticos más grandes con los cuales podemos explorar las más grandes estructuras del universo, queremos destinar la última sección de este capítulo para tratar un instrumento óptico con el cual podemos manipular alguna de las estructuras más pequeñas.

Como se muestra en el ejemplo 31.3, la fuerza que la luz ejerce sobre un objeto es del orden de 10^{-12} N (= 1 piconewton). Esta fuerza es demasiado pequeña y no afecta a los objetos macroscópicos. No obstante, los físicos que utilizan rayos láser muy intensos enfocados en un área pequeña pueden ejercer fuerzas suficientes para manipular objetos tan pequeños como un solo átomo. A estos dispositivos se les llama trampas ópticas o **trampas de rayos láser**.

Estos equipos se construyen haciendo enfocar un rayo láser intenso en un punto por medio del lente objetivo de un microscopio. La fuerza que ejerce un puntero láser sobre un trozo de papel produce una fuerza en la dirección del rayo láser original. En la realización física de las trampas de rayos láser, el haz láser se dirige de tal manera que la luz es más intensa en la parte media de la distribución de la luz. Además, el enfoque produce rayos de luz que convergen en un punto.

Consideremos el efecto de la luz del láser enfocada en un objeto esférico ópticamente transparente. Este objeto podría ser una pequeña esfera de plástico o una célula viva, que es aproximadamente esférica. Definamos la dirección original de la luz láser como la dirección z, de modo que el plano xy es perpendicular a la dirección incidente. En la figura 33.41*a*) se muestra el objeto en el plano xy, desplazado lige-



a) *b*)

FIGURA 33.41 Efecto de la luz láser enfocada sobre un objeto ópticamente transparente, esférico y pequeño. *a*) La línea roja curva a la izquierda representa la intensidad variable de la onda. Además se muestra la fuerza restauradora en la dirección y. *b*) También hay una fuerza restauradora en la dirección z.

ramente en la dirección y negativa. La luz que procede del centro de distribución de luz es más intensa y también (como se estudia en el capítulo 34) se refracta o se dobla hacia abajo. La luz que procede de la orilla de la distribución es menos intensa y se refracta hacia arriba. El cambio resultante en impulso de los rayos de luz incidente en la dirección y es hacia abajo. Para conservar el impulso, el objeto debe retroceder en la dirección y positiva. Entonces, la intensa luz del rayo láser enfocada produce una fuerza restauradora sobre el objeto si no se coloca en $y = 0$, y el objeto es atrapado en la dirección y.

En la dirección z, que es la dirección de la luz láser incidente, también hay captura debido a los rayos convergentes producidos al enfocar la luz por la lente [figura 33.41*b*)]. En este caso, el objeto está exactamente a la derecha del punto del foco. Los rayos incidentes se refractan de tal manera que son más paralelos a la dirección incidente que antes. Por consiguiente, la componente del impulso de la luz en la dirección z se ha incrementado y el objeto transparente debe retroceder en la dirección opuesta para conservar el impulso. Si el objeto estuviera a la izquierda del punto focal, experimentaría una fuerza a la derecha. Entonces el objeto queda atrapado en la dirección paralela a la luz láser incidente así como la dirección perpendicular a la luz.

Esta técnica se apoya en la transmisión de la luz incidente. Si esta técnica se aplica a un objeto que no es transparente, la luz incidente se refleja y produce una fuerza que empuja el objeto en la dirección general de la luz incidente.

Las trampas de rayos láser se usan para atrapar células, bacterias, virus y pequeñas perlas de poliestireno. Asimismo, se han usado para manipular hebras de ADN y para estudiar los motores de tamaño molecular.

LO QUE HEMOS APRENDIDO | GUÍA DE ESTUDIO PARA EXAMEN

- En las imágenes formadas por lentes, la distancia del objeto, la distancia de la imagen y la longitud focal de la lente se relacionan mediante la ecuación de las lentes delgadas, $\frac{1}{d_o}+\frac{1}{d_i}=\frac{1}{f}$. Aquí d_o es siempre positiva, pero d_i es positiva si la imagen está en el lado opuesto de la lente con respecto a la posición del objeto y negativa si está en el mismo lado de donde está el objeto. La longitud focal f es positiva para las lentes convergentes y negativa para las lentes divergentes.
- La fórmula del fabricante de lentes relaciona la curvatura de ambos lados de una lente y su índice de refracción con su longitud focal, $\frac{1}{f}=(n-1)\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)$.
- La dioptría es un número adimensional que se define como el inverso de la longitud focal en metros.
- La amplificación angular de una lupa simple con una imagen en el infinito está dada por $m_\theta \approx \frac{0.25\text{ m}}{f}$. (Suponga aquí un valor característico de 0.25 m para el punto cercano de una persona promedio de edad media.)
- La amplificación lineal de un microscopio se obtiene con $m=-\frac{(0.25\text{ m})L}{f_o f_e}$, donde L es la distancia entre las dos lentes, f_o es la longitud focal de la lente objetivo y f_e es la longitud focal de la lente ocular. (Se supone que la imagen final se forma a una distancia de 0.25 m.)
- La amplificación angular de un telescopio está dada por $m_\theta=-\frac{\theta_e}{\theta_o}=-\frac{f_o}{f_e}$, donde f_o es la longitud focal de la lente objetivo o espejo y f_e es la longitud focal de la lente ocular.
- El número f de una lente de una cámara se define como la longitud focal de la lente f dividida entre el diámetro de la abertura de la lente D, $\text{número } f=\frac{\text{longitud focal}}{\text{diámetro de abertura}}=\frac{f}{D}$.
- El ángulo horizontal de visión de una cámara es $\alpha=2\tan^{-1}\left(\frac{w}{2f}\right)$, donde w es la anchura de la película o sensor digital de imágenes y f es la longitud focal de la lente de la cámara.

TÉRMINOS CLAVE

lente, p. 1059
fórmula del fabricante de lentes, p. 1059
ecuación de las lentes delgadas, p. 1061
lente convergente, p. 1062
lente divergente, p. 1064
dioptría, p. 1065
lupa, p. 1067
amplificación angular, p. 1067
lente teleobjetivo, p. 1069
acomodación, p. 1071
punto lejano, p. 1071
punto cercano, p. 1071
miopía, p. 1072
hiperopía o hipermetropía, p. 1072
lente de contacto, p. 1073
intervención quirúrgica LASIK, p. 1073
cámara, p. 1074
abertura, p. 1074
número *f*, p. 1074
saltos o *stops* de *f*, p. 1074
profundidad de campo, p. 1075
ángulo de visión, p. 1075
microscopio, p. 1077
lente objetivo, p. 1077
ocular, p. 1077
telescopio refractor, p. 1078
telescopio reflector, p. 1078
trampas de rayos láser, p. 1083

NUEVOS SÍMBOLOS

$m = \dfrac{h_i}{h_o} = -\dfrac{d_i}{d_o}$, amplificación lineal

$D = \dfrac{1\ \text{m}}{f}$, potencia de una lente, en dioptrías

m_θ, amplificación angular

f_o, longitud focal de la lente objetivo o espejo

f_e, longitud focal ocular

número f, relación de la longitud focal dividida entre el diámetro de la abertura de una cámara

α, ángulo de visión horizontal de una cámara

RESPUESTAS A LAS OPORTUNIDADES DE AUTOEVALUACIÓN

33.1 *a*) espejo plano *c*) lente divergente
b) espejo divergente *d*) lente convergente

33.2 Al hacer $x = 0$ en la ecuación 33.7, tenemos $f_{ef} = f_2 f_1/(f_2 + f_1)$. Podemos invertir esta ecuación y llegamos a

$$\frac{1}{f_{ef}} = \frac{f_2 + f_1}{f_2 f_1} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2}.$$

33.3 La magnitud de la amplificación se obtiene con $|m| = d_i/d_o$. Si la distancia del objeto es infinita, entonces $d_i = f$. Por consiguiente, la lente de longitud focal de 200 mm dará una amplificación de cuatro veces la de la lente normal de 50 mm.

33.4 Al comparar con la figura 33.34, podemos ver que un telescopio galileano produce una imagen vertical, la cual es útil en el caso de los telescopios terrestres, anteojos para el teatro y binoculares. El telescopio kepleriano produce una imagen invertida. Un telescopio galileano puede ser más corto que el kepleriano, lo cual es útil para los instrumentos ópticos, como los anteojos para el teatro o los binoculares.

PRÁCTICA PARA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Lineamientos para resolución de problemas

Básicamente, los mismos lineamientos que se aplican en el capítulo anterior también se siguen en éste, porque en lo que se refiere a lentes e instrumentos ópticos usamos las mismas leyes para trazar los rayos que en el caso de los espejos.

1. El primer paso para resolver casi todos los problemas de óptica debe ser trazar un diagrama grande, claro, con las indicaciones convenientes. Incluya toda la información que conozca y toda la información que necesita determinar. Recuerde que los ángulos se miden a partir de la normal a la superficie, y no a la superficie en sí misma.

2. Usted necesita dibujar sólo dos rayos principales para ubicar una imagen formada por espejos o lentes, pero debe trazar un tercer rayo como comprobación de que están dibujados en forma correcta. Incluso si necesita resolver un problema usando la ecuación del espejo o la ecuación de las lentes delgadas, un diagrama exacto le puede ayudar a aproximar las respuestas como una comprobación de sus cálculos. Sin embargo, siempre tenga en mente que en algunas configuraciones de lentes cuyos factores de amplificación son grandes, incluso pequeñas inexactitudes en el dibujo representan enormes errores en las dimensiones de la imagen o en la ubicación. Así que no es buena idea confiar por completo únicamente en los dibujos.

3. Cuando calcule distancias de espejos o de lentes, recuerde las convenciones de los signos y cuide de usarlas correctamente. Si un diagrama indica una imagen invertida, por ejemplo, pero sus cálculos no tienen un signo negativo, regrese a la ecuación inicial y verifique los signos de todas las distancias y longitudes focales.

PROBLEMA RESUELTO 33.2 Imagen de la Luna

PROBLEMA

Se enfoca sobre una pantalla la imagen de la Luna por medio de una lente convergente cuya longitud focal es $f = 50.0$ cm. El radio de la Luna es $R = 1.737 \cdot 10^6$ m, y la distancia media entre la Tierra y la Luna es $d = 3.844 \cdot 10^8$ m. ¿Cuál es el radio de la Luna en la imagen sobre la pantalla?

SOLUCIÓN

PIENSE

La amplificación lineal de la imagen producida por la lente se expresa en términos de la relación entre las dimensiones de la imagen y las dimensiones del objeto y en función de la relación entre la distancia de la imagen y la distancia del objeto.

(*continúa*)

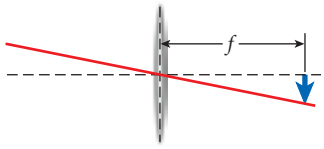


FIGURA 33.42 Imagen de la Luna producida por una lente convergente.

(*continuación*)

ESBOCE

La figura 33.42 muestra un dibujo de la imagen de la Luna que produce una lente convergente. La flecha azul representa la imagen de la Luna.

INVESTIGUE

La relación entre la distancia del objeto d_o y la distancia de la imagen d_i para una lente cuya longitud focal f está dada por la ecuación de las lentes delgadas,

$$\frac{1}{d_o}+\frac{1}{d_i}=\frac{1}{f}.$$

Podemos despejar la distancia de la imagen de esta ecuación,

$$d_i=\frac{d_o f}{d_o-f}.$$

En este caso, la distancia del objeto es la distancia desde la Tierra a la Luna. Puesto que la distancia del objeto es mucho más grande que la longitud focal de la lente, podemos escribir

$$d_i\approx\frac{d_o f}{d_o}=f.$$

La magnitud lineal de la amplificación m para una lente se puede escribir como

$$m=-\frac{d_i}{d_o}=\frac{h_i}{h_o}$$

donde h_i es la altura (radio) de la imagen y h_o es la altura del objeto, que en este caso es el radio de la Luna.

SIMPLIFIQUE

Podemos resolver la ecuación anterior con la altura de la imagen,

$$h_i=-h_o\frac{d_i}{d_o}.$$

Si tomamos la altura del objeto como el radio de la Luna R, la distancia del objeto será la distancia de la Tierra a la Luna d, y la distancia de la imagen será la longitud focal de la lente f, entonces podemos escribir

$$h_i=-R\frac{f}{d}.$$

CALCULE

Al escribir los valores numéricos, tenemos

$$h_i=-R\frac{f}{d}=\left(1.737\cdot10^{6}\ \text{m}\right)\frac{0.500\ \text{m}}{3.844\cdot10^{8}\ \text{m}}=-0.00225937\ \text{m}.$$

REDONDEE

Mostramos nuestros resultados para el radio de la imagen de la Luna sobre la pantalla con tres cifras:

$$h_i=-2.26\cdot10^{-3}\ \text{m}=-2.26\ \text{mm}.$$

VUELVA A REVISAR

La Luna está relativamente cerca de la Tierra y podemos verla como un disco a simple vista. Por consiguiente, al parecer es razonable que podamos producir una imagen de la Luna con un radio de 2.26 mm sobre una pantalla con una lente de longitud focal de 50.0 cm. El signo negativo de la altura de la imagen quiere decir que nuestra imagen de la Luna está invertida.

PROBLEMA RESUELTO 33.3 Imagen producida con una lente y un espejo

Un objeto se coloca a una distancia $d_{o,1}$ = 25.6 cm a la izquierda de una lente convergente cuya longitud focal es de f_1 = 20.6 cm. Un espejo convergente cuya longitud focal es de f_2 = 10.3 cm se sitúa a una distancia d = 120.77 cm a la derecha de la lente.

PROBLEMA

¿Cuál es la amplificación de la imagen producida por la combinación de una lente y un espejo?

SOLUCIÓN

PIENSE

La lente producirá una imagen real, pero invertida del objeto. Esta imagen se vuelve el objeto del espejo convergente. La distancia del objeto con respecto al espejo es la distancia entre la lente y el espejo menos la distancia de la imagen de la lente. La amplificación total es la amplificación de la lente por la amplificación del espejo.

ESBOCE

En la figura 33.43 se ilustra un diagrama del objeto, la lente y el espejo.

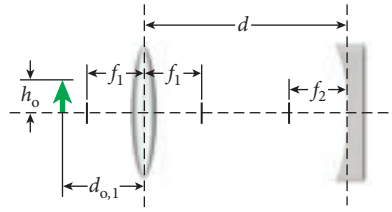


FIGURA 33.43 Objeto del cual se obtiene su imagen mediante la combinación de una lente y un espejo.

INVESTIGUE

La ecuación de las lentes delgadas nos señala que la distancia de la imagen $d_{i,1}$ para la lente es

$$d_{i,1} = \frac{d_{o,1} f_1}{d_{o,1} - f_1}. \tag{i}$$

La ecuación del espejo nos dice que la distancia de la imagen con respecto al espejo es

$$d_{i,2} = \frac{d_{o,2} f_2}{d_{o,2} - f_2}, \tag{ii}$$

donde la distancia del objeto con respecto al espejo es

$$d_{o,2} = d - d_{i,1}. \tag{iii}$$

La amplificación m del sistema lente-espejo se obtiene mediante

$$m = m_1 m_2, \tag{iv}$$

donde m_1 es la amplificación de la lente y m_2 es la amplificación del espejo. La amplificación de la lente aplicando la ecuación (i) es

$$m_1 = -\frac{d_{i,1}}{d_{o,1}} = -\frac{\left(\frac{d_{o,1} f_1}{d_{o,1} - f_1}\right)}{d_{o,1}} = -\frac{f_1}{d_{o,1} - f_1} = \frac{f_1}{f_1 - d_{o,1}}. \tag{v}$$

De igual manera, la amplificación del espejo usando la ecuación (ii) es

$$m_2 = -\frac{d_{i,2}}{d_{o,2}} = -\frac{\left(\frac{d_{o,2} f_2}{d_{o,2} - f_2}\right)}{d_{o,2}} = -\frac{f_2}{d_{o,2} - f_2} = \frac{f_2}{f_2 - d_{o,2}}. \tag{vi}$$

SIMPLIFIQUE

Para la amplificación total podemos escribir, aplicando las ecuaciones (iii), (v) y (vi) en la ecuación (iv),

$$m = \left(\frac{f_1}{f_1 - d_{o,1}}\right)\left(\frac{f_2}{f_2 - d_{o,2}}\right) = \left(\frac{f_1}{f_1 - d_{o,1}}\right)\left(\frac{f_2}{f_2 - (d - d_{i,1})}\right).$$

Por último, al sustituir de la ecuación (i) la distancia de la imagen para la lente, tenemos

$$m = \left(\frac{f_1}{f_1 - d_{o,1}}\right)\frac{f_2}{f_2 - \left(d - \frac{d_{o,1} f_1}{d_{o,1} - f_1}\right)}.$$

CALCULE

Al introducir los valores numéricos, obtenemos

$$m = \left(\frac{(20.6\ \text{cm})}{(20.6\ \text{cm}) - (25.6\ \text{cm})}\right)\frac{(10.3\ \text{cm})}{(10.3\ \text{cm}) - \left((120.77\ \text{cm}) - \frac{(25.6\ \text{cm})(20.6\ \text{cm})}{(25.6\ \text{cm}) - (20.6\ \text{cm})}\right)}$$

$$m = 8.490596.$$

(*continúa*)

(*continuación*)

REDONDEE

Mostramos nuestro resultado con tres cifras:

$$m = 8.49.$$

VUELVA A REVISAR

Para corroborar nuestro resultado, primero calculamos la distancia de la imagen para la lente:

$$d_{i,1} = \frac{d_{o,1} f_1}{d_{o,1} - f_1} = \frac{(25.6\text{ cm})(20.6\text{ cm})}{(25.6\text{ cm}) - (20.6\text{ cm})} = 105.47\text{ cm}.$$

La distancia del objeto para el espejo es entonces

$$d_{o,2} = d - d_{i,1} = 120.77\text{ cm} - 105.47\text{ cm} = 15.3\text{ cm}.$$

La distancia de la imagen para el espejo es

$$d_{i,2} = \frac{d_{o,2} f_2}{d_{o,2} - f_2} = \frac{(15.3\text{ cm})(10.3\text{ cm})}{(15.3\text{ cm}) - (10.3\text{ cm})} = 31.52\text{ cm}.$$

La amplificación de la imagen es entonces

$$m = \frac{d_{i,1}}{d_{o,1}} \frac{d_{i,2}}{d_{o,2}} = \frac{105.5\text{ cm}}{25.6\text{ cm}} \frac{31.52\text{ cm}}{15.3\text{ cm}} = 8.49,$$

lo cual concuerda con nuestro resultado.

PROBLEMA RESUELTO 33.4 Dos posiciones de una lente convergente

Un foco está a una distancia $d = 1.45$ m alejado de la pantalla. Una lente convergente cuya longitud focal $f = 15.3$ cm forma una imagen del foco en la pantalla para dos posiciones de la lente.

PROBLEMA

¿Cuál es la distancia entre estas dos posiciones?

SOLUCIÓN

PIENSE

La suma de la distancia del objeto de la lente más la distancia de la imagen de la lente es igual a la distancia del foco con respecto a la pantalla. Al aplicar la ecuación de las lentes, podemos determinar las distancias posibles de la imagen usando la ecuación cuadrática. La distancia entre las dos distancias de la imagen es la distancia entre las dos posiciones de la lente.

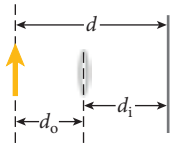


FIGURA 33.44 Se sitúa una lente entre un foco y una pantalla.

ESBOCE

La figura 33.44 muestra un esquema de la lente situada entre el foco y la pantalla.

INVESTIGUE

La ecuación de las lentes delgadas es

$$\frac{1}{d_o} + \frac{1}{d_i} = \frac{1}{f}, \tag{i}$$

donde d_o es la distancia del objeto, d_i es la distancia de la imagen y f es la longitud focal. Podemos expresar la distancia del objeto en función de la distancia de la imagen y la distancia del foco a partir de la pantalla d,

$$d_o = d - d_i. \tag{ii}$$

Al sustituir la ecuación (ii) en la ecuación (i), tenemos

$$\frac{1}{d - d_i} + \frac{1}{d_i} = \frac{1}{f}.$$

Reacomodamos la ecuación para llegar a

$$d_i + (d - d_i) = \frac{d_i(d - d_i)}{f}.$$

Al simplificar los términos semejantes y multiplicar por f nos da

$$df = d_i d - d_i^2. \qquad \text{(iii)}$$

SIMPLIFIQUE

Podemos volver a escribir la ecuación (iii) de modo que somos capaces de reconocer una ecuación cuadrática, para la cual podemos hallar las soluciones:

$$d_i^2 - d_i d + df = 0.$$

Las soluciones de esta ecuación son

$$d_i = \frac{d \pm \sqrt{d^2 - 4df}}{2},$$

donde una solución corresponde al signo + y la otra solución corresponde al signo − .

CALCULE

La solución que corresponde al signo + es

$$d_{i+} = \frac{(1.45\text{ m}) + \sqrt{(1.45\text{ m})^2 - 4(1.45\text{ m})(0.153\text{ m})}}{2} = 1.27616\text{ m}.$$

La solución que corresponde al signo − es

$$d_{i-} = \frac{(1.45\text{ m}) - \sqrt{(1.45\text{ m})^2 - 4(1.45\text{ m})(0.153\text{ m})}}{2} = 0.173842\text{ m}.$$

La diferencia entre las dos posiciones es $\Delta d_i = 1.10232$ m.

REDONDEE

Mostramos nuestro resultado con tres cifras significativas,

$$\Delta d_i = 1.10\text{ m}.$$

(*Nota*: aun cuando hemos determinado dos posiciones para la lente que permite que se forme una imagen, es incorrecto suponer que la imagen tiene las mismas dimensiones en ambos casos.)

VUELVA A REVISAR

Con el fin de corroborar nuestra respuesta, sustituimos las soluciones de la distancia de la imagen en la ecuación de las lentes delgadas y mostramos que funcionan. En el caso de la primera solución, $d_i = 1.276$ m, de modo que la distancia del objeto correspondiente es $d_o = d - d_i = 0.174$ m. La ecuación de las lentes nos dice

$$\frac{1}{0.174} + \frac{1}{1.276} = \frac{1}{0.153\text{ m}},$$

lo cual concuerda dentro de los errores de redondeo. Para la segunda solución, simplemente invertimos el papel de la distancia de la imagen y la distancia del objeto en la ecuación de las lentes delgadas y obtenemos la misma respuesta. Por consiguiente, nuestro resultado parece razonable.

PREGUNTAS DE OPCIÓN MÚLTIPLE

33.1 Para que un microscopio funcione según el diseño, la separación entre la lente del objetivo y el ocular debe ser tal que la imagen intermedia producida por la lente del objetivo esté a una distancia (según se mide desde el centro óptico del ocular):

a) Ligeramente mayor que la longitud focal.
b) Ligeramente menor que la longitud focal.
c) Igual a la longitud focal.
d) La posición de la imagen intermedia es lo de menos.

33.2 ¿Qué de lo siguiente no es característico de un telescopio refractor astronómico simple con dos lentes?

a) La imagen final es virtual.
b) El objetivo forma una imagen virtual.
c) La imagen final está invertida.

33.3 Una lente convergente se usa como lupa. Con la finalidad de que funcione, el objeto debe estar colocado a una distancia de

a) $d_o > f$.
b) $d_o = f$.
c) $d_o < f$.
d) Ninguna de las anteriores.

33.4 Se mueve un objeto desde una distancia de 30 cm a una distancia de 10 cm enfrente de una lente convergente cuya longitud focal es de 20 cm. ¿Qué sucede con la imagen?

a) La imagen pasa de real y vertical a real, pero invertida.
b) La imagen pasa de virtual y vertical a real, pero invertida.
c) La imagen pasa de virtual e invertida a real y vertical.
d) La imagen pasa de real e invertida a virtual y vertical.
e) Ninguna de las anteriores.

33.5 ¿Qué tipo de lente es una lupa?

a) Convergente.
b) Divergente.
c) Esférica.
d) Cilíndrica.
e) Plana.

33.6 En la intervención quirúrgica LASIK se usa un rayo láser para modificar:

a) La curvatura de la retina.
b) El índice de refracción del humor acuoso.
c) La curvatura de la lente.
d) La curvatura de la córnea.

33.7 ¿Cuál es la longitud focal de una hoja plana de vidrio transparente?

a) Cero.
b) Infinita.
c) El espesor del vidrio.
d) Indefinida.

33.8 ¿Dónde se forma la imagen si un objeto se sitúa a 25 cm del ojo de una persona miope? ¿Qué clase de lentes correctores debe usar esa persona?

a) Atrás de la retina. Lentes convergentes.
b) Atrás de la retina. Lentes divergentes.
c) Enfrente de la retina. Lentes convergentes.
d) Enfrente de la retina. Lentes divergentes.

33.9 Un objeto se coloca a la izquierda de una lente convergente a una distancia que es menor que la longitud focal de la lente. La imagen producida es:

a) Real e invertida.
b) Virtual y vertical.
c) Virtual e invertida.
d) Real y vertical.

33.10 ¿Qué esperaría usted que suceda a la magnitud de la potencia de una lente cuando se coloca en agua ($n = 1.33$)?

a) Se incrementaría.
b) Disminuiría.
c) Seguiría siendo la misma.
d) Dependería de si la lente es convergente o divergente.

33.11 Una lente desconocida forma la imagen de un objeto que está a 24 cm alejado de la lente, está invertida y es un factor de 4 más grande en dimensiones que el objeto. ¿Dónde está situado el objeto?

a) A 6 cm de la lente en el mismo lado de ésta.
b) A 6 cm de la lente en el otro lado de ésta.
c) A 96 cm de la lente en el mismo lado de ésta.
d) A 96 cm de la lente en el otro lado de ésta.
e) Ningún objeto puede haber formado esta imagen.

PREGUNTAS

33.12 Varias gotitas de pintura (menores de 1 mm de diámetro) salpican los anteojos de un pintor, los cuales están aproximadamente a 2 cm de sus ojos. ¿Aparecen los puntos en lo que el pintor ve? ¿En qué forma afectan lo que el pintor ve?

33.13 Cuando una mujer buzo cuya visión es de 20/20 se quita su máscara dentro del agua, ve borroso. ¿Por qué es así? ¿La mujer se vuelve miope (la lente del ojo enfoca enfrente de la retina) o sufre hipermetropía (la lente del ojo enfoca atrás de la retina)? Cuando el índice de refracción del medio se aproxima al de la lente, ¿dónde se forma la imagen del objeto? El índice de refracción del agua es de 1.33 y el de la lente del ojo humano de 1.40.

33.14 En la novela clásica de H. G. Wells, *El hombre invisible*, un hombre se las arregla para cambiar el índice de refracción de su cuerpo a 1.0; por lo tanto, la luz no se desvía cuando pasa por su cuerpo (se supone que él está en el aire y no está nadando). Si el índice de refracción de sus ojos fuera igual a uno, ¿sería capaz de ver? Si es así, ¿cómo le parecerían las cosas?

33.15 A veces los astrónomos colocan filtros en la trayectoria de la luz cuando pasa por sus telescopios y otro equipo óptico. Los filtros permiten el paso a un solo color. ¿Cuáles son las ventajas de esto? ¿Cuáles son las desventajas?

33.16 ¿Es posible empezar un incendio enfocando la luz del Sol con una lupa común? ¿Cómo o por qué no?

33.17 ¿Aumentará, disminuirá o seguirá siendo la misma amplificación que produce una simple lupa cuando tanto el objeto como la lente pasan ambos del aire hacia dentro del agua?

33.18 ¿Es posible diseñar un sistema sin lentes ni espejos que forme una imagen? Si es así, ¿cómo y qué inconvenientes podría tener?

33.19 Un sistema de lentes ampliamente utilizado en la visión de maquinaria para mediciones dimensionales es el llamado sistema de lentes telecéntrico. Su configuración básica consiste en dos lentes delgadas de longitudes focales f_1 y f_2, respectivamente, colocadas a una distancia $d = f_1 + f_2$ de separación, y una pequeña abertura circular llamada abertura del salto o *stop* colocada en el punto focal común entre las dos lentes. El objetivo de tal sistema es proporcionar una amplificación que sea independiente de la distancia entre el

objeto y el sistema de la lente, dentro de un rango de distancias especificado que define la llamada *profundidad de campo* del sistema.

a) Dibuje un diagrama de los rayos a través del sistema.

b) Determine la amplificación de dicho sistema.

c) Determine los requisitos que tienen que cumplir las dos lentes para que un sistema telecéntrico sea capaz de producir imágenes con una resolución máxima de un objeto cuyo diámetro es de 50.0 mm en una llamada cabeza de cámara CCD de $\frac{1}{2}$ pulgada (las dimensiones del detector son ~ 6.50 mm × 5.00 mm).

33.20 Las lentes o sistemas de lentes para fotografía se clasifican según su longitud focal y su "velocidad". La "velocidad" de una lente se mide por su número *f* o su salto *f*, la relación entre su longitud focal y su diámetro de abertura. En el caso de muchas lentes que están disponibles en los comercios, este número es aproximadamente de una potencia de $\sqrt{2}$, por ejemplo, 1.4, 2.0, 2.8, 4.0, etc.; la lente cuenta con un diafragma mecánico que puede fijarse a diferentes aberturas o saltos *f*. Tanto más pequeños son los números *f* cuanto "más rápida" es la lente. Las lentes "rápidas" son más caras porque una abertura amplia requiere una lente de mayor calidad.

a) Explique la relación entre el número *f*, es decir, diámetro de la abertura, y "velocidad".

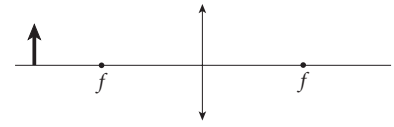
b) Busque la información necesaria y calcule los números *f* del (los espejos principales) telescopio de 10 metros Keck, el Telescopio Espacial Hubble y el radiotelescopio de Arecibo.

33.21 El número *f* de un sistema fotográfico determina no sólo su velocidad, también su "profundidad de campo", las distancias en las cuales los objetos permanecen dentro de un foco aceptable. Los números *f* bajos corresponden a poca profundidad de campo; los números *f* altos, a una profundidad de campo grande. Explique las razones.

33.22 Los espejos para instrumentos astronómicos son invariablemente espejos de *primera superficie*: el revestimiento reflectante se aplica en la superficie expuesta a la luz entrante. Por otro lado, los espejos que se usan en las casas son espejos de *segunda superficie*: el revestimiento se aplica a la parte posterior del vidrio o del material plástico con que está hecho el espejo. (Usted puede descubrir la diferencia acercando la punta de un objeto cerca de la superficie del espejo. El objeto y la imagen casi se tocan en un espejo de primera capa, pero habrá un hueco entre ellos si el espejo es de segunda capa.) Explique las razones de estas diferencias de diseño.

33.23 Cuando comparte los binoculares con un amigo, usted se percata de que tiene que reajustarlos luego de que su amigo los usó (utiliza anteojos, pero se los quita para usar los binoculares). ¿Por qué?

33.24 Utilice el trazo de rayos en el esquema que sigue para determinar la imagen del objeto (flecha hacia arriba) en el siguiente sistema que contiene una lente divergente (doblemente cóncava). ¿La imagen es real o virtual? ¿La imagen es menos alta o más alta que la altura del objeto?



33.25 Usted ha construido un telescopio sencillo con dos lentes convexas. La lente del objetivo es la única de las dos lentes que está más cerca del objeto que se desea observar. ¿Qué clase de imagen produce la lente del ocular si éste está más cerca de la lente del objetivo que la imagen producida por la lente del objetivo?

33.26 ¿Qué clase de lente se usa en los anteojos para corregir la visión de alguien que:

a) ¿es miope?

b) ¿sufre hipermetropía?

33.27 Una estudiante de física pega con resina epóxica dos lentes convergentes a los extremos opuestos de un tubo de $2.0 \cdot 10^1$ cm de largo. Una lente tiene una longitud focal $f_1 = 6.0$ cm y la otra una de $f_2 = 3.0$ cm. La estudiante quiere usar este aparato como si fuera microscopio. ¿Por cuál de los extremos debe ver para lograr la amplificación más alta de un objeto?

PROBLEMAS

Una • y dos •• significan un nivel creciente en la dificultad del problema.

Sección 33.1

33.28 Un objeto cuya altura es *h* está situado a una distancia d_o al lado izquierdo de la lente convergente de longitud focal *f* ($f < d_o$).

a) ¿De cuánto debe ser d_o para que la imagen que se forme esté a una distancia 3*f* a la derecha de la lente?

b) ¿Cuál será la amplificación?

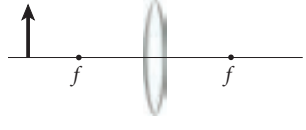
33.29 Un objeto está a 6.0 cm de una lente convergente delgada a lo largo del eje de la lente. Si la lente tiene una longitud focal de 9.0 cm, determine la amplificación de la imagen.

33.30 Una lente biconvexa *hecha a partir de hielo* es tal que el radio de curvatura de la superficie frontal es de 15.0 cm y el de la superficie posterior es de 20.0 cm. Determine qué tan lejos debe estar usted para poner ramitas secas si desea hacer fuego con las lentes de hielo.

33.31 Como ingeniero de láser de alta potencia usted requiere enfocar un rayo láser de 1.06 mm de diámetro en un punto cuyo diámetro es de 10.0 μm que está 20.0 cm atrás de la lente. ¿Qué lente y de qué longitud focal usaría?

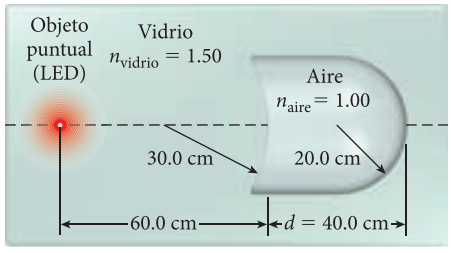
33.32 Un cilindro de plástico que mide $3.0 \cdot 10^1$ cm de largo está conectado por sus extremos a superficies esféricas convexas (desde el exterior de la varilla), y el radio de curvatura de cada una es de $1.0 \cdot 10^1$ cm. Se coloca un objeto pequeño a $1.0 \cdot 10^1$ cm a partir del extremo izquierdo. ¿Qué tan lejos quedará la imagen del objeto del extremo derecho si el índice de refracción del plástico es de 1.5?

•**33.33** El objeto (flecha hacia arriba) del sistema siguiente mide 2.5 cm de altura y está situado a 5.0 cm de una lente convergente (convexa) cuya longitud focal es de 3.0 cm. ¿Cuál es la amplificación de la imagen? ¿La imagen es vertical o está invertida? Confirme sus respuestas trazando rayos.



•**33.34** Demuestre que la distancia mínima posible entre un objeto real y su imagen real a través de una lente convexa delgada es $4f$, donde f es la longitud focal de la lente.

•**33.35** Una cavidad llena de aire limitada por dos superficies esféricas se formó dentro de un bloque de vidrio. Los radios de las dos superficies esféricas son de 30.0 cm y 20.0 cm, respectivamente, y el espesor de la cavidad es de 40.0 cm (vea el diagrama siguiente). Un diodo electroluminiscente (LED, del inglés *light-emitting diode*) está empotrado en el bloque a una distancia de 60.0 cm enfrente de la cavidad. Puesto que $n_{\text{vidrio}} = 1.50$ y $n_{\text{aire}} = 1.00$, y si usamos sólo rayos luminosos paraxiales (es decir, en la aproximación paraxial):



a) Calcule la posición final de la imagen del diodo a través de la cavidad llena de aire.

b) Trace un diagrama de rayos que muestre la manera en la que se forma la imagen.

Sección 33.2

33.36 Para estudiar mejor una muestra de tejidos, un patólogo sostiene una lupa de longitud focal de 5.00 cm, a 3.00 cm de la muestra. ¿Qué tanta amplificación se puede conseguir con la lupa?

33.37 Suponga que la longitud focal de una lupa es de 5.00 cm. Determine el poder de amplificación de este vidrio cuando el objeto se coloca en el punto cercano.

33.38 ¿Cuál es la longitud focal de una lupa si un objeto de 1.00 mm parece de 10. mm?

•**33.39** Una persona con una distancia de punto cercano de 24.0 cm se da cuenta de que una lupa da una amplificación angular que es 1.25 veces más grande cuando la imagen de la lupa está en el punto cercano que cuando la imagen está en el infinito. ¿Cuál es la longitud focal de la lupa?

Sección 33.3

33.40 Un haz de luz paralela de 1.00 mm de diámetro atraviesa una lente cuya longitud focal es de 10.0 cm. Otra lente, ésta de 20.0 cm de longitud focal, está situada atrás de la primera lente de tal manera que la luz que viaja sale desde ésta de nuevo paralela.

a) ¿Cuál es la distancia entre las dos lentes?

b) ¿Qué tan ancho es el rayo que sale?

33.41 ¿Qué tan grande parece un insecto de 5.0 mm cuando se ve a través de un sistema de dos lentes idénticas cuya longitud focal es de 5.0 cm y están separadas por una distancia de 12 cm si el insecto está a 10.0 cm de la primera lente? ¿La imagen es real o virtual? ¿Invertida o vertical?

•**33.42** Tres lentes convergentes cuya longitud focal es de 5.0 cm están acomodadas de tal manera que la separación entre ellas es de $2.0 \cdot 10^1$ cm y se utilizan para formar la imagen de un insecto que está a $2.0 \cdot 10^1$ cm alejado de ellas.

a) ¿Dónde está la imagen?

b) ¿Es real o virtual?

c) ¿Es vertical o invertida?

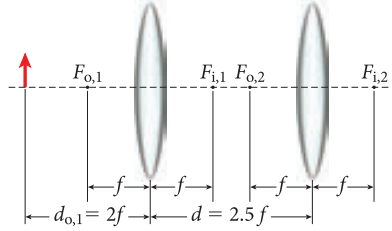
•**33.43** Dos lentes delgadas convexas idénticas, cada una de longitud focal f, están separadas por una distancia de $d = 2.5f$. Un objeto está situado enfrente de la primera lente a una distancia $d_{o,1} = 2f$.

a) Calcule la posición de la imagen final de un objeto visto a través del sistema de lentes.

b) Calcule la amplificación transversa total del sistema.

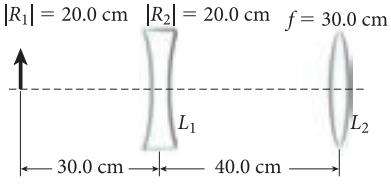
c) Trace un diagrama de rayos para este sistema y muestre la imagen final.

d) Describa la imagen final (real o virtual, vertical o invertida, más grande o más pequeña) en relación con el objeto inicial.



•**33.44** Dos lentes convergentes cuyas longitudes focales son de 5.00 y 10.0 cm, respectivamente, están separadas 30.0 cm. Un objeto de 5.00 cm de altura (h) se sitúa a 10.0 cm a la izquierda de la lente de 5.00 cm. ¿Cuál será la posición y la altura de la imagen final producida por este sistema de lentes?

33.45 Se utilizan dos lentes para producir una imagen de una fuente de 10.0 cm de altura, que se localiza a 30.0 cm a la izquierda de la primera lente, según se ilustra en la figura siguiente. La lente L_1 es una lente bicóncava fabricada con vidrio tipo crown (índice de refracción $n = 1.55$) y cuyo radio de curvatura mide 20.0 cm tanto para la superficie 1 como para la 2. La lente L_2 está a 40.0 cm a la derecha de la primera lente L_1. La lente L_2 es una lente convergente cuya longitud focal es de 30.0 cm. ¿A qué distancia relativa del objeto se producirá la imagen? Determine la posición trazando rayos y calculando algebraicamente.



••**33.46** Los sistemas ópticos muy complejos se analizan y diseñan con ayuda de técnicas del álgebra lineal. Los haces de luz (o haces de partículas) se describen por medio de dos vectores columna de dos componentes que contienen a y en cualquier punto a lo largo del eje del sistema, la distancia del rayo a partir del eje óptico, y dy/dx, la pendiente del rayo. Los componentes del sistema se describen por matrices 2×2 las cuales incorporan sus efectos en el rayo; las combinaciones de las componentes se describen mediante productos de estas matrices.

a) Una lente delgada no modifica la posición de un rayo, pero su pendiente aumenta (divergente) o disminuye (convergente)

una cantidad proporcional a la distancia del rayo desde el eje. Escriba la matriz para una lente delgada de longitud focal *f*.

b) Una separación entre los componentes no modifica la pendiente de un rayo; la distancia del rayo a partir del eje cambia según la pendiente del rayo por la longitud de la separación. Escriba la matriz para una separación *x*.

c) Escriba la matriz para el sistema de dos "lentes teleobjetivo" que se describe en la sección 33.3.

Sección 33.4

33.47 La longitud característica de un globo ocular humano es de 2.50 cm.

a) ¿Cual es la longitud focal efectiva del sistema de dos lentes hecho a partir de la córnea y lente normales de una persona cuando ve objetos lejanos?

b) ¿Cuál es la longitud focal efectiva al ver objetos en el punto cercano?

33.48 Aplique las respuestas de la pregunta anterior, y dado que la córnea en un ojo humano representativo tiene una longitud focal fija de 2.33 cm, ¿qué valores de longitudes focales tiene la lente en un ojo representativo?

33.49 Jane posee un punto cercano de 125 cm y desea leer la pantalla de la computadora a 40.0 cm de sus ojos.

a) ¿Cuál es la distancia del objeto?

b) ¿Cuál es la distancia de la imagen?

c) ¿Cuál es la longitud focal?

d) ¿Cuál es la potencia de la lente correctora necesaria?

e) ¿Es divergente o convergente la lente correctora?

33.50 El punto lejano de Bill es de 125 cm y desea ver objetos lejanos con claridad.

a) ¿Cuál es la distancia del objeto?

b) ¿Cuál es la distancia de la imagen?

c) ¿Cuál es la longitud focal?

d) ¿Cuál es la potencia de la lente correctora necesaria?

e) ¿Es divergente o convergente la lente correctora?

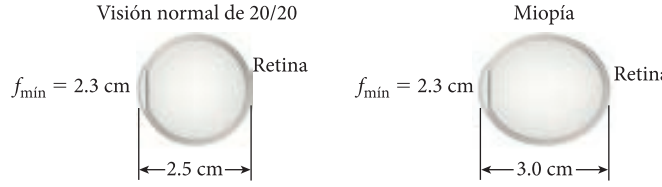
33.51 Una persona que usa lentes bifocales está leyendo el periódico a una distancia de 25 cm. La parte inferior de la lente es convergente para la lectura y su longitud focal es de 70.0 cm. La parte superior de la lente es divergente para ver a lo lejos y su longitud focal es de 50.0 cm. ¿Cuáles son los puntos cercano y lejano incorrectos de la persona?

33.52 El radio de curvatura de la parte exterior de la córnea es de 8.0 mm, la parte interior es relativamente plana. Si el índice de refracción de la córnea y el humor acuoso es de 1.34:

a) Determine la potencia de la córnea.

b) Si la combinación de la lente y la córnea tiene una potencia de 50 dioptrías, calcule la potencia de la lente (suponga que las dos están en contacto).

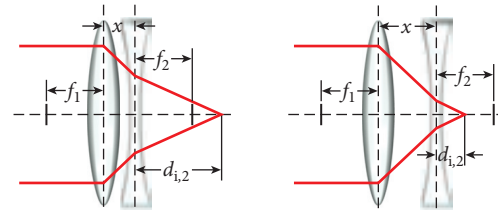
•**33.53** Cuando los objetos se acercan al ojo humano, los músculos ciliares hacen que la lente en el frente del ojo se vuelva más curva, lo que disminuye la longitud focal de la lente. La longitud focal más corta $f_{\text{mín}}$ de esta lente es característicamente de 2.3 cm. ¿Cuál es lo más cercano que uno puede llevar un objeto a un ojo humano normal (vea el lado izquierdo de la figura siguiente) y todavía tener la imagen del objeto proyectada nítidamente en la retina, la cual está a 2.5 cm atrás de la lente? Ahora considere un ojo humano miope que tiene la misma $f_{\text{mín}}$, pero que está estirado horizontalmente, con una retina que está 3.0 cm atrás de la lente (vea el lado derecho de la figura que sigue). ¿Cuál es lo más cercano que uno puede llevar un objeto a este ojo humano miope y todavía tener la imagen del objeto proyectada nítidamente en la retina? Compare la amplificación angular máxima producida por este ojo miope con la del ojo normal.



•**33.54** Una persona es miope. La potencia de las lentes de sus anteojos es de −5.75 dioptrías y usa los anteojos 1.00 cm enfrente de sus córneas. ¿Cuál es la potencia prescrita de sus lentes de contacto?

Sección 33.5

33.55 Un fotógrafo novato intenta construir una lente teleobjetivo, y para ello utiliza una lente convergente seguida por una lente divergente. Las dos lentes están separadas por una distancia $x = 50$ mm, según se ilustra en la figura 33.18, que se reproduce en seguida. Si la longitud focal de la primera lente es $2.0 \cdot 10^2$ mm y la longitud focal de la segunda es de $-3.0 \cdot 10^2$ mm, ¿cuál es la longitud focal efectiva de esta combinación de lentes? ¿Cuál es f_{ef} si la separación de las lentes cambia a $1.0 \cdot 10^2$ mm?



33.56 En el caso de una cierta cámara, la distancia entre la lente y la película es de 10.0 cm. Usted observa que los objetos que están muy alejados se ven enfocados en forma correcta. ¿Qué tan lejos de la película tendría usted que mover la lente con la finalidad de enfocar correctamente un objeto que está alejado 100. cm?

33.57 Una cámara tiene una lente cuya longitud focal es de 60 mm. Suponga que reemplaza la lente normal con una lente teleobjetivo cuya longitud focal puede variar desde 35 mm a 250 mm y usar la cámara para fotografiar un objeto en el infinito. Comparada con una lente de 60 mm, ¿qué amplificación de la imagen se conseguiría si se usara la longitud focal de 240 mm?

•**33.58** Por lo general, la lente de una cámara consiste en una combinación de dos o más lentes para producir una imagen de buena calidad. Suponga una lente para cámara que tiene dos lentes, una lente divergente cuya longitud focal es de 10.0 cm

y una lente convergente de longitud focal igual a 5.00 cm. Las dos lentes están separadas 7.00 cm. Una flor de 10.0 cm de longitud, que se desea fotografiar, está sostenida verticalmente a una distancia de 50.0 cm enfrente de la lente divergente; la lente convergente está colocada atrás de la lente divergente. ¿Cuál es la ubicación, orientación, dimensiones y la amplificación de la imagen final?

Sección 33.6

33.59 Un estudiante encuentra un tubo de 20 cm de largo y en uno de sus extremos está una lente. Esta lente tiene una longitud focal de 0.70 cm. El estudiante quiere usar el tubo y la lente para hacer un microscopio con una amplificación de $3.0 \cdot 10^2\times$. ¿Qué longitud focal debe tener la lente que el estudiante debe instalar en el otro extremo del tubo?

33.60 La lente del objetivo de un microscopio de laboratorio tiene una longitud focal de 3.00 cm y proporciona una amplificación total de $1.0 \cdot 10^2$. ¿Cuál es la longitud focal del ocular si la distancia entre las dos lentes es de 30.0 cm?

33.61 Usted ha encontrado en el laboratorio un viejo microscopio, el cual no tiene ocular. Todavía cuenta con el objetivo y las marcas indican que su longitud focal es de 7.00 mm. Usted puede poner un nuevo ocular, el cual va a 20.0 cm a partir del objetivo. Usted necesita una amplificación de alrededor de 200. Suponga que quiere la distancia de visión confortable para que la imagen final esté a 25.0 cm. Usted encuentra en un cajón oculares con las marcas de 2.00, 4 .00 y 8.00 cm de longitud focal. ¿Cuál es su mejor elección?

33.62 La longitud focal del ocular de un microscopio es de 2.0 cm y una lente de objetivo de 0.80 cm. En el caso de un ojo normal relajado, calcule la posición del objeto si la distancia entre las lentes es de 16.2 cm.

•**33.63** Suponga que quiere diseñar un microscopio de modo que para una distancia fija entre dos lentes la magnitud de la amplificación varíe de 150 a 450 cuando usted sustituye oculares de varias longitudes focales.

a) Si la longitud focal más larga de un ocular es de $6.0 \cdot 10^1$ mm, ¿cuál será la longitud focal más corta?

b) Si usted quiere que la distancia entre el ocular y el objetivo sea de 35 cm, ¿cuál deberá ser la longitud focal del objetivo?

Sección 33.7

33.64 La lente del objetivo de un telescopio refractor tiene una longitud focal de 10.0 m. Suponga que se usa un ocular de longitud focal de 2.00 cm. ¿Cuál es la amplificación del telescopio?

33.65 ¿Cuál es la amplificación de un telescopio con $f_o = 1.00 \cdot 10^2$ cm y $f_e = 5.00$ cm?

33.66 Un telescopio sencillo está constituido por un ocular de longitud focal igual a 25.0 mm y un objetivo de longitud focal igual a 80.0 mm. Calcule el ángulo subtendido por la imagen de la Luna cuando se le observa a través de este telescopio desde la Tierra.

33.67 Galileo descubrió las lunas de Júpiter en el otoño de 1609. Usaba un telescopio que diseñó él mismo y que tenía una lente objetivo cuya longitud focal $f_o = 40.0$ pulgadas y un ocular de longitud focal $f_e = 2.00$ pulgadas. Calcule la potencia de amplificación del telescopio de Galileo.

33.68 Dos estrellas distantes están separadas por un ángulo de 35 segundos de arco. Si usted tiene un telescopio refractor cuya longitud focal del objetivo es 3.5 m, ¿cuál es la longitud focal de la lente del ocular que usted requiere para observar las estrellas como si estuvieran separadas por 35 minutos de arco?

•**33.69** Se ajusta un telescopio astronómico de 180× para un ojo relajado cuando las dos lentes están separadas 1.30 m. ¿Cuál es la longitud focal de cada lente?

•**33.70** Se utilizan dos telescopios refractores para observar los cráteres de la Luna. La longitud focal del objetivo de ambos telescopios es igual a 95.0 cm y la longitud focal del ocular de ambos telescopios es igual a 3.80 cm. Los telescopios son idénticos, excepto por el diámetro de las lentes. El diámetro del objetivo del telescopio A mide 10.0 cm y las lentes del telescopio B son mayores por un factor de dos, de modo que el diámetro del objetivo es de 20.0 cm.

a) ¿Cuáles son las amplificaciones angulares de los telescopios A y B?

b) ¿Las imágenes que producen ambos telescopios tienen la misma brillantez? Si no es así, ¿cuál es más brillante y qué tanto?

••**33.71** Algunos espejos para telescopios reflectores tienen un recipiente giratorio de mercurio para producir una superficie parabólica enorme. Si el recipiente gira sobre su eje con una frecuencia angular ω, demuestre que la longitud focal del espejo resultante es $f = g/2\omega^2$.

Problemas adicionales

33.72 Se proyecta un objeto de 4.0 cm de alto sobre una pantalla por medio de una lente convergente cuya longitud focal es de 35 cm. La imagen sobre la pantalla mide 56 cm. ¿Dónde está situada la lente y el objeto con respecto a la pantalla?

33.73 Una persona cuya vista es normal encuentra los anteojos de un amigo suyo que padece miopía e intenta enfocar un objeto de su alrededor usando estos anteojos. Es capaz de enfocar sólo objetos muy lejanos viendo a través de las gafas, y no puede enfocar objetos que están cerca de ella. Determine la receta de los anteojos de su amigo en dioptrías.

33.74 Suponga que el punto cercano de su ojo es $2.0 \cdot 10^1$ cm y el punto lejano es el infinito. Si usa unas gafas de –0.20 dioptrías, ¿cuál será el intervalo en el que usted será capaz de ver objetos con claridad?

33.75 Un pez está nadando en un acuario a una profundidad aparente $d = 1.0 \cdot 10^1$ cm. ¿A qué profundidad usted debe pescar con el fin de capturarlo?

33.76 Un compañero de clase afirma que usando un espejo de longitud focal igual a 40.0 cm puede proyectar sobre una pantalla un pájaro de 10.0 cm de alto que está alejado 100. m. Afirma que la imagen no será menor de 1.00 cm de alto y que estará invertida. ¿Es cierto lo que dice?

33.77 Un objeto está a 6.0 cm de una lente delgada a lo largo del eje de la misma. Si la lente tiene una longitud focal igual a 9.0 cm, determine la distancia de la imagen.

33.78 Una lente esférica delgada está hecha de vidrio de modo que sobresale hacia afuera en la parte media de ambos lados. La lente del vidrio ha sido acomodada de forma que las superficies son parte de una esfera cuyo radio mide 25 cm en un lado y en el otro $3.0 \cdot 10^1$ cm. ¿Cuál es la potencia de esta lente en dioptrías?

33.79 Una lente divergente está fabricada con vidrio de tal manera que una superficie de la lente es convexa y la otra es cóncava. La lente de vidrio está acomodada de tal manera que la superficie convexa forma parte de una esfera de radio igual a 45 cm y la superficie cóncava es parte de una esfera de radio igual a $2.0 \cdot 10^1$ cm. ¿Cuál es la potencia de esta lente en dioptrías?

33.80 Una persona que sólo ve de lejos es capaz de ver con nitidez un objeto que está al menos a 2.5 m de distancia. Para poder leer un libro que está alejado $2.0 \cdot 10^1$ cm, ¿qué clase de anteojos correctores debe comprar?

33.81 Usted está experimentando con una lupa (que es una simple lente convergente) en una mesa. Descubre que al sostener la lupa a 92.0 mm por arriba de la mesa, usted forma una imagen real de una luz que está directamente sobre su cabeza. Si la distancia entre la luz y la mesa es de 2.35 m, ¿cuál es la longitud focal de la lente?

33.82 Una adolescente olvida ponerse sus lentes y se percata de que necesita sostener un libro a 15 cm de sus ojos para ver claramente lo impreso.

a) Si tuviera que sostener el libro a 25 cm, ¿qué tipo de lentes correctoras tendría que usar para ver con nitidez lo impreso?

b) ¿Cuál es la longitud focal de la lente?

33.83 La longitud focal de la lente de una cámara es de 38.0 mm. ¿Qué tanto se tiene que desplazar la lente para cambiar de una persona enfocada a 30.0 m y enfocar a otra que está a 5.00 m?

33.84 Se anuncia un telescopio afirmando que proporciona una amplificación de magnitud 41 porque está equipado con un ocular cuya longitud focal es de $4.0 \cdot 10^1$ mm. ¿Cuál es la longitud focal del objetivo?

•**33.85** Determine la posición y las dimensiones de la imagen final formada por un sistema de elementos que consisten en un objeto de 2.0 cm de alto que está a $x = 0$ m, una lente convergente de longitud focal igual a $5.0 \cdot 10^1$ cm situada a $x = 3.0 \cdot 10^1$ cm y un espejo plano que está a $x = 7.0 \cdot 10^1$ cm.

33.86 La distancia desde la lente (en realidad una combinación de la córnea y el cristalino) a la retina en la parte posterior del ojo es 2.0 cm. Si la luz está enfocada en la retina:

a) ¿Cuál es la longitud focal de la lente cuando ve un objeto lejano?

b) ¿Cuál es la longitud focal de la lente cuando ve un objeto que está a 25 cm del frente de los ojos?

33.87 Usted visita a su oftalmólogo y se entera que requiere lentes que tengan un valor en dioptrías de -8.4. ¿Padece usted miopía o hipermetropía? Sin corregir su visión, ¿qué tan lejos de sus ojos debe sostener un libro para ver con claridad las letras?

33.88 El punto cercano de Jack es de 32 cm y usa una lupa de 25 dioptrías.

a) ¿Cuál es la amplificación si la imagen final está en el infinito?

b) ¿Cuál es la amplificación si la imagen final está en el punto cercano?

33.89 ¿Dónde está la imagen y cuál es la amplificación si frente a usted, a 1.0 ft (30.5 cm) de distancia, sostiene una canica de vidrio transparente de 2.0 pulgadas de diámetro y admira la imagen?

•**33.90** Una lente divergente con $f = -30.0$ cm está situada a 15.0 cm atrás de una lente convergente de $f = 20.0$ cm. ¿Dónde será enfocado un objeto en el infinito que está frente a la lente convergente?

•**33.91** Un profesor desea usar una lente para proyectar una imagen real de un foco sobre una pantalla que está a 1.71 m del foco, a fin de obtener una imagen que sea el doble de grande que éste, ¿qué longitud focal de lente se requiere?

•**33.92** Un viejo telescopio refractor que está en un museo en exhibición tiene 55 cm de largo y una amplificación de 45. ¿Cuál es la longitud focal de las lentes de su objetivo y de su ocular?

•**33.93** Una lente convergente de longitud focal igual a $f = 50.0$ cm se coloca a 175 cm a la izquierda de una esfera metálica cuyo radio es $R = 100.$ cm. Un objeto de altura $h = 20.0$ cm se coloca a 30.0 cm a la izquierda de la lente. ¿Cuál es la altura de la imagen que se forma en la esfera metálica?

•**33.94** Cuando se trabaja con espectroscopia óptica, por ejemplo, fotoluminiscencia o espectroscopia de Raman, se enfoca un rayo láser sobre la muestra que se quiere estudiar por medio de una lente con longitud focal f. Suponga que el rayo láser parte de una pupila D_o de diámetro que está a una distancia d_o de la lente de enfoque. Para el caso en el que la imagen de la pupila de salida se forma en la muestra, calcule:

a) ¿A qué distancia d_i de la lente está la muestra?

b) ¿Cuál es el diámetro D_i del punto láser (imagen de la pupila de salida) sobre la muestra?

c) ¿Cuáles son los resultados numéricos para: $f = 10.0$ cm, $D_o = 2.00$ mm, $d_o = 1.50$ m?

•**33.95** En el caso de una persona cuyo punto cercano es 115 cm, de modo que puede leer en el monitor de su computadora a 55 cm, ¿qué potencia de anteojos para leer debe prescribir su médico para conservar la distancia lente-ojo de 2.0 cm de sus anteojos?

•**33.96** Se ha enfocado en forma correcta un telescopio hacia el Sol. Usted quiere observarlo, pero para proteger su vista usted no quiere ver por el ocular; en lugar de eso, quiere proyectar una imagen del Sol sobre una pantalla a 1.5 m atrás (posición original) del ocular y observarla. Si la longitud focal del ocular es de 8.0 cm, ¿cuánto debe desplazar el ocular?

34 Óptica ondulatoria

LO QUE APRENDEREMOS 1097

34.1 Ondas de luz 1097
34.2 Interferencia 1100
34.3 Interferencia de rendija doble 1101
34.4 Interferencia de película delgada y anillos de Newton 1104
Ejemplo 34.1 Recubrimiento de lente 1106
34.5 Interferómetro 1107
34.6 Difracción 1109
34.7 Difracción de una sola rendija 1110
Problema resuelto 34.1 Ancho del máximo central 1112
34.8 Difracción mediante una abertura circular 1113
Ejemplo 34.2 Criterio de Rayleigh para el Telescopio Espacial Hubble 1114
34.9 Difracción de doble rendija 1114
34.10 Rejillas 1115
Ejemplo 34.3 CD o DVD como rejilla de difracción 1117
Discos Blu-ray 1119
34.11 Difracción de rayos X y estructura cristalina 1121

LO QUE HEMOS APRENDIDO/ GUÍA DE ESTUDIO PARA EXAMEN 1122

Práctica para resolución de problemas 1124
Problema resuelto 34.2 Satélite espía 1124
Problema resuelto 34.3 Cuña de aire 1125
Preguntas de opción múltiple 1126
Preguntas 1127
Problemas 1128

FIGURA 34.1 Burbujas de jabón que muestran colores de fenómenos de interferencia.

LO QUE APRENDEREMOS

- La naturaleza ondulatoria de la luz origina fenómenos que no pueden explicarse por medio de la óptica geométrica.
- La superposición de ondas de luz que están en fase interfieren constructivamente; la superposición de ondas que están 180° fuera de fase interfieren destructivamente.
- La superposición de luz que ha viajado distintas distancias puede interferir de forma constructiva o destructiva, dependiendo de la diferencia de longitud de trayectoria.
- Las ondas de luz se dispersan después de pasar por una rendija estrecha o después de encontrar un obstáculo. Esta dispersión se llama difracción.
- Las ondas de luz que tienen la misma fase y frecuencia se llaman ondas de luz coherentes.
- La luz coherente que incide en una rendija estrecha produce un patrón de difracción; la luz coherente que incide en dos rendijas estrechas produce un patrón de interferencia.
- La interferencia puede ocurrir en luz que es parcialmente reflejada desde cada una de las dos superficies (frente y atrás) de una delgada película óptica.
- Un interferómetro es un dispositivo diseñado para medir longitudes o cambios en la longitud por medio de interferencia de la luz.
- La difracción puede limitar la capacidad de un telescopio o cámara para resolver o enfocar objetos distantes.
- Una rejilla de difracción consta de muchas ranuras estrechas que pueden usarse para producir un patrón de intensidad que consta de franjas brillantes estrechas separadas por áreas oscuras amplias para una fuente de luz de longitud de onda simple.
- La difracción de rayos X se puede usar para estudiar la estructura atómica de materiales.

Las burbujas de jabón consisten en agua clara con un poco de jabón para trastos. ¿Por qué, entonces, vemos los colores del arco iris cuando vemos burbujas de jabón en el aire (figura 34.1)? Resulta que la óptica de las burbujas de jabón no es la misma que las reflexiones o refracciones que dan lugar a los arco iris (capítulo 32). En cambio, los colores de las burbujas aparecen debido a la interferencia de la luz de varias longitudes de onda; un efecto de onda, no explicado por la óptica geométrica.

Hemos estudiado la formación de imágenes suponiendo que la luz viaja en rayos rectos, sin considerar la naturaleza de la luz: por ejemplo, si la luz consta de partículas u ondas. En este capítulo examinaremos los efectos ópticos mejor explicados por la naturaleza ondulatoria de la luz, un estudio que suele llamarse *óptica física*, distinto de la óptica geométrica. Es posible que desee revisar el material acerca de las ondas en el capítulo 15 del volumen 1, especialmente el concepto de interferencia de ondas. Estudiaremos también una propiedad de las ondas llamada difracción, que no analizamos en el capítulo 15, pero que se vuelve importante al tratar con longitudes de onda muy pequeñas como las de la luz. Las dos propiedades, interferencia y difracción, explican no sólo los colores de las burbujas de jabón, también explica cuestiones como qué tan bien podemos ver objetos distantes y separados, y no juntos y borrosos.

El material de este capítulo no responde por completo a las preguntas de lo que es la luz y cómo se comporta. En los siguientes capítulos veremos qué preguntas acerca de la naturaleza de la luz dio lugar a algunos de los desarrollos más grandes en la física del siglo XX, ideas que son agrupadas con frecuencia mediante el nombre de *física moderna*. Las ideas de este capítulo serán cruciales en nuestro examen de la comprensión moderna de la luz, la materia, el tiempo y el espacio.

34.1 Ondas de luz

En el capítulo 31 aprendimos que la luz es una onda electromagnética. Sin embargo, normalmente no pensamos en la luz como una onda, porque su longitud de onda es tan corta que normalmente no notamos su comportamiento ondulatorio. Así, en los capítulos 32 y 33, analizamos la luz como rayos, una descripción que es apropiada para las situaciones físicas en las que podemos ignorar la longitud de onda de la luz en comparación con las otras dimensiones físicas. Estos rayos viajan en líneas rectas excepto cuando se reflejan de un espejo o se refractan en la frontera entre dos medios ópticos.

Ahora deseamos atender las situaciones físicas en las que ya no podemos considerar la longitud de onda de la luz como insignificantemente pequeña. En este capítulo analizamos la naturaleza ondulatoria de la luz y aplicamos a la luz muchos de los conceptos de onda (superposición, coherencia, interferencia, reflexión de frontera y otros) que desarrollamos en el capítulo 15. Esto a veces dará lugar a resultados sorprendentes. Pero todos ellos se pueden verificar en forma experimental.

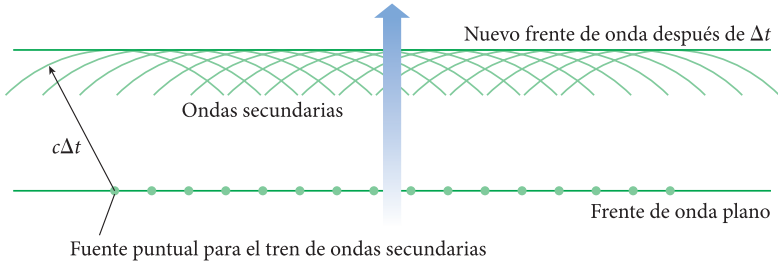


FIGURA 34.2 Construcción de Huygens para una onda plana que viaja verticalmente hacia arriba.

Una forma de reconciliar la naturaleza ondulatoria de la luz con las propiedades ópticas geométricas de la luz es usar el **principio de Huygens**, desarrollado por el físico holandés Christiaan Huygens (1629-1695). Huygens propuso una teoría ondulatoria de la luz en 1678, mucho antes de que Maxwell desarrollara sus teorías de la luz. El principio de Huygens establece que todo punto en un frente de onda que se propaga sirve como una fuente de ondas esféricas secundarias. Más tarde, la envolvente de estos frentes se vuelve un frente de onda. Si la onda original tiene frecuencia f y velocidad v, las ondas secundarias tienen la misma f y v. Los diagramas de fenómenos basados en el principio de Huygens se llaman construcciones de Huygens.

La figura 34.2 muestra una construcción de Huygens para una onda plana. Empezamos con una onda plana que viaja a la velocidad de la luz, c. Suponga fuentes puntuales de ondas esféricas a lo largo del frente de onda, como se ilustra. Estas ondas secundarias también viajan a c, de modo que en el tiempo Δt estas ondas han recorrido una distancia de $c\Delta t$. Suponiendo muchas fuentes puntuales a lo largo del frente de onda, la figura 34.2 muestra que la envolvente de estas ondas secundarias forma un nuevo frente de onda paralelo al frente de onda original. Así, la onda continúa viajando en línea recta con la frecuencia y velocidad originales.

En el capítulo 32, el índice de refracción n en un medio se definió como la relación o razón de la velocidad de la luz en el vacío, c, dividida entre la velocidad de la luz en ese medio, v,

$$n = \frac{c}{v}. \tag{34.1}$$

Usando esta definición, la ley de Snell se puede expresar como

$$n_1 \operatorname{sen}\theta_1 = n_2 \operatorname{sen}\theta_2. \tag{34.2}$$

En el capítulo 32 se demostró que esta ley describe correctamente el fenómeno de refracción en los límites entre diferentes medios, pero la deducción de la ley de Snell se aplazó al presente capítulo. Con el principio de Huygens en mano, ahora podemos realizar esta deducción.

DEDUCCIÓN 34.1 Ley de Snell

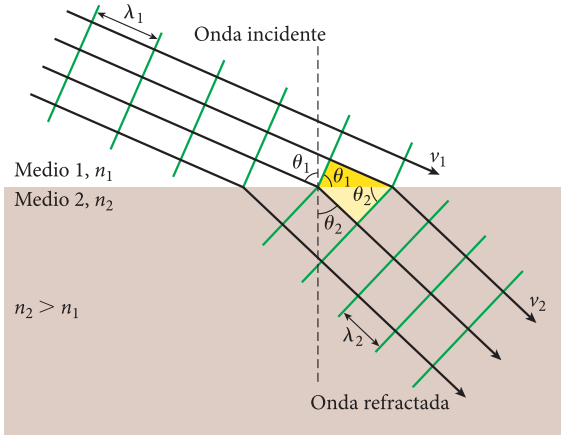


FIGURA 34.3 Una construcción de Huygens de una onda que viaja en un medio óptico que incide en la frontera con un segundo medio óptico. Las líneas verdes representan frentes de onda, mientras que las flechas negras denotan rayos.

Se puede usar una construcción de Huygens para deducir la ley de Snell para la refracción entre dos medios ópticos con diferentes índices de refracción. Suponga una onda con frentes de onda separados por una longitud de onda λ_1 que viaja con velocidad v_1 en un medio ópticamente transparente que incide en la frontera con un segundo medio ópticamente transparente (figura 34.3).

El ángulo del frente de onda incidente (línea verde en el medio 1) con respecto a la frontera es θ_1, que es también el ángulo que el rayo de luz (flecha negra) forma con respecto a la normal a la frontera. Cuando la onda entra al segundo medio, ésta viaja con velocidad v_2. De acuerdo con el principio de Huygens, los frentes de onda son el resultado de la propagación de la onda secundaria a la velocidad de la onda original, de modo que la separación de los frentes de onda en el segundo medio puede escribirse en términos de la longitud de onda en el segundo medio λ_2. Por lo tanto, el intervalo de tiempo entre los frentes de onda para el primer medio es λ_1/v_1 y el intervalo de tiempo para el segundo medio es λ_2/v_2. El punto esencial es que este intervalo de tiempo es el mismo para ondas en cualquier lado de la frontera. (Si

estos intervalos no fueran iguales, ¡los frentes estarían apareciendo y desapareciendo misteriosamente!) Así:

$$\frac{\lambda_1}{v_1}=\frac{\lambda_2}{v_2}\Leftrightarrow\frac{\lambda_1}{\lambda_2}=\frac{v_1}{v_2}.$$

Por consiguiente, las longitudes de onda de la luz en los dos medios son proporcionales a la velocidad de la luz en esos medios.

Se puede obtener una relación entre el ángulo de los frentes de onda incidentes θ_1 con la frontera y el ángulo de los frentes de onda transmitidos θ_2 con la frontera analizando la región sombreada amarilla de la figura 34.3, mostrada con más detalle en la figura 34.4.

De la figura 34.4, y usando trigonometría, se deduce que

$$\operatorname{sen}\theta_1=\frac{\lambda_1}{x}\text{ y }\operatorname{sen}\theta_2=\frac{\lambda_2}{x}.$$

Al dividir estas dos ecuaciones entre sí, se obtiene

$$\frac{\operatorname{sen}\theta_1}{\operatorname{sen}\theta_2}=\frac{\lambda_1}{\lambda_2}=\frac{v_1}{v_2}.$$

Dado que la definición del índice de refracción n de un medio óptico es $n = c/v$, donde c es la velocidad de la luz en un vacío y v es la velocidad de la luz en el medio óptico,

$$\frac{\operatorname{sen}\theta_1}{\operatorname{sen}\theta_2}=\frac{v_1}{v_2}=\frac{c/n_1}{c/n_2}=\frac{n_2}{n_1}$$

o bien,

$$n_1\operatorname{sen}\theta_1=n_2\operatorname{sen}\theta_2,$$

que es la ley de Snell.

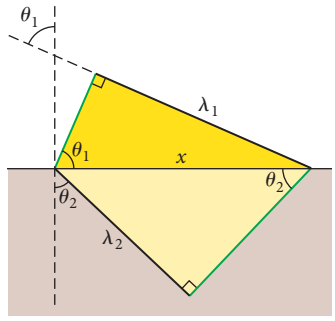


FIGURA 34.4 Sección ampliada de la figura 34.3, que muestra el frente de onda incidente y la dirección, así como el frente de onda transmitido y la dirección.

Hemos visto que la longitud de onda de la luz cambia cuando pasa del vacío a un medio óptico con índice de refracción mayor que uno. Tomando el resultado $\lambda_1/v_1 = \lambda_2/v_2$ de la deducción 34.1, con el medio 1 estando en un vacío mientras el medio 2 tiene un índice de refracción n, podemos escribir

$$\lambda_n=\lambda\frac{v}{c}=\frac{\lambda}{n}.$$

Así, la longitud de onda de la luz es más corta en un medio con índice de refracción mayor que uno que está en un vacío. La frecuencia f de esta luz se puede calcular de $v = \lambda f$. La frecuencia f_n de la luz que viaja en el medio está dada por

$$f_n=\frac{v}{\lambda_n}=\frac{c/n}{\lambda/n}=\frac{c}{\lambda}=f. \tag{34.3}$$

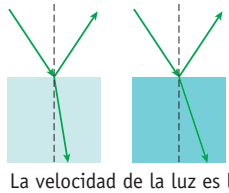
Por lo tanto, la frecuencia de la luz que viaja en un medio óptico con $n > 1$ es la misma que la frecuencia de esa luz que viaja en un vacío. (La ecuación 34.3 es equivalente a la declaración hecha antes de que el intervalo de tiempo entre frentes de onda para el primer medio es igual al intervalo de tiempo entre frentes de onda para el segundo medio.)

34.1 Oportunidad de autoevaluación

El agua tiene un índice de refracción de 1.33, lo que significa que las longitudes de onda de la luz emitida desde objetos son diferentes si se propagan en agua o si se propagan en aire. ¿Esto significa que usted ve objetos de colores diferentes cuando los ve bajo el agua? (Usted puede hacer este experimento en su tina de baño, si lo desea.)

34.1 Ejercicio en clase

Bloques de dos materiales transparentes distintos están colocados en aire y tienen rayos de luz idénticos de longitud de onda simple que inciden sobre ellos al mismo ángulo. Al examinar la figura, ¿qué puede decir acerca de la velocidad de la luz en estos dos bloques?



a) La velocidad de la luz es la misma en ambos bloques.

b) La velocidad de la luz es mayor en el bloque de la izquierda.

c) La velocidad de la luz es mayor en el bloque de la derecha.

d) La información acerca de qué velocidad de la luz es mayor no se puede determinar a partir de la información dada.

34.2 Ejercicio en clase

Un rayo de luz con longitud de onda λ = 560.0 nm entra a un bloque de plástico transparente desde el aire a un ángulo de incidencia de θ_i = 36.1° con respecto a la normal. El ángulo de refracción es θ_r = 21.7°. ¿Cuál es la velocidad de la luz dentro del plástico?

a) $1.16\cdot10^8$ m/s

b) $1.31\cdot10^8$ m/s

c) $1.67\cdot10^8$ m/s

d) $1.88\cdot10^8$ m/s

e) $3.00\cdot10^8$ m/s

Definición

La **luz coherente** está hecha de ondas con la misma longitud de onda que están en fase entre sí. Una gran fuente de luz coherente es el láser. Por otro lado, la luz de lámparas, o la luz del sol, es **incoherente**, lo que significa que las ondas pueden tener diferentes longitudes de onda y relaciones de fase entre sí.

34.2 Interferencia

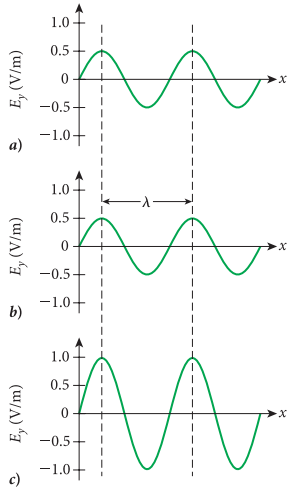


FIGURA 34.5 *a,b*) Ondas de luz en fase con la misma amplitud y longitud de onda λ; *c*) la superposición en fase de las dos ondas de luz demuestra la interferencia constructiva, produciendo una onda con el doble de amplitud.

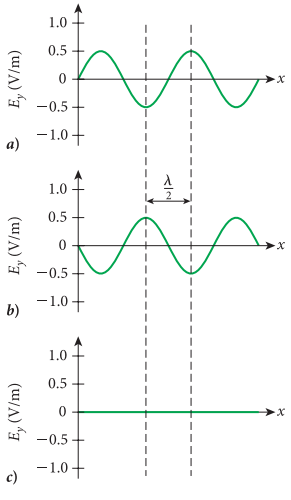


FIGURA 34.6 *a*), *b*) Ondas de luz fuera de fase por λ/2 con la misma amplitud y longitud de onda; *c*) la superposición de las dos ondas de luz demuestra interferencia destructiva.

La luz del sol está compuesta de luz que contiene un amplio rango de frecuencias y longitudes de onda correspondientes. Con frecuencia vemos colores distintos separados de la luz del sol después que se refracta y refleja en gotas de agua, formando un arco iris. También, a veces vemos varios colores de la luz del sol debido a fenómenos de **interferencia** constructivos y destructivos en capas delgadas de materiales transparentes, como las burbujas de jabón o películas delgadas de aceite que flota en agua. En contraste con los arco iris, este efecto de capa delgada se debe a la interferencia.

La óptica geométrica de los capítulos 32 y 33 no puede explicar la interferencia. Los fenómenos de interferencia pueden entenderse sólo tomando en cuenta la naturaleza ondulatoria de la luz. En esta sección se consideran las ondas de luz que tienen la misma longitud de onda en el vacío. La interferencia tiene lugar cuando se superponen tales ondas de luz. Si las ondas de luz están en fase, interfieren constructivamente, como ilustra la figura 34.5.

En la figura 34.5*a*) y la figura 34.5*b*), la componente del campo eléctrico en la dirección *y* se grafica para dos ondas electromagnéticas que viajan en la dirección *x*. Las dos ondas están en fase. Decir que las dos ondas están en fase es lo mismo que decir que la diferencia de fase entre las dos ondas es cero. Una diferencia de fase de 2π radianes (360°), que corresponde a empezar con dos ondas en fase y luego desplazar una de las ondas por una longitud de onda, producirá también dos ondas que están en fase. Si cada onda de luz está viajando desde su propio punto de origen, ocurrirá una diferencia de fase en la que se encuentren, relacionada con la diferencia de trayectoria entre las dos ondas, aun cuando empiecen en fase. El criterio para la **interferencia constructiva** se caracteriza mediante una diferencia de trayectoria Δx dada por

$$\Delta x = m\lambda \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots). \tag{34.4}$$

La figura 34.5*c*) muestra las dos ondas que interfieren de forma constructiva. Las amplitudes de las dos ondas se suman, dando una onda con la misma frecuencia, pero el doble de amplitud de las dos ondas originales.

Si las dos ondas de luz están fuera de fase por π radianes (180°) [figura 34.6*a*) y figura 34.6*b*)], las amplitudes de las ondas sumarán cero en cualquier parte donde se encuentren. Ésta es la condición para la **interferencia destructiva** [figura 34.6*c*)].

Las figuras 34.6*a*) y 34.6*b*) muestran que esta situación es equivalente a empezar con dos ondas en fase y luego desplazar una de las ondas por la mitad de una longitud de onda (λ/2). De nuevo, si consideramos que las dos ondas de luz son emitidas desde diferentes fuentes, la diferencia de fase se puede relacionar con la diferencia de trayectoria. La interferencia destructiva tiene lugar si la diferencia de trayectoria es media longitud de onda más un entero multiplicado por la longitud de onda:

$$\Delta x = \left(m + \tfrac{1}{2}\right)\lambda \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots). \tag{34.5}$$

En las siguientes secciones se analizarán fenómenos de interferencia causados por ondas de luz con la misma longitud de onda que inicialmente están en fase, pero recorren distancias diferentes o viajan con distintas velocidades (en medios distintos) para llegar al mismo punto. En este punto, las ondas de luz se superponen y pueden interferir. Si la interferencia es constructiva o destructiva para luz coherente, depende sólo de la diferencia de longitud de la trayectoria, que es un tema recurrente que dominará todo el análisis siguiente.

Los distintos fenómenos de interferencia causados por varias diferencias de trayectoria de luz coherente se resumen en la figura 34.7. En la mayor parte de este capítulo se explorarán las diferentes condiciones que dan lugar a los patrones de interferencia mostrados en las tres pantallas de la figura. La sección 34.3 explorará la interferencia de rendija doble [figura 34.7*a*)], que supone que dos rendijas muy estrechas de ancho, comparable a la longitud de onda de la luz, están separadas una distancia que es grande comparada con el ancho de cada una. En la sección 34.7 se explo-

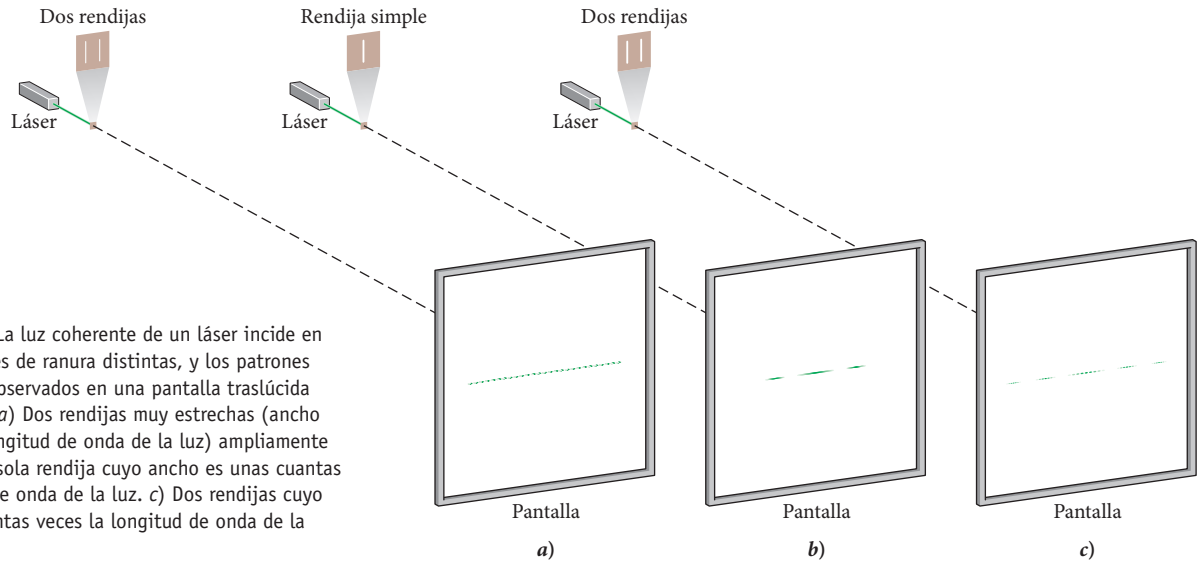


FIGURA 34.7 La luz coherente de un láser incide en tres configuraciones de ranura distintas, y los patrones que resultan son observados en una pantalla traslúcida a cierta distancia. *a*) Dos rendijas muy estrechas (ancho comparable a la longitud de onda de la luz) ampliamente separadas. *b*) Una sola rendija cuyo ancho es unas cuantas veces la longitud de onda de la luz. *c*) Dos rendijas cuyo ancho es unas cuantas veces la longitud de onda de la luz.

rará el caso de la luz coherente que choca con una sola rendija, cuyo ancho es unas cuantas veces la longitud de onda de la luz coherente que choca con ella [figura 34.7*b*)]. La sección 34.9 combina los efectos de ambos casos para analizar la interferencia de rendija doble con la difracción [figura 34.7*c*)]. El análisis detallado de estos casos aclarará la idea de que las diferencias de longitud de trayectoria entre las ondas de luz coherente son responsables de ellos.

34.3 Interferencia de rendija doble

Nuestro primer ejemplo de la interferencia de la luz es el **experimento de doble rendija de Young**, en honor al físico inglés Thomas Young (1773-1829), quien realizó esta investigación en 1801. Suponga que luz coherente monocromática como la de un láser incide en un par de rendijas de ancho comparable o incluso más pequeño que la longitud de onda de la luz, como se ilustra en la figura 34.7*a*). (Estrictamente hablando, no es necesario usar luz coherente monocromática de un láser para realizar este experimento, pero hacerlo simplifica el análisis siguiente y la explicación de la interferencia de doble rendija.) Si se usan fuentes separadas de luz para iluminar las dos rendijas, entonces las diferencias de fase, aleatorias e incontrolables, en la luz de dos fuentes significa que estas dos fuentes de luz son incoherentes.

Para cada ranura se usa una construcción de Huygens, suponiendo que toda la luz que pasa por la rendija se debe a ondas secundarias emitidas desde un solo punto en el centro de la luz [figura 34.8*a*)]. En esta figura, las ondas secundarias esféricas son emitidas desde este punto. Suponga que la rendija es mucho más reducida que la longitud de onda de la luz (la longitud de onda del láser verde es aproximadamente 532 nm), así que la fuente de las ondas secundarias puede representarse con un punto. Observe que la abertura de rendija es apenas visible a simple vista en este caso. Incluso las dos líneas muy estrechas que representan las ranuras amplificadas en el dibujo de la figura 34.7*a*) se dibujan mucho más amplias en comparación con el caso límite de ranuras extremadamente reducidas que estamos estudiando aquí.

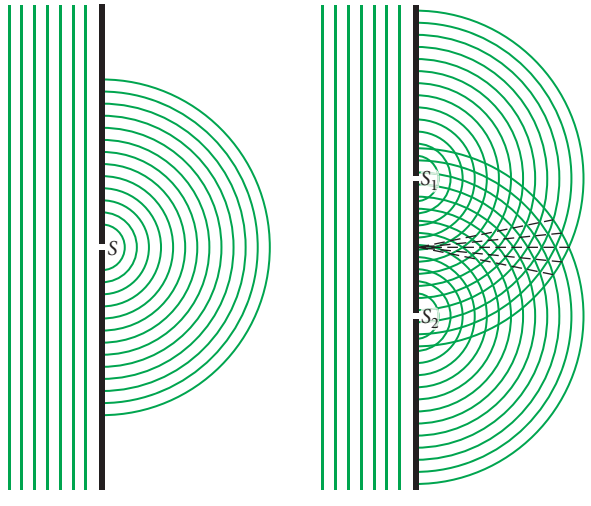


FIGURA 34.8 Construcción de Huygens para una onda de luz coherente que incide desde la izquierda en *a*) una sola rendija y *b*) dos rendijas, S_1 y S_2. Las líneas discontinuas representan líneas de interferencia constructiva.

La figura 34.8*b*) muestra dos ranuras como la de la figura 34.8*a*). Una distancia d separa las rendijas. De nuevo, la luz coherente monocromática incide desde la izquierda y una fuente de ondas secundarias esféricas está en el centro de cada rendija. Las líneas discontinuas representan líneas a lo largo de las cuales ocurre interferencia constructiva. Colocar una pantalla a la derecha de las rendijas producirá un patrón alternante de líneas brillantes y líneas oscuras, que corresponden a interferencia constructiva y destructiva entre ondas de luz emitidas desde las dos rendijas.

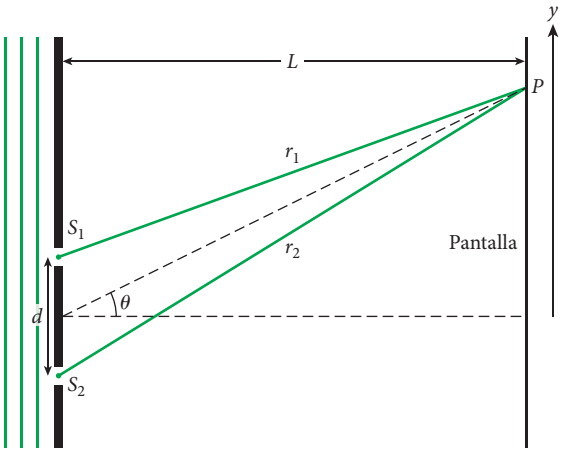


FIGURA 34.9 Vista ampliada de luz coherente que incide en dos rendijas. Las líneas verdes a la derecha de las rendijas representan la distancia que la luz debe viajar de S_1 y S_2 a un punto P en la pantalla.

Para cuantificar estas líneas de interferencia constructiva, se amplía y simplifica la figura 34.8*b*) en la figura 34.9. En esta figura, las dos líneas r_1 y r_2 representan las distancias desde los centros de las rendijas S_1 y S_2, respectivamente, a un punto P en la pantalla colocada a una distancia L de las rendijas. Una línea dibujada de un punto a la mitad entre las dos rendijas a un punto P en la pantalla forma un ángulo θ con respecto a una línea dibujada desde las ranuras perpendiculares a la pantalla. El punto P sobre la pantalla está a una distancia y sobre esta línea central.

Para cuantificar más la configuración geométrica de las dos ranuras, ampliamos y simplificamos la figura 34.9 en la figura 34.10. Suponga que en esta figura la pantalla ha sido colocada a una gran distancia L lejos de las ranuras, de tal manera que las líneas S_1P y S_2P son esencialmente paralelas entre sí y a la línea dibujada desde el centro de las dos rendijas al punto P. Se dibuja una línea desde S_1 perpendicular a S_1P y S_2P, que forma un triángulo con lados d, b y Δx. La cantidad Δx es la diferencia de longitud de trayectoria $r_2 - r_1$.

Esta diferencia de longitud de trayectoria $\Delta x = r_2 - r_1$ produce una diferencia de fase para la luz que se origina desde las dos rendijas e ilumina la pantalla en el punto P. La diferencia de longitud de trayectoria se puede expresar en términos de la distancia entre las rendijas d y el ángulo θ al cual se observa la luz,

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{\Delta x}{d}$$

o bien,

$$\Delta x = d \operatorname{sen}\theta.$$

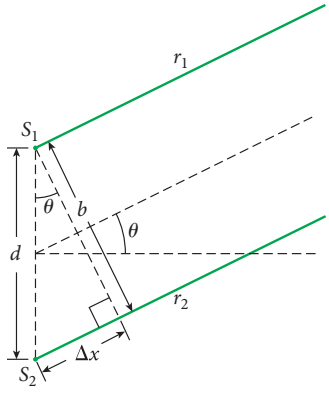


FIGURA 34.10 Vista ampliada de dos rendijas, donde la pantalla está colocada lo suficientemente lejos como para que las líneas verdes S_1P y S_2P sean paralelas.

Para interferencia constructiva, esta diferencia de longitud de trayectoria debe ser un múltiplo entero de la longitud de onda de la luz incidente,

$$\Delta x = d \operatorname{sen}\theta = m\lambda \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots) \begin{cases} \text{franja brillante,} \\ \text{interferencia constructiva} \end{cases} \tag{34.6}$$

Un borde brillante en la pantalla señala interferencia constructiva.

Para interferencia destructiva, la diferencia de longitud de trayectoria debe ser un entero más un medio por la longitud de onda,

$$\Delta x = d \operatorname{sen}\theta = \left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots) \begin{cases} \text{franja oscura,} \\ \text{interferencia destructiva} \end{cases} \tag{34.7}$$

Una franja oscura en la pantalla señala interferencia destructiva.

Note que para interferencia constructiva y $m = 0$, se obtiene $\theta = 0$, lo que significa que $\Delta x = 0$ y hay una franja brillante en cero grados. La franja brillante se llama el *máximo central*. El entero m se denomina el **orden** de la franja. El orden tiene un significado diferente para franjas brillantes y para franjas oscuras. Por ejemplo, usar la ecuación 34.6 con $m = 1$ daría el ángulo de la franja brillante de primer orden, $m = 2$ daría la franja de segundo orden, etc. Usar la ecuación 34.7 con $m = 0$ daría el ángulo de la franja oscura de primer orden, $m = 1$ daría la franja de segundo orden, etc. Para las franjas brillante y oscura, la franja de primer orden es la más cercana al máximo central.

Si la pantalla se coloca a una distancia suficientemente grande de las rendijas, el ángulo θ es pequeño y se puede aproximar como $\operatorname{sen}\theta \approx \tan\theta = y/L$ (vea la figura 34.9). Así, es posible expresar la ecuación 34.6 como

$$d \operatorname{sen}\theta = d\frac{y}{L} = m\lambda \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

o bien,

$$y = \frac{m\lambda L}{d} \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots), \tag{34.8}$$

que da las distancias a lo largo de la pantalla de las franjas brillantes desde el máximo central.

De modo similar, las distancias a lo largo de la pantalla de las franjas oscuras desde el máximo central se pueden expresar como

$$y = \frac{\left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda L}{d} \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots). \tag{34.9}$$

Las posiciones de los centros de las franjas brillante y oscura se describen mediante las ecuaciones 34.8 y 34.9. Pero la intensidad de la luz en cualquier punto en la pantalla también se puede calcular. Comience suponiendo que la luz emitida en cada ranura está en fase. El campo eléctrico de las ondas de luz se puede describir mediante $\vec{E}_m = E_{máx}\,\text{sen}\,\omega t$, donde $E_{máx}$ es la amplitud de la onda y ω es la frecuencia angular. Cuando las ondas de luz llegan a la pantalla desde las dos rendijas, han viajado distancias diferentes, así que pueden tener fases distintas. El campo eléctrico de la luz que llega a un punto dado en la pantalla desde S_1 puede expresarse como

$$\vec{E}_{m1} = E_{máx}\,\text{sen}\,(\omega t)$$

y el campo eléctrico de la luz que llega al mismo punto desde S_2 puede expresarse como

$$\vec{E}_{m2} = E_{máx}\,\text{sen}\,(\omega t + \phi),$$

donde ϕ es la fase constante de $\vec{E}_{m2}$ con respecto a $\vec{E}_{m1}$. En la figura 34.11*a*) se muestran los dos fasores $\vec{E}_{m1}$ y $\vec{E}_{m2}$.

La suma de los dos fasores $\vec{E}_{m1}$ y $\vec{E}_{m2}$ se ilustra en la figura 34.11*b*), que también muestra que la magnitud E de la suma de los dos fasores es

$$E = 2E_{máx}\cos(\phi/2).$$

En el capítulo 31 se mostró que la intensidad de una onda electromagnética es proporcional al cuadrado de la amplitud del campo eléctrico; por lo tanto,

$$\frac{I}{I_{máx}} = \frac{E^2}{E_{máx}^2}.$$

Usando el resultado recién obtenido para el campo eléctrico, se obtiene

$$I = 4I_{máx}\cos^2(\phi/2)$$

para la intensidad de la onda total en el punto P como una función de la diferencia de fase entre las dos ondas de luz.

Ahora la diferencia de fase debe relacionarse con la diferencia de longitud de trayectoria. La figura 34.10 muestra que la diferencia de longitud de trayectoria Δx causa un cambio de fase dado por

$$\phi = \frac{\Delta x}{\lambda}(2\pi),$$

porque cuando $\Delta x = \lambda$, el cambio de fase $\phi = 2\pi$. Al observar que $\Delta x = d\,\text{sen}\,\theta$, la fase constante se puede expresar como

$$\phi = \frac{2\pi d}{\lambda}\,\text{sen}\,\theta.$$

Así, podemos escribir una ecuación para la intensidad de la luz producida por la interferencia desde dos rendijas como

$$I = 4I_{máx}\cos^2\left(\frac{\pi d}{\lambda}\,\text{sen}\,\theta\right).$$

Por último, podemos escribir una ecuación para el patrón de intensidad en una pantalla que resulta de luz coherente que incide en dos rendijas delgadas, bastante separadas, usando la aproximación antes analizada, que es válida cuando la pantalla está suficientemente lejos de las rendijas y θ es tan pequeño que $\text{sen}\,\theta \approx \tan\theta = y/L$:

$$I = 4I_{máx}\cos^2\left(\frac{\pi d y}{\lambda L}\right). \qquad (34.10)$$

Por ejemplo, si la pantalla está a $L = 2.0$ m de las rendijas, éstas están separadas por $d = 1.0 \cdot 10^{-5}$ m, y la longitud de onda de la

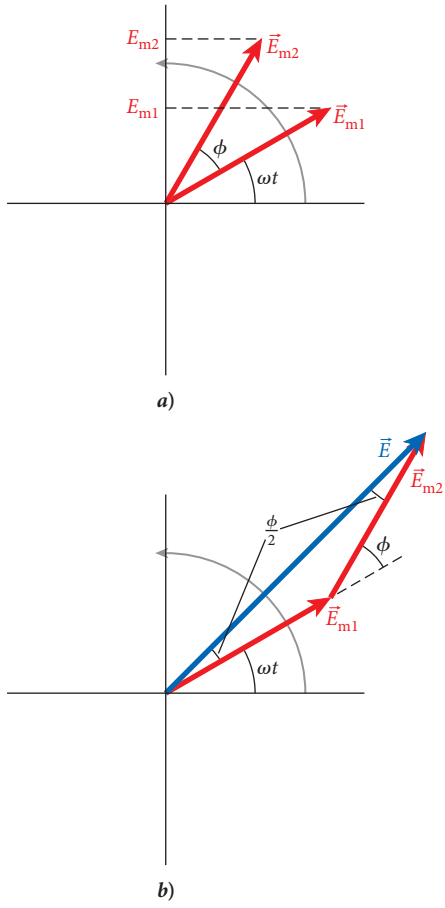


FIGURA 34.11 a) Dos fasores $\vec{E}_{m1}$ y $\vec{E}_{m2}$ separados por una fase ϕ. *b*) Suma de los dos fasores $\vec{E}_{m1}$ y $\vec{E}_{m2}$.

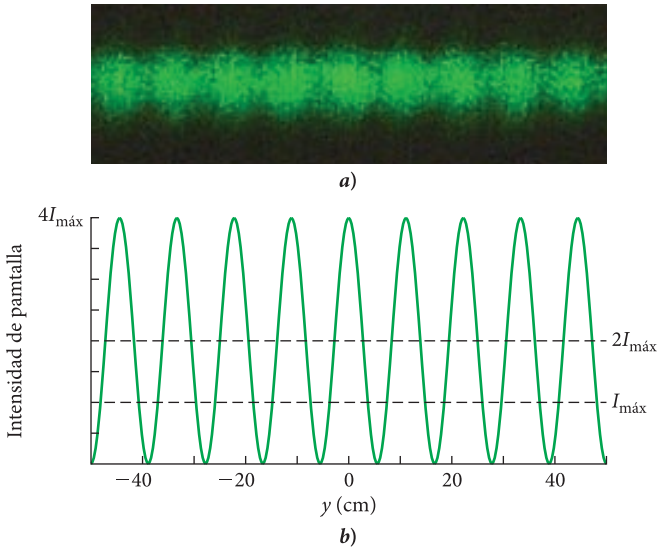


FIGURA 34.12 Patrón de intensidad para la interferencia de dos rendijas usando luz con longitud de onda de 550 nm que incide en dos rendijas delgadas separadas 10^{-5} m a una distancia de 2 m de la pantalla. *a*) Fotografía de la intensidad de luz en la pantalla. *b*) Cálculo de la intensidad de luz en la pantalla.

luz incidente es $\lambda = 550$ nm, se obtiene el patrón de intensidad mostrado en la figura 34.12. En esta figura, la intensidad varía de $4I_{máx}$ a cero. Cubrir una rendija produce una intensidad de $I_{máx}$ en todos los valores de y. Iluminar ambas rendijas con luz que tiene fases aleatorias produce una intensidad de $2I_{máx}$ en todos los valores de y. Sólo cuando ambas rendijas están iluminadas con luz coherente se observa el patrón oscilatorio en y que es característico de la interferencia de dos rendijas.

34.3 Ejercicio en clase

Un par de rendijas están separadas por una distancia $d = 1.40$ mm y están iluminadas con luz de longitud de onda $\lambda = 460.0$ nm. ¿Cuál es la separación de los máximos de interferencia adyacentes en una pantalla a una distancia $L = 2.90$ m?

a) 0.00332 mm
b) 0.556 mm
c) 0.953 mm
d) 1.45 mm
e) 3.23 mm

34.4 Interferencia de película delgada y anillos de Newton

Otra forma de producir fenómenos de interferencia es usar luz que sea reflejada parcialmente de las capas frontal y posterior de películas delgadas. Una **película delgada** es un material ópticamente transparente con espesor de unas cuantas longitudes de onda de luz. Como ejemplos de películas delgadas se tienen las paredes de burbujas de jabón y películas delgadas de aceite que flotan en el agua. Cuando la luz reflejada de la superficie frontal interfiere con la luz reflejada de la superficie posterior de la película delgada, vemos el color correspondiente a la longitud de onda particular de la luz que está interfiriendo constructivamente.

Considere luz que viaja en un medio óptico con un índice de refracción n_1 que choca con un segundo medio óptico con índice de refracción n_2, como se ilustra en la figura 34.13.

Una posibilidad es que la luz pueda transmitirse por la frontera, como muestran las figuras 34.13*a*) y 34.13*b*). En estos casos, la fase de la luz no cambia independientemente de si $n_1 < n_2$ o $n_1 > n_2$. Un segundo proceso que puede ocurrir es que la luz se refleje. En este caso, la fase de la luz puede cambiar, dependiendo del índice de refracción de dos medios ópticos. Si $n_1 < n_2$, la fase de la onda reflejada se cambia por 180° (correspondiente a la mitad de una longitud de onda), como muestra la figura 34.13*c*). Si $n_2 > n_1$, entonces no ocurre ningún cambio de fase, como ilustra la figura 34.13*d*). (¡Las ondas reflejadas han sido desplazadas verticalmente por razones de claridad!)

La razón de este cambio de fase en la reflexión se deduce de la teoría de las ondas electromagnéticas, y la deducción está más allá del alcance de este libro. Sin embargo, en el capítulo 15, sección 15.4, estudiamos la reflexión de las ondas en una cuerda desde una frontera, y esta analogía mecánica es suficiente para entender la razón básica de un cambio de fase de 180° en un caso y ninguno en el otro. En la figura 34.14 se reproducen las dos figuras que muestran una conexión rígida (izquierda) y una flexible (derecha) de la cuerda a la pared. La reflexión de la luz en la frontera ópticamente menos densa (valor menor de n) al medio ópticamente más denso (valor mayor de n) corresponde a la situación de la izquierda, y el caso inverso a la situación a la derecha.

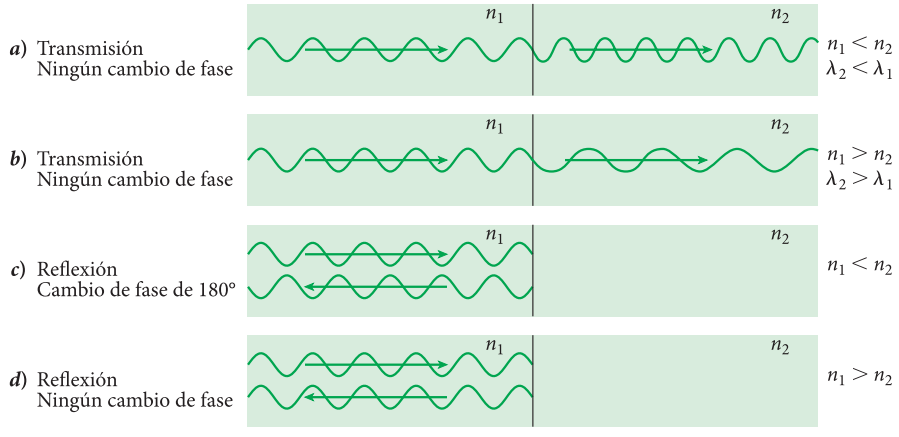


FIGURA 34.13 La luz que viaja en un medio óptico con índice de refracción n_1 en una frontera con un segundo medio óptico con índice de refracción n_2. *a*) La luz es transmitida sin ningún cambio de fase para $n_1 < n_2$. *b*) La luz es transmitida sin ningún cambio de fase para $n_1 > n_2$. *c*) La luz es reflejada con un cambio de fase de 180° para $n_1 < n_2$. *d*) La luz es reflejada sin ningún cambio de fase para $n_1 > n_2$.

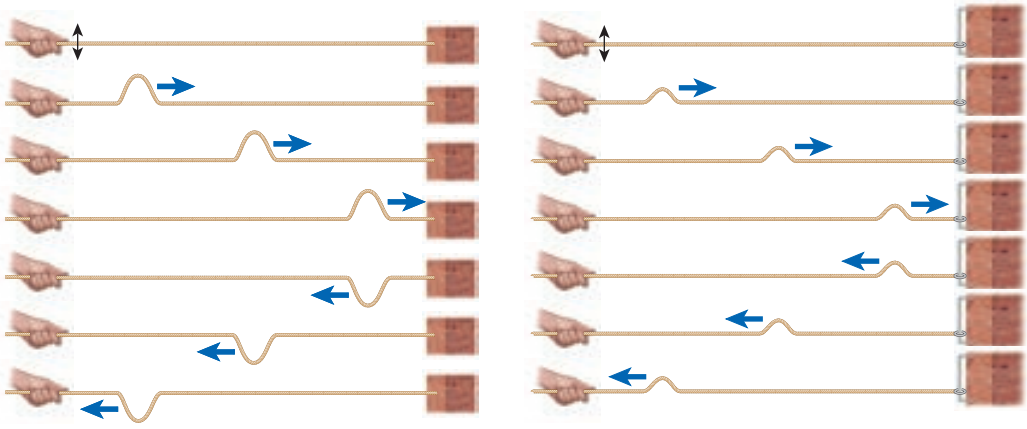


FIGURA 34.14 Ilustración de la secuencia de tiempo (de la parte superior a la inferior) de la reflexión de un impulso de onda sobre una cuerda en una pared. Izquierda: la conexión rígida a una pared da como resultado un cambio de fase de 180° en la onda reflejada; derecha: una conexión movible a la pared no produce cambio de fase.

Comencemos nuestro análisis de películas delgadas estudiando una de espesor t con índice de refracción n y con aire en ambos lados de la película (figura 34.15). Suponga que luz monocromática incide perpendicular a la superficie de la película. Por claridad, en la figura se muestra un ángulo de incidencia para las ondas de luz. Cuando la onda de luz alcanza la frontera entre el aire y la película, parte de la onda se refleja y parte se transmite. La onda reflejada experimenta un cambio de fase de media longitud de onda cuando se refleja porque $n_{\text{aire}} < n$. La luz que se transmite no tiene cambio de fase y continúa a la superficie posterior de la película. En la superficie posterior, de nuevo parte de la onda se transmite y parte se refleja. La luz transmitida atraviesa por completo la película. (No se muestra la onda transmitida en la figura 34.15, ya que no nos interesa para el presente análisis.) La luz reflejada no tiene cambio de fase porque $n > n_{\text{aire}}$ y viaja de regreso a la superficie frontal de la película. Ahí, parte de la luz reflejada desde la superficie posterior se transmite y parte se refleja. No necesitamos considerar la luz reflejada. La luz transmitida no tiene cambio de fase y emerge de la película e interfiere con la luz que se reflejó cuando la luz chocó primero con la película. La luz transmitida y después reflejada ha recorrido una distancia más larga que la luz reflejada originalmente y tiene un cambio de fase determinado por la diferencia de longitud de trayectoria. Esta diferencia es dos veces el espesor t de la película.

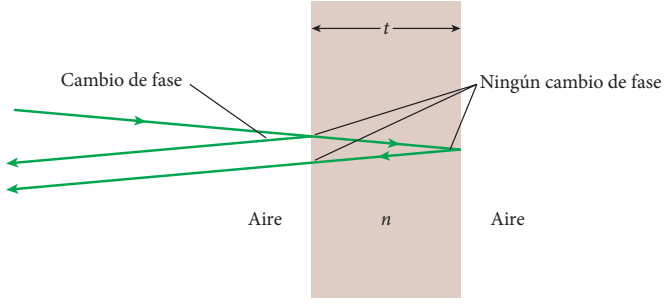


FIGURA 34.15 Ondas de luz en aire que inciden en una película delgada con índice de refracción n y espesor t.

El hecho de que la luz reflejada originalmente haya experimentado un cambio de fase de media longitud de onda, y no así la luz transmitida y luego reflejada, significa que el criterio para la interferencia *constructiva* está dado por $\Delta x = (m + \frac{1}{2})\lambda = 2t$ $(m = 0, 1, 2,...)$. La longitud de onda λ se refiere a la longitud de onda de la luz que viaja en la película delgada, que tiene índice de refracción n. La longitud de onda de la luz que viaja en el aire se relaciona con la que viaja en la película por $\lambda = \lambda_{\text{aire}}/n$. Entonces, podemos escribir

$$\left(m+\frac{1}{2}\right)\frac{\lambda_{\text{aire}}}{n}=2t \quad (m=0,\pm1,\pm2,...) \quad \begin{pmatrix}\text{película delgada,}\\ \text{interferencia constructiva}\end{pmatrix}. \tag{34.11}$$

El espesor mínimo $t_{\text{mín}}$ que producirá interferencia constructiva corresponde a $m = 0$,

$$t_{\text{mín}}=\frac{\lambda_{\text{aire}}}{4n}. \tag{34.12}$$

Una mancha de aceite o una burbuja de jabón tiene espesor variante y, por lo tanto, afecta de distinta manera a diferentes longitudes de onda, creando con frecuencia un efecto de arco iris.

EJEMPLO 34.1 Recubrimiento de lente

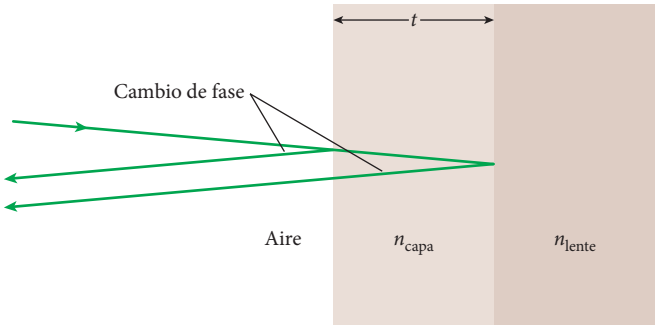


FIGURA 34.16 Luz que incide en una lente recubierta.

Muchas lentes de alta calidad están recubiertas para evitar reflexiones. Esta capa está diseñada para establecer interferencia destructiva para luz reflejada desde la superficie de la lente. Suponga que la cubierta es fluoruro de magnesio, que tiene $n_{capa} = 1.38$, y que la lente es vidrio con $n_{lente} = 1.51$.

PROBLEMA

¿Cuál es el espesor mínimo de la capa que produce interferencia destructiva para luz con una longitud de onda en aire de 550 nm?

SOLUCIÓN

Suponga que la luz incide de forma perpendicular (o casi perpendicular) sobre la superficie de la lente recubierta (figura 34.16). La luz reflejada en la superficie de la capa experimenta un cambio de fase de media longitud de onda, porque $n_{aire} < n_{capa}$. La luz transmitida por la capa no tiene cambio de fase. La luz reflejada en la frontera entre la capa y la lente experimenta también un cambio de fase de media longitud de onda, porque $n_{capa} < n_{lente}$. Esta luz reflejada viaja de regreso por la capa y sale sin ningún otro cambio de fase. Por lo que tanto la luz reflejada de la capa como la luz reflejada de la lente han experimentado un cambio de fase de media longitud de onda. Así, el criterio para interferencia destructiva es

$$\left(m+\frac{1}{2}\right)\frac{\lambda_{aire}}{n_{capa}} = 2t \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

El espesor mínimo para que la capa proporcione interferencia destructiva corresponde a $m = 0$,

$$t_{mín} = \frac{\lambda_{aire}}{4n_{capa}} = \frac{550 \cdot 10^{-9}\ \text{m}}{4(1.38)} = 9.96 \cdot 10^{-8}\ \text{m} = 99.6\ \text{nm}.$$

Los recubrimientos de lente que satisfacen esta condición de interferencia destructiva se denominan capas "cuarto de lambda". Debido a que causan interferencia destructiva para luz reflejada, evitan que la luz se refleje de la capa y, por lo tanto, permiten que entre más luz a la lente, que sería el caso sin la capa. Las lentes de cámaras caras tienen capas cuarto de lambda para longitudes de onda en la mitad de la banda de longitud de onda óptica, alrededor de 500 nm. Pero recuerde que la capa cuarto de lambda puede funcionar sólo si el índice de refracción de la capa es menor que el de la lente.

34.4 Ejercicio en clase

Si usted fuera a usar el mismo material de recubrimiento del mismo espesor que en el ejemplo 34.1, pero en una lente diferente con un índice de refracción menor que el de la capa, esto daría como resultado

a) reflexión reducida y, por lo tanto, entraría *más* luz a la lente que en el caso sin capa.

b) reflexión mejorada y, por consiguiente, entraría *menos* luz que en el caso sin capa.

c) ningún cambio en la cantidad de luz que entra a la lente respecto al caso sin capa.

d) ninguna luz en absoluto (o casi nada) que entra a la lente.

34.5 Ejercicio en clase

Una película delgada de jabón, con índice de refracción $n = 1.35$, flotando en el aire, refleja predominantemente luz roja con $\lambda = 682$ nm. ¿Cuál es el espesor mínimo de la película?

a) 89.5 nm
b) 126 nm
c) 198 nm
d) 302 nm
e) 432 nm

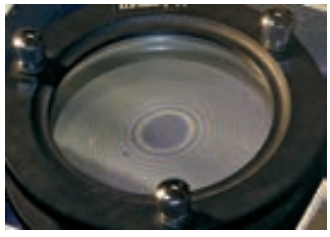


FIGURA 34.17 Anillos de Newton producidos con luz blanca.

Un fenómeno similar a la interferencia de película delgada es el de los **anillos de Newton**. Este efecto es un patrón de interferencia causado por la reflexión de la luz entre dos superficies de vidrio, una superficie esférica y una superficie plana adyacente, como se muestra en la figura 34.17.

Los anillos de Newton son causados por la interferencia entre la luz reflejada desde el fondo del vidrio curvado esféricamente y la luz reflejada desde la parte superior de la placa plana de vidrio, como muestra la figura 34.18. (Note que la curvatura de la superficie esférica es exagerada en este diagrama. En situaciones reales R sería mucho mayor que x.)

Los anillos de Newton son círculos concéntricos, uno oscuro y otro brillante, de forma alternada. Los círculos oscuros corresponden a la interferencia destructiva y los círculos brillantes corresponden a la interferencia constructiva. La foto mostrada en la figura 34.17 se tomó en luz blanca para mostrar anillos de colores diferentes. Para el cálculo de los anillos de Newton, suponga una fuente de luz monocromática, coherente, con longitud de onda λ en aire. La distancia entre la superficie

curvada y la superficie plana, t, es una función de la distancia horizontal desde donde la superficie esférica toca la superficie plana, como se ilustra en la figura 34.18. El teorema de Pitágoras aplicado al triángulo amarillo en esta figura da la relación

$$t = R - \sqrt{R^2 - x^2} = R - R\sqrt{1 - \left(\frac{x}{R}\right)^2},$$

donde R es el radio de curvatura de la superficie de vidrio esférica y x es la distancia horizontal desde el punto donde el vidrio curvado toca el vidrio plano hasta el punto donde la luz entra al vidrio.

En la figura 34.18, la curvatura de la superficie esférica ha sido exagerada por claridad. La superficie de vidrio real usada para producir los anillos de Newton tiene un gran radio de curvatura comparado con la distancia desde el punto de toque, así que $x/R \ll 1$. Así, podemos aproximar

$$\sqrt{1 - \left(\frac{x}{R}\right)^2} \approx 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{x}{R}\right)^2, \quad \text{para } \frac{x}{R} \ll 1.$$

Ahora se puede escribir una expresión aproximada para la distancia entre las superficies

$$t \approx R - R\left(1 - \frac{1}{2}\left(\frac{x}{R}\right)^2\right) = \frac{1}{2}\frac{x^2}{R}.$$

La diferencia de trayectoria entre la luz que se refleja del fondo de la superficie curva en la parte superior de la superficie plana es $2t$, que se puede escribir como

$$2t = 2\left(\frac{1}{2}\frac{x^2}{R}\right) = \frac{x^2}{R}.$$

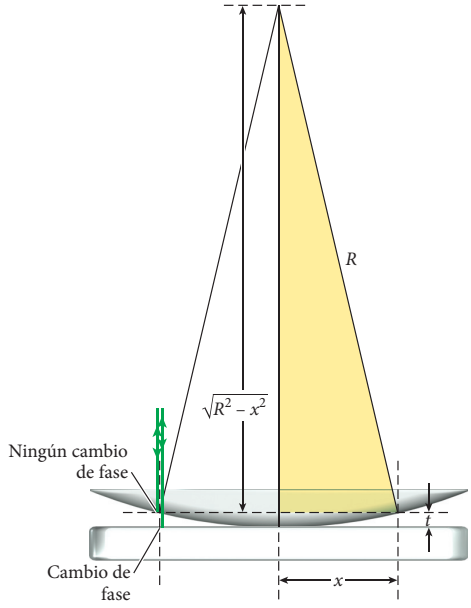


FIGURA 34.18 Configuración geométrica de los anillos de Newton. La superficie del fondo de la placa de vidrio superior es una superficie esférica, mientras que la superficie inferior es plana.

La luz que se refleja del fondo de la superficie curva no tiene cambio de fase porque el índice de refracción del vidrio es mayor que el índice de refracción del aire. La luz que se refleja de la parte superior de la placa de vidrio plano sufre un cambio de fase de la mitad de una longitud de onda porque el índice de refracción del vidrio es mayor que el índice de refracción del aire. Así, el criterio para la interferencia constructiva es

$$\left(m + \frac{1}{2}\right)\hat{\lambda} = 2t \quad (m = 0, 1, 2, \ldots).$$

Al combinar este criterio de interferencia constructiva con el resultado para el espesor y definir x_m como el radio del m-ésimo círculo brillante, se obtiene

$$\left(m + \frac{1}{2}\right)\hat{\lambda} = \frac{x_m^2}{R} \quad (m = 0, 1, 2, \ldots),$$

que se puede resolver para el radio de círculos brillantes

$$x_m = \sqrt{R\left(m + \frac{1}{2}\right)\hat{\lambda}} \quad (m = 0, 1, 2, \ldots) \quad \left(\frac{x_m}{R} \ll 1\right). \tag{34.13}$$

34.5 Interferómetro

Un **interferómetro** es un dispositivo diseñado para medir las longitudes o cambios de longitud pequeños por medio de la interferencia de luz. Un interferómetro puede medir cambios en las longitudes hasta una exactitud de una fracción de longitud de onda de la luz que esté usando. El interferómetro funciona usando franjas de interferencia. El interferómetro descrito aquí es similar, pero más simple, que el construido por Albert Michelson en el Case Institute en Cleveland, Ohio, Estados Unidos, en 1887.

La figura 34.19 muestra una fotografía y dibujo de un interferómetro comercial usado en laboratorios de física. Un dibujo más detallado se ilustra en la figura 34.20. Este interferómetro particular consiste en una fuente de luz láser que emite luz coherente con longitud de onda λ = 632.8 nm. La luz pasa por una lente de desenfoque para dispersar el haz láser enfocado normal-

mente de modo muy estrecho. La luz pasa entonces por un espejo semitransparente m_1. Parte de la luz se refleja hacia el espejo ajustable m_3 y parte de la luz se transmite al espejo movible m_2. La distancia entre m_1 y m_2 es x_2, y la distancia entre m_1 y m_3 es x_3. La luz transmitida se refleja por completo de m_2 de regreso a m_1. La luz reflejada se refleja también por completo de m_3 de regreso a m_1. Parte de la luz reflejada desde m_2 es reflejada entonces por m_1 hacia la pantalla de visualización; el resto de la luz es transmitida y no se considera. Parte de la luz desde m_3 se transmite por m_1; el resto se refleja y no se considera. La alineación real de la luz es tal, que los dos haces que chocan con la pantalla de visualización son colineales; la separación mostrada en la figura 34.20 es por claridad.

La luz de los espejos m_2 y m_3 que choca con la pantalla de visualización interfiere, con base en su diferencia de longitud de trayectoria. Ambas trayectorias experimentan dos reflexiones, cada una dando como resultado un cambio de fase de la mitad de una longitud de onda, de modo que la condición para interferencia constructiva es

$$\Delta x = m\lambda \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Las dos trayectorias distintas tienen una diferencia de longitud de trayectoria de

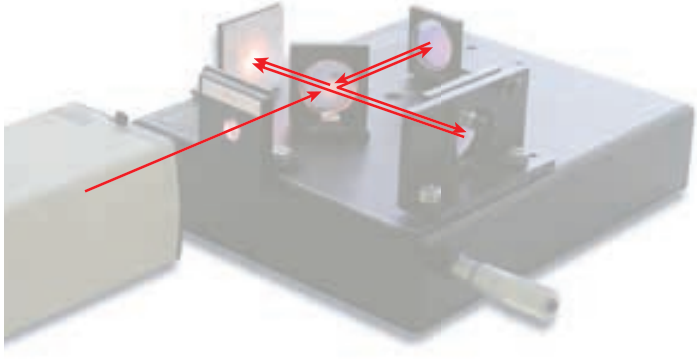
$$\Delta x = 2x_2 - 2x_3 = 2(x_2 - x_3).$$

La pantalla de visualización muestra círculos concéntricos o franjas lineales que corresponden a la interferencia constructiva y destructiva, dependiendo del tipo de lente de desenfoque usado y la inclinación de los espejos. Si el espejo movible m_2 se mueve una distancia de $\lambda/2$, las franjas se desplazan por una franja. Así, este tipo de interferómetro se puede usar para medir cambios de distancia del orden de una fracción de una longitud de onda de luz, dependiendo de qué tan bien se pueda medir el desplazamiento de las franjas de interferencia.

Se puede hacer otro tipo de medición con este interferómetro colocando el material con índice de refracción n y espesor t en la trayectoria de la luz que viaja al espejo movible m_2, como se ilustra en la figura 34.20. La diferencia de longitud de trayectoria en términos del número de longitud de onda cambiará porque la longitud de onda de la luz en el material λ_n es diferente de λ. La longitud de onda en este material se relaciona con la longitud de onda de la luz en el aire mediante

$$\lambda_n = \frac{\lambda}{n}.$$

a)



b)

FIGURA 34.19 Un interferómetro de Michelson usado en un laboratorio de física introductorio. *a*) Fotografía; *b*) dibujo esquemático de las trayectorias de luz. La luz láser se divide mediante el espejo semitransparente central. Una parte de la luz continúa en la misma dirección, se refleja, regresa y es reflejada por el espejo semitransparente a la pantalla. Una segunda parte de la luz es reflejada por el espejo semitransparente y luego de nuevo por el espejo semitransparente a la pantalla.

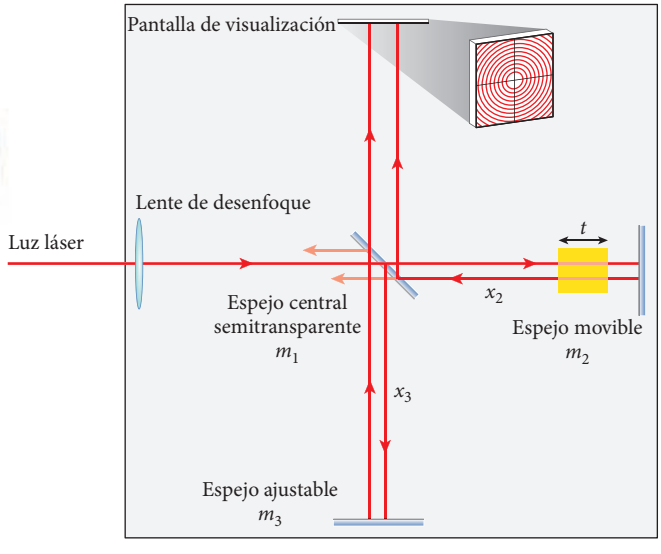


FIGURA 34.20 Vista superior de un interferómetro tipo Michelson, que muestra en detalle la trayectoria de la luz.

Así, el número de longitudes de onda en el material es

$$N_{\text{material}} = \frac{2t}{\lambda_n} = \frac{2tn}{\lambda}.$$

El número de longitud de onda ahí presente, si la luz viajara sólo por el aire, es

$$N_{\text{aire}} = \frac{2t}{\lambda}.$$

Por lo tanto, la diferencia en el número de longitudes de onda es

$$N_{\text{material}} - N_{\text{aire}} = \frac{2tn}{\lambda} - \frac{2t}{\lambda} = \frac{2t}{\lambda}(n-1). \tag{34.14}$$

Cuando el material se coloca entre m_1 y m_2, un observador verá un desplazamiento de una franja para todo cambio de longitud de onda en la diferencia de longitud de trayectoria. Por consiguiente, podemos sustituir el número de franjas desplazadas por $N_{\text{material}} - N_{\text{aire}}$ en la ecuación 34.14 y, dado el índice de refracción, podemos obtener el espesor del material. De otro modo, también podemos insertar material con un espesor bien conocido y determinar el índice de refracción.

34.2 Oportunidad de autoevaluación

La longitud de onda de una fuente de luz monocromática se mide por medio de un interferómetro de Michelson. Cuando el espejo movible se desplaza una distancia $d = 0.250$ nm, $N = 1\,200$ franjas se mueven por la pantalla. ¿Cuál es la longitud de onda de la luz?

34.6 Difracción

Cualquier onda que pasa por una abertura experimenta difracción. **Difracción** significa que la onda se dispersa del otro lado de la abertura en vez de que la abertura proyecte una sombra definida. La difracción es más notable cuando la abertura es casi del mismo tamaño que la longitud de onda de la onda. Esto se observa fácilmente en las ondas de la superficie del agua, y se aplica el mismo efecto a las ondas de luz. Si la luz pasa por una rendija estrecha, produce un patrón característico de áreas de luz y oscuridad llamado patrón de difracción. La luz que pasa por un borde definido exhibe también un patrón de difracción.

El principio de Huygens describe esta dispersión, y se puede usar una construcción de Huygens para cuantificar el fenómeno de difracción. Por ejemplo, en la figura 34.21 se muestra la luz coherente que incide en una abertura, que tiene dimensiones comparables a la longitud de onda de la luz. En lugar de proyectar una sombra definida, la luz se dispersa del otro lado de la abertura. Podemos describir esta dispersión usando una construcción de Huygens y suponiendo que ondas secundarias esféricas son emitidas en varios puntos dentro de la abertura. Las ondas de luz resultantes del lado derecho de la abertura experimentan interferencia y producen un patrón de difracción característico.

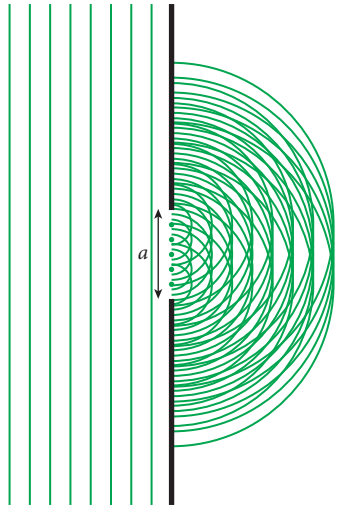


FIGURA 34.21 Luz coherente que incide en una abertura con un ancho comparable a la longitud de onda de la luz. Los puntos representan fuentes de ondas secundarias esféricas en una construcción de Huygens.

Las ondas de luz pueden ir también alrededor de bordes de barreras, como ilustra la figura 34.22. En este caso, la luz lejos del borde de la barrera continúa viajando como las ondas de luz mostradas en la figura 34.2. La luz cerca del borde de la barrera parece curvarse alrededor de la barrera y se describe mediante las fuentes de ondas secundarias cerca del borde.

La figura 34.23 ilustra una fotografía de un experimento, donde la luz de un láser verde es bloqueada por el borde vertical de una hoja de afeitar, y el patrón de difracción resultante se observa en una pantalla distante.

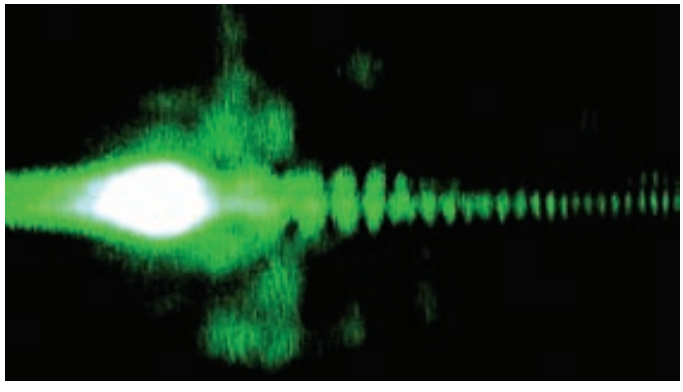


FIGURA 34.23 Luz de un láser verde que incide en el borde vertical de una hoja de afeitar vista en una pantalla distante.

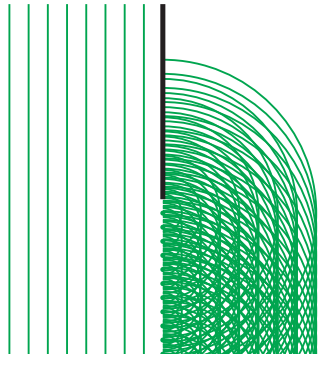


FIGURA 34.22 Luz coherente que incide en una barrera. La luz se difracta alrededor de la barrera.

El punto brillante es el máximo central y las líneas menos brillantes son los máximos de difracción de orden superior.

Los fenómenos de difracción no pueden ser descritos por la óptica geométrica. Como veremos, los efectos de difracción, más que los efectos geométricos, con frecuencia limitan la resolución de un instrumento óptico. En las siguientes secciones se presentará un examen cuantitativo de la difracción de una sola rendija, la difracción de una abertura circular, la difracción de rendija doble y la difracción mediante una rejilla. En los casos similares resultan relaciones para la localización de los máximos y mínimos de difracción, que se modifican mediante cada una de las configuraciones geométricas.

34.7 Difracción de una sola rendija

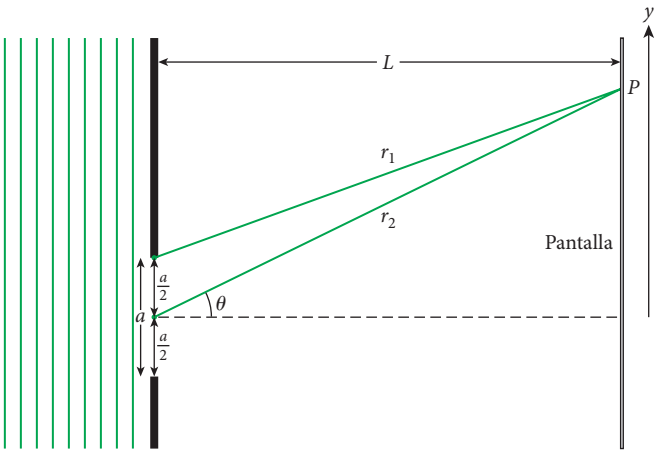


FIGURA 34.24 Configuración geométrica de la ubicación de la primera franja oscura de una sola rendija, usando dos rayos desde la rendija.

Considere la difracción de la luz que pasa por una sola rendija de ancho a, que es comparable a la longitud de onda de la luz que pasa por la rendija, como se ilustra en la figura 34.7*b*). El cálculo es auxiliado por la construcción de Huygens, como ilustra la figura 34.21.

Suponga que la luz que pasa por la única rendija se describe mediante ondas secundarias esféricas emitidas desde una distribución de puntos localizados en la rendija. La luz emitida desde estos puntos se superpondrá e interferirá con base en la longitud de trayectoria para cada onda secundaria en cada posición. En una pantalla distante, observamos un patrón de intensidad característico de difracción, que consta de franjas brillantes y oscuras. Para el caso de interferencia de dos rendijas, pudimos resolver las ecuaciones para las franjas brillantes con base en la interferencia constructiva. Para la difracción, nos limitaremos a analizar las franjas oscuras de interferencia destructiva.

Para estudiar la interferencia, redibujamos y simplificamos la figura 34.21 como muestra la figura 34.24. Suponga que luz coherente con longitud de onda λ incide en una rendija con ancho a, produciendo un patrón de interferencia en una pantalla a una distancia L. Empleamos un método simple para analizar pares de ondas de luz emitidas desde puntos en la rendija. Empezamos con luz emitida desde el borde superior de la rendija y desde el centro de la rendija, como se ilustra en la figura 34.24. Para analizar la diferencia de trayectoria, mostramos una versión ampliada de la figura 34.24 en la figura 34.25.

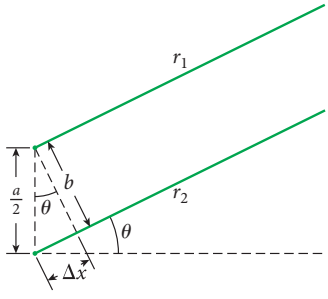


FIGURA 34.25 Versión ampliada de la configuración geométrica para determinar la ubicación de la primera franja oscura de la difracción de una sola rendija.

Para el análisis cuantitativo, suponga que la distancia L de la pantalla es muy grande comparada con el tamaño de la abertura de la rendija a. De esta forma, las dos líneas verdes que representan las trayectorias de las longitudes r_1 y r_2 en la figura 34.25 son paralelas y forman un ángulo θ con el eje central. Por lo tanto, la diferencia de longitud de trayectoria para estos dos rayos está dada por

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{\Delta x}{a/2} \Leftrightarrow \Delta x = \frac{1}{2} a \operatorname{sen}\theta.$$

El criterio para la primera franja oscura es

$$\Delta x = \frac{a \operatorname{sen}\theta}{2} = \frac{\lambda}{2} \Rightarrow a \operatorname{sen}\theta = \lambda.$$

Aunque elegimos un rayo que se origina del borde de la parte superior de la rendija y uno de en medio de la rendija para localizar la primera franja oscura, podríamos haber usado dos rayos cualesquiera que se originaran separados $a/2$ dentro de la rendija. Es decir, las ondas pueden ser emparejadas de modo que la separación dentro de un par sea $a/2$. (Así, hemos tomado en cuenta toda la rendija.) Cada par interfiere destructivamente, de modo que en la pantalla aparece una franja oscura global.

Considere ahora cuatro rayos en lugar de dos (figura 34.26). Aquí, elegimos un rayo del borde superior de la rendija y tres rayos más que se originan de puntos espaciados con una separación de $a/4$. Este dibujo se puede ampliar para representar el caso de la pantalla que está lejos, como se muestra en la figura 34.27. Claramente, la diferencia de longitud de trayectoria entre los pares de rayos rotulados r_1 y r_2, r_2 y r_3, y r_3 y r_4 está dada por

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{\Delta x}{a/4} \Leftrightarrow \Delta x = \frac{1}{4} a \operatorname{sen}\theta.$$

El criterio para una franja oscura que surge de estos tres pares de rayos es

$$\frac{a \operatorname{sen}\theta}{4} = \frac{\lambda}{2} \Rightarrow a \operatorname{sen}\theta = 2\lambda.$$

Todas las ondas secundarias podrían agruparse en cuatro rayos similares a los mostrados en la figura 34.27. Cada grupo interfiere destructivamente, así que una franja oscura global es visible en la pantalla. Por lo tanto, la condición $a \operatorname{sen}\theta = 2\lambda$ describe la segunda franja oscura.

En este punto, podemos generalizar fácilmente y tomar grupos de seis y ocho rayos y describir las franjas oscuras tercera y cuarta, etc. El resultado es que las franjas oscuras de la difracción de una sola rendija puede describirse mediante

$$a \operatorname{sen}\theta = m\lambda \quad (m = 1, 2, 3, \ldots). \tag{34.15}$$

Si la pantalla se coloca a una distancia suficientemente grande de las rendijas, el ángulo θ es pequeño y se puede aproximar como $\operatorname{sen}\theta \approx \tan\theta = y/L$. Así, la posición de las franjas oscuras en la pantalla se puede expresar como

$$\frac{ay}{L} = m\lambda \quad (m = 1, 2, 3, \ldots)$$

o bien,

$$y = \frac{m\lambda L}{a} \quad (m = 1, 2, 3, \ldots) \begin{pmatrix} \text{posiciones de las} \\ \text{franjas oscuras} \end{pmatrix}. \tag{34.16}$$

El análisis detallado de las ondas secundarias esféricas muestra que la intensidad I, relativa a $I_{\text{máx}}$, que obtendríamos si no hubiera rendija es

$$I = I_{\text{máx}} \left(\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\alpha} \right)^2, \tag{34.17}$$

donde

$$\alpha = \frac{\pi a}{\lambda} \operatorname{sen}\theta. \tag{34.18}$$

La ecuación 34.17 muestra que esta expresión para la intensidad I es cero para $\operatorname{sen}\alpha = 0$ (a menos que $\alpha = 0$), lo que significa que $\alpha = m\pi$ para $m = 1, 2, 3, \ldots$. Para el caso especial de $\alpha = 0$ correspondiente a $\theta = 0$, usamos

$$\lim_{\alpha \to 0} \left(\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\alpha} \right) = 1.$$

Por lo tanto,

$$m\pi = \frac{\pi a}{\lambda} \operatorname{sen}\theta \quad (m = 1, 2, 3, \ldots)$$

o bien,

$$a \operatorname{sen}\theta = m\lambda \quad (m = 1, 2, 3, \ldots),$$

que da el mismo resultado para los mínimos de difracción que la ecuación 34.15.

Si la pantalla se coloca a una distancia suficientemente grande de las rendijas, el ángulo θ es pequeño y se puede aproximar como $\operatorname{sen}\theta \approx \tan\theta = y/L$. Así, la ecuación 34.18 puede expresarse como

$$\alpha = \frac{\pi a y}{\lambda L}. \tag{34.19}$$

Si la pantalla está a $L = 2.0$ m de la rendija, ésta tiene un ancho de $a = 5.0 \cdot 10^{-6}$ m, y la longitud de onda de la luz incidente es $\lambda = 550$ nm, obtenemos el patrón de intensidad mostrado en la figura 34.28. Tal distribución de intensidad descrita en la figura 34.28 se llama patrón de difracción de Fraunhofer.

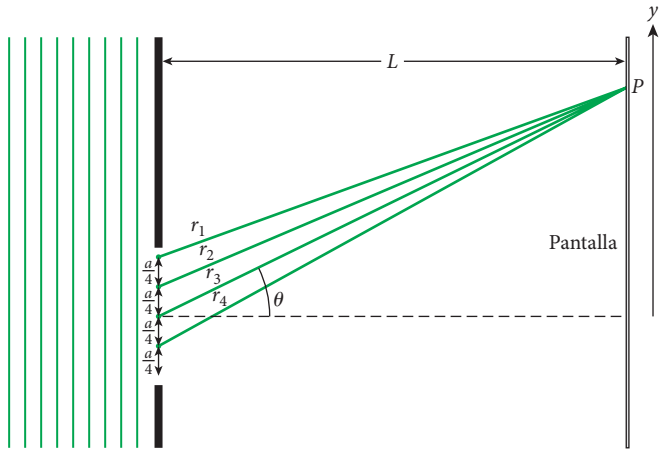


FIGURA 34.26 Configuración geométrica para determinar la ubicación de la segunda franja oscura desde una sola rendija, usando cuatro rayos de la rendija.

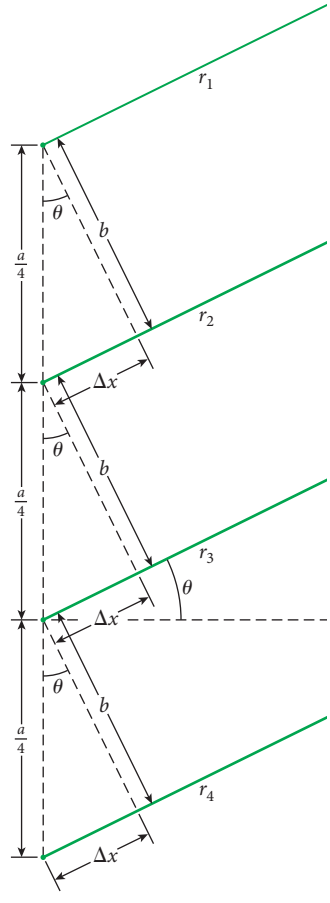


FIGURA 34.27 Versión ampliada de la configuración geométrica para determinar la ubicación de la segunda franja oscura de la difracción de una sola rendija.

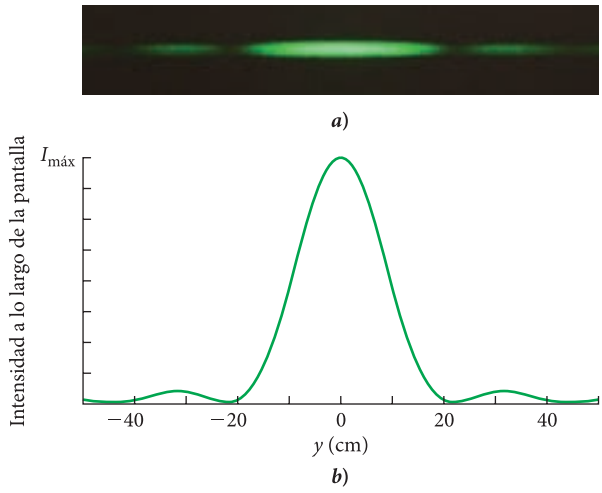


FIGURA 34.28 Patrón de intensidad para la difracción a través de una sola rendija. *a*) Fotografía de la luz en una pantalla. *b*) Cálculo de la intensidad a lo largo de la pantalla.

PROBLEMA RESUELTO 34.1 Ancho del máximo central

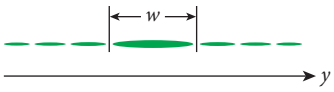


FIGURA 34.29 Patrón de difracción de rendija simple observado en una pantalla.

El patrón de difracción de una sola rendija mostrado en la figura 34.29 se produjo con luz de longitud de onda λ =510.0 nm. La pantalla en la que se proyectó el patrón se localizó a una distancia L = 1.40 m de la rendija. La rendija tenía un ancho de a = 7.00 mm.

PROBLEMA

¿Cuál es el ancho w del máximo central? (El ancho es igual a la distancia entre los dos primeros mínimos de difracción localizados en cualquier lado del centro.)

SOLUCIÓN

PIENSE

El patrón de difracción producido por la luz que incide sobre una rendija tiene un máximo en y = 0 y desciende a un mínimo en ambos lados del pico. El primer mínimo corresponde a m = 1. Por lo tanto, el ancho del máximo central es igual al doble de la coordenada y del primer mínimo.

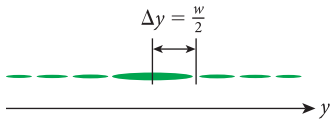


FIGURA 34.30 Patrón de difracción de una sola rendija con la distancia desde el centro del máximo central a la posición del primer mínimo de difracción.

ESBOCE

La figura 34.30 muestra un bosquejo del patrón de difracción de una sola rendija, marcado con la distancia desde el centro del máximo central a la posición del primer mínimo.

INVESTIGUE

Las ubicaciones de las franjas oscuras a lo largo de una pantalla, que corresponden a los mínimos de difracción cuando la pantalla está suficientemente lejos de la ranura, están dadas por la ecuación 34.16

$$y = \frac{m\lambda L}{a} \quad (m = 1, 2, 3, \ldots),$$

donde λ es la longitud de onda de la luz que incide en la rendija, m es el orden del mínimo, L es la distancia de la ranura a la pantalla y a es el ancho de la rendija. Para la difracción de una sola rendija, la posición y = 0 corresponde a la posición del máximo central. El primer mínimo de difracción corresponde a m = 1. Por lo tanto, la distancia Δy del mínimo central a la posición del primer mínimo está dada por

$$\Delta y = \frac{\lambda L}{a}.$$

SIMPLIFIQUE

El ancho del máximo central w es entonces

$$w = 2\Delta y = \frac{2\lambda L}{a}.$$

CALCULE

Al sustituir los valores numéricos, obtenemos

$$w = \frac{2\left(510.0\cdot10^{-9}\ \text{m}\right)\left(1.40\ \text{m}\right)}{\left(7.00\cdot10^{-3}\ \text{m}\right)} = 0.000204\ \text{m}.$$

REDONDEE

Mostramos nuestro resultado con tres cifras:

$$w = 0.000204\ \text{m} = 0.204\ \text{mm}.$$

VUELVA A REVISAR

El ancho del máximo central proyectado en la pantalla es relativamente pequeño. Una rendija que es grande comparada con la longitud de onda de la luz muestra poca difracción, mientras que una rendija que tiene un ancho comparable con la longitud de onda de la luz, o menor, produce un espectro de difracción amplio. La relación de la longitud de onda de la luz al ancho de la rendija es

$$\frac{\lambda}{a} = 510.0\ \text{nm} / 7.00\cdot10^{-3}\ \text{m} = 7.29\cdot10^{-5}.$$

Por lo tanto, nuestra respuesta que muestra un máximo central estrecho parece razonable.

34.8 Difracción mediante una abertura circular

Hasta aquí, hemos considerado la interferencia por dos ranuras y la difracción por una sola. Ahora consideramos la difracción de la luz por una abertura circular. La difracción por una abertura circular se aplica a objetos de observación con telescopios que tienen espejos o lentes circulares, o con cámaras que tienen lentes circulares. La **resolución** de un telescopio o cámara (es decir, su capacidad para distinguir dos objetos puntuales como separados) está limitada por la difracción.

El primer mínimo de difracción de la luz con longitud de onda λ que pasa por una abertura circular con diámetro d, está dado por

$$\operatorname{sen}\theta = 1.22\frac{\lambda}{d}, \tag{34.20}$$

donde θ es el ángulo desde el eje central por la abertura hasta el primer mínimo de difracción. Este resultado es similar al de una sola rendija excepto para el factor de 1.22. No deduciremos esta expresión aquí. La figura 34.31 muestra un patrón de difracción para luz láser roja con longitud de onda λ = 633 nm que pasa por una abertura circular con diámetro 0.04 mm proyectada sobre una pantalla localizada a 1.00 m de la abertura. El diámetro del círculo oscuro interno mide 3.9 cm. El primer mínimo de difracción está claramente visible en la figura 34.31.

FIGURA 34.31 Patrón de difracción para luz láser roja con λ = 633 nm que pasa por una abertura circular con diámetro 0.04 mm y proyectado sobre una pantalla distante.

La figura 34.32 ilustra tres situaciones distintas para la observación de dos objetos puntuales distantes por medio de una lente. En la figura 34.32*a*), la separación angular es bastante grande como para distinguir los objetos. En la figura 34.32*b*), la separación angular es lo suficientemente grande como para apenas distinguir los objetos, pero no por mucho. En la figura 34.32*c*), la separación angular es muy pequeña como para diferenciarlos.

Si se usa una lente circular para observar dos objetos puntuales distantes, cuya separación angular es pequeña (por ejemplo, dos estrellas), la difracción limita la capacidad de la lente para distinguir estos dos objetos. El criterio para poder separar dos objetos puntuales se basa en la idea de que si el máximo central del primer objeto se localiza en el primer mínimo de difracción del segundo objeto, los objetos se distinguen. Este criterio, llamado **criterio de Rayleigh**, se expresa como

$$\theta_R = \operatorname{sen}^{-1}\left[\frac{1.22\lambda}{d}\right], \tag{34.21}$$

donde θ_R es la mínima separación angular soluble en radianes, λ es la longitud de onda de la luz usada para observar los objetos y d es el diámetro de la lente o espejo.

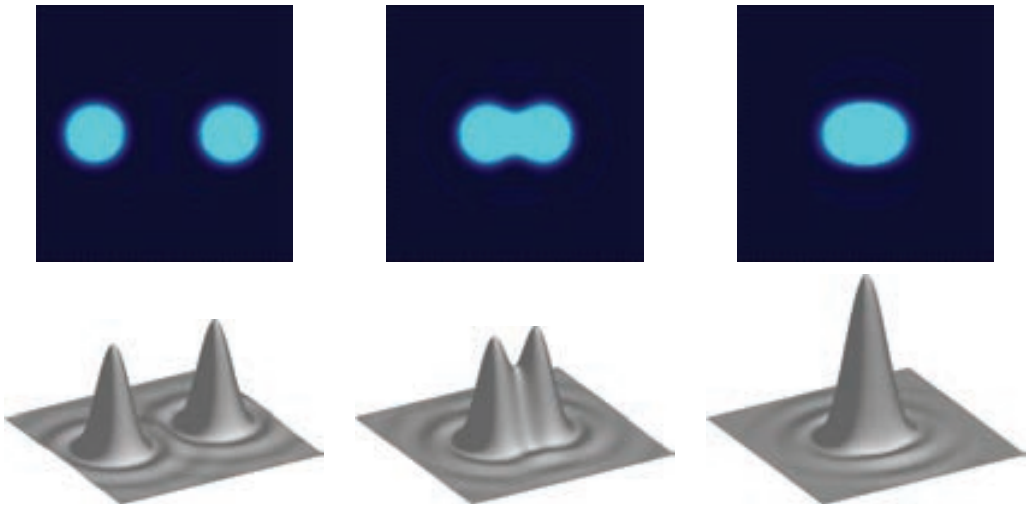


FIGURA 34.32 Difracción por una abertura circular: representación de la imagen que usted podría ver con una lente al observar dos objetos puntuales distantes. La fila superior es una representación bidimensional del mismo resultado en una representación tridimensional del patrón de intensidad de la fila inferior. *a*) La separación angular es bastante grande para distinguir con claridad los dos objetos; *b*) la separación angular es justo lo suficientemente grande para distinguir los dos objetos; *c*) la separación angular de los dos objetos es demasiado pequeña para permitir que sean diferenciados.

FIGURA 34.33 El espejo principal del Telescopio Espacial Hubble tiene un diámetro de 2.4 m. La forma hiperbólica del espejo es exacta hasta 32 nm, lo que significa que si el espejo fuese del tamaño de la Tierra, alguna irregularidad en el vidrio sería de 17 cm de alto o menos.

34.3 Oportunidad de autoevaluación

¿Los astronautas son capaces de ver desde el transbordador que orbita la Tierra, a una altitud de 190 km, cada una de las torres de la Gran Muralla China? Suponga que la Gran Muralla tiene 10.0 m de ancho.

EJEMPLO 34.2 Criterio de Rayleigh para el Telescopio Espacial Hubble

PROBLEMA

El diámetro del espejo principal en el Telescopio Espacial Hubble (figura 34.33) es de 2.4 m. ¿Cuál es la resolución angular mínima del telescopio para la luz verde?

SOLUCIÓN

Si usamos el criterio de Rayleigh, con luz verde de longitud de onda $\lambda = 550$ nm, obtenemos

$$\theta_R = 1.22\frac{550\cdot10^{-9}\ \text{m}}{2.4\ \text{m}} = 2.8\cdot10^{-7}\,\text{rad} = 1.6\cdot10^{-5}\,\text{grados},$$

que corresponde al ángulo subtendido por una moneda de diez centavos de dólar (diámetro 17.9 mm) localizada a 64 km.

34.6 Ejercicio en clase

Usted conduce su automóvil escuchando música de la radio. Su auto está equipado con radio AM ($f \approx 1$ MHz), radio FM ($f \approx 100$ MHz) y radio satelital XM ($f = 2.3$ GHz). Usted entra a un túnel con una abertura circular de diámetro 10 m. ¿Qué clase de señal de radio podrá recibir por más tiempo a medida que avanza en el túnel?

a) AM *b*) FM *c*) XM

34.9 Difracción de doble rendija

En la sección 34.3 se analizó el patrón de interferencia producido por dos rendijas. En ese análisis se supuso que las rendijas eran muy estrechas en comparación con la longitud de onda de la luz, $a \ll \lambda$. Para estas rendijas, el máximo de difracción es muy amplio, con picos en la intensidad que tienen el mismo valor en todos los ángulos (vea la figura 34.12).

Sin embargo, con rendijas dobles para las cuales no se cumple la condición $a \ll \lambda$ como ilustra la figura 34.7*c*), no todas las franjas de interferencia tienen la misma intensidad. Con efectos de difracción, se puede demostrar que la intensidad del patrón de interferencia de rendijas dobles está dada por

$$I = I_{\text{máx}}\cos^2\beta\left(\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\alpha}\right)^2, \tag{34.22}$$

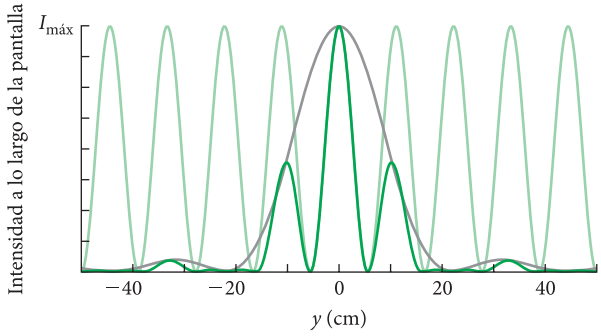


FIGURA 34.34 Patrón de intensidad de una rendija doble. La línea verde oscura es el patrón de intensidad observado. La línea gris pálida es la intensidad para una sola rendija con el mismo ancho que las dos rendijas. La línea gris pálida es la distribución de intensidad para dos rendijas muy estrechas separadas por la misma distancia que las rendijas dobles que produjeron la línea verde oscura.

donde $\alpha = \pi a \operatorname{sen}\theta/\lambda$, $\beta = \pi d \operatorname{sen}\theta/\lambda$, y d es la distancia entre las rendijas. Si la pantalla de coloca a una distancia suficientemente grande de las rendijas, el ángulo θ es pequeño y se puede aproximar como $\operatorname{sen}\theta \approx \tan\theta = y/L$. Entonces α y β se pueden aproximar como $\alpha = \pi a y/\lambda L$ y $\beta = \pi d y/\lambda L$.

Si la pantalla está a $L = 2.0$ m de las rendijas, cada rendija tiene un ancho $a = 5.0 \cdot 10^{-6}$ m, las rendijas están separadas $d = 1.0 \cdot 10^{-5}$ m y la longitud de onda de la luz incidente es $\lambda = 550$ nm, se obtiene el patrón de intensidad mostrado por la línea verde oscuro de la figura 34.34.

La figura 34.34 muestra que las posiciones de los máximos sobre la pantalla no difieren de las de la rendija doble con rendijas muy estrechas. Sin embargo, la intensidad máxima se modula mediante la distribución de intensidad de difracción, mostrada en color gris tenue. El patrón de difracción de la figura 34.34 forma una envolvente para la distribución de intensidad de interferencia. Si se cubriera una de las dos rendijas, sólo se vería el patrón de difracción.

La figura 34.35 muestra una fotografía de un patrón de interferencia/difracción de una rendija doble proyectada sobre una pantalla colocada a 2 m con luz de longitud de onda $\lambda = 532$ nm de un láser verde. Las rendijas tienen un ancho $a = 4.52 \cdot 10^{-5}$ m y están separadas $d = 3.00 \cdot 10^{-4}$ m. Los máximos centrales, que consisten en los máximos de rendija doble localizados dentro de la envolvente del máximo central de una sola rendija, son sobreexpuestos de manera intencional en la fotografía para permitir que sean observados los máximos secundarios. La figura 34.35 muestra también el patrón de intensidad predicho, sobreexpuesto efectivamente eligiendo el valor máximo de la intensidad graficada como 38% de la intensidad predicha máxima, que permite que los máximos secundarios sean visibles. Los primeros dos máximos de difracción de una sola rendija en cada lado de los máximos centrales están marcados con líneas discontinuas.

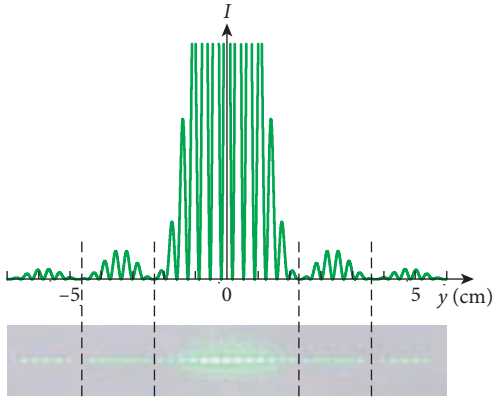


FIGURA 34.35 Fotografía del patrón de intensidad producido por una rendija doble iluminada por luz verde de un láser. La intensidad calculada para las líneas centrales se extiende arriba de la escala graficada en la dirección vertical para permitir que las líneas de menor intensidad sean visibles. El patrón de intensidad predicho se muestra para $a = 0.0452$ mm, $d = 0.300$ mm y $\lambda = 532$ nm. Las líneas discontinuas marcan los mínimos de difracción.

34.10 Rejillas

Hemos analizado la difracción y la interferencia para una sola rendija y para dos rendijas. ¿Cómo se aplican la difracción y la interferencia a un sistema de muchas rendijas? Al poner muchas rendijas juntas se forma un dispositivo llamado **rejilla de difracción**. Una rejilla de difracción tiene un gran número de rendijas o rayas colocadas muy juntas. Se puede construir usando un material opaco que contiene surcos en vez de rendijas reales, que se llama rejilla de reflexión. Una rejilla de difracción produce un patrón de intensidad que consta de franjas brillantes y delgadas, separadas por áreas oscuras. Este patrón característico resulta porque tener muchas ranuras significa que puede haber interferencia destructiva a una pequeña distancia de los máximos.

Una porción de una rejilla de difracción se muestra en la figura 34.36. Este dibujo muestra luz coherente con la longitud de onda λ que incide en una serie de rendijas estrechas, separadas cada una por una distancia d. Se produce un patrón de difracción en una pantalla con una distancia larga L.

La figura 34.36 se puede ampliar, como se hizo para los casos de una sola ranura y doble ranura (de nuevo usando el límite de que $L \gg d$ de modo que todos los rayos dibujados sean paralelos), para permitirnos analizar la

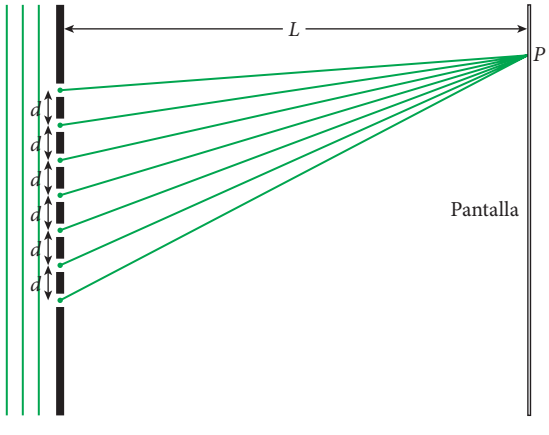


FIGURA 34.36 Una porción de una rejilla de difracción.

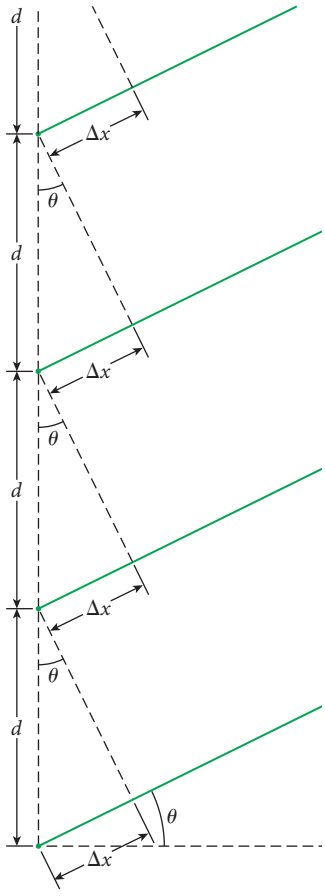


FIGURA 34.37 Dibujo ampliado de una rejilla de difracción, suponiendo que la pantalla está lejos en comparación con el espaciamiento entre las rendijas de la rejilla.

diferencia de longitud de trayectoria para la luz de cada una de las ranuras a la pantalla (figura 34.37). Suponga que L es tan grande que los rayos de luz son aproximadamente paralelos entre sí.

La distancia d se llama espaciamiento de rejilla. Si el ancho de rejilla es W, el número N de rendijas o rejillas es $N = W/d$. Las rejillas de difracción se especifican con frecuencia en términos del número n_1 de rendijas o rayas por unidad de longitud. Se puede obtener d del n_1 especificado usando $d = 1/n_1$.

Calculemos las diferencias de longitud de trayectoria para las trayectorias mostradas en la figura 34.37. Al usar un par adyacente de rayos, la diferencia de longitud de trayectoria es $\Delta x = d$ sen θ. Para producir líneas brillantes, o interferencia constructiva, esta diferencia de longitud de trayectoria debe ser un múltiplo entero de la longitud de onda, así que

$$d \operatorname{sen}\theta = m\lambda \quad (m = 0, 1, 2, \ldots). \tag{34.23}$$

Los valores de m corresponden a diferentes líneas brillantes. Para $m = 0$, tenemos el máximo central en $\theta = 0$. Para $m = 1$ tenemos el máximo de primer orden. Para $m = 2$, tenemos el máximo de segundo orden, etc. Por lo general, las rejillas de difracción están diseñadas para producir separaciones angulares grandes entre los máximos, así que no hacemos la aproximación de ángulo pequeño al analizar rejillas de difracción.

Debido a que las rejillas de difracción producen espacios muy amplios, entonces se pueden usar para determinar la longitud de onda de luz monocromática al reacomodar la ecuación 34.23,

$$\lambda = \frac{d}{m}\operatorname{sen}\theta \quad (m = 0, 1, 2, \ldots). \tag{34.24}$$

La luz monocromática que incide en una rejilla de difracción produce líneas sobre una pantalla en ángulos ampliamente separados. Por ejemplo, cuando un haz de luz láser enfocado choca con una rejilla de difracción, se crea un conjunto de puntos ampliamente espaciados, como ilustra la figura 34.38.

Además, las rejillas de difracción se pueden usar para separar diferentes longitudes de onda de luz de un espectro de longitudes de onda. Por ejemplo, la luz del sol se dispersa en múltiples conjuntos de colores parecidos al arco iris como una función de θ. Si la luz se compone de varias longitudes de onda discretas, la luz se separa en conjuntos de líneas que corresponden a cada una de las longitudes de onda.

La calidad de una rejilla de difracción puede cuantificarse en términos de su dispersión. La **dispersión** describe la capacidad de una rejilla de difracción para dispersar las distintas longitudes de onda en un determinado orden. La dispersión se define por $D = \Delta\theta/\Delta\lambda$, donde $\Delta\theta$ es la separación angular entre dos líneas con diferencia de longitud de onda $\Delta\lambda$. Se puede obtener una expresión para la dispersión al derivar la ecuación 34.24 con respecto a λ:

$$\frac{d\theta}{d\lambda} = \frac{d}{d\lambda}\left(\operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{m\lambda}{d}\right)\right) = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{m\lambda}{d}\right)^2}}\frac{m}{d} = \frac{m}{\sqrt{d^2-(m\lambda)^2}}.$$

Debido a que $m\lambda/d = \operatorname{sen}\theta$, podemos expresar $d\theta/d\lambda$ como

$$\frac{d\theta}{d\lambda} = \frac{1}{\sqrt{1-\operatorname{sen}^2\theta}}\frac{m}{d} = \frac{m}{d\cos\theta},$$

donde hemos usado la identidad $\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$. Si tomamos intervalos de θ y λ que no sean demasiado grandes, podemos escribir una expresión para la dispersión de una rejilla de difracción como

$$D = \frac{\Delta\theta}{\Delta\lambda} = \frac{m}{d\cos\theta} \quad (m = 1, 2, 3, \ldots). \tag{34.25}$$

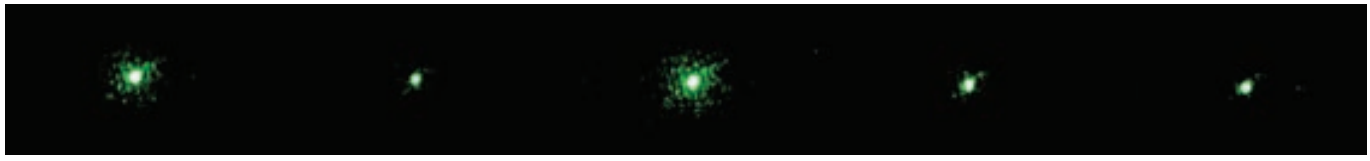


FIGURA 34.38 Patrón de difracción producido en una pantalla mediante una luz láser verde que incide en una rejilla de difracción con espaciamiento de línea n_L = 787 líneas/cm. Se muestran los puntos correspondientes al máximo central, a $m = \pm1$ y a $m = \pm2$.

La dispersión de una rejilla de difracción se incrementa conforme la distancia d entre rayas se hace más pequeña y a medida que el orden m se hace más grande. Note que la dispersión no depende del número de rayas N.

El **poder de resolución** R de una rejilla de difracción describe su capacidad para resolver o distinguir máximos cercanamente espaciados. Esta capacidad depende del ancho de cada máximo. Considere una rejilla de difracción para resolver dos longitudes de onda λ_1 y λ_2, con $\lambda_{\text{prom}} = (\lambda_1 + \lambda_2)/2$ y $\Delta\lambda = |\lambda_2 - \lambda_1|$. Se define el poder de resolución de la rejilla como

$$R = \frac{\lambda_{\text{prom}}}{\Delta\lambda_{\text{mín}}}, \tag{34.26}$$

donde $\Delta\lambda_{\text{mín}}$ es el valor mínimo de $\Delta\lambda$ tal que se resuelven las longitudes de onda.

A fin de analizar el poder de resolución, necesitamos una expresión para el ancho de cada máximo. Este ancho se determina por la posición del primer mínimo en un lado del máximo central. Se define la mitad del ancho angular θ_{hw} del máximo como el ángulo entre el máximo y el primer mínimo (figura 34.39).

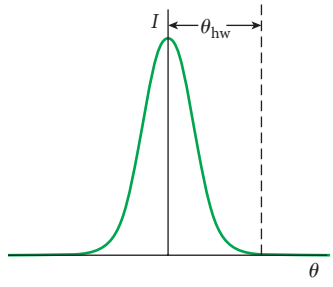


FIGURA 34.39 La mitad del ancho angular del máximo central para una rejilla de difracción.

La ecuación 34.25 nos da la dispersión angular para una determinada $\Delta\lambda$. Las dos longitudes de onda pueden resolverse apenas si esta dispersión $\Delta\theta = \theta_{\text{hw}}$. Para determinar la posición del primer mínimo, hacemos un análisis de difracción de una sola rendija usando la rendija completa como la rendija simple (figura 34.40). Este método se justifica si el número de rendijas N es grande. En cualquier caso, proporciona una aproximación útil y significativa, a diferencia de un cálculo matemático preciso, que tendería a oscurecer la física en cuestión.

El ángulo del primer mínimo para la difracción de una sola rendija se puede obtener de la condición a sen $\theta = \lambda$, donde Nd se sustituye por el ancho de rendija a: Nd sen $\theta_{\text{hw}} = \lambda$. Debido a que θ_{hw} es pequeño, podemos escribir sen $\theta_{\text{hw}} \approx \theta_{\text{hw}}$ o bien

$$\theta_{\text{hw}} = \frac{\lambda}{Nd}.$$

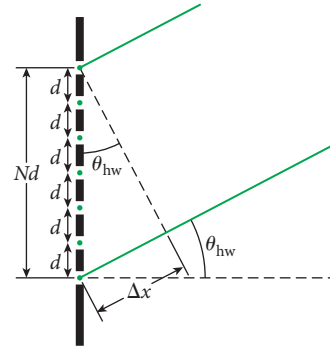


FIGURA 34.40 Cálculo de la mitad del ancho del máximo central para una rejilla de difracción, si se toma toda la rejilla como una sola rendija.

Se puede demostrar (aunque no lo hacemos aquí) que el ancho de los máximos para otros órdenes se puede escribir como

$$\theta_{\text{hw}} = \frac{\lambda}{Nd\cos\theta},$$

donde θ es el ángulo que corresponde a la intensidad máxima para ese orden. Al sustituir θ_{hw} para $\Delta\theta$ en la ecuación 34.25,

$$\frac{\Delta\theta}{\Delta\lambda} = \frac{\lambda}{Nd\cos\theta\,\Delta\lambda} = \frac{m}{d\cos\theta}$$

o bien,

$$R = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = Nm, \tag{34.27}$$

donde se ha tomado $\lambda \approx \big(\lambda + (\lambda + \Delta\lambda)\big)/2$. Note que el poder de resolución de una rejilla de difracción depende sólo del número total de rayas y del orden.

EJEMPLO 34.3 CD o DVD como rejilla de difracción

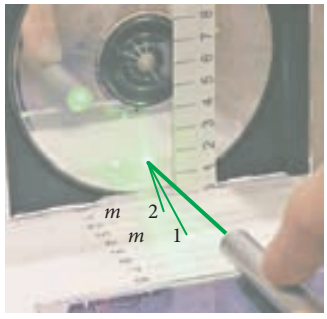
Las rejillas de difracción pueden tomar la forma de una serie de rendijas estrechas por las que pasa la luz o una serie de surcos poco espaciados que reflejan la luz. El patrón de difracción resultante es el mismo. Por lo tanto, podemos considerar los surcos de espiral de un CD o un DVD como una rejilla de difracción. En la figura 34.41 se muestra un DVD que refleja varios colores de la luz del sol.

Si dirigimos un apuntador láser verde con longitud de onda 532 nm perpendicular a la superficie de un CD, observamos un patrón de difracción en la forma de puntos brillantes en una pantalla colocada perpendicular al CD localizado a una distancia perpendicular $L = 1.6$ cm, lejos del punto en el que el haz láser choca con el CD (figuras 34.42 y 34.43). El espaciamiento entre los surcos en el CD es $d = 1.60 \cdot 10^{-6}$ m $= 1.6$ μm.

(*continúa*)

FIGURA 34.41 Colores diferentes que resultan de la interferencia constructiva de la luz del sol que choca con un DVD en blanco.

a)



b)

FIGURA 34.42 Uso de un CD como una rejilla de difracción. *a*) Un apuntador láser verde que brilla perpendicularmente en la superficie inferior de un CD. *b*) Las líneas verdes ilustran la luz del apuntador láser y se marca el orden de cada punto de difracción. Las rayas verticales y horizontales tienen marcas cada centímetro.

(*continuación*)

PROBLEMA

¿Cuál es la distancia horizontal desde la superficie del borde del CD a los puntos observados en la pantalla?

SOLUCIÓN

Empezamos con nuestra expresión para el ángulo de interferencia constructiva de una rejilla de difracción,

$$d \operatorname{sen} \phi_m = m\lambda \quad (m = 0, 1, 2, 3, \ldots),$$

donde d es la distancia entre surcos adyacentes, λ es la longitud de onda de la luz, m es el orden y ϕ_m es el ángulo del máximo de m-ésimo orden.

La longitud de onda que necesitamos para este cálculo es la longitud de onda de la luz en el plástico de policarbonato del cual está hecho el CD, que tiene un índice de refracción de $n = 1.55$: $\lambda = \lambda_{\text{aire}}/n$. Así, los criterios para los máximos de difracción están dados por

$$d \operatorname{sen} \phi_m = \frac{m\lambda_{\text{aire}}}{n} \Leftrightarrow n \operatorname{sen} \phi_m \frac{m\lambda_{\text{aire}}}{d}.$$

El rayo de luz ahora debe pasar por la superficie del CD, en la que se refracta. Al aplicar la ley de Snell en la superficie y tomar $n_{\text{aire}} = 1$, obtenemos

$$n \operatorname{sen} \phi_m = 1 \cdot \operatorname{sen} \theta_m = \operatorname{sen} \theta_m = \frac{m\lambda_{\text{aire}}}{d}.$$

Podemos escribir esta ecuación como $d \operatorname{sen} \theta_m = m\lambda_{\text{aire}}$, que es exactamente lo que se obtendría si el CD se hubiera tratado como una rejilla de difracción en aire.

Al comenzar con $m = 0$, se encuentra que el máximo central produce un punto en $\theta_0 = 0°$, lo que significa que el punto se produce enfrente del apuntador láser. Usted puede ver este máximo de difracción en la reflexión del apuntador láser desde la superficie del CD en la figura 34.42.

Al moverse a $m = 1$, encontramos el ángulo del máximo de difracción de primer orden, θ_1, por medio de

$$\theta_1 = \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{\lambda_{\text{aire}}}{\lambda_{\text{aire}}}\right) = \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{532 \cdot 10^{-9}\ \text{m}}{1.60 \cdot 10^{-6}\ \text{m}}\right) = 19.4°.$$

Al observar la figura 34.43*a*), podemos ver que $\tan \theta_1 = L/y_1$, así que calculamos la distancia del punto de primer orden a lo largo de la pantalla como $y_1 = (1.6\ \text{cm})/(\tan 19.4°) = 4.54\ \text{cm}$. La fotografía de la figura 34.42 muestra que este cálculo concuerda con los que observamos para $m = 1$.

El ángulo del punto de segundo orden está dado por

$$\theta_2 = \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{2\lambda_{\text{aire}}}{\lambda_{\text{aire}}}\right) = \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{2 \cdot 532 \cdot 10^{-9}\ \text{m}}{1.60 \cdot 10^{-6}\ \text{m}}\right) = 41.7°.$$

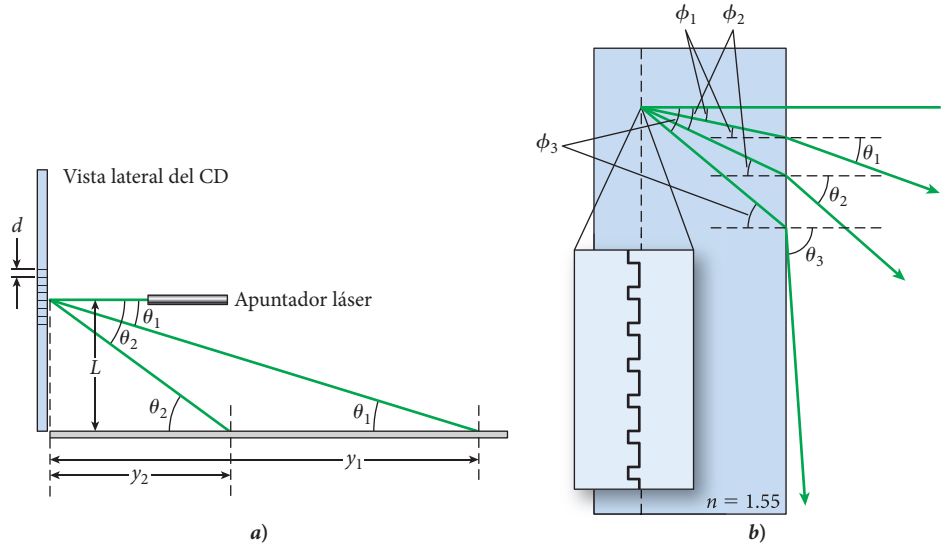


FIGURA 34.43 Configuración geométrica al usar un CD como una rejilla de difracción. *a*) Vista lateral de la configuración geométrica de la medición mostrada en la figura 34.42. Se usa una pantalla blanca horizontal para localizar los máximos de difracción. *b*) Dibujo ampliado de la rejilla de difracción dentro de la estructura de policarbonato del CD, que ilustra la difracción y refracción que ocurren.

Así, la posición del punto de segundo orden es $y_2 = (1.6\text{ cm})/(\tan 41.7°) = 1.80$ cm, que concuerda también con lo que observamos para $m = 2$ en la figura 34.42.

El ángulo del punto de tercer orden es

$$\theta_3 = \text{sen}^{-1}\left(\frac{3\lambda_{\text{aire}}}{d}\right) = \text{sen}^{-1}\left(\frac{3\cdot 532\cdot 10^{-9}\text{ m}}{1.60\cdot 10^{-6}\text{ m}}\right) = 85.9°.$$

La posición del punto de tercer orden es $y_3 = (1.6\text{ cm})/(\tan 85.9°) = 0.11$ cm. El punto de tercer orden no es claramente visible en la figura 34.42 porque el máximo de tercer orden está más oscuro que los máximos primero y segundo, y porque el ángulo en el que se debe observar el punto está muy cerca de 90°.

¿Qué hay acerca de un punto de cuarto orden? Para este ángulo tendríamos $\theta_4 = \text{sen}^{-1}(4\lambda_{\text{aire}}/d)$. Sin embargo, para este orden $4\lambda_{\text{aire}}/d = 4(532\text{ nm})/(1.6\ \mu\text{m}) = 1.33$, lo cual no puede ocurrir porque $|\text{sen}\,\theta| \leq 1$. Por lo tanto, sólo tres puntos pueden aparecer en la pantalla, sólo dos de los cuales son fácilmente visibles.

Si realizamos el experimento usando un láser rojo común con $\lambda_{\text{aire}} = 633$ nm, obtendríamos sólo dos máximos, que ocurren en $\theta_1 = 23.3°$ y $\theta_2 = 52.3°$.

34.4 Oportunidad de autoevaluación

¿Qué sucedería si se repitiera este experimento con un DVD y un apuntador láser verde? (La separación entre pistas en un DVD es 740 nm en comparación con 1 600 nm para un CD.)

Discos Blu-ray

En el ejemplo 9.2 calculamos la longitud de una pista de CD y mostramos también las imágenes microscópicas de superficies de CD. Ahora deseamos explorar cómo los discos Blu-ray y otros discos ópticos almacenan información digital y cómo las computadoras y los dispositivos electrónicos del usuario los leen. Los discos ópticos CD, DVD y Blu-ray funcionan sobre principios similares. Las figuras 34.44*c*) y 34.44*d*) muestran una sección transversal de un disco Blu-ray.

Un disco Blu-ray, al igual que un CD o un DVD, almacena información digital en términos de unos y ceros. Estos unos y ceros se codifican en el lugar de los bordes de las áreas altas y áreas bajas en la capa de aluminio ilustrada en la figura 34.44. Las áreas altas y bajas rotan con el disco Blu-ray y pasan sobre un láser de estado sólido azul que emite luz con una longitud de onda de $\lambda = 405$ nm en aire. En la figura 34.45 se muestra un esquema del conjunto de láser azul.

El reproductor de Blu-ray incorpora varios conceptos de óptica de ondas presentados en este capítulo, inclusive una rejilla de difracción e interferencia destructiva, así como polarización del capítulo 31. Un láser de estado sólido produce luz con longitud de onda $\lambda = 405$ nm en aire. Esta longitud de onda es más corta por un factor de casi dos, que la longitud de onda de la luz láser usada para leer discos compactos. La longitud de onda más corta permite que las pistas y pozos sean más pequeños, lo que permite que se almacenen más datos. Esta luz se pasa por una rejilla de difracción. El máximo central y las dos líneas de primer orden se muestran en la figura 34.45. Las líneas de orden superior no se usan. La luz en el máximo central se emplea para leer los datos

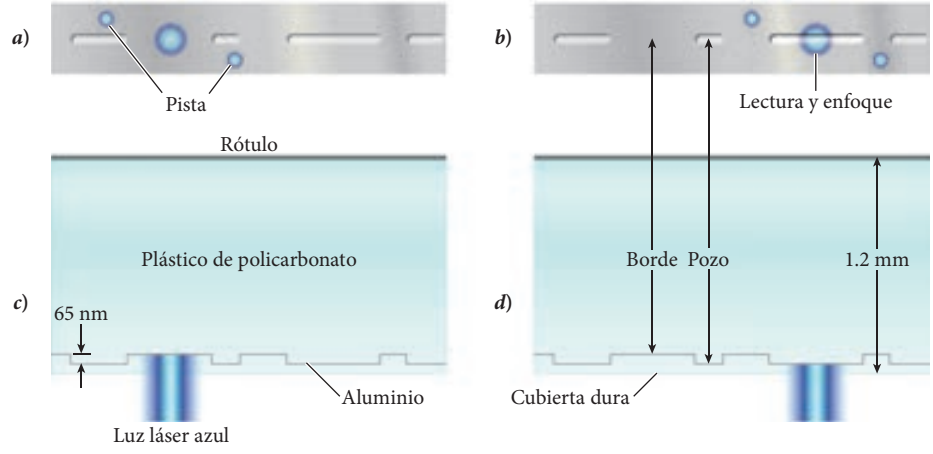


FIGURA 34.44 Sección transversal de un disco Blu-ray. *a*) Vista del fondo que muestra el haz de datos láser que se reflejan sólo desde el borde de aluminio. *b*) Vista de la parte inferior que muestra el haz de datos láser que se refleja tanto del borde como del pozo de aluminio de forma simultánea. *c*) Vista lateral que muestra el haz de datos láser enfocado en el borde de aluminio. *d*) Vista lateral que muestra el haz láser enfocado en el pozo de aluminio (y borde).

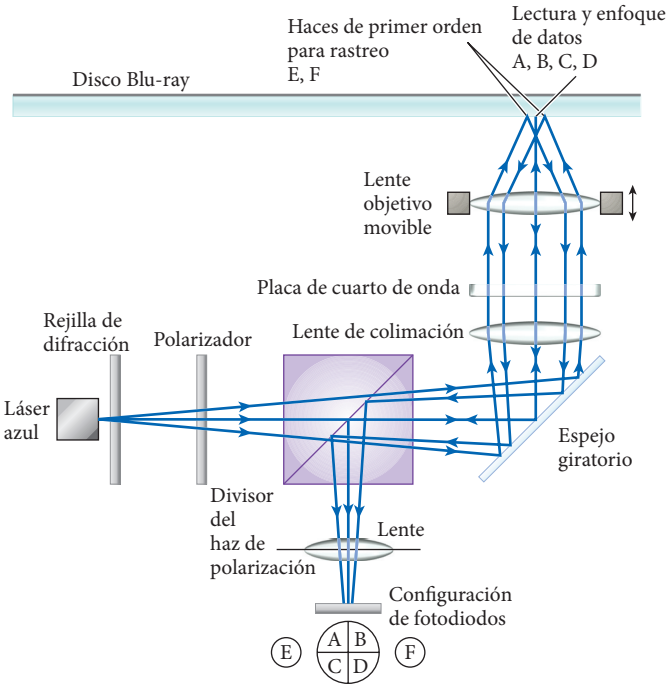


FIGURA 34.45 Esquema del conjunto de láser azul de un lector de discos Blu-ray.

del disco y para mantener el enfoque del haz. La luz de los dos máximos de primer orden se usa para rastrear los datos en el disco.

Después de pasar por la rejilla de difracción, la luz pasa por un polarizador y después se enfila a un divisor de haz de polarización. La luz se dirige hacia arriba con un espejo giratorio. Luego, la luz se enfoca en el disco Blu-ray después de pasar por una placa de cuarto de onda que gira la polarización. El efecto de los elementos de polarización es separar la luz reflejada de la superficie del disco Blu-ray y dirigirla a la configuración de fotodiodos mientras se reduce al mínimo la luz del láser que viaja hacia la serie de fotodiodos.

Cuando la luz del máximo central brilla por completo en el borde, como ilustran las figuras 34.44*a*) y 34.44*c*), toda la luz se refleja en el fotodiodo. Cuando la luz del láser brilla en un pozo, como muestran las figuras 34.44*b*) y *d*), la luz se refleja del pozo y el borde. En este caso, la luz que se refleja del área del borde viaja más lejos que la luz reflejada del área del pozo. En ambos casos, la luz experimenta un cambio de fase cuando se refleja. Así, el análisis de interferencia destructiva del recubrimiento de una lente se puede aplicar a este caso. Observe la diferencia de altura entre las áreas del borde y el pozo como t, de modo que la diferencia de longitud de trayectoria para la luz desde las áreas alta y baja es $2t$. El criterio para interferencia destructiva es

$$\left(m+\frac{1}{2}\right)\frac{\lambda_{\text{aire}}}{n_{\text{policarbonato}}}=2t \quad (m=0,\pm1,\pm2,\ldots),$$

donde $n_{\text{policarbonato}}$ es el índice de refracción del policarbonato en el disco Blu-ray y λ_{aire} es la longitud de onda de la luz emitida por el láser. Para $m = 0$,

$$t=\frac{\lambda_{\text{aire}}}{4n_{\text{policarbonato}}}.$$

Para el láser Blu-ray, $\lambda_{\text{aire}} = 405$ nm y el índice de refracción del policarbonato es 1.58; por lo tanto, el espesor requerido para la interferencia destructiva es

$$t=\frac{\lambda_{\text{aire}}}{4n_{\text{policarbonato}}}=\frac{405\text{ nm}}{4(1.58)}=64.1\text{ nm},$$

que es cercano a la diferencia de las áreas bajas y altas mostradas en la figura 34.44.

Conforme gira el disco, las áreas del borde y pozo pasan sobre el láser. Cuando las áreas del borde están sobre el láser, toda la luz se refleja y el fotodiodo registra un determinado voltaje. Cuando las áreas del pozo pasan sobre el láser, parte de la luz se pierde ante la interferencia destructiva y el fotodiodo registra un voltaje más bajo. Siempre que cambia el voltaje, de alto a bajo, o de bajo a alto, los circuitos del reproductor de Blu-ray registran un uno. De otro modo, el reproductor registra un cero. Este patrón de ceros y unos se traduce en el código digital normal usado en las computadoras por medio del método 8-14, que convierte los 14 bits codificados en el disco en 8 bits de información digital. Además, se agregan tres bits a cada conjunto de 14 bits para permitir al lector mantener el rastreo. La luz del máximo central se proyecta sobre un fotodiodo que está segmentado en cuatro partes A, B, C y D, como se muestra en la figura 34.45. El balance de estas cuatro señales se usa para ajustar la distancia de la lente del objeto móvil desde la superficie del disco. El rastreo se hace comparando las señales de las dos líneas de primer orden que se registran en el fotodiodo como E y F, según se ilustra en la figura 34.45.

Un disco Blu-ray es similar a un CD o DVD, excepto que las áreas alta y baja son más pequeñas. La distancia entre pistas es 1.6 μm en un CD y 0.74 μm en un DVD. Además, un DVD usa un láser que emite luz con una longitud de onda de 650 nm, mientras que un CD usa un láser con una longitud de onda de 780 nm. Un disco Blu-ray usa un espaciamiento de pista de 0.30 μm y puede contener 25 gigabytes de información digital. Un CD puede contener hasta 700 megabytes de información digital, mientras que un DVD es capaz de contener 4.7 gigabytes.

34.11 Difracción de rayos X y estructura cristalina

Wilhelm Röntgen (1845-1923) descubrió los rayos X en 1895. Sus experimentos hicieron pensar que los rayos X eran ondas electromagnéticas con una longitud de onda de cerca de 10^{-10} m. Por la misma época, el estudio de los sólidos cristalinos llevó a pensar que sus átomos estaban dispuestos en un patrón repetido regular, con un espaciamiento de 10^{-10} m entre átomos. Al juntar estas dos ideas, Max von Laue (1879-1960) propuso, a principios de la década de 1900, que un cristal podría servir como una rejilla de difracción tridimensional para rayos X. En 1912, Von Laue, Walter Friederich (1883-1963) y Paul Knipping (1883-1935) realizaron el primer experimento de **difracción de rayos X**, el cual mostró difracción en rayos X mediante un cristal. Poco después, Sir William Henry Bragg (1862-1942) y su hijo William Lawrence Bragg (1890-1971) dedujeron la ley de Bragg (dada a continuación) y realizaron una serie de experimentos relacionados con la difracción de rayos X de los cristales.

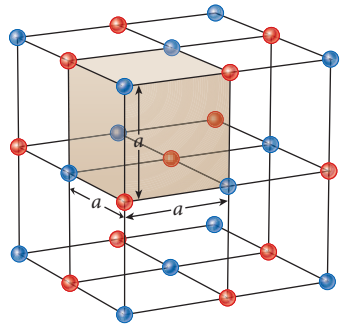


FIGURA 34.46 Un retículo cristalino cúbico con espaciamiento a.

Supongamos que tenemos un cristal cúbico, con cada átomo en el retículo a una distancia a de sus átomos vecinos en las tres direcciones (figura 34.46). Podemos imaginar varios planos de átomos en este cristal. Por ejemplo, los planos horizontales están compuestos de átomos espaciados una distancia a, con los planos espaciados una distancia a uno del otro. Si los rayos X inciden en estos planos, las filas de átomos en el retículo cristalino pueden actuar como una rejilla de difracción para los rayos X. Se puede considerar que los rayos X se dispersan desde los átomos (figura 34.47).

Los efectos de interferencia son causados por diferencias de longitud de trayectoria. Cuando los rayos X se dispersan fuera de un plano, las ondas permanecen en fase siempre que el ángulo de incidencia sea igual al ángulo reflejado. Sin embargo, para dos planos adyacentes, la figura 34.48 muestra que la diferencia de longitud de trayectoria para los rayos X dispersados desde los dos planos es

$$\Delta x = \Delta x_1 + \Delta x_2 = 2a \operatorname{sen}\theta, \tag{34.28}$$

donde θ es el ángulo entre los rayos X entrantes y el plano de átomos. (¡Note que, por desgracia, esta convención en la bibliografía es diferente de nuestros cuatro casos, en los que el ángulo se mide siempre con respecto a la superficie normal!) Así, el criterio para interferencia constructiva de dispersión de Bragg está dado por

$$2a \operatorname{sen}\theta = m\lambda \quad (m = 0, 1, 2, \ldots). \tag{34.29}$$

Esta ecuación se conoce como **ley de Bragg**.

Cuando los rayos X inciden en un cristal, varios planos diferentes pueden funcionar como rejillas de difracción. En la figura 34.49 se ilustran algunos ejemplos. Estos planos no tienen el espaciamiento a entre los planos.

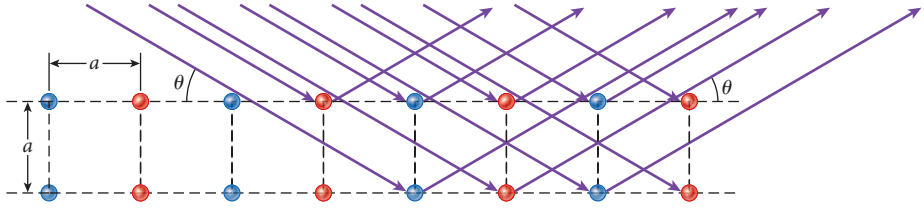


FIGURA 34.47 Esquema de dispersión de rayos X fuera de los planos de átomos en un cristal.

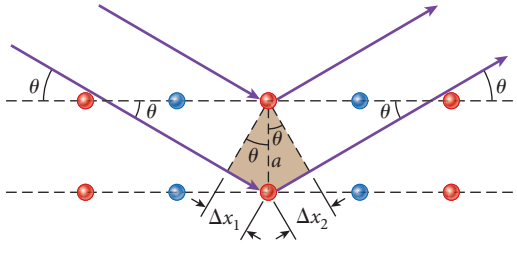


FIGURA 34.48 Diferencia de longitud de trayectoria de rayos X dispersados desde dos planos adyacentes.

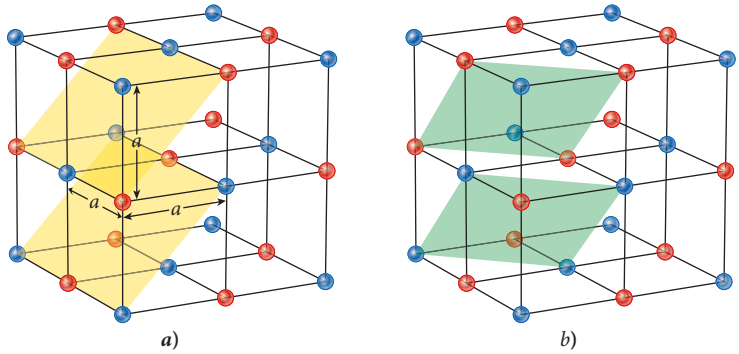


FIGURA 34.49 Ejemplos de planos que podrían funcionar como rejillas de difracción para rayos X en un retículo cristalino cúbico.

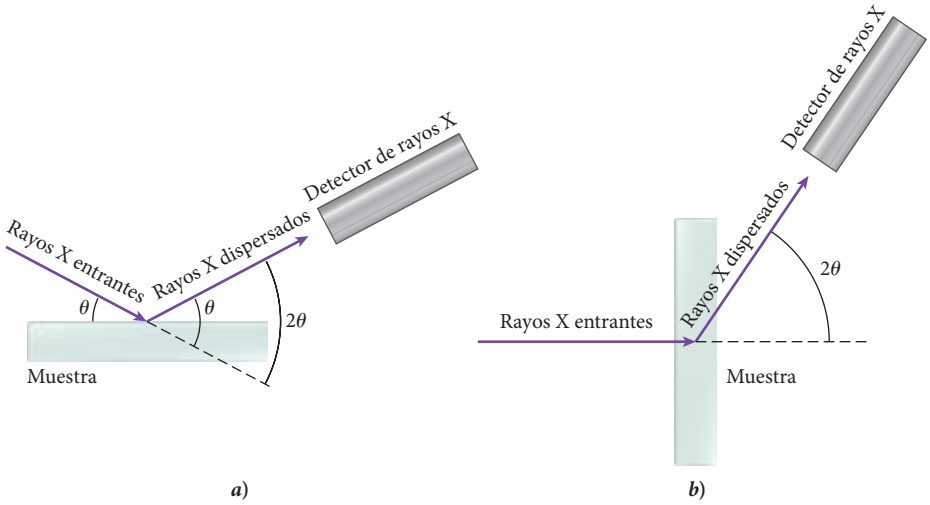


FIGURA 34.50 Dos configuraciones geométricas para estudiar la estructura atómica de una muestra con difracción de rayos X. *a*) Rayos X dispersados casi paralelos a la superficie; *b*) rayos X transmitidos por la muestra.

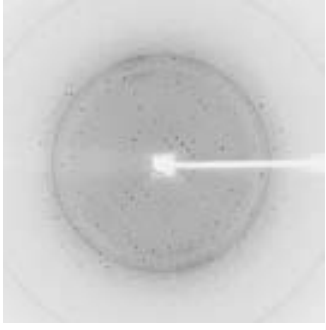


FIGURA 34.51 Imagen de difracción de rayos X de una proteína.

Para estudiar la estructura atómica de una sustancia por medio de difracción de rayos X, los rayos X se pueden dispersar casi paralelos a la superficie de una muestra [figura 34.50*a*)]. Por otra parte, los rayos X pueden transmitirse a través de la muestra y detectarse en el lado opuesto de ésta [figura 34.50*b*)]. Para el método de dispersión paralela, el ángulo de incidencia θ debe ser igual al ángulo de observación. Para el método de transmisión, el ángulo observado es dos veces el ángulo θ de Bragg. Al medir la intensidad de los rayos X como una función de θ, podemos determinar los detalles de la estructura del material estudiado.

La figura 34.51 presenta la imagen de una muestra obtenida de la dispersión de rayos X de una proteína, en este caso "3Clpro". A fin de que esta técnica de obtención de imágenes funcione, la proteína tiene que fijarse en una estructura cristalina. Del patrón de difracción obtenido, uno puede reconstruir la estructura espacial tridimensional con la ayuda de programas de computadora.

Los aceleradores de partículas modernos, como el National Synchrotron Light Source en el Laboratorio Nacional de Brookhaven, el Advanced Light Source en el Laboratorio Nacional de Lawrence Berkeley o el Advanced Photon Source en el Laboratorio Nacional de Argonne (figura 34.52), y muchos otros alrededor del mundo, se usan para producir haces de rayos X intensos de alta calidad para realizar investigación en materia condensada y ciencia de materiales. Además, se puede reunir información de dispersión similar bombardeando estructuras cristalinas con haces intensos de neutrones. (Para entender cómo funciona esto, tenemos que esperar unos cuantos capítulos más hasta que examinemos la mecánica cuántica.) Los haces de neutrones intensos para investigación de ciencia de materiales se tienen ahora en la Spallation Neutron Source en el Laboratorio Nacional de Oak Ridge, en Estados Unidos. Estas enormes instalaciones de dispersión de neutrones y rayos X cuestan cientos de millones de dólares, pero son herramientas absolutamente esenciales para investigar la estructura a nanoescala de materiales. Son las herramientas de investigación básicas para los avances modernos y futuros de la nanotecnología.

FIGURA 34.52 Advanced Photon Source, Argonne, Estados Unidos.

LO QUE HEMOS APRENDIDO | GUÍA DE ESTUDIO PARA EXAMEN

- El principio de Huygens establece que todo punto en un frente de ondas que se propaga, sirve como una fuente de ondas secundarias esféricas. Un análisis geométrico con base en este principio se llama construcción de Huygens.
- El requisito de que dos ondas coherentes con longitud de onda λ interfieran constructivamente es $\Delta x = m\lambda$ ($m = 0, \pm1, \pm2,...$), donde Δx es la diferencia de trayectoria entre las dos ondas.
- El requisito de que dos ondas coherentes con longitud de onda λ interfieran destructivamente es $\Delta x = (m + \frac{1}{2})\lambda$ ($m = 0, \pm1, \pm2,...$), donde Δx es la diferencia de trayectoria entre dos ondas.
- El ángulo de franjas brillantes desde dos rendijas estrechas espaciadas una distancia d e iluminadas por luz coherente con longitud de onda λ está dado por sen $\theta = m\lambda$ ($m = 0, \pm1, \pm2,...$). En una pantalla alejada una gran distancia L, la posición de y de las franjas brillantes desde el máximo central a lo largo de la pantalla está dada por $y = \dfrac{m\lambda L}{d}$ ($m = 0, \pm1, \pm2,...$).
- El ángulo de franjas oscuras desde dos rendijas estrechas espaciadas una distancia d e iluminadas por luz coherente con longitud de onda λ está dado por d sen $\theta = (m + \frac{1}{2})\lambda$ ($m = 0, \pm1, \pm2,...$). En una pantalla

alejada una gran distancia L, la posición de y de las franjas oscuras desde el máximo central a lo largo de la pantalla está dada por $y = \frac{\left(m+\frac{1}{2}\right)\lambda L}{d}$ ($m = 0, \pm1, \pm2,...$).

- La condición para interferencia constructiva para luz con longitud de onda λ_{aire} en una película de espesor t e índice de refracción n en aire es $\left(m+\frac{1}{2}\right)\frac{\lambda_{aire}}{n} = 2t$ ($m = 0, \pm1, \pm2,...$).
- Los radios de los círculos brillantes en los anillos de Newton se determinan mediante $x_m = \sqrt{R\left(m+\frac{1}{2}\right)\lambda}$ ($m = 0, 1, 2,...$), donde R es el radio de curvatura de la superficie de vidrio curvada superior y λ es la longitud de onda de la luz incidente.
- El ángulo de las franjas oscuras de una sola rendija de ancho a iluminada por luz con longitud de onda λ está dado por $a \operatorname{sen}\theta = m\lambda$ ($m = 1, 2, 3,...$).
- El ángulo θ del primer mínimo de una abertura circular con diámetro d iluminada con luz de longitud de onda λ es $\operatorname{sen}\theta = 1.22\frac{\lambda}{d}$. Esta expresión se conoce como criterio de Rayleigh. El ángulo en la ecuación expresa el ángulo mínimo para distinguir entre dos objetos distantes mediante una lente primaria de telescopio, espejo o lente de cámara, con diámetro d.
- El ángulo θ de los máximos de una rejilla de difracción iluminada con luz de longitud de onda λ está dado por $\theta = \operatorname{sen}^{-1}\left[\frac{m\lambda}{d}\right]$ ($m = 0, 1, 2,...$), donde d es la distancia entre las rayas de la rejilla.
- La dispersión de una rejilla de difracción está dada por $D = \frac{m}{d\cos\theta}$ ($m = 1, 2, 3,...$), donde d es la distancia entre las rayas de la rejilla.
- El poder de resolución de una rejilla de difracción está dado por $R = Nm$ ($m = 1, 2, 3,...$), donde N es el número de rayas en la rejilla.
- Para la dispersión de rayos X de planos de átomos separados por una distancia a, la condición para interferencia constructiva es $2a \operatorname{sen}\theta = m\lambda$ ($m = 0, 1, 2,...$). El ángulo θ es el ángulo entre los rayos X entrantes y el plano de átomos y el ángulo de observación de los rayos X.

TÉRMINOS CLAVE

principio de Huygens, p. 1098
luz coherente, p. 1100
incoherente, p. 1100
interferencia, p. 1100
interferencia constructiva, p. 1100
interferencia destructiva, p. 1100
experimento de doble rendija de Young, p. 1101
orden, p. 1102
película delgada, p. 1104
anillos de Newton, p. 1106
interferómetro, p. 1107
difracción, p. 1109
resolución, p. 1113
criterio de Rayleigh, p . 1113
rejilla de difracción, p. 1115
dispersión, p. 1116
poder de resolución, p. 1117
difracción de rayos X, p. 1121
ley de Bragg, p. 1121

NUEVOS SÍMBOLOS Y ECUACIONES

$\Delta x = m\lambda$ ($m = 0, \pm1, \pm2,...$), diferencia de longitud de trayectoria para interferencia constructiva

$\Delta x = (m + \frac{1}{2})\lambda$ ($m = 0, \pm1, \pm2,...$), diferencia de longitud de trayectoria para interferencia destructiva

N, número de rayas en una rejilla de difracción

n_l, número de rayas por unidad de longitud para una rejilla de difracción

$D = \frac{m}{d\cos\theta}$ ($m = 1, 2, 3,...$), dispersión de una rejilla de difracción

$R = Nm$ ($m = 1, 2, 3,...$), poder de resolución de una rejilla de difracción

RESPUESTAS A LAS OPORTUNIDADES DE AUTOEVALUACIÓN

34.1 No hay cambio en los colores. Después de todo, la luz tiene que propagarse por su globo ocular antes de que llegue a la retina y el índice de refracción del globo ocular no cambia cuando su cabeza está bajo el agua.

34.2 $\lambda = \frac{2d}{N} = \frac{2\left(0.25\cdot10^{-3}\text{ m}\right)}{1\,200} = 4.17\cdot10^{-7}\text{ m} = 417\text{ nm}.$

34.3 Suponga que $\lambda = 550$ nm y que el diámetro de la pupila humana es $d = 10.0$ mm.

$$\theta_R = \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{1.22\lambda}{d}\right) = 6.71\cdot10^{-5}\text{ rad}$$

$$\theta_{\text{pared}} = \frac{y}{L} = \frac{10.0\text{ m}}{190\cdot10^{3}\text{ m}} = 5.26\cdot10^{-5}\text{ rad}$$

Es difícil ver cada una de las torres de observación de la Gran Muralla China desde el transbordador espacial en órbita.

34.4 Se obtiene el primer máximo $\theta_1 = \operatorname{sen}^{-1}(532\text{ nm}/740\text{ nm}) = 46.0°$. Ningún otro máximo es posible.

PRÁCTICA PARA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Lineamientos para la resolución de problemas

1. Un bosquejo de la situación óptica casi siempre es útil. Lo más simple es usar rayos, no frentes de onda; pero recuerde que está tratando con efectos ondulatorios. Use el diagrama para identificar de manera clara cualquier diferencia de trayectoria relacionada con el problema.

2. La idea básica de la óptica ondulatoria es que la interferencia constructiva ocurre cuando la diferencia de trayectoria es un número entero de longitudes de onda, mientras que la interferencia destructiva ocurre cuando la diferencia de trayectoria es un número entero impar de semilongitudes de onda. Empiece siempre con este concepto y tome en cuenta cualquier cambio de fase adicional debido a la reflexión.

3. Recuerde que ocurre un cambio de fase cuando la luz se refleja desde un medio más denso después de incidir en un medio menos denso. Si la luz se refleja desde un medio menos denso, no ocurre ningún cambio de fase.

PROBLEMA RESUELTO 34.2 Satélite espía

Se le ha asignado el trabajo de diseñar una lente de cámara para un satélite espía. Este satélite orbitará la Tierra a una altitud de 201 km. La cámara es sensible a la luz con una longitud de onda de 607 nm. La cámara debe ser capaz de resolver objetos sobre el suelo que estén apartados 0.490 m.

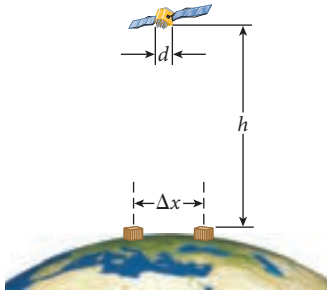


FIGURA 34.53 Un satélite espía a una altura h que observa dos objetos sobre el suelo separados una distancia Δx.

PROBLEMA

¿Cuál es el diámetro mínimo de la lente?

SOLUCIÓN

PIENSE

Esta lente de cámara estará limitada por la difracción. Podemos aplicar el criterio de Rayleigh para calcular el diámetro mínimo de la lente, dado el ángulo subtendido por los dos objetos en el suelo visto desde el satélite espía que orbita arriba.

ESBOCE

La figura 34.53 muestra un bosquejo del satélite espía que observa los dos objetos en el suelo.

INVESTIGUE

El criterio de Rayleigh para resolver dos objetos separados por un ángulo θ_R usando luz con longitud de onda λ está dado por

$$\theta_R = \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{1.22\lambda}{d}\right),$$

donde d es el diámetro de la lente de cámara circular en el satélite espía.

El ángulo requerido para el requisito de desempeño del satélite espía está dado por

$$\theta_s = \tan^{-1}\left(\frac{\Delta x}{h}\right),$$

donde Δx es la distancia entre los dos objetos en el suelo y h es la altura del satélite espía sobre el suelo.

SIMPLIFIQUE

Podemos igualar θ_R y θ_s para obtener

$$\operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{1.22\lambda}{d}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{\Delta x}{h}\right).$$

Al despejar de la ecuación el diámetro de la lente de cámara, obtenemos

$$d = \frac{1.22\lambda}{\operatorname{sen}\left(\tan^{-1}\left(\frac{\Delta x}{h}\right)\right)}.$$

CALCULE

Al sustituir los valores numéricos, obtenemos

$$d = \frac{1.22\left(607 \cdot 10^{-9}\ \text{m}\right)}{\text{sen}\left(\tan^{-1}\left(\dfrac{0.490\ \text{m}}{201 \cdot 10^{3}\ \text{m}}\right)\right)} = 0.30377\ \text{m}.$$

REDONDEE

Mostramos nuestro resultado con tres cifras:

$$d = 0.304\ \text{m}.$$

VUELVA A REVISAR

Para corroborar nuestro resultado, hacemos la aproximación de ángulo pequeño para el criterio de Rayleigh y el ángulo subtendido por los dos objetos. Para el caso en el que la longitud de onda de la luz es mucho más pequeña que la apertura de la cámara, podemos escribir

$$\text{sen}\left(\theta_{\text{R}}\right) = \frac{1.22\lambda}{d} \approx \theta_{\text{R}}.$$

Para el ángulo visto por la cámara en el satélite espía, podemos escribir

$$\tan\left(\theta_s\right) = \frac{\Delta x}{h} \approx \theta_s.$$

Por lo tanto,

$$\frac{1.22\lambda}{d} = \frac{\Delta x}{h},$$

de donde se puede despejar el diámetro mínimo de la lente de la cámara

$$d = \frac{1.22\lambda h}{\Delta x} = \frac{1.22\left(607 \cdot 10^{-9}\ \text{m}\right)\left(201 \cdot 10^{3}\ \text{m}\right)}{0.490\ \text{m}} = 0.304\ \text{m},$$

que concuerda con nuestro resultado dentro de los errores de redondeo. Así, nuestro resultado parece razonable.

PROBLEMA RESUELTO 34.3 Cuña de aire

Luz de longitud de onda $\lambda = 516$ nm incide perpendicularmente en dos placas de vidrio. Las placas de vidrio están separadas en un extremo por una pequeña pieza de película de Kapton. Debido a la cuña de aire creada por esta película, en la parte superior de la placa se observan 25 franjas de interferencia brillantes, con una franja oscura en el extremo por la película.

PROBLEMA

¿Cuál es el espesor de la película?

SOLUCIÓN

PIENSE

La luz pasa por la placa superior, se refleja desde la superficie superior de la placa inferior y luego interfiere con la luz reflejada de la superficie inferior de la placa superior. Ocurre un cambio de fase cuando la luz se refleja desde la placa inferior, así que el criterio para interferencia constructiva es que la longitud de la trayectoria es igual a un entero más media vez la longitud de onda. El criterio para interferencia destructiva es que la diferencia de trayectoria es un entero multiplicado por la longitud de onda.

(*continúa*)

FIGURA 34.54 Dos placas de vidrio con una película delgada que separa las placas en un extremo. Las flechas verdes representan la luz que incide desde la parte superior. El ángulo de la luz se exagera para mayor claridad. La luz interferente se refleja del fondo de la placa superior y la parte superior de la placa inferior.

(*continuación*)

ESBOCE

La figura 34.54 muestra dos placas de vidrio con una pieza delgada de película que separa las placas en un extremo. La luz incide verticalmente desde la parte superior.

INVESTIGUE

En cualquier punto a lo largo de las placas, el criterio para interferencia constructiva está dado por

$$2t = \left(m + \tfrac{1}{2}\right)\lambda,$$

donde t es la separación entre las placas, m es un entero y λ es la longitud de onda de la luz incidente. Hay 25 franjas brillantes visibles. La primera franja brillante corresponde a $m = 0$ y la franja brillante número 25 corresponde a $m = 24$.

Inmediatamente después de la franja 25 está una franja oscura en la que se localiza la pieza de película. El criterio para interferencia destructiva es $2t = n\lambda$, donde n es un entero.

SIMPLIFIQUE

La franja oscura que se localiza en el extremo de la placa de vidrio donde se ubica la película está dada por

$$2t = \left(24 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\right)\lambda = 25\lambda,$$

donde el factor $24 + \frac{1}{2}$ describe la interferencia constructiva y el $\frac{1}{2}$ extra produce la franja oscura en el extremo de la placa con la película. Así, se puede determinar la separación de las placas, que corresponde al espesor de la película:

$$t = \frac{25}{2}\lambda.$$

CALCULE

Al sustituir los valores numéricos, se obtiene

$$t = \frac{25}{2}\left(516 \cdot 10^{-9}\ \text{m}\right) = 0.00000645\ \text{m}.$$

REDONDEE

Mostramos nuestro resultado con tres cifras:

$$t = 6.45 \cdot 10^{-6}\ \text{m}.$$

VUELVA A REVISAR

Ocasionalmente en este libro necesitaremos añadir recordatorios para comprobar que nuestros resultados, con base en las unidades, sean correctos y el orden de magnitud sea el esperado; esto puede ayudarnos mucho para evitar errores simples. Aquí la unidad m es ciertamente la correcta para la longitud física, en este caso el espesor de la película. A primera vista usted podría pensar que $\sim 10^{-5}$ m, en el orden de 1/100 del espesor de una uña, sería imposiblemente delgada para una película sólida. Sin embargo, una investigación en internet sobre la *película de Kapton* mostrará que 6.5 μm está dentro del intervalo de espesor en el que se produce la película. Por lo tanto, nuestra respuesta parece ser plausible.

PREGUNTAS DE OPCIÓN MÚLTIPLE

34.1 Suponga que la distancia entre las rendijas en un experimento de rendija doble es $2.00 \cdot 10^{-5}$ m. Un haz de luz con una longitud de onda de 750 nm brilla en las rendijas. ¿Cuál es la separación angular entre el máximo central y el máximo adyacente?

a) $5.00 \cdot 10^{-2}$ rad *c*) $3.75 \cdot 10^{-2}$ rad
b) $4.50 \cdot 10^{-2}$ rad *d*) $2.50 \cdot 10^{-2}$ rad

34.2 Cuando dos ondas de luz, ambas con longitud de onda λ y amplitud A, interfieren constructivamente, producen una onda de luz de la misma longitud de onda pero con amplitud $2A$. ¿Cuál será la intensidad de esta onda de luz?

a) La misma intensidad que antes. *c*) El cuádruple de la intensidad.
b) El doble de la intensidad. *d*) La información no es suficiente.

34.3 Un haz láser con longitud de onda 633 nm se divide en dos haces mediante un divisor. Un haz va al espejo 1, con una distancia L desde el divisor de haz, y regresa a éste, mientras que el otro haz va al espejo 2, con una distancia $L + \Delta x$ desde el divisor de haz, y regresa al mismo divisor de haz. Luego, los haces se recombinan y van a un detector juntos.

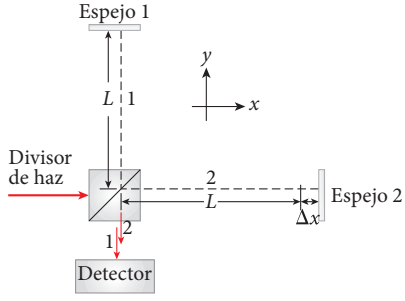
Si $L = 1.00000$ m y $\Delta x = 1.00$ mm, ¿cuál describe mejor la clase de interferencia en el detector? (*Sugerencia*: Para corroborar su respuesta, usted podría requerir la fórmula que originalmente se proyectó para combinar dos haces en una configuración geométrica distinta, pero que aún es aplicable aquí.)

a) Puramente constructivo.

b) Puramente destructivo.

c) En su mayor parte constructivo.

d) En su mayor parte destructivo.



e) Ni constructivo ni destructivo.

34.4 ¿Cuál de los siguientes tipos de luz en una rejilla con 1 000 ranuras, con un espaciamiento de 2.00 μm, produciría el número más grande de máximos en una pantalla a una distancia de 5.00 m?

a) Luz azul de longitud de onda 450 nm.

b) Luz verde de longitud de onda 550 nm.

c) Luz amarilla de longitud de onda 575 nm.

d) Luz roja de longitud de onda 625 nm.

e) Se necesita más información.

34.5 Si la longitud de onda de la luz que ilumina una rendija doble se divide a la mitad, el espaciamiento de franja

a) Se reduce a la mitad.

b) Se duplica.

c) No cambia.

d) Se modifica por un factor de $1/\sqrt{2}$.

34.6 Un apuntador de láser rojo con una longitud de onda de 635 nm centellea en una rejilla de difracción con 300 líneas/mm. Se coloca una pantalla a una distancia de 2.0 m detrás de la rejilla de difracción para observar el patrón de difracción. ¿Qué tan lejos del máximo central estará el siguiente punto brillante en la pantalla?

a) 39 cm *c*) 94 cm *e*) 9.5 m

b) 76 cm *d*) 4.2 m

34.7 Los anillos de Newton mostrados son patrones de interferencia causados por la reflexión de la luz entre dos superficies. ¿De qué color es el centro de los anillos de Newton cuando se ven con luz blanca?

a) Blancos *c*) Rojos

b) Negros *d*) Violetas

34.8 En el experimento de doble rendija de Young, ambas rendijas se iluminaron mediante un haz láser, y el patrón de interferencia se observó en una pantalla. Si la pantalla de visualización se mueve más allá de la rendija, ¿qué le sucede al patrón de interferencia?

a) El patrón se hace más brillante.

b) El patrón se hace más brillante y más angosto.

c) El patrón se hace menos brillante y separado.

d) No hay cambio en el patrón.

e) Se desenfoca el patrón.

f) El patrón desaparece.

PREGUNTAS

34.9 ¿Qué sucedería a un patrón de interferencia de doble rendija si

a) se incrementara la longitud de onda?

b) se incrementara la distancia de separación entre las rendijas?

c) el aparato se colocara en agua?

34.10 ¿Cuál sería la frecuencia de una onda ultrasónica (sonido) para que los efectos de difracción fueran tan pequeños en la vida diaria como lo son para la luz? (Estime.)

34.11 ¿Por qué los radiotelescopios son mucho más grandes que los telescopios ópticos? ¿Un telescopio de rayos X también tendría que ser más grande que un telescopio óptico?

34.12 ¿Puede pasar la luz por una sola rendija más angosta que su longitud de onda? Si no, ¿por qué? En caso afirmativo, describa la distribución de la luz más allá de la rendija.

34.13 Un tipo de holograma consiste en franjas brillantes y oscuras producidas sobre una película fotográfica mediante haces láser interferentes. Si ésta se ilumina con luz blanca, la imagen aparecerá reproducida múltiples veces, en colores puros diferentes en tamaños distintos.

a) Explique por qué.

b) ¿Qué colores corresponden a las imágenes más grandes y más pequeñas, y por qué?

34.14 Una rendija doble se coloca enfrente de una bombilla incandescente. ¿Se producirá un patrón de interferencia?

34.15 Muchos observatorios astronómicos, y en especial los observatorios de radio, acoplan varios telescopios. ¿Cuáles son las ventajas de esto?

34.16 En un patrón de difracción de una sola rendija hay un máximo central brillante rodeado de máximos de orden superior cada vez más tenues. Lejos del máximo central, en algún momento ya no se observan más máximos. ¿Esto se debe a que los máximos son demasiado tenues? O bien, ¿hay un límite superior para la cantidad de máximos que se puede observar, sin importar qué tan buenos sean los ojos del observador, para una determinada rendija y fuente de luz?

34.17 ¿Qué par binario cercano de estrellas se podrá resolver más fácilmente con un telescopio: dos estrellas rojas o dos azules? Suponga que los sistemas de estrellas binarios están a la misma distancia de la Tierra y están separados por el mismo ángulo.

34.18 Un apuntador láser rojo brilla en una rejilla de difracción produciendo un patrón de difracción en una pantalla detrás de la rejilla. Si el apuntador rojo se reemplaza por uno verde, ¿los puntos brillantes verdes en la pantalla estarán más cercanos o apartados de lo que estaban los puntos brillantes rojos?

PROBLEMAS

Una • y dos •• indican un nivel creciente de la dificultad.

Sección 34.1

34.19 Un láser de helio-neón tiene una longitud de onda de 632.8 nm.

a) ¿Cuál es la longitud de onda de esta luz cuando pasa por Lucite con un índice de refracción $n = 1.500$?

b) ¿Cuál es la velocidad de la luz en Lucite?

34.20 Se sabe que el espectro de luz visible va de 400 nm a 700 nm. Aproximadamente, 400 nm a 500 nm corresponden a la luz azul, 500 nm a 550 nm corresponden al verde, 550 nm a 600 nm al amarillo-naranja y arriba de 600 nm al rojo. En un experimento, la luz roja con una longitud de onda de 632.8 nm de un láser He-Ne se refracta hacia una pecera llena de agua con índice de refracción 1.333. ¿Cuál es la longitud de onda del mismo haz láser en agua, y qué color tendrá el haz láser en agua?

Secciones 34.2 y 34.3

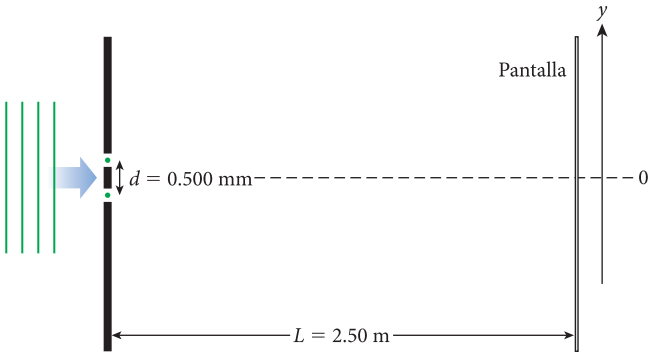
34.21 ¿Qué diferencia de trayectoria mínima se necesita para causar un cambio de fase mediante $\pi/4$ en luz de longitud de onda de 700. nm?

34.22 Luz coherente, monocromática, de longitud de onda 450.0 nm se emite desde dos lugares y se detecta en otro lugar. La diferencia de trayectoria entre las dos rutas tomadas por la luz es 20.25 cm. ¿Las dos ondas de luz interferirán de forma destructiva o constructiva en el punto de detección?

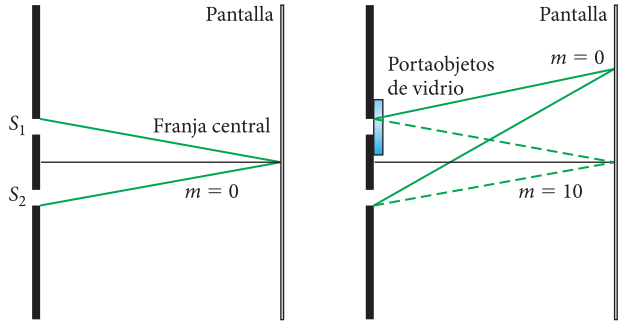
34.23 Un experimento de interferencia de Young se realiza con luz verde monocromática ($\lambda = 540$ nm). La separación entre las rendijas es 0.100 mm y el patrón de interferencia en una pantalla muestra el máximo del primer lado a 5.40 mm del centro del patrón. ¿Qué tan lejos de las rendijas está la pantalla?

34.24 Para un experimento de rendija doble, dos rendijas de 1.50 mm de ancho están separadas por una distancia de 1.00 mm. Las rendijas se iluminan mediante un haz láser con longitud de onda 633 nm. Si se coloca una pantalla a 5.00 m de las rendijas, determine la separación de las franjas brillantes en la pantalla.

•**34.25** Luz coherente monocromática con longitud de onda $\lambda = 514$ nm incide en dos rendijas que están separadas por una distancia $d = 0.500$ mm. La intensidad de la radiación en una pantalla a 2.50 m de cada rendija es 180.0 W/cm^2. Determine la posición $y_{1/3}$ en la que la intensidad del pico central (en $y = 0$) cae a $I_{máx}/3$.



•**34.26** En un experimento de rendija doble, luz láser He-Ne de longitud de onda 633 nm produjo un patrón de interferencia en una pantalla colocada a cierta distancia de las rendijas. Cuando una de las rendijas se cubrió con un delgado portaobjetos de vidrio de espesor 12.0 μm, la franja central se desplazó al punto ocupado antes por la franja oscura número 10 (vea la figura). ¿Cuál es el índice de refracción del portaobjetos de vidrio?



a) Sin el portaobjetos de vidrio ***b***) Con el portaobjetos de vidrio

Sección 34.4

34.27 Suponga que el espesor de una delgada película de jabón ($n = 1.32$) rodeada de aire es no uniforme y se estrecha poco a poco. Luz monocromática de longitud de onda 550 nm ilumina la película. En el extremo más delgado, se observa una banda más oscura. ¿Qué tan gruesa es la película en las siguientes dos bandas oscuras más próximas a la primera banda oscura?

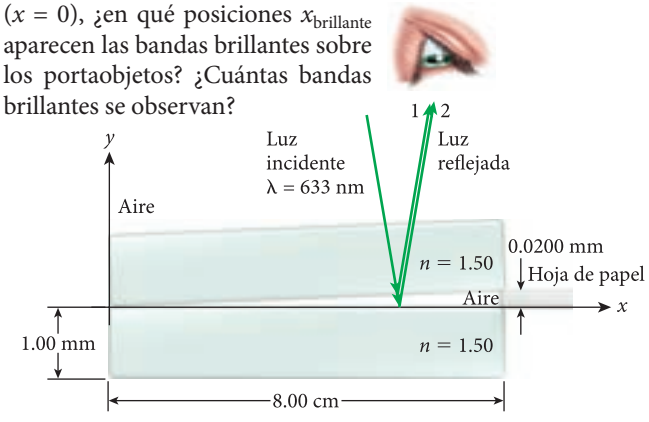
34.28 Luz blanca ($400 \text{ nm} < \lambda < 750$ nm) brilla en un charco de agua ($n = 1.33$). Hay una delgada (100.0 nm de espesor) capa de aceite ($n = 1.47$) en la parte superior del agua. ¿Qué longitudes de onda vería reflejadas?

34.29 Algunos espejos para láser infrarrojo están construidos con capas alternantes de dióxido de hafnio y sílice. Suponga que desea producir interferencia constructiva de una película fina de dióxido de hafnio (n = 1.90) en vidrio BK-7 (n = 1.51) cuando se usa radiación infrarroja de longitud de onda 1.06 μm. ¿Cuál es el espesor de película más pequeño que sería apropiado, suponiendo que el haz láser esté orientado en ángulos rectos respecto a la película?

34.30 Algunas veces se usan películas delgadas como filtros para evitar que ciertos colores entren a una lente. Considere un filtro infrarrojo, diseñado para evitar que la luz de 800.0 nm entre a la lente. Encuentre el espesor mínimo de la película para una capa de MgF_2 (n = 1.38) y evitar que la luz entre a la lente.

•**34.31** Luz blanca brilla en una hoja de mica que tiene un espesor uniforme de 1.30 μm. Cuando la luz se refleja es vista por medio de un espectrómetro, se observa que la luz con longitudes de onda de 433.3 nm, 487.5 nm, 557.1 nm, 650.0 nm y 780.0 nm no está presente en la luz reflejada. ¿Cuál es el índice de refracción de la mica?

•**34.32** Un solo haz de luz coherente ($\lambda = 633 \cdot 10^{-9}$ m) incide en dos portaobjetos de vidrio, que se tocan en un extremo y están separados por una hoja de papel de 0.0200 mm de espesor en el otro extremo, como se muestra en la figura siguiente. El haz 1 se refleja de la superficie inferior del portaobjetos superior, y el haz 2 se refleja en la superficie superior del portaobjetos inferior. Suponga que los haces son perfectamente verticales y que son perpendiculares a ambos portaobjetos; es decir, los portaobjetos son casi paralelos (en la figura se exagera el ángulo); los haces se muestran en ángulos en la figura para que sea más fácil identificarlos. Los haces 1 y 2 se recombinan en la ubicación del ojo en la figura siguiente. Los portaobjetos son de 8.00 cm de largo. Empezando desde el extremo izquierdo (x = 0), ¿en qué posiciones $x_{\text{brillante}}$ aparecen las bandas brillantes sobre los portaobjetos? ¿Cuántas bandas brillantes se observan?



•**34.33** Un montaje de interferencia común consiste en una lente plano-convexa colocada sobre un espejo plano e iluminada desde arriba en la incidencia normal con luz monocromática. El patrón de franjas de interferencia circulares (franjas de igual espesor), círculos brillantes y oscuros, formado debido a la cuña de aire definida por las dos superficies de vidrio, se conoce como *anillos de Newton*. En un experimento con una lente plano-convexa con longitud focal f = 80.00 cm e índice de refracción n_1 = 1.500, se descubre que el radio del tercer círculo es igual a 0.8487 mm. Determine la longitud de onda de la luz monocromática.

Sección 34.5

34.34 El interferómetro de Michelson se usa en una clase de instrumentos ópticos disponibles comercialmente, llamados *medidores de longitud de onda*. En un medidor de longitud de onda, el interferómetro se ilumina en forma simultánea con el haz paralelo de un láser de referencia de longitud de onda conocida y el de un láser desconocido. El espejo móvil del interferómetro se desplaza una distancia Δd, y se cuenta el número de franjas producidas por cada láser y que pasan por un punto de referencia (un fotodetector). En un medidor de determinada longitud de onda se usa un láser rojo de He-Ne (λ_{rojo} = 632.8 nm) como láser de referencia. Cuando el espejo móvil del interferómetro se desplaza una distancia Δd, una cantidad de $\Delta N_{\text{rojo}} = 6.000 \cdot 10^4$ de franjas rojas y $\Delta N_{\text{desconocido}} = 7.780 \cdot 10^4$ franjas pasan por el fotodiodo de referencia.

a) Calcule la longitud de onda del láser desconocido.

b) Calcule el desplazamiento, Δd, del espejo móvil.

34.35 Luz azul monocromática (λ = 449 nm) se dirige hacia un interferómetro de Michelson. ¿Cuántas franjas se mueven por la pantalla cuando el espejo móvil se mueve una distancia d = 0.381 mm?

•**34.36** En las instalaciones del Observatorio de ondas gravitacionales mediante interferómetro de línea base larga (LIGO, del inglés Long-baseline Interferometer Gravitational-wave Observatory) en Hanford, Washington, y Livingston, Louisiana, haces láser de longitud de onda de 550.0 nm viajan a lo largo de trayectorias perpendiculares de 4.000 km de largo. Cada haz se refleja a lo largo de su trayectoria y regresa 100 veces antes de que los haces se combinen y comparen. Si una onda gravitacional incrementa la longitud de una trayectoria y disminuye la otra, cada una por 1.000 parte en 10^{21}, ¿cuál es la diferencia de fase entre los dos haces como resultado?

Secciones 34.6 y 34.7

34.37 Luz de longitud de onda de 653 nm ilumina una rendija. Si el ángulo entre las primeras franjas oscuras en cualquier lado del máximo central es 32.0°, ¿cuál es el ancho de la rendija?

34.38 Un instructor usa luz de longitud de onda de 633 nm para crear un patrón de difracción con una rendija de 0.135 mm de ancho. ¿Qué tan lejos de la rendija debe colocar la pantalla el instructor para que el ancho completo del máximo central sea de 5.00 cm?

34.39 ¿Cuál es el ancho de rendija más grande para el que no hay mínimos cuando la longitud de onda de la luz incidente en la única rendija es 600. nm?

34.40 Ondas de luz planas inciden en una sola rendija de 2.00 cm de ancho. La segunda franja oscura se observa a 43.0° del eje central. ¿Cuál es la longitud de onda de la luz?

Sección 34.8

34.41 El Gran Telescopio Binocular (LBT, del inglés Large Binocular Telescope), en el monte Graham cerca de Tucson, Arizona, tiene dos espejos primarios. Los espejos están centrados, apartados una distancia de 14.4 m, mejorando así el límite de Rayleigh. ¿Cuál es la resolución angular mínima del LBT para luz verde, λ = 550 nm?

34.42 Una tienda de campaña tiene un solo orificio pequeño en un lado. En la pared opuesta de la tienda, a 2.0 m de distancia, usted observa un punto (debido a la luz del sol que incide en el orificio) cuyo ancho es de 2.0 mm, con un débil anillo alrededor de él. ¿Cuál es el tamaño del orificio en la tienda?

34.43 Calcule y compare las resoluciones angulares del Telescopio Espacial Hubble (diámetro de apertura 2.40 m, longitud de onda 450 nm; ilustrado en el texto), el Telescopio Keck (diámetro de apertura 10.0 m, longitud de onda 450 nm) y el radiotelescopio Arecibo (diámetro de apertura 305 m, longitud de onda 0.210 m). Suponga que la resolución de cada instrumento está limitada por la difracción.

34.44 El Telescopio Espacial Hubble (figura 34.33) es capaz de resolver imágenes ópticas a una resolución angular de $2.80 \cdot 10^{-7}$ rad con su espejo de 2.40 m. ¿Qué tan grande tendría que ser un radiotelescopio para obtener la imagen de un objeto en el espectro de radio con la misma resolución, suponiendo que la longitud de onda de las ondas es 10.0 cm?

34.45 Considere la pupila de su ojo como una apertura circular de 5.00 mm de diámetro. Suponga que usted está viendo luz de longitud de onda de 550 nm, a la que sus ojos son sensibles al máximo.

a) ¿Cuál es la separación angular mínima a la que usted puede distinguir dos estrellas?

b) ¿Cuál es la distancia máxima a la que usted puede distinguir los dos faros de un automóvil separados 1.50 m?

Sección 34.9

34.46 Un apuntador láser rojo con una longitud de onda de 635 nm brilla en una rendija doble produciendo un patrón de difracción en una pantalla que está a 1.60 m detrás de la doble rendija. El máximo central del patrón de difracción tiene un ancho de 4.20 cm y el cuarto punto brillante está perdido en ambos lados. ¿Cuál es el tamaño de cada una de las rendijas y cuál es la separación entre ellas?

•**34.47** Una rendija doble está situada opuesta al centro de una pantalla de 1.8 m de ancho a 2.0 m de las rendijas. La separación de rendija es 24 μm y el ancho de cada rendija es 7.2 μm. ¿Cuántas franjas son visibles en la pantalla si la rendija es iluminada por luz de 600. nm?

•**34.48** Un aparato de dos rendijas está cubierto con un filtro rojo (670 nm). Cuando se hace brillar luz blanca sobre el filtro, sobre la pantalla más allá del aparato de doble rendija, hay nueve máximos de interferencia dentro del máximo central de difracción de 4.50 cm de ancho. Cuando un filtro azul (450 nm) reemplaza al rojo, ¿cuántos máximos de interferencia habrá en el máximo de difracción central y qué tan ancho será el máximo de difracción?

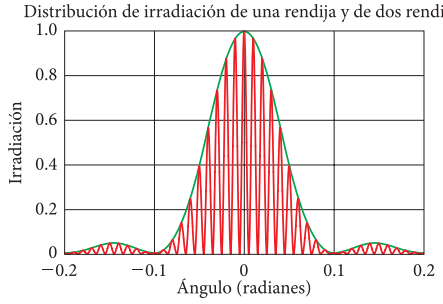
34.49 En la figura se presenta el patrón de irradiación observado en un experimento de interferencia-difracción de dos rendijas. La línea roja representa la intensidad real medida como una función del ángulo, mientras que la línea verde representa la envolvente de los patrones de interferencia.

a) Determine el ancho de rendija *a* en términos de la longitud de onda λ de la luz usada en el experimento.

b) Determine la separación de rendija *d* centro a centro en términos de la longitud de onda λ.

c) Con la información de la gráfica, determine la relación entre el ancho de rendija *a* y la separación centro a centro entre las rendijas, *d*.

d) ¿Puede calcular la longitud de onda de la luz, la separación de rendija real y el ancho de rendija?

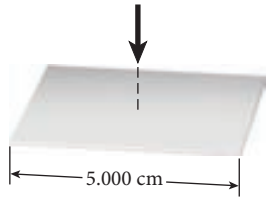


Sección 34.10

34.50 Dos diferentes longitudes de onda de luz inciden en una rejilla de difracción. Una longitud de onda es de 600 nm y se desconoce la otra. Si el tercer orden de la longitud de onda desconocida aparece en la misma posición como el segundo orden de la luz de 600. nm, ¿cuál es el valor de la longitud de onda desconocida?

34.51 Luz de un láser de argón choca con una rejilla de difracción que tiene 7 020 ranuras por centímetro. Los máximos principales central y de primer orden están separados 0.332 m sobre una pared a 1.00 m de la rejilla. Determine la longitud de onda de la luz láser.

•**34.52** Una rejilla de difracción de 5.000 cm de ancho con 200 ranuras se usa para resolver dos líneas estrechamente espaciadas (un doblete) en un espectro. El doblete consta de dos longitudes de onda, λ_a = 629.8 nm y λ_b = 630.2 nm. La luz ilumina toda la rejilla en incidencia normal. Calcule *hasta cuatro dígitos significativos* los ángulos θ_{1a} y θ_{1b} con respecto a la normal en los que los haces difractados de primer orden, λ_a y λ_b, respectivamente, serán reflejados desde la rejilla. ¡Note que éste no es 0°! ¿Qué orden de difracción se requiere para resolver estas dos líneas con esta rejilla?



•**34.53** Una rejilla de difracción tiene $4.00 \cdot 10^3$ ranuras/cm y tiene luz blanca (400-700 nm) que incide sobre ella. ¿Qué longitud(es) de onda será(n) visible(s) a 45.0°?

Sección 34.11

34.54 ¿Cuál es la longitud de onda de los rayos X si la difracción de Bragg de primer orden se observa a 23.0° respecto a la superficie del cristal, con distancia interatómica de 0.256 nm?

Problemas adicionales

34.55 ¿Cuántas ranuras por centímetro debe tener una rejilla si no habrá espectro de segundo orden para cualquier longitud de onda visible (400-750 nm)?

34.56 Muchas veces, las antenas de radio se encuentran en pares. El efecto es que producirán interferencia constructiva en una dirección mientras que en la otra producirán interferencia destructiva —una antena direccional—, de modo que sus transmisiones no se traslapan con las de estaciones cercanas. ¿A qué distancia mínima debe una estación de radio local, que opera a 88.1 MHz, colocar su par de antenas que operan en fase tal que no ocurra ninguna emisión a lo largo de una línea de 45.0° desde la línea que une las antenas?

34.57 Un láser produce un haz coherente de luz que no se dispersa (difracta) mucho en comparación con otras fuentes de luz, como una bombilla incandescente. Así, los láseres se han usado para medir grandes distancias, como la distancia entre la Luna y la Tierra, con gran exactitud. En tal experimento, se dispara en la Luna un impulso láser (longitud de onda de 633 nm). ¿Cuál debe ser el tamaño de la abertura circular de la fuente láser que produciría el máximo central de 1.00 km de diámetro en la superficie de la Luna? La distancia entre la Luna y la Tierra es de $3.84 \cdot 10^5$ km.

34.58 Una rejilla de difracción con exactamente 1 000 ranuras por centímetro es iluminada por un láser de He-Ne de longitud de onda 633 nm.

a) ¿Cuál es el orden de difracción más alto que podría observarse con esta rejilla?

b) ¿Cuál sería el orden más alto si hubiera exactamente 10 000 ranuras por centímetro?

34.59 La estabilidad térmica de un interferómetro de Michelson se puede mejorar sumergiéndolo en agua. Considere un interferómetro sumergido en agua que mide luz de una fuente monocromática que está en aire. Si la onda móvil se desplaza una distancia $d = 0.200$ mm, exactamente $N = 800$ franjas se mueven en la pantalla. ¿Cuál es la longitud de onda original (en aire) de la luz monocromática?

34.60 Un disco Blu-ray usa un láser azul con una longitud de onda de espacio libre de 405 nm. Si el disco está protegido con policarbonato ($n = 1.58$), determine el espesor mínimo del disco para interferencia destructiva. Compare este valor con el de los CD iluminados por luz infrarroja.

34.61 Un avión se hace invisible al radar recubriéndolo con una capa de 5.00 mm de espesor de un polímero antirreflejante con índice de refracción $n = 1.50$. ¿Cuál es la longitud de onda de las ondas de radar a la que el avión se hace invisible?

34.62 Luz monocromática coherente pasa por rendijas paralelas y luego sobre una pantalla que está a una distancia $L = 2.40$ m de las rendijas. Las rendijas estrechas están apartadas una distancia $d = 2.00 \cdot 10^{-5}$ m. Si el espaciamiento mínimo entre puntos brillantes es $y = 6.00$ cm, encuentre la longitud de onda de la luz.

34.63 Determine el espesor mínimo de una película de jabón ($n = 1.32$) que produciría interferencia constructiva cuando es iluminada por luz de longitud de onda de 550. nm.

34.64 Usted está construyendo una rejilla de difracción que se requiere para separar las dos líneas espectrales en el doblete D del sodio, a longitudes de onda de 588.9950 y 589.5924 nm, por al menos 2.00 mm en una pantalla que está a 80.0 cm de la rejilla. Las líneas se controlarán a una distancia de 1.50 cm en la rejilla. ¿Cuál es la cantidad mínima de ranuras que usted debe tener en la rejilla?

34.65 Un interferómetro de Michelson se ilumina con una fuente de luz de 600. nm. ¿Cuántas franjas se observan si uno de los espejos del interferómetro se mueve una distancia de 200.0 μm?

34.66 ¿Cuál es la separación de objeto más pequeña que usted puede resolver a simple vista? Suponga que el diámetro de su pupila es 3.5 mm y que su ojo tiene un punto cercano de 25 cm y un punto lejano de infinito.

34.67 Al usar un telescopio con un objetivo de diámetro 12.0 cm, ¿qué tan cercanas pueden estar dos características en la Luna y aún resolverse? Tome la longitud de onda de la luz como 550 nm, cerca del centro del espectro visible.

34.68 Hay aire en ambos lados de una película de jabón. ¿Cuál es el espesor más pequeño de la película de jabón ($n = 1.420$) que aparecería oscuro si se ilumina con luz de 500. nm?

34.69 Rayos X con una longitud de onda de 1.00 nm se dispersan a partir de dos tumores pequeños en el cuerpo humano. Si los dos tumores están a una distancia de 10.0 cm del detector de rayos X, que tiene una apertura de entrada de 1.00 mm, ¿cuál es la separación mínima entre los dos tumores que permitirá al detector de rayos X determinar que hay dos tumores en lugar de uno?

•**34.70** Un vidrio con un índice de refracción de 1.50 se inserta en un brazo de un interferómetro de Michelson que usa una fuente de luz de 600. nm. Esto causa el patrón de franjas para cambiar en exactamente 1 000 franjas. ¿Qué tan grueso es el vidrio?

•**34.71** Luz blanca brilla en una capa muy delgada de mica ($n = 1.57$), y sobre la capa se observan los máximos de interferencia para dos longitudes de onda (y ninguna otra intermedia): una longitud de onda azul de 480 nm y una amarilla de longitud de onda de 560 nm. ¿Cuál es el espesor de la capa de mica?

•**34.72** En una configuración de rendija doble, las rendijas están separadas $1.00 \cdot 10^{-5}$ m. Si luz con longitud de onda de 500. nm pasa por las rendijas, ¿cuál será la distancia entre los máximos $m = 1$ y $m = 3$ en la pantalla a 1.00 m de distancia?

•**34.73** Un aparato de anillo de Newton consiste en una lente convexa con un gran radio de curvatura R, colocada sobre un disco de vidrio plano. *a*) Muestre que la distancia x desde el centro hasta el aire, espesor d y el radio de curvatura R están dados por $x^2 = 2Rd$. *b*) Muestre que el radio de la n-ésima interferencia constructiva está dado por $x_n = [(n + \frac{1}{2})\lambda R]^{1/2}$. *c*) ¿Cuántas franjas brillantes podrían verse si se observa mediante luz roja de longitud de onda de 700. nm para $R = 10.0$ m, y el diámetro del disco de vidrio plano es 5.00 cm?

PARTE 8 RELATIVIDAD Y FÍSICA CUÁNTICA

35 Relatividad

LO QUE APRENDEREMOS 1133

35.1 En busca del éter 1133

35.2 Postulados de Einstein y marcos de referencia 1134

Beta y gamma 1135

Ejemplo 35.1 Nave espacial *Apollo* 1136

Cono de luz 1136

Intervalos espacio-tiempo 1137

35.3 Dilatación del tiempo y contracción de la longitud 1138

Dilatación del tiempo 1138

Ejemplo 35.2 Decaimiento del muon 1139

Contracción de la longitud 1140

Ejemplo 35.3 Contracción de la longitud de un automóvil en la carrera NASCAR 1141

Paradoja de los gemelos 1141

35.4 Corrimiento relativista de la frecuencia 1144

Problema resuelto 35.1 Corrimiento al rojo de las galaxias 1144

35.5 Transformación de Lorentz 1145

Invariantes 1147

35.6 Transformación relativista de la velocidad 1148

Problema resuelto 35.2 Partículas en un acelerador 1150

35.7 Cantidad de movimiento y energía relativista 1151

Cantidad de movimiento 1151

Energía 1151

Relación cantidad de movimiento-energía 1153

Velocidad, energía y cantidad de movimiento 1153

Ejemplo 35.4 Electrón en 0.99*c* 1154

Ejemplo 35.5 Decaimiento del kaón 1154

Transformación de Lorentz 1155

Colisiones de dos cuerpos 1156

Ejemplo 35.6 Colisionadores comparados con aceleradores de blanco fijo 1156

35.8 Relatividad general 1158

Agujeros negros 1159

Ondas gravitacionales 1160

35.9 Relatividad en nuestra vida cotidiana: GPS 1160

LO QUE HEMOS APRENDIDO/ GUÍA DE ESTUDIO PARA EXAMEN 1161

Práctica para resolución de problemas 1163

Problema resuelto 35.3 Misma velocidad 1163

Preguntas de opción múltiple 1164

Preguntas 1165

Problemas 1165

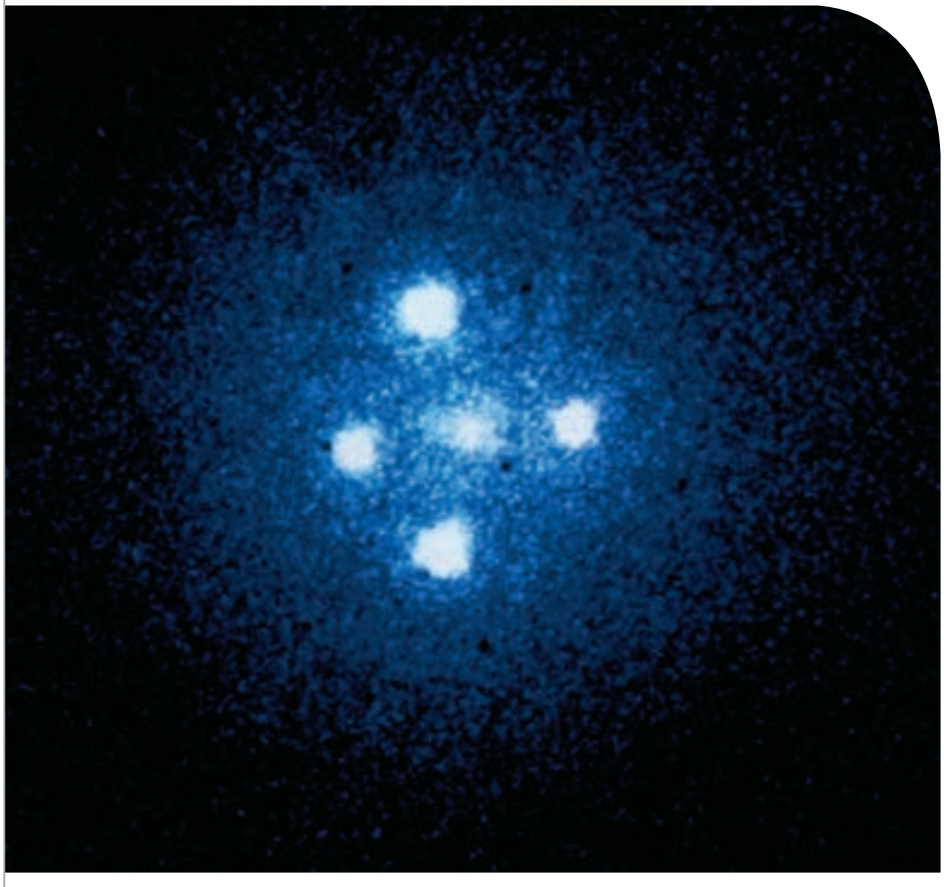


FIGURA 35.1 Una fotografía de la Cruz de Einstein, la cual está constituida por lentes gravitacionales de un quasar lejano con una galaxia en el centro.

LO QUE APRENDEREMOS

- La luz siempre se mueve a la misma velocidad en el vacío, independiente de la velocidad de la fuente o del observador.
- Los dos postulados de la relatividad especial son que: 1) todas las leyes físicas son las mismas en todos los marcos de referencia inerciales, y 2) la velocidad de la luz en el vacío no varía. Los marcos inerciales son marcos de referencia, que se mueven a velocidad constante.
- A partir de los postulados de la relatividad especial, se deduce que las mediciones del tiempo y del espacio son diferentes para distintos observadores que tienen movimiento relativo entre sí.
- En el caso de altas velocidades, la transformación de Lorentz se debe usar entre marcos de referencia, en lugar de la transformación de Galileo.
- Las velocidades no añaden linealidad. La suma de velocidad debe seguir la transformación de Lorentz, de modo que se adecue al postulado de que la velocidad de la luz no se puede superar.
- La energía cinética, la cantidad de movimiento y la relación entre ellas requieren nuevas definiciones.
- Toda la mecánica de Newton deriva de la mecánica relativista como un caso limitante de las velocidades pequeñas en comparación con la velocidad de la luz.

La fotografía de la figura 35.1 no es un cúmulo de estrellas, como usted podría suponer a primera vista. El punto brillante central es una galaxia que está a gran distancia de la Tierra y las cuatro manchas a su alrededor son imágenes de un objeto que está más atrás, lejano de dicha galaxia. La trayectoria recorrida por la luz desde el objeto más distante, denominado quasar (*quasi-stellar object*), es curvada debido a la fuerza gravitacional de la galaxia intermedia para formar cuatro imágenes alrededor. El hecho de que la luz pueda desviarse por la gravitación no fue predicho por las leyes de Newton, sino que fue deducido de la teoría de la relatividad de Einstein. La imagen en esta fotografía, llamada Cruz de Einstein, es una de las muchas observaciones que confirman la teoría de la relatividad de Einstein.

La teoría de la relatividad cambia la manera en la que entendemos el espacio y el tiempo en términos básicos. Y, al parecer, algunas de las consecuencias son contradictorias para nuestras experiencias cotidianas. La idea de que una regla de un metro en una estación de trenes podría no ser de la misma longitud para una persona que está parada en la estación que para una persona que pasa por ella en un tren, parece contraria al sentido común. Algunas personas creen que es imposible y afirman que la relatividad sólo describe percepciones humanas o que es "sólo una teoría". No obstante, la relatividad ha sido probada tanto como cualquier otra idea en la ciencia y se ha confirmado todas las veces. El tiempo y el espacio no son independientes del marco de referencia, y esto no es sólo una idea loca o una ilusión óptica, es así como funciona nuestro universo.

Este capítulo se centra principalmente en la teoría especial de la relatividad, que se llama *especial* porque trata con el caso especial de movimiento con velocidad constante; es decir, sin aceleración. Se tratan con brevedad algunas ideas de la teoría general de la relatividad, la cual tiene que ver con el movimiento acelerado. Aunque los conceptos pueden parecer extraños al principio, los cálculos matemáticos no son difíciles en lo particular. Se puede pensar que la mecánica de Newton es un caso especial del trabajo de Einstein, que da los mismos resultados en situaciones ordinarias. Pero la relatividad especial llega a resultados muy diferentes para el movimiento de una fracción significativa de la velocidad de la luz. Estos resultados desempeñan un papel notable en la física de lo muy pequeño (física de las partículas de alta energía y mecánica cuántica) y la física de lo muy grande (astronomía y cosmología).

35.1 En busca del éter

Los capítulos 15 y 16 demostraron que las ondas sonoras y las ondas mecánicas necesitan un medio en el cual propagarse. El capítulo 31 mostró que la luz es una onda electromagnética y que todas las ondas electromagnéticas se propagan en el vacío. No obstante, este conocimiento es relativamente nuevo en la ciencia y tiene apenas 100 años de existencia. Todavía en 1887, los científicos opinaban que la luz también requeriría un medio en el cual propagarse y le llamaron a este medio *éter luminífero*, o simplemente **éter**. Esta idea del éter despierta la pregunta: ¿qué es exactamente este medio? La luz proveniente de estrellas y galaxias llega a nuestros ojos, así que es evidentemente capaz de propagarse fuera de la atmósfera de la Tierra. Esta observación quiere decir que todo el espacio tiene que estar lleno de este medio. ¿Cómo se puede detectar?

Si todo el espacio estuviera lleno de éter, entonces la Tierra se tendría que mover en relación con este éter en su trayectoria alrededor del Sol. El capítulo 3 demostró que el movimiento del medio sí afecta la trayectoria. Por ejemplo, un aeroplano que se desplaza a través del viento tiene una velocidad diferente respecto a la tierra si se mueve en forma perpendicular al viento que si lo hace con el viento o contra el viento. En los capítulos iniciales se demostró que este mismo principio básico es válido con la propagación de las ondas sonoras a través de un medio.

En el siglo XIX se realizaron enormes esfuerzos para medir la velocidad de la luz. Desde el punto de vista de la historia de la ciencia, esta cuestión es un relato fascinante por sí solo. Sin embargo, detectar el éter no requiere saber la velocidad precisa de la luz. Sólo se necesita saber que el movimiento de la Tierra en relación con el éter significaría diferentes velocidades de la luz medidas en el laboratorio, que dependerían de la dirección de la velocidad de la luz con respecto al éter. Este efecto es el que expusieron exactamente Albert Michelson y Edward Morley en el Case Institute de Cleveland, Ohio, para efectuar las mediciones en 1887. Utilizaron un dispositivo muy ingenioso llamado interferómetro (vea el capítulo 34, en el que también se muestra una fotografía del interferómetro tipo Michelson).

Lo que ellos determinaron dejó atónito al mundo de la ciencia: ¡un resultado cero! ¡Ninguna diferencia mensurable! La luz se movía exactamente con la misma velocidad en todas las direcciones y no se pudo detectar ningún movimiento relativo al éter.

Los físicos se esforzaron por explicar este pasmoso resultado. Dos teóricos notables, Hendrik Lorentz (1853-1928) y George Fitzgerald (1851-1922), plantearon la idea de que los objetos que se desplazan en el éter se contraen en su longitud lo suficiente como para compensar o contrarrestar el cambio en la velocidad de la luz con la dirección. Esto dio lugar a que el genio de Albert Einstein (1879-1955) diera el salto conceptual requerido para llegar a una nueva reflexión de consecuencias asombrosas: el éter no existe. Pensar que la velocidad de la luz es constante para todos los observadores, independiente del movimiento del observador, llevó a Einstein a la formulación de la teoría de la relatividad especial, tema de este capítulo.

35.2 Postulados de Einstein y marcos de referencia

En 1905, un empleado de patentes suizas de 26 años de edad, egresado de la carrera de física de una universidad sin renombre, escribió tres artículos científicos que sacudieron a la comunidad científica. Pero lo más asombroso es que ¡él los escribía en sus ratos libres! Estos tres artículos fueron:

1. Un trabajo en el que explicaba que el llamado *efecto fotoeléctrico* se debía a la naturaleza cuántica de la luz. Esta explicación hizo que Einstein fuera galardonado con el Premio Nobel de Física de 1921. Retomaremos este efecto en el capítulo 36.
2. Un estudio en el que explicaba el movimiento browniano, que es el movimiento de partículas muy pequeñas en el agua o en otras soluciones a causa de las colisiones con moléculas y átomos. Este resultado generó razonamientos apremiantes sobre que los átomos realmente existían. (Este hecho era incierto antes de este trabajo.)
3. Por último, el más importante para el presente capítulo: un artículo en el que presentaba la teoría de la relatividad especial.

Einstein propuso dos postulados, a partir de los cuales dedujo toda la relatividad especial. Para entender lo anterior, necesitamos una definición: un **marco de referencia inercial** es un marco de referencia en el cual un objeto se acelera sólo cuando una fuerza neta externa actúa sobre él. Un marco de referencia inercial se mueve a velocidad constante con respecto a cualquier otro marco de referencia inercial. Un marco de referencia no inercial es un marco en el que el punto de origen sufre una aceleración. Por ejemplo, un buzo que salta desde un trampolín y va en caída libre no está en un marco de referencia inercial porque está sometido a una aceleración neta. A menos que se establezca lo contrario, la frase *marco de referencia* en este capítulo se refiere a un marco de referencia *inercial*. Con esta definición podemos establecer los postulados de Einstein:

Postulado 1: las leyes de la física son las mismas en todos los marcos de referencia, independientemente del movimiento de dicho marco.

Postulado 2: la velocidad de la luz c es la misma en todos los marcos de referencia inerciales.

El valor de la velocidad de la luz es

$$c = 299\,792\,458 \text{ m/s}. \tag{35.1}$$

Como lo establecimos en el capítulo 1, este valor para la velocidad de la luz es el valor exacto aceptado porque sirve como base para la definición de la unidad del SI del metro. Los valores aproximados prácticos de la velocidad de la luz son $c \approx 186\,000$ millas/s, o bien, $c \approx 1$ pie/ns en unidades británicas, o el muy común usado $c \approx 3 \cdot 10^8$ m/s.

El primero de los dos postulados de Einstein no debe tener ninguna objeción. En este movimiento alrededor del Sol, la Tierra se mueve a través del espacio en órbita a una velocidad de más de 29 km/s ≈ 65 000 millas por hora. Puesto que la órbita de la Tierra es casi un círculo, el vector de la velocidad de la Tierra relativo al Sol cambia continuamente de dirección. No obstante, todavía esperamos que una medición física siga las leyes de la naturaleza que son independientes de la estación en la cual se realiza la medición (se ignoran los efectos menores causados por las aceleraciones pequeñas de la Tierra y del Sol en relación con la Vía Láctea).

El segundo postulado explica el resultado nulo que midieron Michelson y Morley. Pero esta idea no es fácil de asimilar. Realicemos un experimento capcioso: usted vuela en un cohete a través del espacio a una velocidad $c/2$, directamente hacia la Tierra. Ahora usted dirige un rayo láser hacia delante. La luz del láser tiene una velocidad c. Ingenuamente, y con lo que sabemos hasta ahora con respecto a la suma de velocidades, esperaríamos que la luz del láser tuviera una velocidad de $c + (c/2) = 1.5c$ cuando la observáramos desde la Tierra. Este resultado es lo que habríamos predicho en la sección del movimiento relativo del capítulo 3.

Sin embargo, esta suma de velocidades sólo funciona para velocidades que son pequeñas en relación con la velocidad de la luz. El segundo postulado de Einstein dice que la velocidad de la luz como se ve desde la Tierra es todavía c. Más adelante en este capítulo estableceremos una regla para la suma de velocidades que es correcta para todas las velocidades. Por ahora, observe que esta constante c es la velocidad máxima posible que cualquier objeto puede alcanzar en cualquier marco de referencia. Esta afirmación es asombrosa y origina toda clase de consecuencias interesantes que, al parecer, van contra la intuición, todo lo cual ha sido verificado experimentalmente. Por lo tanto, ahora sabemos que esta teoría es casi correcta. ¡Ya nunca podremos pensar en el espacio y el tiempo de la misma manera!

35.1 Oportunidad de autoevaluación

Un año luz es la distancia que recorre la luz en un año. Calcule dicha distancia en metros.

Beta y gamma

Puesto que la velocidad de la luz desempeña un papel importante en la relatividad, introduciremos dos cantidades adimensionales comúnmente usadas, beta y gamma, y que dependen sólo de la velocidad (constante) de la luz, c, y de la velocidad, $\vec{v}$, de un objeto:

$$\vec{\beta} = \frac{\vec{v}}{c} \tag{35.2}$$

y

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}}. \tag{35.3}$$

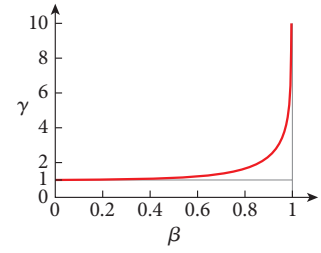


FIGURA 35.2 Dependencia de γ en β.

Usamos la notación $\beta \equiv |\vec{\beta}|$. Observe que para $v \equiv |\vec{v}| \leq c$, las ecuaciones 35.2 y 35.3 significan que $\beta \leq 1$ y $\gamma \geq 1$.

Es útil graficar γ en función de β (figura 35.2). En el caso de velocidades que son pequeñas en comparación con la velocidad de la luz, β es muy pequeña, casi igual a cero. En este caso, γ es muy cercana al valor 1. Sin embargo, a medida que β se aproxima a 1, γ *diverge*, es decir, γ se vuelve más y más grande, y con el tiempo se vuelve infinita cuando $\beta = 1$.

Una aproximación útil, válida para velocidades bajas, también es común. En este caso, $|\vec{v}|$ es pequeña en comparación con c y, por lo tanto, β es pequeña comparada con 1. Al utilizar la expresión matemática de la expansión en serie $(1 - x)^{-1/2} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{8}x^4 + \ldots$, podemos aproximar a γ como

$$\gamma \approx 1 + \frac{1}{2}\beta^2 = 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{v}{c}\right)^2 \quad \text{(para } \beta \text{ pequeña comparada con 1)}. \tag{35.4}$$

35.2 Oportunidad de autoevaluación

¿En qué fracción de la velocidad de la luz los efectos relativistas (desviación entre la expresión correcta relativista y su aproximación clásica) serían de un efecto de 5%? ¿En qué fracción de la velocidad de la luz los efectos relativistas serían de un efecto de 50%?

EJEMPLO 35.1 Nave espacial *Apollo*

En su viaje a la Luna, la nave *Apollo* alcanzó velocidades de $4.0 \cdot 10^4$ km/h en relación con la Tierra, casi en un orden de magnitud (10 veces) más rápidas que cualquier avión a reacción.

PROBLEMA

¿Cuáles son los valores de los factores relativistas β y γ en este caso?

SOLUCIÓN

Primero se convierte la velocidad en unidades SI:

$$v = 4.0 \cdot 10^4 \text{ km/h} = 4.0 \cdot 10^4 \text{ km/h} \cdot (1\,000 \text{ m/km})/(3\,600 \text{ s/h}) \approx 1.1 \cdot 10^4 \text{ m/s}$$

Para calcular β, simplemente dividimos la velocidad de la nave entre la velocidad de la luz:

$$\beta = \frac{v}{c} = \frac{1.1 \cdot 10^4 \text{ m/s}}{3.0 \cdot 10^8 \text{ m/s}} = 3.7 \cdot 10^{-5}.$$

Ahora se sustituye este resultado en la fórmula de γ y se obtiene

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-(3.7 \cdot 10^{-5})^2}} = 1 + 6.9 \cdot 10^{-10} = 1.00000000069.$$

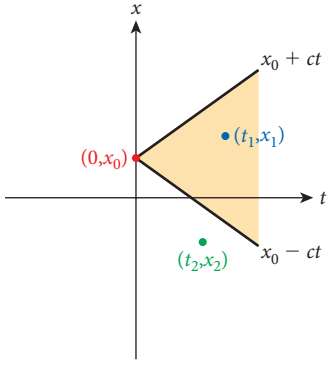


FIGURA 35.3 Cono de luz de un punto en el espacio.

A partir del ejemplo 35.1, usted puede ver que casi todo el movimiento de los objetos microscópicos requiere valores de β que son muy cercanos a cero y valores de γ que son muy cercanos a uno. En todos estos casos, como podemos ver a medida que avanzamos por el capítulo, es seguro no considerar los efectos de la relatividad y calcular la aproximación no relativista. Sin embargo, en muchas situaciones interesantes, la relatividad se debe tener en mente. Esta diferencia es el tema de este capítulo.

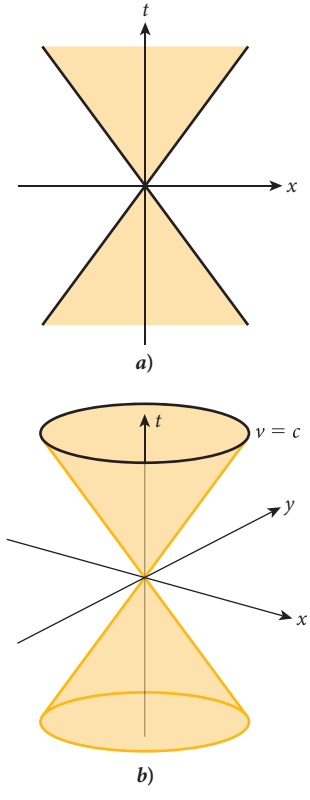


FIGURA 35.4 Representación convencional de los conos luminosos positivos y negativos, con el eje del tiempo vertical hacia arriba.
a) Espacio-tiempo dimensional 1+1, *b*) espacio-tiempo dimensional 2+1.

Cono de luz

Como corolario de los dos postulados de Einstein, tenemos que nada se puede propagar con una velocidad mayor a la de la luz en el vacío. (Rigurosamente hablando, existe la posibilidad de que haya partículas para las cuales la velocidad de la luz no es el límite *más alto*, sino el *más bajo* de su velocidad. Estas partículas hipotéticas se llaman taquiones. No se estudiarán en este libro.) Si nada se puede propagar a una velocidad mayor que a la de la luz en el vacío, entonces existen límites con respecto a cómo los fenómenos son capaces de influir entre sí. Dos personas no pueden intercambiar señales entre sí a velocidades que sobrepasen la velocidad de la luz. Por lo tanto, los efectos instantáneos de los hechos que se originan en un punto en el espacio sobre otro punto en el espacio son imposibles. Simplemente toma tiempo el que una señal o un efecto causa-efecto se propague a través del espacio.

Para investigar este resultado, consideremos el caso unidimensional que ilustra la figura 35.3. Ocurre un fenómeno en el tiempo $t = 0$ en el lugar $x = x_0$ (punto rojo). Una señal que anuncia este fenómeno en el espacio y tiempo se puede propagar no más rápido que la velocidad de la luz; es decir, con una velocidad en el intervalo entre $v = -c$ y $v = +c$. El triángulo de color marrón de la figura 35.3 muestra la región en el espacio y el tiempo en el que dicho fenómeno es observable. Esta región se llama **cono de luz** positivo del fenómeno $(0, x_0)$. El punto azul que está situado en el tiempo t_1 y la posición x_1 es capaz de recibir una señal de que se suscitó el fenómeno original; sin embargo, el punto verde ubicado en el tiempo t_2 y la posición x_2 es incapaz de recibir la señal. Esto quiere decir que, dentro de lo posible, el fenómeno representado por el punto rojo no puede haber ocasionado el hecho representado por el punto verde de la figura 35.3. Los dos hechos, el rojo y el verde, no pueden estar relacionados con una causa: uno no puede haber causado el otro.

De manera inversa, hay una región en el pasado que es capaz de influir en el fenómeno en $(0, x_0)$. Esta región es el cono de luz negativo. En la figura 35.4*a*) se pueden ver ambos conos luminosos en la representación común de un eje de tiempo vertical. El fenómeno para el cual el cono de luz es desplegado está convenientemente desplazado al origen del sistema de coordenadas. ¿Por qué

el cono de luz se denomina "cono" y no "triángulo"? La respuesta se ilustra en la figura 35.4*b*). En el caso de las dos coordenadas espaciales x y y, la condición $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = c$ despliega un cono en el espacio dimensional (2 + 1) x, y, t. Sólo fenómenos dentro del cono de luz tienen la aptitud de influir en los hechos que suceden en el origen, en el vértice del cono de luz. Por el contrario, sólo los hechos dentro del cono de luz positivo pueden ser influidos por el fenómeno que se ubica en el origen.

A menudo los ejes de los diagramas del cono de luz están a una escala tal que tienen las mismas unidades. Una manera de hacerlo es multiplicar el eje del tiempo por la velocidad de la luz, de modo que ambos ejes tienen unidades de longitud. Otro método es dividir el eje x entre la velocidad de la luz, de modo que ambos ejes tienen las unidades de tiempo. De esta manera, la velocidad de la luz se vuelve una línea diagonal en el diagrama del cono de luz, lo cual es muy útil para hacer razonamientos cuantitativos, como se puede ver en el ejemplo siguiente.

En el diagrama de un cono de luz podemos trazar líneas del mundo. Una **línea del mundo** es la trayectoria de un objeto en el espacio y el tiempo. Con frecuencia, a esta clase de gráficas se le conoce como gráfica en el **espacio-tiempo**, lo que refleja cómo estas dos dimensiones están entrelazadas en la teoría de la relatividad. Una gráfica representativa que contiene varias líneas del mundo se muestra en la figura 35.5. En este tipo de gráfica, imaginamos movimiento en sólo una dimensión espacial, x, junto con el tiempo. Imaginemos que tenemos un objeto que está inicialmente en $x = 0$ y $t = 0$ en esta gráfica. Si el objeto no se está moviendo en la dirección x, éste traza una línea vertical en esta gráfica (vector 1). Si el objeto se mueve en la dirección positiva x a una velocidad constante, su trayectoria está representada por una ruta que señala hacia arriba y a la derecha (vector 2). Si el objeto se mueve a una velocidad constante en la dirección x negativa, su trayectoria está delineada por una ruta que señala hacia arriba y a la izquierda (vector 3). Un objeto que viaja a la velocidad de la luz en la dirección x positiva se ilustra con una trayectoria de 45° con respecto al eje vertical (vector 4). Un objeto que se desplaza a la velocidad de la luz en la dirección x negativa está dado por una trayectoria con un ángulo de −45° con respecto al eje vertical (vector 5).

Intervalos espacio-tiempo

En la mecánica clásica, podemos escribir sin problema la distancia entre dos puntos: $\Delta r = |\vec{r}_1 - \vec{r}_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$. Si dos fenómenos tienen lugar en diferentes tiempos, entonces la diferencia de tiempos entre ellos es $\Delta t = t_2 - t_1$. En vista del análisis del cono de luz y la causalidad anteriores, introducimos el intervalo espacio-tiempo s entre los fenómenos 1 y 2. Definimos s mediante

$$s^2 = c^2(\Delta t)^2 - (\Delta r)^2. \tag{35.5}$$

Ahora podemos distinguir tres tipos de intervalos espacio-tiempo, que dependen del signo de s^2, intervalos del tipo tiempo, intervalos del tipo luz e intervalos del tipo espacio:

$$\left.\begin{array}{lcll} s^2 > 0 & \Rightarrow & c^2\Delta t^2 > \Delta r^2 & \text{tipo tiempo} \\ s^2 = 0 & \Rightarrow & c^2\Delta t^2 = \Delta r^2 & \text{tipo luz} \\ s^2 < 0 & \Rightarrow & c^2\Delta t^2 < \Delta r^2 & \text{tipo espacio} \end{array}\right\} \text{intervalos espacio-tiempo.} \tag{35.6}$$

Los intervalos espacio-tiempo del tipo luz están en la superficie del cono de luz, los intervalos espacio-tiempo del tipo tiempo están en el interior del cono de luz y los intervalos del tipo espacio están en el exterior. En un intervalo del tipo tiempo podemos definir un intervalo de tiempo apropiado $\Delta\tau$, que es el tiempo entre dos hechos medidos por un observador que viaja con su reloj en un marco de referencia inercial entre estos dos hechos, y la trayectoria del observador corta la línea del mundo de cada hecho cuando ese fenómeno sucede. Este **tiempo propio** es

$$\Delta\tau = \sqrt{\Delta t^2 - \Delta r^2/c^2}\,. \tag{35.7}$$

Observe que con la condición del tipo tiempo de $s^2 > 0$, el tiempo propio es un número real (unidad de tiempo +). La existencia de intervalos del tipo tiempo (o tipo luz) entre dos hechos quiere decir que estos dos fenómenos están relacionados causalmente.

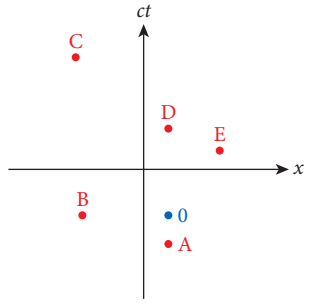
Si dos hechos están separados por un intervalo del tipo espacio, entonces no pueden estar causalmente relacionados; es decir, ninguno de los dos hechos tienen la capacidad de disparar el otro dentro de lo que es posible. Podemos definir una distancia propia $\Delta\sigma$ entre estos dos hechos

$$\Delta\sigma = \sqrt{\Delta r^2 - c^2\Delta t^2}\,, \tag{35.8}$$

que es un número real (unidad de longitud +) para los hechos del tipo espacio.

35.1 Ejercicio en clase

Un evento 0 ocurre en algún punto en el espacio-tiempo, como se puede ver en la figura. ¿Cuál de los otros cinco hechos A, B, C, D, E en el espacio-tiempo pueden tener influencia por parte del hecho 0? ¡Compruebe todo lo que aplica!



A) B) C) D) E)

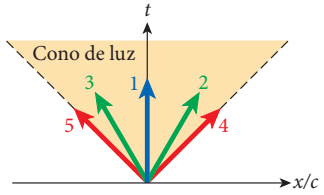
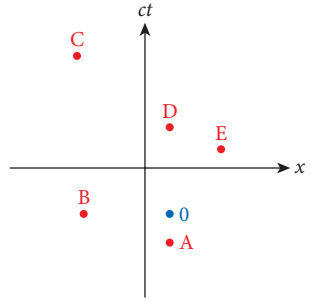


FIGURA 35.5 Una gráfica del espacio-tiempo en la que se muestra un cono de luz positivo.

35.2 Ejercicio en clase

Un evento 0 ocurre en algún punto en el espacio-tiempo, como muestra la figura. ¿Cuál de los otros cinco hechos A, B, C, D, E en el espacio-tiempo forman un intervalo espacio-tiempo como el tiempo con el fenómeno 0? ¡Compruebe todo lo que aplica!



A) B) C) D) E)

35.3 Dilatación del tiempo y contracción de la longitud

En nuestra experiencia cotidiana, consideramos absolutos el tiempo y el espacio, sin restricción ni calificación. Por "absoluto" queremos decir que los observadores en todos los marcos de referencia inerciales miden los mismos valores de longitud de cualquier objeto y duración de cualquier fenómeno. Sin embargo, si nos apegamos a los postulados de Einstein según sus conclusiones lógicas, éste ya no es el mismo caso. Los conceptos de tiempo y espacio no absolutos llevan a conclusiones que suenan a cuentos fantásticos, pero que se han verificado experimentalmente.

Dilatación del tiempo

Una de las consecuencias más notables de la teoría de la relatividad es que la medición del tiempo no es independiente del marco de referencia. Más bien, el tiempo que transcurre entre dos hechos en un marco de referencia que está en movimiento, donde los fenómenos ocurren en distintos lugares, se dilata (se hace más largo) cuando se compara con el intervalo de tiempo en el marco en reposo (donde los hechos suceden en el mismo lugar):

$$\Delta t = \gamma \Delta t_0 = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1-(v/c)^2}}. \tag{35.9}$$

La **dilatación del tiempo** quiere decir que si un reloj avanza Δt_0 cuando está en reposo, un observador ve que el reloj avanza a $\Delta t > \Delta t_0$ cuando se mueve con respecto al reloj. ¡Ese intervalo de tiempo Δt depende de la velocidad v con la cual el observador se mueve con respecto al reloj! Este resultado es realmente revolucionario. No obstante, tiene consecuencias verificables en forma experimental como se ve en el ejemplo 35.2.

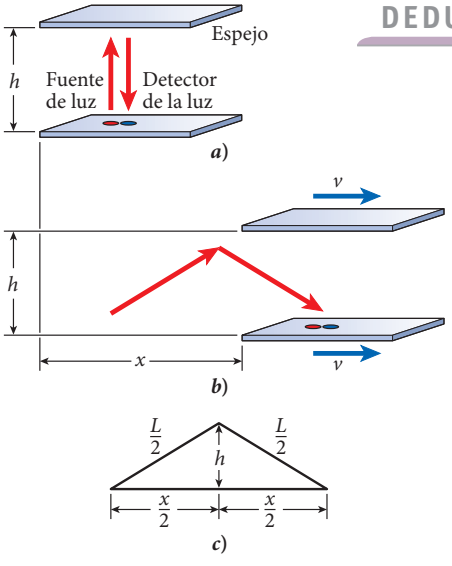


FIGURA 35.6 Al medir el tiempo en dos diferentes marcos de referencia: *a*) el espejo está en reposo en este marco de referencia; *b*) se ve que el aparato se mueve a una velocidad v en este marco de referencia. *c*) Triángulo formado por la luz reflejada en el marco de referencia que está en movimiento.

DEDUCCIÓN 35.1 Dilatación del tiempo

¿Cómo podemos deducir este resultado? Sabemos que los efectos relativistas tienen que ver con la velocidad de la luz, así que construyamos un reloj que marque el tiempo mediante el rebote de un haz de luz vertical desde un espejo y que detecte la reflexión (figura 35.6*a*).

Si ya conocemos la distancia h entre el espejo y la fuente de luz, entonces el tiempo para que el haz suba y baje es

$$\Delta t_0 = \frac{2h}{c},$$

donde el subíndice "0" se refiere al hecho de que el observador de este intervalo de tiempo no se está moviendo con respecto al aparato de medición. (El haz de luz requiere el mismo tiempo h/c para subir que para bajar.)

Ahora tengamos a un observador que se desplaza a la izquierda con una velocidad v en la dirección horizontal. A ésta la llamamos dirección x negativa, de modo que este observador ve que el reloj se mueve en la dirección x positiva a una velocidad v [figura 35.6*b*)]. Usted puede ver en la figura 35.6*c*) que, en este caso, el observador ve que el rayo de luz tiene una longitud de trayectoria de

$$L = 2\sqrt{h^2 + (x/2)^2},$$

donde x es la distancia que el reloj se desplaza mientras la luz está en el aire. Este resultado es simplemente una consecuencia del teorema de Pitágoras. Hemos asumido tácitamente que h es la misma para los observadores en los dos marcos de referencia mostrados en la figura 35.6. Si h no fuera la misma, entonces podríamos distinguir un marco de referencia desde el otro, con lo que se transgrediría el postulado 1 de Einstein.

Este segundo observador diría que $x = v\Delta t$, donde Δt se refiere ahora al intervalo de tiempo desde que la luz es emitida y luego detectada en el sistema del observador. Asimismo, podemos usar la ecuación anterior que relaciona h y Δt_0, $h = c\Delta t_0/2$, para eliminar h.

En este punto entra el segundo postulado en su forma esencial. ¡Los rayos de luz pueden viajar sólo con c, la constante de velocidad de la luz, la cual es independiente de la velocidad del observador! Por consiguiente, tenemos la relación

$$L = c\Delta t.$$

Insertamos este último resultado en el resultado del teorema de Pitágoras y obtenemos lo siguiente al sustituir h y x:

$$L = 2\sqrt{h^2 + (x/2)^2} = c\Delta t = 2\sqrt{(c\Delta t_0/2)^2 + (v\Delta t/2)^2} = \sqrt{(c\Delta t_0)^2 + (v\Delta t)^2}\,.$$

Al determinar esta ecuación para Δt, llegamos a

$$\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1-(v/c)^2}} = \gamma \Delta t_0\,.$$

En el marco en reposo del reloj, figura 35.6*a*), el intervalo de tiempo es Δt_0; esta cantidad representa el tiempo entre dos tictacs del reloj. En el marco en el cual el reloj se mueve [figura 35.6*b*)], el intervalo de tiempo entre estos dos tictacs es $\Delta t = \gamma \Delta t_0 > \Delta t_0$. Por lo tanto, decimos que "los relojes en movimiento corren despacio", lo que significa que el intervalo de tiempo medido es mayor cuando se mide en cualquier marco de referencia en el cual el reloj se esté moviendo.

Como la velocidad de la luz es independiente de la velocidad del observador, tenemos que admitir que el tiempo medido por los dos observadores es distinto. ¡Este paso es notablemente audaz!

Sólo para aclarar; no hay *nada erróneo* en los relojes, y no hay nada especial con respecto al reloj que se mueve. Nada especial sucede a los relojes debido a las altas velocidades. Lo que sucede es que el tiempo en sí mismo es más lento, según un observador en un marco de referencia distinto. Esto quiere decir que todo es más lento de acuerdo con este observador, incluido nuestro movimiento y nuestros relojes corporales. Pareceríamos movernos en cámara lenta y aumentaríamos de edad con mayor lentitud, comparados con el observador del otro marco de referencia. También es interesante notar que este efecto es recíproco. Es decir, los observadores en dos marcos de referencia inerciales que se mueven uno con respecto al otro, ¡ven que los relojes del otro se mueven más despacio! Pero esto ilustra la idea central de la relatividad especial: no hay movimiento absoluto; todos los marcos de referencia inerciales son igualmente válidos para efectuar las mediciones.

Por último, una advertencia sobre la notación: en la sección anterior introdujimos el concepto de tiempo propio (ver ecuación 35.7). Algunas veces verá usted que al tiempo medido en el marco en reposo de un reloj lo llamen tiempo propio. El intervalo en este tipo de tiempo usado en la educción 35.1 es Δt_0.

Una cosa es postular y luego demostrar matemáticamente el efecto de la dilatación del tiempo. Sin embargo, es muy diferente observar este efecto en el laboratorio o en la naturaleza. Más sorprendente es que esto se ha observado según se analiza en el ejemplo 35.2.

EJEMPLO 35.2 Decaimiento del muon

Un muon es una partícula subatómica inestable cuyo tiempo de vida media τ_0 es de sólo 2.2 μs. Esta vida se observa con facilidad cuando los muones decaen estando en reposo en el laboratorio. No obstante, cuando los muones son producidos al viajar a muy altas velocidades, su vida media se dilata. En 1977, se efectuó tal experimento en el acelerador de partículas europeo CERN, donde los muones fueron producidos a una velocidad de $v = 0.9994c \Rightarrow \beta = 0.9994$. En este caso, tenemos para γ:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-0.9994^2}} = 29.$$

Por lo tanto, es de esperarse que la vida media, τ, de los muones sea $\gamma = 29$ más larga a esta velocidad que si estuviera en reposo:

$$\tau = \gamma \tau_0 = 29\,(2.2\ \mu\text{s}) = 64\ \mu\text{s}.$$

Es muy simple evaluar este efecto midiendo el tiempo entre la producción y el decaimiento de los muones. Otra posibilidad es alejarse a alguna distancia del lugar de producción y ver si los muones todavía lo alcanzan a usted. Sin el efecto de la dilatación del tiempo, durante su vida de 2.2 μs, un muon a esta velocidad podría moverse una distancia de sólo

$$x = v\tau_0 = (0.9994c)\,(2.2\ \mu\text{s}) = 660\ \text{m}$$

(*continúa*)

(*continuación*)

antes de su decaimiento. Sin embargo, con el efecto de la dilatación del tiempo, la distancia recorrida se vuelve

$$x = v\tau = v\gamma\tau_0 = (0.9994c)\,29\,(2.2\ \mu\text{s}) = 19\ \text{km}.$$

Para realizar este experimento, usted sólo necesita ver qué tan lejos del sitio de producción de muones puede usted detectar los productos del decaimiento. Con el experimento del CERN se comprobó la predicción de la relatividad de la dilatación del tiempo. Esta medición demuestra que la dilatación del tiempo es una realidad. Las partículas viven más si se mueven más rápido. (No obstante, ellas viven el tiempo usual de acuerdo con los relojes que están en su marco en reposo.) De hecho, en los aceleradores de partículas gigantes justo ahora en la mesa de dibujo chocarán muones. En el caso de estos aceleradores, los muones necesitan ser transportados a distancias de muchos kilómetros. El hecho de que estos colisionadores de muones sean posibles se debe al efecto de la dilatación del tiempo.

35.3 Ejercicio en clase

Un reloj en una nave espacial muestra que un intervalo de tiempo de 1.00 s ha finalizado. Si se observara que este reloj se mueve a una velocidad de 0.860*c*, ¿qué tiempo ha transcurrido en el marco de referencia del observador estacionario?

a) 0.860 s *d*) 1.77 s

b) 1.00 s *e*) 1.96 s

c) 1.25 s

¿Estos efectos relativistas se relacionan sólo con partículas subatómicas y no tienen importancia en lo que se refiere a objetos macroscópicos? No. En 1971, los científicos hicieron que cuatro relojes extremadamente precisos emprendieran un vuelo alrededor de la Tierra, una vez en cada dirección. Observaron que los relojes que iban en el vuelo hacia el Este perdieron 59±10 ns, mientras que los relojes que volaban hacia el Oeste ganaron 275±21 ns, en comparación con un reloj atómico situado en la Tierra. Por lo tanto, el efecto de la dilatación del tiempo se confirmó mediante este experimento con relojes macroscópicos. Por supuesto, el efecto fue increíblemente pequeño porque la velocidad de un aeroplano es pequeña en comparación con la velocidad de la luz. Los relojes perdieron 59 ns y ganaron 275 ns en tres días (259 200 s), unas pocas partes por un millón de millones. La explicación cuantitativa de este experimento sobre la dilatación del tiempo también se relaciona con la relatividad general. Pero éste no es el punto que queremos resaltar aquí. La cuestión principal es que este experimento produjo un efecto que se pudo medir, y que no es cero, como lo podríamos haber esperado en la ausencia de la dilatación del tiempo. El hecho fundamental que el experimento demuestra es que ya no se puede considerar que el tiempo es una cantidad absoluta.

Contracción de la longitud

La relatividad no dice sólo que el tiempo es variable y que se dilata en función de la velocidad, sino que también la longitud es variable. Vemos que la longitud L de un objeto que se mueve con velocidad v sufre una **contracción de la longitud** con respecto a su longitud en su propio marco en reposo, su **longitud propia** L_0. Tenemos que

$$L = \frac{L_0}{\gamma} = L_0\sqrt{1-(v/c)^2}\,. \tag{35.10}$$

DEDUCCIÓN 35.2 Contracción de la longitud

Imagine que usted desea medir la longitud de un transbordador espacial (figura 35.7), que va a una velocidad v en el marco de referencia suyo y una longitud propia L_0. La manera de medir la longitud sin usar un metro es sencilla: podemos conectar un rayo láser a un reloj que está fijo en el laboratorio. Cuando la punta del transbordador interrumpe el rayo láser, se pone en marcha el reloj, y cuando el extremo final del transbordador pasa por el mismo punto y el rayo láser ya no está bloqueado, el reloj se detiene. Este intervalo de tiempo es Δt_0, o tiempo propio, y por lo tanto, $L = v\Delta t_0$.

En el interior del transbordador, mediante un reloj que está fijo al interior del transbordador, el tiempo medido durante el cual la nave espacial bloquea al rayo láser es $\Delta t = \gamma\Delta t_0$ a causa de la dilatación del tiempo. Por lo tanto, un astronauta que está dentro del transbordador observa que un reloj en movimiento a velocidad v emitió luz cuando pasó la punta de la nave y otra vez (Δt más tarde) cuando pasó la cola, y deduce que $L_0 = v\Delta t = v\gamma\Delta t_0$. Por lo tanto, tenemos

$$\frac{L}{L_0} = \frac{v\Delta t_0}{v\gamma\Delta t_0} \quad \text{o} \quad L = \frac{L_0}{\gamma}.$$

Observe que en el caso de este experimento capcioso, es esencial que la longitud medida *esté siempre en la dirección del movimiento*. Todas las longitudes perpendiculares a la dirección del movimiento siguen siendo las mismas (vea la figura 35.7).

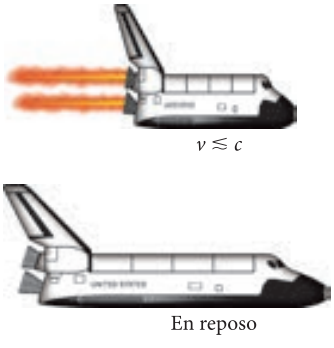


FIGURA 35.7 Ilustración de la contracción de la longitud (no está a escala).

Como puede ver de las deducciones 35.1 y 35.2, los fenómenos de la dilatación del tiempo y la contracción de la longitud están íntimamente relacionados. De la velocidad de la luz que es constante para todos los observadores se infiere la dilatación de tiempo, lo que se ha confirmado experimentalmente muchas veces. A su vez, por la dilatación del tiempo hay contracción de la longitud.

El hecho esencial que se debe recordar de estos razonamientos sobre la contracción de la longitud es que los objetos en movimiento son más cortos. No sólo parecen más cortos: *son* más cortos cuando los mide un observador en el marco en el cual el objeto se está moviendo. Esta contracción es otra consecuencia que altera nuestro estado mental de los postulados de la relatividad especial.

EJEMPLO 35.3 Contracción de la longitud de un automóvil en la carrera NASCAR

Usted ve que un automóvil de carreras NASCAR (figura 35.8) va a una velocidad constante de $v = 89.4$ m/s (200 millas por hora). Cuando se detiene en los pits, el automóvil de carreras tiene una longitud de 5.232 m.

PROBLEMA

¿Cuál es el cambio en la longitud del automóvil de carreras NASCAR desde su marco de referencia en las gradas? Suponga que el automóvil se desplaza en forma perpendicular a su línea visual.

SOLUCIÓN

La longitud del automóvil de carreras se contraerá a causa del movimiento. La longitud del automóvil es $L_0 = 5.232$ m. La longitud en nuestro marco de referencia está dada por la ecuación 35.10:

$$L = \frac{L_0}{\gamma} = L_0\sqrt{1-(v/c)^2} \approx L_0\left(1-\frac{1}{2}\left(\frac{v}{c}\right)^2\right) = L_0 - \Delta L,$$

donde

$$\Delta L = L_0\frac{1}{2}\left(\frac{v}{c}\right)^2$$

es el cambio en la longitud del automóvil de carreras. Aquí hemos aplicado la expansión en serie $(1 - x^2)^{1/2} = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \cdots$ como lo hicimos en la ecuación 35.4. La velocidad del automóvil es pequeña en comparación con la velocidad de la luz, así que $v/c \ll 1$ y nuestra expansión está bien justificada. Por consiguiente, el automóvil de carreras parece ser más corto

$$\Delta L = L_0\frac{1}{2}\left(\frac{v}{c}\right)^2 = \frac{5.232\text{ m}}{2}\left(\frac{89.4\text{ m/s}}{3.00\cdot 10^8\text{ m/s}}\right)^2 = 2.32\cdot 10^{-13}\text{ m}.$$

El cambio de la longitud del automóvil es más pequeño que el diámetro de un átomo representativo. De modo que la contracción de la longitud de los objetos a las velocidades cotidianas es difícil de detectar.

Paradoja de los gemelos

Hemos visto que un intervalo de tiempo (por ejemplo, entre el tictac de un reloj) depende de la velocidad del objeto (digamos, un reloj) en el marco de un observador, $\Delta t = \gamma\Delta t_0$. Realicemos un experimento capcioso:

La astronauta Alice tiene un hermano gemelo, Bob. A los 20 años de edad, Alice aborda una nave espacial que viaja a una estación espacial a 3.25 años luz alejada de la Tierra, y luego regresa. La nave espacial es buena y capaz de viajar a 65.0% de la velocidad de la luz, lo cual resulta en un factor gamma de $\gamma = 1.32$. La distancia total que Alice recorrió es 2(3.25 años luz) = 6.50 años luz, según lo que vio Bob.

En el marco de referencia de Alice, ella recorrió una distancia de $d = 6.50$ años luz/$\gamma = 4.92$ años luz, porque la distancia entre la Tierra y la estación espacial está contraída en su marco de referencia. Por lo tanto, el tiempo que requiere Alice para concluir el viaje es

$$t = d/v = (4.92c\cdot\text{años})/0.650c = 7.57\text{ años}.$$

35.4 Ejercicio en clase

Establezca si cada uno de los siguientes enunciados es verdadero o falso.

a) En el caso de un objeto que se mueve, su longitud en la dirección del movimiento es más corta que cuando está en reposo.

b) Cuando usted está estacionado, un reloj en movimiento que pasa frente a usted a una velocidad cercana a la velocidad de la luz parece andar más rápido que el reloj que trae usted en su muñeca.

c) Cuando usted se desplaza a una velocidad cercana a la velocidad de la luz, y pasa frente a un observador estacionado, usted observa que el reloj que lleva en la muñeca parece caminar más rápido que el reloj del observador estacionado.

FIGURA 35.8 Carrera NASCAR de automóviles.

El viaje completo de ida y vuelta de Alice requirió 7.6 años en el marco de referencia de Alice, la dilatación del tiempo obliga a $7.6\gamma = 10.0$ años para pasar al marco de referencia de Bob. Por lo tanto, cuando Alice baje de la nave después de su viaje, ella tendrá 27.6 años de edad y su hermano Bob, 30.0 años.

También podemos ponernos nosotros mismos en el marco de referencia de Alice: en el marco de Alice, ella estaba en reposo y Bob se desplazaba a 65.0% de la velocidad de la luz. Por lo tanto, Alice podría haber envejecido 1.32 veces más que Bob. Debido a que Alice sabía que ella había envejecido 7.57 años, ella podría esperar que su hermano Bob tuviera sólo (20 + 7.57/1.32 = 25.8) años cuando ellos se reunieran de nuevo. Pero un hermano gemelo no puede ser más joven que el otro. Esta inconsistencia evidente se llama paradoja de los gemelos. ¿Cuál de estos dos puntos de vista es el correcto?

La aparente paradoja se resuelve cuando nos damos cuenta de que aunque Bob permanece en un marco de referencia inercial en reposo en la Tierra durante el viaje, la astronauta Alice vive en dos distintos marcos de referencia inerciales a lo largo de su viaje redondo. Durante la partida, ella se mueve lejos de la Tierra y hacia la estación espacial distante. Cuando llega a la estación espacial, ella da la vuelta y regresa a velocidad constante a la Tierra desde la estación espacial. Entonces, se rompe la simetría entre los gemelos.

Podemos analizar la trayectoria de los gemelos en el espacio-tiempo usando nuestras técnicas de conos de luz y líneas del mundo, graficando el tiempo en un marco inercial en reposo contra la posición de los gemelos en una dirección, la dirección x. Analizamos el problema desde el punto de vista de Bob y del punto de vista de Alice. Empezamos por analizar el viaje en el marco en reposo de quedarse en casa del gemelo Bob, según se muestra en la figura 35.9. Aquí escogemos una escala de tal manera que los ejes tengan unidades de años.

En la figura 35.9, la velocidad de Bob es siempre cero y él permanece en $x = 0$. Una línea vertical y roja representa la trayectoria de Bob. En contraste, Alice se desplaza a una velocidad de 65.0% de la velocidad de la luz ($v = 0.650c$) alejándose de la Tierra. Una línea azul rotulada $v = 0.650c$ delinea la trayectoria de partida de Alice. Definimos la dirección positiva x como la que va desde la Tierra a la estación espacial lejana. Cada gemelo quiere mantenerse en comunicación con el otro. Por eso cada uno envía una tarjeta electrónica de cumpleaños al otro en su día de cumpleaños en su marco de referencia. Estos mensajes viajan a la velocidad de la luz. Bob envía su mensaje electrónico directamente hacia la estación espacial y Alice envía sus saludos electrónicos directamente hacia la Tierra. Los mensajes de Bob están representados como flechas rojas que señalan hacia arriba y a la derecha. Los mensajes de Alice son las flechas azules que señalan hacia arriba y a la izquierda. Cuando la flecha del mensaje cruza la trayectoria de cada uno de los gemelos, el gemelo respectivo recibe y disfruta la tarjeta electrónica de cumpleaños.

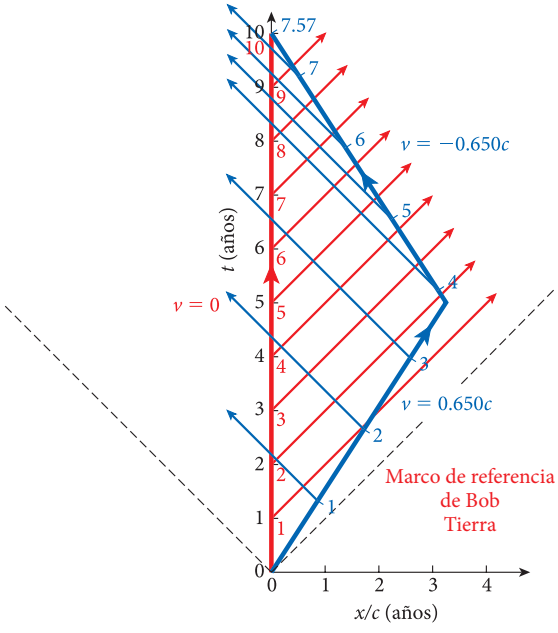


FIGURA 35.9 Gráfica en la que se muestra la velocidad de los gemelos en el marco de referencia de Bob, que está en reposo en la Tierra. La línea roja, gruesa y vertical, representa la trayectoria de Bob. Las dos rectas gruesas azules delinean la trayectoria de Alice. Las líneas rojas delgadas con números rojos (que corresponden a los años desde que partió Alice) representan los mensajes de los cumpleaños de Bob. Las líneas azules delgadas con números azules (también correspondientes a los años desde que Alice partió) representan los mensajes de los cumpleaños de Alice. Las líneas discontinuas muestran el cono de luz a $t = 0$.

Después de que transcurren 5 años en el marco de Bob y 3.79 años en el marco de Alice, ésta llega a la estación espacial y regresa a casa. Bob está un poco preocupado por ahora porque él ha recibido sólo dos tarjetas de cumpleaños en cinco años. Alice no se siente mucho mejor porque ha recibido sólo un mensaje en 3.79 años. Después de que Alice da la vuelta, ella recibe ocho tarjetas de cumpleaños en los siguientes 3.79 años. Bob recibe cinco tarjetas más en los cinco años restantes. Cuando Alice llega de regreso a la Tierra, recibe un saludo de primera mano por su cumpleaños número 30 de parte de Bob, pero Alice no está lista todavía para celebrar su cumpleaños número 28. La edad de Alice es de 27.6 años. Alice recibió un total de 10 tarjetas de cumpleaños mientras que Bob recibió sólo siete.

Ahora analicemos el mismo viaje, pero desde el marco inercial en reposo que corresponde a la partida de Alice (figura 35.10) para mostrar que podemos conseguir la misma respuesta desde el punto de vista de Alice. En este marco de referencia, Bob y la Tierra están viajando en la dirección negativa x a una velocidad $v = -0.650c$. Durante la parte de la salida del viaje, la velocidad de Alice es cero en este marco. La estación espacial está viajando hacia Alice a una velocidad de 65.0% de la velocidad de la luz, de tal modo que la distancia de 3.25 años luz se cubre en 3.79 años debido a la contracción de la longitud. Observe que esta parte de los dos diagramas de las figuras 35.9 y 35.10 es completamente simétrica.

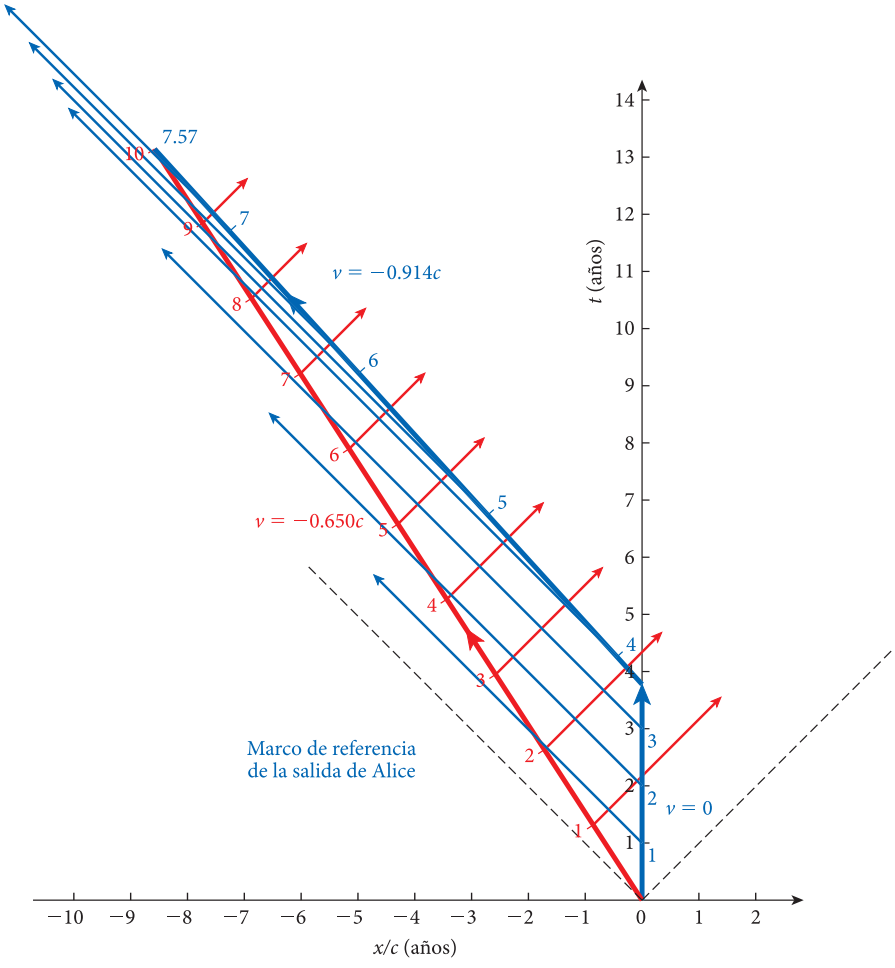


FIGURA 35.10 Gráfica que muestra la velocidad de los gemelos en el marco de referencia de la salida de Alice. La línea roja gruesa representa la trayectoria de Bob. Las dos líneas azules gruesas son la trayectoria de Alice. Las líneas rojas delgadas rotuladas con números rojos que corresponden al año representan los mensajes de cumpleaños de Bob. Las líneas azules delgadas rotuladas con números azules que corresponden al año son los mensajes de cumpleaños de Alice. Las líneas discontinuas representan el cono de luz en $t = 0$.

Cuando la estación espacial alcanza a Alice, se rompe la simetría en las dos representaciones de la figura 35.9 y 35.10. Alice empieza a viajar con una velocidad suficientemente alta para llegar a la Tierra en la dirección x negativa. Para establecer una velocidad relativa de 65.0% de la velocidad de la luz con respecto a la Tierra, Alice tiene que viajar con una velocidad de 91.4% de la velocidad de la luz. (Esta adición relativista de velocidades se estudia en la sección 35.6.)

Una vez más Bob recibe dos tarjetas de cumpleaños en los primeros cinco años en el marco de referencia de Bob, mientras que Alice recibe una tarjeta de cumpleaños antes de que ella empezara a desplazarse hacia la Tierra. Dado que Alice se dirige como rayo a la Tierra a una velocidad de $0.914c$, ella recibe ocho tarjetas de cumpleaños, en tanto que Bob sólo recibe cinco. Cuando los gemelos se reúnen en la Tierra, Bob tiene 30.0 años de edad y Alice, 27.6. Este resultado, usando el marco de referencia de la partida de Alice, es igual al que obtuvimos con el marco de referencia de Bob. Por lo tanto, está resuelta la paradoja de los gemelos.

Observe que analizamos la paradoja de los gemelos sólo en términos de la relatividad especial. Usted podría preocuparse por las partes del viaje de Alice que tienen que ver con aceleración. Alice tuvo que acelerar a 65.0% de la velocidad de la luz para empezar su viaje hacia la estación espacial, y luego tuvo que desacelerar, detenerse y volver a acelerar hasta alcanzar una velocidad de 65.0% de la velocidad de la luz de nuevo para llegar a la Tierra. Incluso a una aceleración constante de tres veces la aceleración de la gravedad, tomaría casi tres meses alcanzar una velocidad de 65.0% de la velocidad de la luz a partir del reposo y la misma cantidad de tiempo para detenerse, iniciando a una velocidad de 65.0% de la velocidad de la luz. Sin embargo, podríamos proponer varios escenarios para eliminar estas objeciones o, por lo menos, reducir al mínimo su importancia. Por ejemplo, simplemente podríamos hacer el viaje en más tiempo, volviendo insignificante la fase de la aceleración. La aceleración es necesaria para explicar la paradoja de los gemelos porque Alice tiene que invertir su curso para regresar a la Tierra, cambiando su marco de referencia inercial. No obstante, los efectos de la relatividad general no son necesarios para explicar la paradoja de los gemelos.

35.5 Ejercicio en clase

La estrella más cercana a nosotros aparte del Sol es Próxima Centauro, que está a 4.22 años luz. Suponga que tenemos una nave espacial que puede viajar a una velocidad de 90.0% de la velocidad de la luz. Si usted estuviera en la nave espacial, ¿qué tanto tardaría en viajar del Sol a Próxima Centauro desde su punto de vista?

a) 2.04 años
b) 2.29 años
c) 3.42 años
d) 3.80 años
e) 4.22 años

35.4 Corrimiento relativista de la frecuencia

Si el tiempo ya no es invariable, entonces también se puede esperar que las cantidades que dependen explícitamente del tiempo cambien en función de la velocidad de un objeto. La frecuencia f es una de tales cantidades.

En el capítulo 16 sobre las ondas sonoras, estudiamos el efecto Doppler, el cambio de la frecuencia del sonido a causa del movimiento relativo entre el observador, la fuente y el medio. Sin embargo, hemos visto que la luz no requiere un medio en el cual propagarse. Por lo tanto, el **corrimiento relativista de la frecuencia** es cualitativamente nuevo y sólo está relacionado muy de lejos con el efecto Doppler clásico. (A menudo se le llama *efecto Doppler relativista* o *efecto Doppler de la radiación electromagnética*.) Si v es la velocidad relativa entre la fuente y el observador, y el movimiento relativo sucede en una dirección radial (sea directamente hacia el otro o alejándose directamente del otro), entonces la fórmula para la frecuencia observada, f, de la luz con una frecuencia dada f_0 es

$$f = f_0\sqrt{\frac{c \mp v}{c \pm v}}, \tag{35.11}$$

donde los signos superiores ($-$ en el numerador y $+$ en el denominador) se usan para el movimiento que se aleja y los signos inferiores ($+$ en el numerador y $-$ en el denominador) para el movimiento que acerca. (También sucede un corrimiento Doppler transversal, debido puramente a los efectos de la dilatación del tiempo, pero no lo estudiaremos aquí.)

Como la relación $c = \lambda f$ entre velocidad, longitud de onda y frecuencia es todavía válida, obtenemos, para la longitud de onda:

$$\lambda = \lambda_0\sqrt{\frac{c \pm v}{c \mp v}}. \tag{35.12}$$

Cuando vemos por nuestro telescopio hacia el infinito, vemos que todas las galaxias envían su luz hacia nosotros y su **corrimiento** es **hacia el rojo**, lo que significa que $\lambda > \lambda_0$ (el rojo es el color visible con la longitud de onda más larga). Esto quiere decir que todas las galaxias tienen $v > 0$; esto es, se están alejando de nosotros. (Si un objeto se mueve hacia nosotros, entonces $\lambda < \lambda_0$ y se dice que la luz tiene **corrimiento hacia el azul**.) Además, lo que es más sorprendente, cuanto más alejadas están de nosotros las galaxias, tienen mayor corrimiento al rojo. Esta observación es una evidencia clara de un universo siempre en expansión.

A menudo, los astrónomos citan un así llamado **parámetro de corrimiento al rojo**. Con frecuencia, a este parámetro se le denomina sólo *corrimiento al rojo*. Esta cantidad se define como la relación del corrimiento de la longitud de onda de la luz dividido entre la longitud de onda de esa luz, según que se observa cuando la fuente está en reposo:

$$z = \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} = \frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda_0} = \sqrt{\frac{c \pm v}{c \mp v}} - 1. \tag{35.13}$$

PROBLEMA RESUELTO 35.1 Corrimiento al rojo de las galaxias

Durante una inspección al espacio profundo, se observa una galaxia con un corrimiento al rojo de $z = 0.450$.

PROBLEMA

¿A qué velocidad se está alejando esa galaxia de nosotros?

FIGURA 35.11 Una galaxia que se aleja de la Tierra (no está a escala).

SOLUCIÓN

PIENSE

El corrimiento al rojo es una función de la velocidad v con la cual la galaxia se desplaza alejándose de nosotros. Podemos resolver la ecuación 35.13 y determinar la velocidad en términos del corrimiento al rojo.

ESBOCE

La figura 35.11 ilustra un esquema de la galaxia que se aleja de la Tierra.

INVESTIGUE

Iniciamos con la ecuación 35.13, que relaciona el corrimiento al rojo z con la velocidad v a la cual la galaxia se aleja de nosotros,

$$z = \sqrt{\frac{c+v}{c-v}} - 1.$$

Podemos reacomodar los términos de esta ecuación y obtener

$$(z+1)^2 = \frac{c+v}{c-v}$$

$$c(z+1)^2 - v(z+1)^2 = c+v.$$

Al reunir los factores que multiplican a v en un miembro y los factores de c en el otro miembro, tenemos

$$v + v(z+1)^2 = c(z+1)^2 - c.$$

SIMPLIFIQUE

Ya podemos escribir una expresión para la velocidad de una galaxia que se aleja de nosotros en unidades de la velocidad de la luz,

$$\frac{v}{c} = \frac{(z+1)^2 - 1}{(z+1)^2 + 1}.$$

CALCULE

Al sustituir los valores numéricos, tenemos

$$\frac{v}{c} = \frac{(0.450+1)^2 - 1}{(0.450+1)^2 + 1} = 0.355359.$$

REDONDEE

Mostramos nuestro resultado con tres cifras:

$$\frac{v}{c} = 0.355.$$

VUELVA A REVISAR

Parece razonable que una galaxia se aleja de nosotros a 35.5% de la velocidad de la luz, por lo menos en ese aspecto nuestra respuesta no sobrepasa la velocidad de la luz.

35.5 Transformación de Lorentz

Al estudiar la dilatación del tiempo y la contracción de la longitud, hemos visto cómo los intervalos de tiempo y de espacio se pueden transformar de un marco de referencia inercial en otro. Es posible combinar estas transformaciones del tiempo y del espacio como pasar de un marco de referencia a otro que se mueve a una velocidad v con respecto al primero.

Para ser específico, suponga que tiene dos marcos de referencia F (con sistema de coordenadas x, y, z y tiempo t) y F' (con sistema coordenado x', y', z' y tiempo t') que están en el mismo punto $x = x'$, $y = y'$, $z = z'$ (este acomodo siempre se puede lograr mediante un simple desplazamiento en la ubicación del origen de los sistemas de coordenadas) en el mismo tiempo $t = t' = 0$, que se mueven a una velocidad v relativa con respecto a los otros a lo largo del eje x. Queremos saber cómo describir un fenómeno en el marco F (el cual es un hecho, como la explosión de un petardo) cuyas coordenadas son x, y, z y está sucediendo en el tiempo t según se observa en el marco F, usando las coordenadas x', y', z' y tiempo t' (figura 35.12).

En la forma clásica, esta transformación está dada por

$$\begin{aligned} x' &= x - vt \\ y' &= y \\ z' &= z \\ t' &= t. \end{aligned} \qquad (35.14)$$

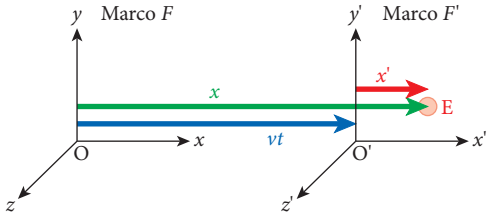


FIGURA 35.12 La transformación de Lorentz relaciona dos marcos de referencia que se desplazan a una velocidad constante v relativa con respecto a otro.

Esta transformación se conoce como la **transformación de Galileo**, que ya estudiamos en el capítulo 3 sobre movimiento en dos y tres dimensiones. Estas ecuaciones son correctas siempre y cuando v sea pequeña comparada con c. Hasta que no empezamos a hablar de la dilatación del tiempo, la última de estas ecuaciones parecía del todo trivial. Pero ahora ya no es el caso.

La transformación que es válida para todas las velocidades de magnitud v se llama **transformación de Lorentz** y la presentó por primera vez el físico holandés Hendrik Lorentz (1853-1928):

$$\begin{aligned} x' &= \gamma(x - vt) \\ y' &= y \\ z' &= z \\ t' &= \gamma(t - vx/c^2). \end{aligned} \tag{35.15}$$

También podemos construir la transformación inversa:

$$\begin{aligned} x &= \gamma(x' + vt') \\ y &= y' \\ z &= z' \\ t &= \gamma(t' + vx'/c^2). \end{aligned} \tag{35.16}$$

En el límite de velocidades pequeñas ($\gamma = 1$, $\beta = v/c = 0$), la transformación de Galileo se deduce de la transformación de Lorentz como caso especial, lo que se puede ver fácilmente. Sin embargo, en el caso de velocidades que no son pequeñas en comparación con la velocidad de la luz, la transformación de Lorentz incluye los efectos tanto de la dilatación del tiempo como de la contracción de la longitud.

DEDUCCIÓN 35.3 Transformación de Lorentz

Hay una polémica en curso sobre qué constituye la deducción "más sencilla" de la transformación de Lorentz. En este libro seguimos el trabajo de J. M. Lévy, quien publicó esta deducción en el *American Journal of Physics*, vol. 75, núm. 7 (2007), pp. 615-618. En esta deducción aprovechamos el hecho de que ya dedujimos el efecto de la contracción de la longitud (deducción 35.2).

Veamos la figura 35.12. Suponga que $y = y' = 0$, $z = z' = 0$ y describa el evento E en el marco F (con sistema de coordenadas x, y, z y tiempo t). La flecha verde de longitud x señala el vector de posición del evento E con respecto al origen O del marco F. Podemos usar la suma de vectores sencilla y determinar que la flecha verde $\overrightarrow{OE}$ es la suma de vectores

$$\overrightarrow{OE} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'E} \tag{i}$$

$\overrightarrow{OO'}$ es el vector del desplazamiento del origen del marco F' con respecto al origen de F y $\overrightarrow{O'E}$ es el vector del desplazamiento desde el origen de F' al evento E. Esta ecuación de la relación de vectores (i) es válida independientemente del marco desde el cual estamos evaluando nuestros resultados, y ahora todo lo que necesitamos hacer es expresar la ecuación (i) en ambos marcos.

Primero evaluemos la ecuación de la suma de vectores (i) en el marco F donde la longitud del vector $\overrightarrow{OE}$ es simplemente x y la longitud del vector $\overrightarrow{OO'}$ es vt. Como x' se mide en el marco F', al expresarla en el marco F, da como resultado una contracción de la longitud; es decir, en el marco F la longitud del vector $\overrightarrow{O'E}$ se puede expresar como x'/γ. Esto significa que en el marco F obtenemos para la ecuación de suma de vectores (i) la expresión

$$x = vt + x'/\gamma. \tag{ii}$$

Ahora efectuemos la misma tarea en el marco F' (cuyo sistema de coordenadas es x', y', z' y tiempo t'). En este marco determinamos que la longitud de $\overrightarrow{O'E}$ es x' y la longitud de $\overrightarrow{OO'}$ es vt'. Pero ahora el marco F se mueve en relación con el marco F', en reposo y, por lo tanto, x es la longitud que se contrajo en el marco F', de modo que la longitud de $\overrightarrow{OE}$ es x/γ en el marco F'. Por consiguiente, en F' evaluamos la ecuación de la suma de vectores (i) como

$$x/\gamma = vt' + x'. \tag{iii}$$

Ya casi está hecho, y todo lo que falta son algunas manipulaciones algebraicas. Primero podemos restar vt de ambos miembros de la ecuación (ii) y luego multiplicar ambos miembros por γ, lo que da como resultado

$$\gamma(x - vt) = x', \tag{iv}$$

que es la primera ecuación de la transformación de Lorentz (ecuación 35.15). Al multiplicar ambos miembros de la ecuación (iii) por γ obtenemos la primera ecuación de la transformación inversa de Lorentz (ecuación 35.16),

$$x = \gamma(x' + vt'). \tag{v}$$

Si luego sustituimos la expresión de x' de la ecuación (iv) en (v), tenemos

$$\begin{aligned} x &= \gamma(\gamma(x - vt) + vt') = \gamma^2(x - vt) + \gamma vt' \Rightarrow \\ x/\gamma^2 &= x - vt + vt'/\gamma \Rightarrow \\ -(1 - \gamma^{-2})x &= -vt + vt'/\gamma. \end{aligned}$$

Puesto que $\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$, se infiere que $\gamma^2 = 1/(1 - v^2/c^2)$ y, por lo tanto, $1 - \gamma^{-2} = v^2/c^2$. Esto origina

$$\begin{aligned} -xv^2/c^2 &= -vt + vt'/\gamma \\ -xv/c^2 &= -t + t'/\gamma \\ \gamma(t - xv/c^2) &= t', \end{aligned}$$

que reconocemos como la última ecuación en la transformación de Lorentz (ecuación 35.15).

35.3 Oportunidad de autoevaluación

Al sustituir x de la ecuación (v) de la deducción 35.3 en la ecuación (iv), uno es capaz de deducir la ecuación $t = \gamma(t' + vx'/c^2)$. ¿Puede mostrar cómo?

Invariantes

En una transformación de Lorentz entre marcos inerciales, cambia la coordenada a lo largo de la dirección del movimiento relativo de los dos marcos inerciales (escogida como coordenada x aquí), tal como lo hace el tiempo. Las dos coordenadas perpendiculares al vector velocidad del movimiento relativo (escogidas como coordenadas y y z aquí) siguen siendo las mismas en ambos marcos. Son **invariantes** bajo la transformación de Lorentz.

La pregunta es: ¿qué otras invariantes cinemáticas, si las hay, puede uno construir? En este punto no queremos abarcarlas todas, sino sólo enfocarnos en una, la cual hemos introducido ya antes. Esta invariante es el intervalo espacio-tiempo $s^2 = c^2\Delta t^2 - \Delta r^2$ de la ecuación 35.5.

35.6 Ejercicio en clase

¿Cuáles de los siguientes son invariables según la transformación clásica de Galileo de la ecuación 35.14? (¡Señale todo lo que aplica!)

a) x *c*) z

b) y *d*) t

DEDUCCIÓN 35.4 Invariancia de Lorentz de los intervalos espacio-tiempo

Necesitamos demostrar que el intervalo espacio tiempo es el mismo en marcos inerciales distintos. Es decir, requerimos demostrar que $s^2 = s'^2$. Como tenemos una expresión para s^2 en términos de las coordenadas, y puesto que sabemos cómo las coordenadas se modifican en una transformación de Lorentz, podemos construir nuestra demostración:

$$\begin{aligned} s'^2 &= c^2\Delta t'^2 - \Delta r'^2 \\ &= c^2\Delta t'^2 - \Delta x'^2 - \Delta y'^2 - \Delta z'^2 \\ &= c^2\gamma^2(\Delta t - v\Delta x/c^2)^2 - \gamma^2(\Delta x - v\Delta t)^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2 \\ &= c^2\gamma^2(\Delta t^2 - 2v\Delta x\Delta t/c^2 + v^2\Delta x^2/c^4) - \gamma^2(\Delta x^2 - 2v\Delta x\Delta t + v^2\Delta t^2) - \Delta y^2 - \Delta z^2. \end{aligned}$$

En el segundo paso simplemente reemplazamos $\Delta r'^2$ por la suma de los cuadrados de los componentes. En el tercer paso aplicamos la transformación de Lorentz a cada intervalo de coordenadas, y en el cuarto paso evaluamos los términos cuadrados. Ya podemos multiplicar los paréntesis y simplificar los términos semejantes:

$$\begin{aligned} s'^2 &= c^2\gamma^2\Delta t^2 \underline{-2v\gamma^2\Delta x\Delta t} + v^2\gamma^2\Delta x^2/c^2 - \gamma^2\Delta x^2 \underline{+2v\gamma^2\Delta x\Delta t} - v^2\gamma^2\Delta t^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2 \\ &= c^2\gamma^2\Delta t^2 + v^2\gamma^2\Delta x^2/c^2 - \gamma^2\Delta x^2 - v^2\gamma^2\Delta t^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2 \\ &= c^2\Delta t^2(\gamma^2 - v^2\gamma^2/c^2) - \Delta x^2(\gamma^2 - v^2\gamma^2/c^2) - \Delta y^2 - \Delta z^2. \end{aligned}$$

(*continúa*)

(*continuación*)

Hemos subrayado los términos que se anulan en el primer renglón. Ahora necesitamos evaluar

$$\gamma^2 - v^2\gamma^2/c^2 = \frac{1}{1-v^2/c^2} - \frac{v^2/c^2}{1-v^2/c^2} = \frac{1-v^2/c^2}{1-v^2/c^2} = 1.$$

Al utilizar esta identidad, determinamos el intervalo espacio-tiempo:

$$\begin{aligned} s'^2 &= c^2\Delta t^2 \underbrace{(\gamma^2 - v^2\gamma^2/c^2)}_{1} - \Delta x^2 \underbrace{(\gamma^2 - v^2\gamma^2/c^2)}_{1} - \Delta y^2 - \Delta z^2 \\ &= c^2\Delta t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2 \\ &= c^2\Delta t^2 - \Delta r^2 \\ &= s^2. \end{aligned}$$

En realidad encontramos que $s^2 = s'^2$, lo cual significa que el intervalo espacio-tiempo es invariante bajo la transformación de Lorentz.

En las secciones siguientes se introducen otras invariantes.

35.6 Transformación relativista de la velocidad

Volvamos al problema que tratamos en la sección 35.2. Suponga que usted va por el espacio directamente a la Tierra en un cohete a una velocidad de $c/2$ y manda un rayo láser hacia adelante. Ingenuamente, podríamos esperar que la luz del láser tuviera una velocidad de $c + (c/2) = 1.5c$ cuando es observada en la Tierra. Esta observación proviene de la fórmula de suma de velocidades del capítulo 3, $\vec{v}_{pg} = \vec{v}_{ps} + \vec{v}_{sg}$. Aquí, los subíndices p, g y s se refieren al proyectil (luz, en este caso), al suelo y a la nave espacial. Sin embargo, de acuerdo con Einstein, la velocidad de la luz del láser es c en el cohete o en el marco de referencia de la Tierra.

Como el resultado en el que se usó la fórmula de suma de velocidades clásica contradice el postulado de que ninguna velocidad es mayor que c, claramente requerimos presentar una nueva fórmula para sumar velocidades de manera correcta. Restringiremos el uso de la fórmula de **suma relativista de la velocidad** al movimiento unidimensional de los dos marcos relacionados entre sí en las direcciones x positiva o negativa. Si la velocidad de un objeto es $\vec{u} = (u_x, u_y, u_z)$ en el marco F, y si el marco F' se desplaza a una velocidad $\vec{v} = (v, 0, 0)$ con respecto al marco F, entonces la velocidad $\vec{u}' = (u'_x, u'_y, u'_z)$ de ese objeto en el marco F' es

$$\begin{aligned} u'_x &= \frac{u_x - v}{1 - \dfrac{vu_x}{c^2}} \\ u'_y &= \frac{u_y/\gamma}{1 - \dfrac{vu_x}{c^2}} \\ u'_z &= \frac{u_z/\gamma}{1 - \dfrac{vu_x}{c^2}}. \end{aligned} \tag{35.17}$$

La transformación inversa a partir del marco F' en el marco F está dada por

$$\begin{aligned} u_x &= \frac{u'_x + v}{1 + \dfrac{vu'_x}{c^2}} \\ u_y &= \frac{u'_y/\gamma}{1 + \dfrac{vu'_x}{c^2}} \\ u_z &= \frac{u'_z/\gamma}{1 + \dfrac{vu'_x}{c^2}}. \end{aligned} \tag{35.18}$$

Hemos restringido todo el movimiento a las direcciones en x positiva y negativa, justo como se hizo para llegar a la fórmula para la transformación de Lorentz. No obstante, $\vec{u}$, $\vec{u}'$ y $\vec{v}$ son vectores y pueden tener valores positivos y negativos, lo que depende de la situación particular en la que se apliquen estas ecuaciones de la transformación. Además, estas fórmulas también se usan para sumar y restar dos velocidades en forma correcta.

DEDUCCIÓN 35.5 Transformación de la velocidad

Para ver cómo una velocidad se transforma de un marco en otro, podemos iniciar con la transformación de Lorentz, la cual nos dice cómo se transforman las coordenadas espaciales y el tiempo. Luego podemos obtener la derivada del tiempo de la coordenada x, la cual nos da la componente de la velocidad en la dirección del movimiento relativo de los dos marcos uno con respecto al otro (a esta velocidad la denominamos u porque ya utilizamos el símbolo v para la velocidad de los marcos relacionados entre sí):

$$u'_x = \frac{dx'}{dt'} = \frac{\gamma(dx - v\,dt)}{\gamma(dt - v\,dx/c^2)}.$$

Todo lo que hemos hecho hasta este momento es expresar las diferenciales dx' y dt' en el marco F, con la ayuda de la transformación de Lorentz de la ecuación 35.15. Ahora cancelamos el factor de γ en el numerador y en el denominador, y obtenemos

$$u'_x = \frac{dx - v\,dt}{dt - v\,dx/c^2} = \frac{\dfrac{dx}{dt} - v}{1 - \dfrac{v}{c^2}\dfrac{dx}{dt}}.$$

Al sustituir $u_x = dx/dt$, llegamos a la transformación de la velocidad para la componente longitudinal (la componente a lo largo de la dirección del movimiento relativo entre los dos marcos):

$$u'_x = \frac{u_x - v}{1 - \dfrac{v u_x}{c^2}}.$$

Ahora podemos efectuar un ejercicio similar para las componentes transversales, es decir, las del vector velocidad perpendicular a la dirección del movimiento relativo entre los dos marcos. Ahora mostramos esto explícitamente para la dirección y, pero la dirección z sigue los mismos razonamientos. Una vez más obtenemos la derivada y aplicamos la transformación de Lorentz a los diferenciales, reconociendo que $dy' = dy$:

$$u'_y = \frac{dy'}{dt'} = \frac{dy}{\gamma(dt - v\,dx/c^2)}.$$

Al dividir el numerador y el denominador entre dt, entonces llegamos al resultado deseado:

$$u'_y = \frac{\dfrac{dy}{dt}}{\gamma\left(1 - \dfrac{v}{c^2}\dfrac{dx}{dt}\right)} = \frac{u_y/\gamma}{1 - \dfrac{v u_x}{c^2}}.$$

35.4 Oportunidad de autoevaluación

Empiece con $u_x = dx/dt$, utilice la transformación de Lorentz inversa y demuestre que llega a

$$u_x = \frac{u'_x + v}{1 + \dfrac{v u'_x}{c^2}}.$$

Tenga en cuenta que en el límite las velocidades son pequeñas en comparación con la velocidad de la luz, $|v| \ll c$ y $|u| \ll c$, el término vu_x/c^2 en el denominador de nuestra ecuación de la transformación de la velocidad se vuelve pequeño comparado con 1, y γ tiende a 1 de modo que las ecuaciones 35.17 y 35.18 se aproximan al límite clásico de $u'_x = u_x - v$ y $u_x = u'_x + v$, $u'_y = u_y$ y $u'_z = u_z$.

Regresamos a nuestro ejemplo: ahora usted puede ver que $u' = c$ "más" $v = c/2$ no da $1.5c$, sino

$$u = \frac{u' + c/2}{1 + \dfrac{u'c/2}{c^2}} = \frac{c + c/2}{1 + \dfrac{cc/2}{c^2}} = c.$$

35.7 Ejercicio en clase

Hemos visto que la suma real de dos velocidades positivas compatible con la relatividad es menor que la resultante de la suma de velocidades clásica. ¿Qué pasa con respecto a las diferencias de velocidad? Suponga que dos vectores de velocidad $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$ apuntan en la dirección positiva x. Nombre a la velocidad relativa entre los dos $\vec{v}_r$. ¿Qué de lo siguiente es correcto?

a) $|\vec{v}_r|_{\text{clásica}} < |\vec{v}_r|_{\text{relativista}}$

b) $|\vec{v}_r|_{\text{clásica}} = |\vec{v}_r|_{\text{relativista}}$

c) $|\vec{v}_r|_{\text{clásica}} > |\vec{v}_r|_{\text{relativista}}$

d) Pueden ser *a)* o *c)*, lo que depende de cuál de las dos velocidades $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$ es más grande.

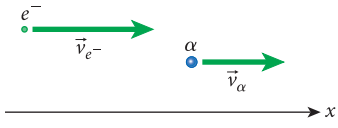


FIGURA 35.13 Un electrón supera una partícula alfa.

Por lo tanto, este análisis concluye lo correcto. ¡La velocidad de la luz es la misma en todos los marcos de referencia! Por consiguiente, las ecuaciones 35.17 y 35.18 tienen el límite clásico apropiado y al mismo tiempo cumplen con los postulados de la relatividad especial.

PROBLEMA RESUELTO 35.2 Partículas en un acelerador

Suponga que tiene un electrón y una partícula alfa (el núcleo de un átomo de helio) que se desplazan a través de un trozo de tubo para haces en el interior de un acelerador de partículas. Las partículas viajan en la misma dirección. La velocidad del electrón es de $0.830c$ y la velocidad de la partícula alfa es de $0.750c$, ambas medidas por un observador estacionario en el laboratorio.

PROBLEMA

¿Cuál es la velocidad de la partícula alfa según se observa desde el electrón, en unidades de la velocidad de la luz?

SOLUCIÓN

PIENSE

El electrón está rebasando la partícula alfa porque es más rápido, según las mediciones realizadas por el observador estacionario en el laboratorio. Uno se vería tentado a hacer construcciones de la clase $\vec{v}_1 - \vec{v}_2$. Sin embargo, como ya tenemos la transformación de la velocidad relativista, es más fácil plantear este problema de esta manera. Suponga que todas las velocidades dadas ocurren en la dirección positiva x. Todo lo que necesitamos hacer es ser cuidadosos con las velocidades que nosotros identificamos como v, u_x y u'_x. Luego podemos aplicar la ecuación 35.17 o la ecuación 35.18 para hallar la respuesta.

ESBOCE

En la figura 35.13 se ha hecho un esquema del electrón cuando va a rebasar a la partícula alfa.

INVESTIGUE

Tenemos dos marcos de referencia: nuestro marco original F cuyo origen está en la Tierra y nuestro marco F' con origen en el electrón, que se mueve a una velocidad constante v con respecto al laboratorio.

Este problema de determinar la velocidad u'_x de la partícula alfa en el marco del electrón se relaciona con la transformación relativista de las velocidades, donde la velocidad u_x de la partícula alfa en el marco del laboratorio ya se conoce. Podemos aplicar la ecuación 35.17 para alcanzar nuestro objetivo de determinar

$$u'_x = \frac{u_x - v}{1 - \dfrac{vu_x}{c^2}}.$$

SIMPLIFIQUE

No hay mucho que simplificar en este caso. La mayor parte del trabajo era definir qué cantidad se mide en qué marco y cuál es la velocidad relativa correcta de los marcos.

CALCULE

Al sustituir los valores numéricos tenemos

$$u'_x = \frac{u_x - v}{1 - \dfrac{vu_x}{c^2}} = \frac{0.750c - 0.830c}{1 - \dfrac{(0.830c)(0.750c)}{c^2}} = -0.2119205c.$$

REDONDEE

Mostramos nuestro resultado con tres cifras:

$$u'_x = -0.212c$$

VUELVA A REVISAR

El signo negativo de la velocidad de la partícula alfa, según lo ve el electrón, tiene sentido porque se vería que la partícula alfa se está aproximando al electrón en la dirección x negativa.

Si calculamos desde el punto de vista no relativista la velocidad relativa entre el electrón y la partícula alfa, obtenemos

$$v_{\text{rel}} = v_{\text{alfa}} - v_{\text{electrón}} = 0.750c - 0.830c = -0.080c.$$

Al examinar nuestra solución podemos ver que la diferencia no relativista de la velocidad está modificada por un factor de $|1/(1 - u_x v/c^2)|$. Puesto que las velocidades del electrón y de la partícula alfa se vuelven una fracción notable de la velocidad de la luz, este factor se vuelve más grande que 1, y la magnitud de la diferencia de la velocidad relativista será mayor que la magnitud de la diferencia no relativista. Por consiguiente, nuestro resultado parece razonable.

35.7 Cantidad de movimiento y energía relativista

Longitud, tiempo y velocidad no son los únicos conceptos que necesitan revisarse dentro de la teoría de la relatividad especial. También la energía y la cantidad de movimiento requieren una revisión. Nos guiamos una vez más por el principio de que las leyes físicas deben ser invariables en la transformación de un marco en otro, y que en el caso de velocidades pequeñas comparadas con la velocidad de la luz, debemos, una vez más, recuperar las relaciones clásicas deducidas antes en los capítulos de mecánica.

Cantidad de movimiento

Desde el punto de vista clásico, la cantidad de movimiento o impulso se define como el producto de la velocidad por la masa: $\vec{p} = m\vec{v}$. Como ahora ya sabemos que la velocidad de un objeto no puede ser superior a c, este resultado significa que la definición de cantidad de movimiento tiene que ser modificada o es posible una cantidad de movimiento máxima para una partícula dada. Resulta que la primera posibilidad es la correcta.

La definición de cantidad de movimiento que es compatible con la teoría de la relatividad especial es

$$\vec{p} = \gamma\, m\vec{u}, \tag{35.19}$$

donde m es la **masa en reposo** de la partícula (la masa medida en un marco en el que la partícula está en reposo), $\vec{u}$ es la velocidad de la partícula en algún marco, $\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}$, y $\vec{p}$ es la cantidad de movimiento de la partícula en el marco. La ecuación 35.19 es válida sólo para partículas cuya masa $m > 0$. En esta misma sección se tratan partículas sin masa. (Por desgracia, en muchos textos viejos usan la noción de *masa relativista*, γm. En la actualidad casi todo el mundo rechaza esta noción. Ahora se considera que la masa es invariante, es decir, independiente de la velocidad a la cual el objeto se desplaza en un marco particular de referencia.)

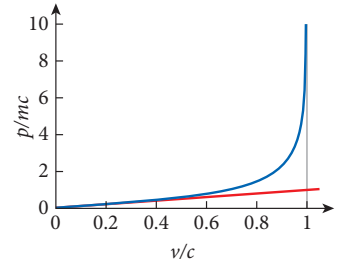


FIGURA 35.14 La cantidad de movimiento en función de la velocidad. Línea azul: fórmula exacta; línea roja: aproximación no relativista.

En la figura 35.14 se comparan las dos fórmulas para la cantidad de movimiento. Lo azul muestra la fórmula correcta, y lo rojo, la aproximación clásica. La velocidad se muestra en unidades de c y la cantidad de movimiento en unidades de mc. Hasta velocidades de aproximadamente $c/2$, las dos fórmulas dan más o menos el mismo resultado, pero luego la cantidad de movimiento relativista correcta se va hasta el infinito cuando v se aproxima a c.

La segunda ley de Newton no se tiene que modificar en el límite relativista. Sigue siendo

$$\vec{F}_{\text{neta}} = \frac{d}{dt}\vec{p}, \tag{35.20}$$

donde $\vec{p}$ es la cantidad de movimiento relativista.

Energía

Si la cantidad de movimiento necesita un cambio de definición, es de esperarse que también la energía requiera una revisión.

En nuestras consideraciones no relativistas, encontramos que la energía total de una partícula a falta de un potencial externo es justo su energía cinética, $K = \frac{1}{2}mv^2$. En el caso relativista, vemos que tenemos que considerar la contribución de la masa a la energía de una partícula. Einstein determinó que la energía de una partícula con masa m en reposo es:

$$E_0 = mc^2. \tag{35.21}$$

(¡Sin duda, la fórmula más famosa de toda la ciencia!)

Si la partícula está en movimiento, entonces la energía aumenta en un factor γ por el cual el tiempo se dilata en el caso de una partícula en movimiento. El caso general para la energía es entonces

$$E = \gamma E_0 = \gamma mc^2. \tag{35.22}$$

La fórmula correcta para la energía cinética se obtiene al sustraer la "energía en reposo" de la energía total:

$$K = E - E_0 = (\gamma - 1)E_0 = (\gamma - 1)mc^2. \tag{35.23}$$

La fórmula clásica para la energía cinética funciona para nosotros a velocidades pequeñas comparadas con la velocidad de la luz. Entonces, ¿cómo podemos recuperar la aproximación clásica $K = \frac{1}{2}mv^2$ del resultado relativista general?

En realidad, este resultado es muy directo porque para velocidades pequeñas ya determinamos que $\gamma = 1 + \frac{1}{2}\beta^2 = 1 + \frac{1}{2}v^2/c^2$. Podemos sustituir esta fórmula en la fórmula de la energía cinética y obtener

$$K_{\text{pequeña } v} = (\gamma - 1)mc^2 \approx (1 + \tfrac{1}{2}v^2/c^2 - 1)mc^2 = \tfrac{1}{2}mv^2. \tag{35.24}$$

DEDUCCIÓN 35.6 Energía

Regresemos al teorema del trabajo y la energía cinética y calculemos las consecuencias de usar la transformación de Lorentz. Para simplificar, usamos un caso unidimensional con movimiento sólo a lo largo de la dirección x. Por definición, introducimos el trabajo como la integral de la fuerza,

$$W = \int_{x_0}^{x} F dx = \int_{x_0}^{x} \frac{dp}{dt} dx.$$

Aquí queremos suponer que x_0 es la coordenada en $t = 0$, y que la partícula tiene una velocidad 0 y, por lo tanto, 0 energía cinética en $t = 0$. Podemos calcular dp/dt mediante la ecuación 35.19 y obtenemos la derivada del tiempo,

$$\frac{dp}{dt} = \frac{d}{dt}(\gamma mv) = \frac{d}{dt}\left(\frac{mv}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\right) = \frac{m}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\frac{dv}{dt} + (-\tfrac{1}{2})(-2v/c^2)\frac{mv}{(1 - v^2/c^2)^{3/2}}\frac{dv}{dt}$$

$$= \left(\frac{m(1 - v^2/c^2)}{(1 - v^2/c^2)^{3/2}} + \frac{mv^2/c^2}{(1 - v^2/c^2)^{3/2}}\right)\frac{dv}{dt} = \frac{m}{(1 - v^2/c^2)^{3/2}}\frac{dv}{dt},$$

donde hemos usado el producto y las reglas de la cadena de la derivación. Podemos insertar este resultado en la integral anterior para el trabajo. Mediante la sustitución de variables $dx = vdt$, tenemos que

$$W = \int_0^t \frac{m}{(1 - v^2/c^2)^{3/2}}\frac{dv}{dt} v dt = \int_0^v \frac{mv dv}{(1 - v^2/c^2)^{3/2}}.$$

Al evaluar la integral, llegamos a

$$W = \left.\frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\right|_0^v = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - mc^2 = (\gamma - 1)mc^2.$$

Puesto que el teorema del trabajo y la energía cinética (vea el capítulo 5) establece que $W = \Delta K$, y como en este caso empezamos con una energía cinética 0, entonces:

$$K = (\gamma - 1)mc^2,$$

que es el resultado de la ecuación 35.23. Asimismo, vemos que, a partir de esta integración, el término mc^2 surge de la contribución de $v = 0$ y, por consiguiente, puede ser identificada como la energía en reposo de la ecuación 35.21.

Relación cantidad de movimiento-energía

En el límite clásico, determinamos que la energía cinética y la cantidad de movimiento de un objeto están relacionadas mediante $K = p^2/2m$. Por lo tanto, es aceptable preguntar cuál es la relación general correcta entre energía y cantidad de movimiento. Con $E = \gamma mc^2$ y $\vec{p} = \gamma m\vec{v}$ como punto de partida, tenemos

$$E^2 = p^2c^2 + m^2c^4. \tag{35.25}$$

DEDUCCIÓN 35.7 Relación energía-cantidad de movimiento

Iniciamos con nuestras ecuaciones para cantidad de movimiento y energía, y elevamos al cuadrado cada una de ellas:

$$\vec{p} = \gamma m\vec{v} \Rightarrow p^2 = \gamma^2 m^2 v^2$$
$$E = \gamma mc^2 \Rightarrow E^2 = \gamma^2 m^2 c^4.$$

El cuadrado del factor relativista gamma está en ambas ecuaciones. Expresada en términos de v y c, es

$$\gamma^2 = \frac{1}{1-\beta^2} = \frac{1}{1-v^2/c^2} = \frac{c^2}{c^2-v^2}.$$

Ahora podemos calcular la expresión para el cuadrado de la energía y obtenemos

$$E^2 = \frac{c^2}{c^2-v^2}m^2c^4 = \frac{c^2-v^2+v^2}{c^2-v^2}m^2c^4 = m^2c^4 + \frac{v^2}{c^2-v^2}m^2c^4$$
$$= m^2c^4 + \frac{c^2}{c^2-v^2}m^2v^2c^2 = m^2c^4 + \gamma^2m^2v^2c^2$$
$$= m^2c^4 + p^2c^2.$$

En el segundo paso de este cálculo, simplemente añadimos y restamos v^2 en el numerador, luego nos damos cuenta de que podríamos partir el numerador de tal manera que el factor $c^2 - v^2$ cancelaría justamente el denominador. En el siguiente paso, reacomodamos los factores en el segundo término de la suma, de modo que podríamos factorizar γ otra vez y finalmente reconoceríamos que $\gamma^2m^2v^2 = p^2$, lo cual nos da el resultado deseado.

La relación anterior energía-cantidad de movimiento se presenta a menudo en la forma de su raíz cuadrada,

$$E = \sqrt{p^2c^2 + m^2c^4}. \tag{35.26}$$

Observe también que la ecuación 35.25 se puede volver a escribir en la forma:

$$E^2 - p^2c^2 = m^2c^4. \tag{35.27}$$

La masa m de una partícula es una invariante escalar, y la velocidad de c en el vacío también es invariante, de modo que de esta simple reescritura se infiere que $E^2 - p^2c^2$ es una invariante, así como el intervalo espacio-tiempo $s^2 = c^2\Delta t^2 - \Delta r^2$ es una invariante.

Un caso especial de la ecuación 35.27 es importante para las partículas con masa cero. (Los fotones, la representación de la partícula subatómica de toda la radiación, sin olvidar la luz visible, son ejemplos de partículas sin masa.) Si una partícula tiene $m = 0$, entonces la relación energía-cantidad de movimiento se simplifica mucho y la cantidad de movimiento se vuelve proporcional a la energía:

$$E = pc \quad (\text{para } m = 0). \tag{35.28}$$

Velocidad, energía y cantidad de movimiento

En el caso de las partículas con $m > 0$, al dividir el valor absoluto de la cantidad de movimiento $p = \gamma mv$ entre la energía $E = \gamma mc^2$ se tiene

$$\frac{p}{E} = \frac{\gamma mv}{\gamma mc^2} = \frac{v}{c^2} \Rightarrow v = \frac{pc^2}{E}$$

o bien, de manera equivalente,

$$\beta = \frac{v}{c} = \frac{pc}{E}. \tag{35.29}$$

Con frecuencia esta fórmula es muy útil para determinar el factor relativista β a partir de la energía conocida y de la cantidad de movimiento de una partícula. Sin embargo, también proporciona otra relación energía-cantidad de movimiento que es útil en la práctica:

$$\beta = \frac{pc}{E} \Rightarrow p = \frac{\beta E}{c} \quad \text{o} \quad E = \frac{pc}{\beta}. \tag{35.30}$$

EJEMPLO 35.4 Electrón a 0.99*c*

Hemos visto que en algunas aplicaciones es una ventaja usar la unidad de energía electrón-volt (eV), 1 eV = $1.602 \cdot 10^{-19}$ J. La energía en reposo de un electrón es $E_0 = 5.11 \cdot 10^5$ eV = 0.511 MeV, y su masa en reposo es $m = 0.511\ \text{MeV}/c^2$.

PROBLEMA

Si un electrón va a una velocidad de 99.0% de la de la luz, ¿cuál es su energía total, energía cinética y cantidad de movimiento?

SOLUCIÓN

Primero calculamos γ para este caso:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-(0.990)^2}} = 7.09.$$

La energía total de una partícula es

$$E = \gamma E_0 = 7.09(0.511\ \text{MeV}) = 3.62\ \text{MeV}.$$

Por lo tanto, la energía cinética es

$$K = (\gamma - 1)E_0 = 6.09(0.511\ \text{MeV}) = 3.11\ \text{MeV}.$$

La cantidad de movimiento de este electrón es entonces

$$p = \frac{\beta E}{c} = \frac{(0.990)(3.62\ \text{MeV})}{c} = 3.58\ \text{MeV}/c.$$

Es interesante hacer notar que podemos acelerar los electrones a 99% de la velocidad de la luz con aceleradores muy pequeños, los cuales se pueden acomodar en los laboratorios de física de un edificio convencional. No obstante, ir más arriba de 0.99*c* es muy caro. Para obtener electrones a 99.9999999% de la velocidad de la luz requiere un acelerador gigante de partículas. El acelerador lineal de SLAC en Stanford, de más de 3 km de largo, es una de tales máquinas.

De la ecuación $E = mc^2$ se infiere que la energía y la masa están relacionadas y que se pueden convertir entre ellas. En la clase de química habrá escuchado la expresión "conservación de la masa", lo cual quiere decir que en las reacciones químicas entre diferentes moléculas tiene que seguir siendo la misma cantidad de átomos de cada tipo. Pero esto es meramente un instrumento de contabilidad, y no una ley de conservación rigurosa. Las leyes de conservación de energía y cantidad de movimiento todavía se mantienen en la cinemática relativista, pero la masa total en una reacción *no* se conserva exactamente. En particular, este hecho es evidente en el decaimiento de las partículas, y el ejemplo 35.5 examina uno de tales casos.

EJEMPLO 35.5 Decaimiento del kaón

El kaón neutro es una partícula que decae en un pión positivo y un pión negativo:

$$K^0 \rightarrow \pi^+ + \pi^-.$$

En el capítulo 39 se estudiarán en forma más minuciosa las partículas, pero las propiedades cinemáticas del decaimiento de las partículas se pueden entender sólo a partir de los principios de la relatividad.

PROBLEMA

¿Cuál es la energía cinética de cada uno de los dos piones después del decaimiento del kaón? La masa del kaón neutro es de 497.65 MeV/c^2 y las masas de los piones negativo y positivo son de 139.57 MeV/c^2 cada uno. Suponga que el kaón neutro está en reposo antes de que ocurra el decaimiento.

SOLUCIÓN

La cantidad de movimiento y la energía se conservan en este decaimiento. La cantidad de movimiento antes y después del decaimiento del kaón es cero. Entonces,

$$\vec{p}_{\pi^+} + \vec{p}_{\pi^-} = 0.$$

Por lo consiguiente, las magnitudes de las cantidades de movimiento de los dos piones son las mismas. Como las masas de los dos piones cargados también son las mismas, las energías cinéticas de los dos piones después del decaimiento tienen que ser las mismas:

$$K_{\pi^+} = K_{\pi^-} = K,$$

donde K es la energía cinética de cada pión después del decaimiento. La energía total del kaón antes del decaimiento es

$$E = m_{K^0}c^2,$$

porque el kaón está en reposo. Después del decaimiento, la energía es

$$E = E_{\pi^+} + E_{\pi^-} = \left(m_{\pi^+}c^2 + K_{\pi^+}\right) + \left(m_{\pi^-}c^2 + K_{\pi^-}\right).$$

Conservación de la energía significa que la energía total antes y después del decaimiento es la misma:

$$m_{K^0}c^2 = \left(m_{\pi^+}c^2 + K_{\pi^+}\right) + \left(m_{\pi^-}c^2 + K_{\pi^-}\right).$$

Podemos reacomodar esta ecuación para obtener

$$m_{K^0}c^2 - m_{\pi^+}c^2 - m_{\pi^-}c^2 = K_{\pi^+} + K_{\pi^-} = 2K,$$

hay que recordar que la energía cinética de la π^+ y de la π^- son iguales. Al determinar la energía cinética de cada pión, tenemos

$$K = \frac{m_{K^0}c^2 - m_{\pi^+}c^2 - m_{\pi^-}c^2}{2}.$$

Al sustituir los valores en las masas dadas en el texto del problema, nos lleva al resultado

$$K = \tfrac{1}{2}(497.65\ \text{MeV} - 139.57\ \text{MeV} - 139.57\ \text{MeV}) = 109.26\ \text{MeV}.$$

Observe que para el decaimiento de un kaón en reposo, la energía cinética completa de los dos piones, los cuales son producto del decaimiento, proviene de la diferencia de masa entre el kaón y la suma de los dos piones.

La posibilidad de convertir masa en energía se aplica en las reacciones de fisión nuclear, donde los núcleos atómicos pesados se rompen en partes más pequeñas, y al hacerlo liberan una gran cantidad de energía cinética, la cual a su vez es transformada en calor y, finalmente, en energía eléctrica. Ésta es la base de la industria de la energía nuclear y se trata con lujo de detalles en el capítulo 40 sobre física nuclear. Ahí también nos ocuparemos de la fusión nuclear, la cual se basa en la misma relación masa-energía y es la que da energía a la mayoría de las estrellas; esperamos que pronto haya reactores de fusión en el mercado para generar energía eléctrica.

Transformación de Lorentz

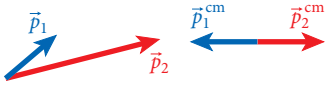
La deducción 35.3 demostró que el vector de posición $\vec{r}$ y t en algún marco F se puede expresar en otro marco F' como vector de posición $\vec{r}\,'$ y tiempo t' mediante la transformación de Lorentz. ¿Qué hay con respecto a la cantidad de movimiento y la energía?

En la ecuación 35.19, el vector de la cantidad de movimiento se define como $\vec{p} = \gamma\, m\vec{u}$. A partir de esto se dedujo la ecuación 35.22 para la energía, $E = \gamma mc^2$. Las velocidades se transforman de un marco a otro usando la ecuación 35.17 mediante la relación $u'_x = (u_x - v)/(1 - vu_x/c^2)$. Por lo tanto, la transformación de Lorentz de la cantidad de movimiento y energía se puede escribir como

$$\begin{aligned} p'_x &= \gamma(p_x - vE/c^2) \\ p'_y &= p_y \\ p'_z &= p_z \\ E' &= \gamma(E - vp_x). \end{aligned} \tag{35.31}$$

Dejamos la demostración de esta relación como un ejercicio al final del capítulo. Con la ayuda de esta transformación de Lorentz, uno puede demostrar que $E^2 - p^2c^2 = E'^2 - p'^2c^2$, es decir, que $E^2 - p^2c^2$ es una invariante de Lorentz. Esta demostración funciona en completa analogía con la deducción 35.4 y también se deja como un ejercicio al final del capítulo.

Colisiones de dos cuerpos



a) *b*)

FIGURA 35.15 Vectores de cantidad de movimiento de las dos partículas en dos distintos marcos inerciales. *a*) Marco arbitrario; *b*) marco centro de masa.

Pensar en las transformaciones e invariantes de Lorentz ayuda a enfrentarse con problemas muy comunes en la cinemática relativista, aquellos de las colisiones de dos cuerpos. Ya establecimos que $E^2 - p^2c^2$ es una invariante de Lorentz. Esta definición se puede generalizar a las energías y vectores de cantidad de movimiento de dos partículas, según se observa en un cierto marco (figura 35.15). (Usamos los subíndices 1 y 2 para indicar la partícula individual.) Es común introducir la cantidad S como

$$S \equiv (E_1 + E_2)^2 - (\vec{p}_1 + \vec{p}_2)^2 c^2, \tag{35.32}$$

donde E_1, $\vec{p}_1$ son la energía total y la cantidad de movimiento de la partícula 1, y E_2, $\vec{p}_2$ son la energía total y la cantidad de movimiento de la partícula 2. Puesto que $E^2 - p^2c^2$ es una invariante de Lorentz, así lo es S. Entonces somos libres de transformar lo que observamos en un marco, en el cual sea más fácil de evaluar. La sección sobre las colisiones de dos cuerpos del capítulo 8 mostró que un marco conveniente es el marco centro de masa. Denotamos las cantidades en este marco con el superíndice cm. En el capítulo 8 ya determinamos que, en este marco, los dos vectores de cantidad de movimiento de las dos partículas son exactamente iguales en magnitud, pero opuestos en dirección, $\vec{p}_1^{\,cm} = -\vec{p}_2^{\,cm}$. Al evaluar S en este marco, vemos que

$$S = (E_1^{cm} + E_2^{cm})^2 - (\underbrace{\vec{p}_1^{\,cm} + \vec{p}_2^{\,cm}}_{0})^2 c^2 = (E_1^{cm} + E_2^{cm})^2.$$

Esto muestra el significado físico de S: la raíz cuadrada de S es igual a la suma de las energías de las dos partículas. Es decir, es la energía total disponible en el marco centro de masa

$$\sqrt{S} = E_1^{cm} + E_2^{cm}. \tag{35.33}$$

Entonces, $\sqrt{S}$ proporciona información sobre la energía máxima que se puede utilizar para procesos físicos en las colisiones de dos cuerpos. Como la energía de cada una de las dos partículas también se puede expresar como la suma de la energía cinética más la energía de la masa, esta relación se puede escribir asimismo como

$$\sqrt{S} = K_1^{cm} + m_1c^2 + K_2^{cm} + m_2c^2.$$

Por cuestiones prácticas, el otro de los dos marcos inerciales más interesantes, además del marco centro de masa, es el marco del laboratorio. El ejemplo siguiente muestra relaciones útiles entre los dos marcos.

EJEMPLO 35.6 Colisionadores comparados con aceleradores de blanco fijo

Suponga que desea hacer que colisionen dos protones con el objeto de producir nuevas partículas. Dos clases de aceleradores tienen la capacidad de realizar lo anterior. En uno, usted puede tener un protón en reposo en el laboratorio y disparar el otro contra el primero con algo de energía cinética. Éste es un esquema de acelerador con blanco fijo. Una forma más complicada de producir las colisiones es acelerar los dos protones a la misma energía cinética, hacerlos que se desplacen en direcciones opuestas y colisionen uno contra otro. Esta técnica

requiere mucha más precisión, pero tiene un enorme beneficio si se necesitan energías de centro de masa.

PROBLEMA

El colisionador relativista de iones pesados (RHIC, del inglés *relativistic heavy ion collider*), en el Brookhaven National Laboratory, es capaz de producir haces de protones de 250 GeV de energía cinética cada uno y desplazarlos en direcciones opuestas. ¿Qué energía cinética se requeriría para que un acelerador de blanco fijo alcanzara la misma energía de centro de masa?

SOLUCIÓN

La masa en reposo del protón es $m_p = 0.938\ \text{GeV}/c^2$. Es pequeña si se le compara con la energía cinética en este problema, pero todavía no queremos ignorarla. De esta manera llegaremos a una fórmula que es aplicable a todas las energías de los haces.

En el marco del centro de masa, la energía total disponible es ($m_1 = m_2 = m_p$ y $K_1^{cm} = K_2^{cm} \equiv K^{cm}$):

$$S = (2K^{cm} + 2m_p c^2)^2. \tag{i}$$

En el marco del laboratorio, que usa el acelerador de blanco fijo, podemos empezar a partir de la ecuación 35.32, que, naturalmente, es válida en todos los marcos inerciales, y evaluar

$$\begin{aligned} S &= (E_1^{lab} + E_2^{lab})^2 - (\vec{p}_1^{\,lab} + \vec{p}_2^{\,lab})^2 c^2 \\ &= (E_1^{lab})^2 + 2E_1^{lab}E_2^{lab} + (E_2^{lab})^2 - (\vec{p}_1^{\,lab})^2 c^2 - 2(\vec{p}_1^{\,lab} \bullet \vec{p}_2^{\,lab})c^2 - (\vec{p}_2^{\,lab})^2 c^2 \\ &= \left[(E_1^{lab})^2 - (\vec{p}_1^{\,lab})^2 c^2\right] + \left[(E_2^{lab})^2 - (\vec{p}_2^{\,lab})^2 c^2\right] + 2E_1^{lab}E_2^{lab} - 2(\vec{p}_1^{\,lab} \bullet \vec{p}_2^{\,lab})c^2. \end{aligned}$$

Los términos que están dentro de los corchetes son las energías invariantes al cuadrado de la masa del protón, en cada caso. Al sustituir los términos de los corchetes de la ecuación 35.27, tenemos

$$S = 2m_p^2 c^4 + 2E_1^{lab}E_2^{lab} - 2(\vec{p}_1^{\,lab} \bullet \vec{p}_2^{\,lab})c^2.$$

Uno de los protones, el protón 1, por ejemplo, está en reposo ($\vec{p}_1^{\,lab} = 0$, $E_1^{cm} = m_p c^2$). Esto elimina el producto escalar anterior. En el caso del otro protón, podemos escribir la energía total como la suma de la energía cinética más la energía de la masa para llegar a

$$S = 2m_p^2 c^4 + 2m_p c^2 (K^{lab} + m_p c^2) = 4m_p^2 c^4 + 2m_p c^2 K^{lab}. \tag{ii}$$

Como S es invariante, podemos establecer las ecuaciones (i) y (ii) igual y luego determinar

$$\begin{aligned} 4m_p^2 c^4 + 2m_p c^2 K^{lab} &= (2K^{cm} + 2m_p c^2)^2 \\ &= 4(K^{cm})^2 + 8K^{cm} m_p c^2 + 4m_p^2 c^4. \end{aligned}$$

Determinamos la energía cinética en el laboratorio y obtenemos

$$K^{lab} = 4K^{cm} + \frac{2(K^{cm})^2}{m_p c^2}.$$

Evidentemente, en el caso de energías cinéticas de los haces, pequeñas en comparación con la energía de la masa del protón, el término lineal domina en esta expresión. (El término lineal es exactamente lo que un cálculo no relativista determinaría; refiérase al capítulo 8.) Pero en el caso de energías cinéticas enormes, domina el término cuadrático, según ilustra la figura 35.16. Si sabemos que el costo de un acelerador aumenta con la energía cinética, entonces podemos ver con claridad que sólo se pueden usar colisionadores para las energías de centro de masa muy altas, necesarias para los modernos experimentos con partículas y de física nuclear en la frontera de la energía.

Por último, aquí está la respuesta numérica: si escribimos la energía cinética de 250 GeV de centro de masa para cada uno de los dos haces, el valor de los protones en RHIC, veremos que necesitamos un acelerador de blanco fijo con una energía del haz de más de 134 000 GeV (134 TeV).

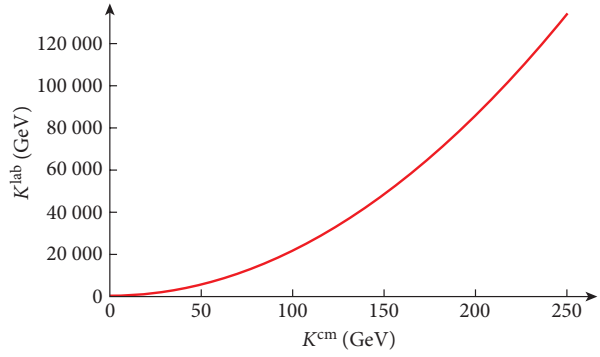


FIGURA 35.16 Energía cinética equivalente de haz con blanco fijo como función de la energía cinética del centro de masa en la colisión de protón contra protón.

35.8 Relatividad general

Hasta este momento hemos hablado sólo de la relatividad especial. La teoría de la relatividad general engloba todo lo referente a la relatividad especial, pero además ofrece una teoría de la gravedad. Hemos visto una teoría de la gravedad que se ha utilizado con resultados satisfactorios desde los tiempos de Newton. En la teoría de la gravedad de Newton, la fuerza gravitacional que actúa sobre una masa m debido a otra masa M es

$$F_g = \frac{GmM}{r^2} = ma, \tag{35.34}$$

donde hemos usado la segunda ley de Newton para relacionar la fuerza de m y la aceleración a. La masa m aparece dos veces en esta ecuación, pero hay una pequeña diferencia. La masa que aparece en el miembro derecho de estas ecuaciones se llama *masa inercial*. Esta masa es la que sufre la aceleración. Pero la cantidad que desempeña un rol en la fuerza de gravedad es también una masa, la *masa gravitacional*. Incluso en nuestras pruebas experimentales más sensibles, determinamos que dentro de las incertidumbres de la medición experimental la masa inercial y la masa gravitacional son exactamente iguales.

La teoría de la gravedad de Newton nos funciona muy bien. Ha estado casi en completa concordancia con todas las observaciones experimentales. Sin embargo, hay pequeños problemas en las observaciones de precisión, como las discrepancias en la órbita exacta del planeta Mercurio, que no se podrían explicar con dicha teoría de Newton.

Una vez más, Albert Einstein tuvo la capacidad de reflexión decisiva en 1907: "*Si una persona cae libremente, no siente su propio peso*" (figura 35.17). Esta afirmación significa que usted no puede distinguir si está en un marco de referencia que se acelera, o bien, sujeto a una fuerza de gravedad. Esta idea condujo al famoso **principio de equivalencia**:

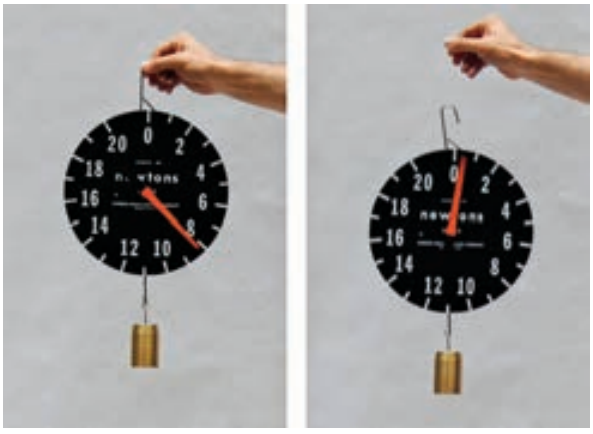


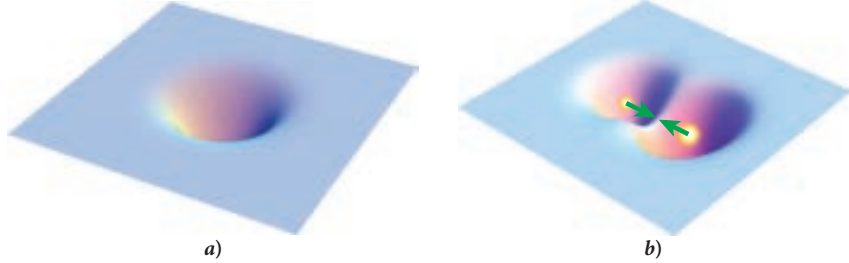
FIGURA 35.17 Observaciones de Einstein: un objeto en caída libre no pesa.

> Todos los laboratorios locales no giratorios que están en caída libre son equivalentes en cuanto al comportamiento de todos los experimentos físicos.

De acuerdo con este principio, podemos probar que el espacio y el tiempo son curvos localmente debido a la presencia de masas y que, a su vez, el *espacio-tiempo* curvo afecta el movimiento de las masas, ya que les indica cómo moverse.

Parece difícil imaginar este concepto, pero puede ayudar un ejemplo. Considere una lámina plana de caucho que simboliza el espacio en dos dimensiones. Si usted coloca una bola de boliche sobre esta lámina de caucho, deformará la hoja de la manera como se ilustra en la figura 35.18*a*). Cualquier masa que llegue ahora rodando por la superficie de la lámina experimenta la curvatura de ésta y, por consiguiente, se desplaza como si fuera atraída a la bola de boliche. Sin embargo, según el punto de vista de la relatividad general, este escenario es un movimiento libre a lo largo de la trayectoria más corta en el espacio-tiempo curvo. En la figura 35.18*b*) hay una segunda masa, la cual ocasiona su propia deformación del espacio, lo que lleva a una atracción mutua, pero el principio sigue siendo el mismo.

Una de las predicciones más sorprendentes de la relatividad general se refiere al movimiento de la luz. Como la luz carece de masa, la ley de la gravedad de Newton diría que la gravedad no puede afectar el movimiento de la luz. No obstante, la teoría de la relatividad general sostiene que



a) *b*)

FIGURA 35.18 La deformación del espacio a causa de la presencia de un objeto con masa. *a*) Un objeto deforma el espacio que lo rodea; *b*) dos objetos se atraen entre sí debido a las mutuas deformaciones del espacio.

la luz se desplaza por un espacio-tiempo curvo a lo largo de la trayectoria más corta y, por lo tanto, la presencia de grandes masas la deben desviar.

Las observaciones del astrónomo británico Sir Arthur Eddington (1882-1944) durante un eclipse de Sol en 1919 confirmaron esta asombrosa predicción. La figura 35.19 muestra la fotografía que tomó el equipo de Eddington durante el eclipse.

Para entender lo que está sucediendo, usamos de nuevo la analogía con la lámina de caucho. La luz procedente de una estrella lejana que pasa cerca del Sol se desvía, como en la figura 35.20. La masa del Sol actúa como una lente. Los rayos de luz que llegan cerca del Sol o por un lado se desvían, como ilustra la figura 35.20. La consecuencia es que un observador ve dos estrellas, o incluso arcos, en lugar de sólo una estrella. Eddington midió las direcciones sin deflexión de las estrellas seis meses después, por medio de fotografías de éstas en la noche cuando el Sol no estaba cerca de la trayectoria de la luz. El desplazamiento observado fue de casi $\frac{1}{5}$ del diámetro de la imagen de la estrella lejana. La relatividad general predijo que la separación angular de la imagen observada y la dirección real de la estrella sería de 1.74", en concordancia con la separación angular observada. Estas mediciones se pudieron realizar sólo durante un eclipse de Sol; de otra manera, la luz del Sol simplemente dominaría la luz procedente de las estrellas, y este efecto no se podría medir de este modo. La exactitud sistemática de estos resultados ha sido criticada, pero las mediciones posteriores en varios eclipses solares han comprobado los resultados de Eddington.

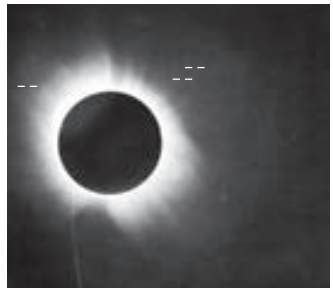


FIGURA 35.19 Fotografía tomada por el equipo de Eddington de un eclipse de Sol el 29 de mayo de 1919 en la Isla del Príncipe, cerca de África. Las barras horizontales señalan las posiciones de las estrellas.

Las observaciones recientes con el Telescopio Espacial Hubble han demostrado el redireccionamiento gravitacional a causa de objetos oscuros enormes (figura 35.21). La figura 35.21*a*) muestra un esquema de la luz procedente de una galaxia distante que sigue una trayectoria curva alrededor de un objeto oscuro enorme que no se ve. Este efecto es capaz de producir dos o más imágenes de la galaxia lejana, como se muestra, o bien, puede producir arcos de luz que se originan en la galaxia lejana. Varios arcos son resultado de que la gravedad de un objeto oscuro enorme redirija la luz, y se ven en la figura 35.21*b*).

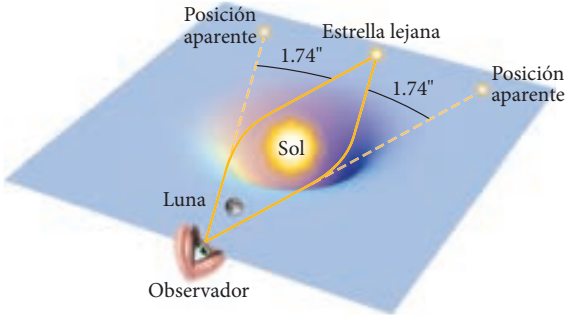


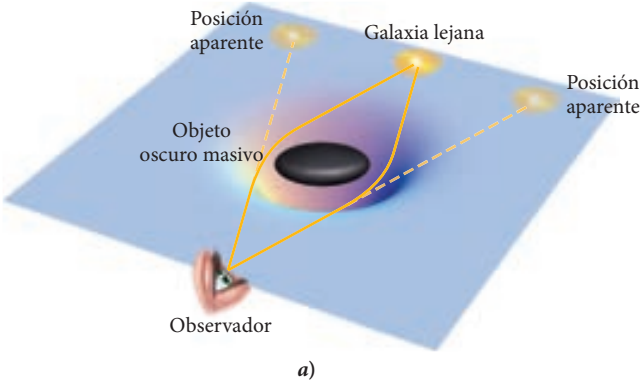
FIGURA 35.20 La luz procedente de una estrella lejana es desviada alrededor del Sol. El ángulo está muy exagerado para hacer más clara la explicación. Estas estrellas se ven cerca del Sol sólo durante un eclipse solar.

Agujeros negros

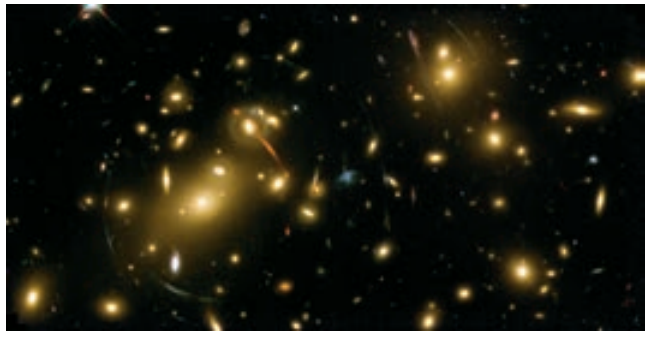
Cuando la luz se acerca lo suficiente a un objeto de masa suficiente, la luz no puede escapar de la curvatura en el espacio-tiempo generado por dicho objeto. Lo que queremos decir con "se acerca lo suficiente" se define por medio del llamado **radio de Schwarzschild**:

$$R_S = \frac{2GM}{c^2}. \tag{35.35}$$

Todas las masas tienen un radio de Schwarzschild que se puede calcular fácilmente. Desde el punto de vista clásico, esta fórmula se puede deducir estableciendo la velocidad de escape determinada en el capítulo 12: $v_{esc} = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$ igual a la velocidad de la luz y reacomodando los térmi-



a)



b)

FIGURA 35.21 *a*) Redireccionamiento gravitacional de la luz de una galaxia lejana afectada por un objeto oscuro masivo; *b)* arcos generados por el redireccionamiento gravitacional de la luz alrededor del cúmulo de galaxias Abell 2218.

35.8 Ejercicio en clase

¿Cuál es el radio de Schwarzschild de un agujero negro cuya masa es 14.6 masas del Sol ($m_{Sol} = 1.99 \cdot 10^{30}$ kg)?

a) 43.2 cm

b) 55.1 m

c) 1.55 km

d) 43.1 km

e) $4.55 \cdot 10^4$ km

nos. Si este radio queda dentro del interior del objeto, nada extraordinario sucede. Por ejemplo, el radio de Schwarzschild de la Tierra (la masa de la Tierra se representa mediante una masa puntual de la misma magnitud) es

$$R_{S,E} = \frac{2GM_E}{c^2} = \frac{2(6.67 \cdot 10^{-11}\ \text{Nm}^2/\text{kg}^2)(6.0 \cdot 10^{24}\ \text{kg})}{(3.0 \cdot 10^8\ \text{m/s})^2} = 8.9\ \text{mm}.$$

Este radio es menor que $\frac{1}{2}$ pulgada y, obviamente, mucho menor que el radio de la Tierra. El radio de Schwarzschild posee un significado físico sólo si la masa M que le da origen está contenida por completo dentro del radio.

Sin embargo, al final de sus vidas, las estrellas que empiezan su existencia con masas originales más grandes que casi 15 masas del Sol, colapsan y llegan a tan altas densidades que el radio del objeto resultante es menor que el radio de Schwarzschild. Ninguna información sobre este objeto puede escapar de él hacia el exterior. A este tipo de objetos los denominamos **agujero negro**. (Si pudiéramos compactar la Tierra completa a una esfera menor que $\frac{1}{2}$ pulgada de radio, se convertiría en un agujero negro.) Agujeros negros supercompactos y enormes de millones de masas del Sol están en el centro de muchas galaxias, incluso en la nuestra. Ya señalamos la existencia de un agujero negro enorme y compacto en el capítulo 12 y mostramos en el ejemplo 12.4 que la masa de este agujero negro es aproximadamente de $3.6 \cdot 10^6$ veces la masa de nuestro Sol.

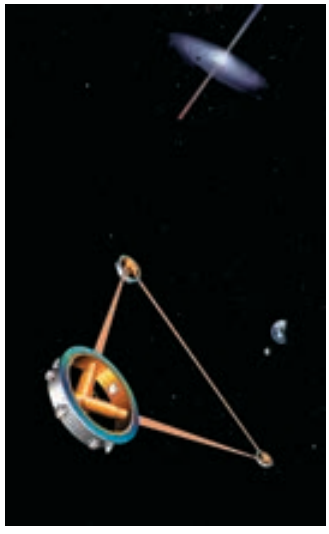


FIGURA 35.22 Concepción artística de LISA (Laser Interferometer Space Antenna), el cual se propone como el nuevo detector de la siguiente generación de ondas gravitacionales.

Ondas gravitacionales

Una predicción particularmente intrigante de la relatividad general es la existencia de ondas gravitacionales. Estas ondas pueden ser creadas por enormes masas en movimiento fuertemente acelerado. En el capítulo 15 ya se trataron los esfuerzos por detectar ondas gravitacionales con detectores de ondas gravitacionales modernos como LIGO (Laser Interferometer Gravitational-Wave Observatory). LIGO está formado por dos observatorios, uno en Hanford, Washington, y el otro en Livingston, Louisiana, con una distancia de 3 002 km entre ellos. Un observatorio de ondas gravitacionales aún más sensible está en proyecto. Por ahora se llama LISA (Laser Interferometer Space Antenna), se situará en el espacio y constará de tres vehículos espaciales acomodados en un triángulo equilátero de 5 millones de km por cada lado (figura 35.22).

Tal vez la mejor oportunidad de observar una fuente de ondas gravitacionales sean los pulsares binarios, los cuales consisten en dos estrellas de neutrones [estrellas densas y pequeñas en extremo (~ 20 km de diámetro)] que orbitan una alrededor de la otra a distancias muy cortas, y una de las cuales es un pulsar (emite pulsos de radiación electromagnética a intervalos muy precisos, por lo regular en milisegundos o segundos). Estos pulsares binarios emiten ondas gravitacionales muy intensas. Como se conserva la energía total del sistema, el periodo orbital del pulsar disminuye con el paso del tiempo. Russell Hulse observó por primera vez este efecto en 1974 junto con su asesor de tesis, Joseph Taylor, quien compartió en 1993 el Premio Nobel en Física por su descubrimiento. Ellos también fueron capaces de mostrar que la pérdida en la longitud del periodo del pulsar es compatible con las predicciones de la relatividad general.

35.9 Relatividad en nuestra vida cotidiana: GPS

Si bien usted podría argumentar que la mayoría de los efectos relativistas son sólo importantes en el espacio exterior, a velocidades imposiblemente grandes, o en el principio de nuestro universo, en un área la relatividad toca nuestra vida. Esta aplicación es el **Global Positioning System (GPS)**, el cual consiste en 24 satélites que orbitan alrededor de la Tierra (figura 35.23), a una altura de 20 000 km por encima del suelo, en un periodo de un día sideral (1 día sideral = tiempo de la Tierra para completar una rotación completa de modo que las estrellas tengan la misma posición otra vez en el cielo de la noche = 86 164.09074 s ≈ (1 – 1/365.2425)(86 400 s); vea también el ejemplo 9.3).

El GPS tiene relojes sincronizados a una muy alta precisión en todos los satélites. Los relojes atómicos modernos a bordo de estos satélites poseen una estabilidad fraccionaria del tiempo, por lo general, a 1 parte en 10^{13}. Al enviar señales sincronizadas oportunas, los satélites permiten que los usuarios con un receptor GPS determinen su propia ubicación en el espacio y el tiempo. Por lo regular, un receptor es capaz de detectar señales desde por lo menos cuatro satélites en forma simultánea. En cada satélite, la posición del receptor en el espacio $\vec{r}_r$ y el tiempo t, con respecto al satélite i pueden ser determinados con la ecuación:

$$|\vec{r}_r - \vec{r}_i| = c|t_r - t_i|. \qquad (35.36)$$

Como se conoce la posición en el tiempo y el espacio de cada satélite, la ecuación 35.36 es una ecuación con cuatro cantidades desconocidas: las tres coordenadas espaciales y el tiempo en el reloj del receptor. Al detectar cuatro satélites, tenemos cuatro ecuaciones para cuatro incógnitas. Este sistema de ecuaciones se resuelve y proporciona la asombrosa exactitud de casi 1 m.

Para que estas ecuaciones se sostengan, debemos confiar en el segundo postulado de la relatividad especial. Pero hay otros efectos relativistas que también requieren ser incluidos. Los satélites se desplazan a velocidades de alrededor de 4 km/s en relación con la Tierra, y los efectos de la dilatación del tiempo ocasionan corrimientos de la frecuencia en los relojes de 1 parte en 10^{10} (los relojes atómicos del satélite se retrasan casi 7 μs/día en comparación con los relojes que están sobre la Tierra), lo cual es casi 1 000 veces superior como para ser ignorado. Además, las correcciones gravitacionales, debidas a la relatividad general, son por lo menos de la misma magnitud. Por lo tanto, un uso correcto de la teoría de la relatividad es esencial para el funcionamiento correcto del Global Positioning System (sistema de posicionamiento global).

FIGURA 35.23 Satélite del GPS en órbita. (Imagen cortesía de Lockheed Martin Corporation.)

LO QUE HEMOS APRENDIDO | GUÍA DE ESTUDIO PARA EXAMEN

- La luz siempre se desplaza a la misma velocidad, independientemente de la velocidad de la fuente y del observador: $c = 2.99792458 \cdot 10^8$ m/s.
- Los dos postulados de la relatividad especial son:
  - *i*) Las leyes de la física son las mismas en todos los marcos de referencia inerciales, independientemente del movimiento de este marco de referencia.
  - *ii*) La velocidad de la luz c es la misma en todos los marcos de referencia.
- Las cantidades sin dimensión $\beta \leq 1$ y $\gamma \geq 1$ se definen como

$$\beta = |\vec{v}/c| \text{ y } \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}}.$$

- El tiempo se dilata en función de la velocidad del observador de acuerdo con

$$\Delta t = \gamma \Delta t_0 = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1-(v/c)^2}}$$

  donde Δt_0 es el tiempo medido en el marco en reposo.
- La longitud en la dirección del movimiento se contrae en función de la velocidad del observador de acuerdo con

$$L = \frac{L_0}{\gamma} = L_0\sqrt{1-(v/c)^2}$$

  donde L_0 es la longitud propia, medida en el marco en reposo.
- El corrimiento relativista de la frecuencia de la luz de una fuente en movimiento es

$$f = f_0\sqrt{\frac{c \mp v}{c \pm v}},$$

  y la corrección de la longitud de onda correspondiente es

$$\lambda = \lambda_0\sqrt{\frac{c \pm v}{c \mp v}}.$$

  El parámetro del corrimiento al rojo se define como

$$z = \frac{\lambda}{\lambda} = \sqrt{\frac{c \pm v}{c \mp v}} - 1.$$

- La transformación de Lorentz para las coordenadas del espacio y el tiempo es

$$x' = \gamma(x - vt);\ y' = y;\ z' = z;\ t' = \gamma(t - vx/c^2).$$

- La transformación relativista de la velocidad es

$$u' = \frac{u - v}{1 - vu/c^2},$$

  y la transformación inversa es

$$u = \frac{u' + v}{1 + vu'/c^2}$$

  donde todas las velocidades están en la misma dirección.
- La energía en reposo de una partícula es $E_0 = mc^2$.
- La expresión relativista para la cantidad de movimiento es $\vec{p} = \gamma m\vec{v}$ y para la energía es $E = \gamma E_0 = \gamma mc^2$.

- La relación entre energía y cantidad de movimiento está dada por $E^2 = p^2c^2 + m^2c^4$.
- La transformación de Lorentz para cantidad de movimiento y energía es

  $p'_x = \gamma(p_x - vE/c^2)$; $p'_y = p_y$; $p'_z = p_z$; $E' = \gamma(E - vp_x)$.
- La invariante de Lorentz

  $$S \equiv (E_1 + E_2)^2 - (\vec{p}_1 + \vec{p}_2)^2 c^2$$

  es el cuadrado de la energía total disponible en el marco de centro de masa.
- El principio de equivalencia de la teoría de la relatividad general establece que todos los laboratorios locales no giratorios que están en caída libre son equivalentes en cuanto al comportamiento de todos los experimentos físicos.
- El radio de Schwarzschild de un objeto masivo se obtiene mediante

  $$R_S = \frac{2GM}{c^2}.$$

TÉRMINOS CLAVE

éter, p. 1133
marco de referencia inercial, p. 1134
cono de luz, p. 1136
línea del mundo, p. 1137
espacio-tiempo, p. 1137
tiempo propio, p. 1137
dilatación del tiempo, p. 1138
contracción de la longitud, p. 1140
longitud propia, p. 1140
corrimiento relativista de la frecuencia, p. 1144
corrimiento hacia el rojo, p. 1144
corrimiento hacia el azul, p. 1144
parámetro de corrimiento al rojo, p. 1144
transformación de Galileo, p. 1146
transformación de Lorentz, p. 1146
invariantes, p. 1147
suma relativista de la velocidad, p. 1148
masa en reposo, p. 1151
principio de equivalencia, p. 1158
radio de Schwarzschild p. 1159
agujero negro, p. 1160
Global Positioning System (sistema de posicionamiento global), p. 1160

NUEVOS SÍMBOLOS Y ECUACIONES

$\beta = |\vec{v}/c|$, velocidad en unidades de la velocidad de la luz

$\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}$, factor relativista

$\Delta t = \gamma \Delta t_0$, dilatación del tiempo

$L = L_0/\gamma$, contracción de la longitud

u,u', notación de la velocidad usada en la transformación relativista de la velocidad

$\vec{p} = \gamma m\vec{v}$, cantidad de movimiento relativista

$E = \gamma E_0 = \gamma mc^2$, energía relativista

$E_0 = mc^2$, energía de una partícula estacionaria (energía en reposo) con masa m

$\sqrt{S}$, energía total disponible en el marco del centro de masa de dos partículas que colisionan

$R_S = \frac{2GM}{c^2}$, radio de Schwarzschild

RESPUESTAS A LAS OPORTUNIDADES DE AUTOEVALUACIÓN

35.1 1 año luz = $(3.00 \cdot 10^8$ m/s)(365.25 días/año)(24 horas/día)(3 600 s/hora) = $9.47 \cdot 10^{15}$ m

35.2

Efecto de 5%:

Exacto: $\beta = \sqrt{1-\gamma^{-2}} = \sqrt{1-(1.05)^{-2}} = 0.31 = 31\%$ de c

Aproximación: $\beta \approx \sqrt{2(\gamma-1)} = \sqrt{2(1.05-1)} = 0.32 = 33\%$ de c

Efecto de 50%:

Exacto: $\beta = \sqrt{1-\gamma^{-2}} = \sqrt{1-(1.50)^{-2}} = 0.75 = 75\%$ de c.

35.3

$\gamma\{\gamma(x' + vt') - vt\} = \gamma^2(x' + vt') - \gamma vt = x' \Rightarrow$ (dividir entre γ^2)

$x' + vt' - vt/\gamma = x'/\gamma^2 \Rightarrow$ (restar x')

$vt' - vt/\gamma = x'(\gamma^{-2} - 1) = -x'v^2/c^2 \Rightarrow$ (dividir entre v)

$t' - t/\gamma = -x'v/c^2 \Rightarrow$ (reacomodar)

$t' + x'v/c^2 = t/\gamma \Rightarrow$ (multiplicar por γ)

$t = \gamma(t' + x'v/c^2)$.

35.4 $$u_x = \frac{dx}{dt} = \frac{\gamma(dx' + vdt')}{\gamma(dt' + vdx'/c^2)} u' = \frac{\frac{dx'}{dt'} + v}{1 + \frac{v}{c^2}\frac{dx'}{dt'}} = \frac{u'_x + v}{1 + \frac{vu'_x}{c^2}}.$$

PRÁCTICA PARA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Lineamientos para resolución problemas

1. El primer paso para resolver cualquier problema de relatividad es identificar la información. ¿Cuáles son los hechos relacionados con el problema? ¿Cuáles son los marcos de referencia? ¿Cuál es el tiempo propio y cuál es la longitud propia? Revise la sección 35.3 y asegúrese de que sabe cómo reconocer el tiempo propio y la longitud propia.

2. Dadas las sutilezas de la teoría de la relatividad, es muy importante comprobar las respuestas. Verifique que el tiempo se ha dilatado y que la longitud se ha contraído en el caso de un marco de referencia en movimiento con respecto a un marco estacionario.

3. Para tratar con las ecuaciones de la transformación de Lorentz, asegúrese de identificar los dos marcos de referencia, así como la dirección de la velocidad entre ellos y la velocidad de cualquier movimiento dentro de cada marco.

PROBLEMA RESUELTO 35.3 Misma velocidad

En algunos casos, los físicos especializados en partículas necesitan tener haces de electrones que tengan exactamente la misma velocidad que los haces de protones. En el caso de un protón, $m_p c^2 = 938$ MeV. Para un electrón, $m_e c^2 = 0.511$ MeV.

PROBLEMA

Si usted tiene un haz de protones con energía cinética de 2.50 GeV, ¿cuál es la energía cinética que se requiere para el haz de electrones?

SOLUCIÓN

PIENSE

Las partículas que tienen la misma velocidad v, tienen la misma γ. Podemos escribir expresiones para el electrón y el protón con respecto a γ, la energía total, y la masa en reposo; determínelas para γ, e iguálelas. La energía total de una partícula es igual a la masa en reposo más la energía cinética. Podemos entonces determinar la energía cinética requerida del electrón.

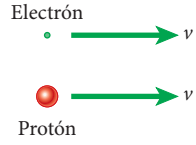


FIGURA 35.24 Un electrón y un protón con la misma velocidad.

ESBOCE

La figura 35.24 es un diagrama de un electrón y un protón en movimiento a la misma velocidad.

INVESTIGUE

Podemos relacionar la energía E de una partícula y γ mediante

$$E = \gamma mc^2.$$

Por lo tanto, podemos escribir la energía de un electrón como $E_e = \gamma m_e c^2$ y la energía de un protón como $E_p = \gamma m_p c^2$. Podemos igualar γ para el electrón y el protón:

$$\gamma = \frac{E_e}{m_e c^2} = \frac{E_p}{m_p c^2}.$$

Podemos escribir la energía del electrón como la suma de la energía cinética y la energía en reposo, $E_e = K_e + m_e c^2$. De la misma manera, escribimos para el protón $E_p = K_p + m_p c^2$.

SIMPLIFIQUE

Combinemos las ecuaciones anteriores para obtener

$$\frac{K_e + m_e c^2}{m_e c^2} = \frac{K_p + m_p c^2}{m_p c^2}.$$

Al determinar la energía cinética del electrón, obtenemos

$$K_e = m_e c^2 \left(\frac{K_p + m_p c^2}{m_p c^2} \right) - m_e c^2.$$

CALCULE

Al poner los valores numéricos, tenemos

$$K_e = (0.511 \text{ MeV}) \left(\frac{2\,500 \text{ MeV} + 938 \text{ MeV}}{938 \text{ MeV}} \right) - (0.511 \text{ MeV}) = 1.36194 \text{ MeV}.$$

(*continúa*)

(*continuación*)

REDONDEE

Mostramos nuestros resultados con tres cifras:

$$K_e = 1.36 \text{ MeV}.$$

VUELVA A REVISAR

Podemos corroborar el resultado calculando γ para el electrón y el protón. En el caso del electrón tenemos:

$$\gamma = \frac{E_e}{m_e c^2} = \frac{1.36 \text{ MeV} + 0.511 \text{ MeV}}{0.511 \text{ MeV}} = 3.66.$$

Para el protón:

$$\gamma = \frac{E_p}{m_p c^2} = \frac{2.50 \text{ GeV} + 938 \text{ MeV}}{938 \text{ MeV}} = 3.67,$$

lo cual concuerda con el valor calculado para el electrón dentro de los errores de redondeo. Por consiguiente, los resultados parecen razonables.

PREGUNTAS DE OPCIÓN MÚLTIPLE

35.1 El hecho más importante que aprendimos con respecto al éter es que:

a) se demostró experimentalmente que no existe.
b) su existencia se probó en forma experimental.
c) transmite la luz en todas las direcciones por igual.
d) transmite la luz más rápido en la dirección longitudinal.
e) transmite la luz más lento en la dirección longitudinal.

35.2 Si la nave espacial A viaja a 70% de la velocidad de la luz con respecto a un observador en reposo, y la nave B viaja a 90% de la velocidad de la luz con respecto a un observador en reposo, ¿qué de lo siguiente lleva la velocidad más alta si la mide un observador que está en la nave B?

a) El disparo de un cañón desde A a B a 50% de la velocidad de la luz, según se mide en un marco de referencia de A.
b) Una bola lanzada desde B hacia A a 50% de la velocidad de la luz si se mide en un marco de referencia de B.
c) Un disparo de un haz de partículas desde un observador estacionario hacia B a 70% de la velocidad de la luz según se mide en un marco de referencia estacionario.
d) Un rayo de luz disparado desde A hacia B que viaja a la velocidad de la luz en un marco de referencia de A.
e) Todos los casos anteriores tienen la misma velocidad si se miden en un marco de referencia de B.

35.3 Una partícula de masa en reposo m_0 viaja a una velocidad $v = 0.20c$. ¿Qué tan rápido tiene que viajar la partícula con objeto de que su cantidad de movimiento se incremente al doble de su cantidad de movimiento original?

a) $0.40c$ *c*) $0.38c$ *e*) $0.99c$
b) $0.10c$ *d*) $0.42c$

35.4 ¿Qué cantidad es invariante, es decir, tiene el mismo valor en todos los marcos de referencia?

a) intervalo de tiempo, Δt
b) intervalo de espacio, Δx
c) velocidad, v
d) intervalo espacio-tiempo, $c^2 (\Delta t)^2 - (\Delta x)^2$

35.5 Dos gemelos, A y B, están en el espacio profundo en cohetes similares y viajan en direcciones opuestas a una velocidad relativa de $c/4$. Después de un tiempo, el gemelo A da la vuelta y viaja de regreso hacia el gemelo B, de modo que su velocidad relativa es $c/4$. Cuando se vuelven a encontrar, ¿uno de los gemelos es más joven?, y si es así, ¿cuál de los dos es el más joven?

a) El gemelo A es el más joven.
b) El gemelo B es el más joven.
c) Los gemelos tienen la misma edad.
d) Cada uno de los gemelos piensa que el otro es más joven.

35.6 ¿Con qué velocidad relativa se desplaza hacia el observador un protón cuya cantidad de movimiento es de 3.0 GeV/c?

a) $0.31c$ *c*) $0.91c$ *e*) $3.2c$
b) $0.33c$ *d*) $0.95c$

35.7 Un cuadrado de área igual a 100 m^2 que está en reposo en el marco de referencia se mueve a una velocidad $(\sqrt{3}/2)c$. ¿Cuál de los siguientes enunciados es incorrecto?

a) $\beta = \sqrt{3}/2$
b) $\gamma = 2$
c) A un observador que está en reposo le parece que es otro cuadrado con área menor de 100 m^2.
d) La longitud a lo largo de la dirección del movimiento se contrae con un factor de $\frac{1}{2}$.

35.8 Considere una partícula que se desplaza a una velocidad menor de $0.5c$. Si la velocidad de la partícula se duplica, ¿en qué factor se incrementará la cantidad de movimiento?

a) Menor que 2.
b) Igual a 2.
c) Mayor que 2.

PREGUNTAS

35.9 En mecánica, a menudo se usa el modelo de un cuerpo perfectamente rígido para modelar y determinar el movimiento de objetos físicos (por ejemplo, veamos el capítulo 10 sobre rotación). Explique cómo este modelo contradice la teoría de la relatividad especial de Einstein.

35.10 Utilice conos de luz y líneas del mundo para resolver el siguiente problema. Eddie y Martín están lanzando globos con agua a un blanco con mucha rapidez. A $t = -13$ μs, el blanco está en $x = 0$, Eddie está en $x = -2$ km y Martín está en $x = 5$ km, y los tres permanecen en estas mismas posiciones durante todo el tiempo. El blanco es golpeado en $t = 0$. ¿Quién hizo el disparo que dio en el blanco? Demuéstrelo usando el cono de luz para el blanco. Cuando el blanco es golpeado, éste envía una señal de radio. ¿Cuándo se entera Martín de que el blanco ha sido golpeado? ¿Cuándo se entera Eddie de que el blanco ha sido golpeado? Utilice las líneas del mundo para demostrarlo. Antes de empezar a dibujar los diagramas, considere lo siguiente: si la posición x donde está usted se mide en km y usted está graficando t contra x/c, ¿qué unidades debe tener t para que la primera cifra sea significativa?

35.11 Un redireccionamiento gravitacional debe producir un efecto de halo y no formar arcos. Dado que la luz viaja no sólo a la derecha y a la izquierda del objeto masivo que interviene, sino también hacia la parte superior y hacia el fondo, ¿por qué, por lo regular, sólo vemos arcos?

35.12 Suponga que usted está explicando la teoría de la relatividad a un amigo y tiene que decirle que nada puede ir más rápido que 300 000 km/s. Él le dice que obviamente es falso: supongamos una nave espacial que avanza a 200 000 km/s, lo cual es perfectamente posible de acuerdo con lo que usted está diciendo; dispara un torpedo hacia adelante cuya velocidad es 200 000 km/s con respecto a la nave espacial, lo cual también es perfectamente posible; luego, su amigo dice que el torpedo va a 400 000 km/s. ¿Qué puede decirle?

35.13 Considere una partícula con carga positiva que se desplaza a una velocidad constante en forma paralela a un alambre que transporta corriente, en la dirección de la corriente. Como usted sabe (después de estudiar los capítulos 27 y 28), la partícula es atraída hacia el cable por la fuerza magnética debido a la corriente. Ahora suponga que otro observador se desplaza junto con la partícula, de modo que, de acuerdo con él, la partícula está en reposo. Naturalmente, una partícula en reposo no siente ninguna fuerza magnética. ¿Ese observador ve la partícula atraída al alambre o no? ¿Cómo puede ser esto? (Cualquier respuesta parece llevar a una contradicción: si la partícula es atraída, tiene que ser por una fuerza magnética, pero no hay campo eléctrico de un alambre neutro; si la partícula no es atraída, usted ve que la partícula está de hecho moviéndose hacia el alambre.)

35.14 En reposo, un cohete tiene una longitud total de L. Una bodega en reposo (construida para el cohete por el licitante más barato) mide sólo $L/2$ de longitud. Por suerte, la bodega tiene puerta en el frente y puerta detrás, de modo que cuando el cohete viaja a una velocidad de $v = 0.866c$, el cohete se ajusta muy bien en la bodega. No obstante, de acuerdo con el piloto del cohete, el cohete mide L y la bodega mide $L/4$. ¿Cómo es que el piloto observa que el cohete no se ajusta a la bodega?

35.15 Una varilla en reposo sobre la Tierra forma un ángulo de 10° con el eje x. Si la varilla de mueve a lo largo del eje x, ¿qué sucede con este ángulo, según lo que ve un observador que está sobre el suelo?

35.16 Un astronauta que va en una nave espacial en vuelo hacia el Ecuador de la Tierra a la mitad de la velocidad de la luz, observa que la Tierra es un cuerpo sólido oblongo, más ancho y más alto que profundo, girando alrededor de su eje largo. Un segundo astronauta que vuela hacia el Polo Norte de la Tierra a la mitad de la velocidad de la luz, observa que la Tierra tiene una forma similar, pero que gira alrededor de su eje corto. ¿Por qué esto no representa una contradicción?

35.17 Considere dos relojes que llevan unos observadores en un marco de referencia que se mueve a una velocidad v en la dirección positiva x con respecto a nosotros. Suponga que los dos marcos de referencia tienen ejes paralelos y que sus orígenes coinciden cuando los relojes en ese punto en ambos marcos dan una lectura de cero. Suponga que los relojes están separados por una distancia l en la dirección x' en el propio marco de referencia de los relojes; por ejemplo, $x' = 0$ para un reloj y $x' = l$ para el otro, con $y' = z' = 0$ para ambos. Determine las lecturas t' en ambos relojes como funciones de la coordenada de tiempo t en nuestro marco de referencia.

35.18 Demuestre que, en todos los casos, dos velocidades por abajo de la velocidad de la luz "sumadas" relativistamente siempre darán una velocidad por abajo de la velocidad de la luz. Considere el movimiento sólo en una dimensión espacial.

35.19 Un famoso resultado en la dinámica de Newton es que si una partícula en movimiento choca elásticamente contra una partícula idéntica en reposo, las dos partículas salen del choque en trayectorias perpendiculares. ¿Lo mismo es válido en la teoría de la relatividad especial? Suponga una partícula de masa m en reposo y energía total E que choca contra una partícula idéntica en reposo, las mismas dos partículas salen del choque con nuevas velocidades. ¿Estas velocidades son necesariamente perpendiculares? Explique.

35.20 Suponga que está observando una nave espacial que orbita alrededor de la Tierra a 80% de la velocidad de la luz. ¿Cuál es la longitud de la nave según se ve desde el centro de la órbita?

PROBLEMAS

Una • y dos •• indican un nivel creciente de dificultad.

Secciones 35.1 y 35.2

35.21 Determine la velocidad de la luz en *pies por nanosegundos*, con tres cifras significativas.

35.22 Determine el valor de g, la aceleración de la gravedad en la superficie terrestre, en años luz por año, con tres cifras significativas.

35.23 Michelson y Morley usaron un interferómetro para demostrar que la velocidad de la luz es constante, sin importar

el movimiento de la Tierra a través de cualquier éter luminífero. Se puede entender una analogía a partir de los diferentes tiempos que tarda un bote de remos en recorrer dos distintas trayectorias de un viaje ida y vuelta en un río que va a una velocidad constante (u) corriente abajo. Sea una trayectoria de una distancia D a la que atraviesa directamente al otro lado del río y regresa, y sea la otra trayectoria de la misma distancia D para ir directamente corriente arriba y luego regresar. Suponga que el bote viaja a una velocidad constante, v (con respecto al agua), en ambos recorridos. No tome en cuenta el tiempo que el bote tarda en dar la vuelta. Calcule la razón del tiempo para atravesar directamente al otro lado del río dividiendo entre el tiempo para navegar corriente arriba entre corriente abajo, como una función de las constantes dadas.

35.24 ¿Cuál es el valor de γ de una partícula que se desplaza a una velocidad de $0.8c$?

Sección 35.3

35.25 Un astronauta va en una nave espacial que viaja a una velocidad de $0.50c$ y sostiene una regla de un metro, paralela a la dirección del movimiento.

a) ¿Cuál es la longitud del metro si la mide otro astronauta que va en la nave?

b) Si un observador que está en la Tierra pudiera ver la regla de metro, ¿cuál sería la longitud del metro si la midiera el observador?

35.26 Una nave espacial lleva una trayectoria recta desde la Tierra a la Luna, a una distancia de $3.84 \cdot 10^8$ m. Su velocidad medida en la Tierra es de $0.50c$.

a) ¿Cuánto tarda el viaje de acuerdo con un reloj en la Tierra?

b) ¿Cuánto dura el viaje de acuerdo con un reloj en la nave?

c) Determine la distancia entre la Tierra y la Luna que medía una persona que está en la nave.

35.27 Una mujer de 30 años de edad dice adiós a su hijo de 10 años de edad y se va a un viaje interestelar. Cuando regresa a la Tierra, tanto ella como su hijo tienen 40 años de edad. ¿Cuál fue la velocidad de la nave?

35.28 Si un muon se desplaza a 90.0% de la velocidad de la luz, ¿cuál es su tiempo de vida medido en comparación a cuando está en el marco en reposo de un laboratorio, donde su tiempo de vida es de $2.2 \cdot 10^{-6}$ s?

35.29 Un camión de bomberos de 10.0 m de largo necesita ajustarse a un garaje de 8.00 metros de largo (por lo menos temporalmente). ¿Qué tan rápido debe ir el camión para que se ajuste por completo al garaje, por lo menos temporalmente? ¿Cuánto tiempo se tarda el camión en quedar dentro del garaje desde

a) el punto de vista del garaje?

b) el punto de vista del camión?

35.30 En la novela clásica de Julio Verne, *La vuelta al mundo en 80 días*, Phileas Fogg viaja alrededor del mundo, de acuerdo con sus cálculos, en 81 días. Debido a que cruza la Línea Internacional del Cambio de Fecha, él en realidad tardó sólo 80 días. ¿Qué tan rápido tendría que ir con objeto de que la dilatación del tiempo hiciera que 80 días parecieran 81? (Naturalmente, a esta velocidad tardaría mucho menos de un día para dar la vuelta al mundo . . .)

•**35.31** Suponga que la NASA descubre un planeta igual a la Tierra y que su órbita es alrededor de una estrella como el Sol. Este planeta está 35 años luz alejado de nuestro Sistema Solar. La NASA rápidamente planea enviar astronautas a dicho planeta, pero con la condición de que éstos no envejezcan más de 25 años durante este viaje.

a) ¿A qué velocidad debe ir la nave, en un marco de referencia de la Tierra, de tal manera que los astronautas envejezcan 25 años durante el viaje?

b) Según los astronautas, ¿cuál es la distancia de su viaje?

•**35.32** Considere una regla de un metro en reposo en un marco de referencia F. Está en el plano (x, y) y forma un ángulo de 37° con el eje x. El marco de referencia F se desplaza ahora a una velocidad constante v, paralela al eje x de otro marco de referencia F'.

a) ¿Cuál es la velocidad de la regla de metro medida en F' a un ángulo de 45° con el eje x?

b) ¿Cuál es la longitud del metro en F' en estas condiciones?

•**35.33** Una nave en forma de cuña mide de ancho 20.0 m y de longitud 50.0 m; su forma es la de un triángulo isósceles. ¿Cuál es el ángulo entre la base de la nave y el lado de ésta según las mediciones de un observador estacionario, si la nave está viajando a una velocidad de $0.400c$? Grafique este ángulo en función de la velocidad de la nave.

Sección 35.4

35.34 ¿Qué tan rápido debe usted viajar en relación con una luz azul (480 nm) para que ésta aparezca roja (660 nm)?

35.35 En su clase de física estudió acerca del corrimiento relativista de la frecuencia y decide impresionar a sus amigos en una fiesta. Usted les dice que una vez iba manejando un automóvil y se pasó la luz roja del semáforo y que, cuando lo detuvieron, no lo multaron porque le explicó al policía de tránsito que el corrimiento relativista de Doppler hizo que usted viera la luz roja de longitud de onda de 650 nm como luz verde, cuya longitud de onda es de 520 nm. Si su relato hubiera sido cierto, ¿qué tan rápido habría tenido que ir?

35.36 Un meteorito hecho de kriptonita pura (sí, ya sabemos: en realidad, la kriptonita no existe . . .) va hacia la Tierra. Si el meteorito choca contra la Tierra en algún momento, el impacto ocasionará graves daños y pondrá en riesgo la vida tal como la conocemos. Si un rayo láser golpea el meteorito con una longitud de onda de 560 nm, el meteorito entero estallará. El único láser suficientemente poderoso que hay en la Tierra es de 532 nm de longitud de onda. Los científicos deciden lanzar el láser en una nave espacial y aplicar la relatividad especial para conseguir la longitud de onda correcta. El meteorito se desplaza con lentitud, de modo que no hay corrección para las velocidades relativas. ¿A qué velocidad necesita ir la nave para que el láser tenga la longitud de onda correcta? ¿Debe viajar hacia el meteorito o alejarse de él?

35.37 En la detección de la velocidad mediante radar se envía una onda electromagnética desde una fuente y luego se examina el corrimiento Doppler de la onda reflejada. Suponga que se manda una onda de frecuencia de 10.6 GHz hacia un automóvil que se aleja a una velocidad de 32.0 km/h. ¿Cuál

es la diferencia entre la frecuencia de la onda emitida por la fuente y la frecuencia de la onda que detecta un observador que va dentro del vehículo?

•**35.38** Un láser HeNe a bordo de una nave espacial que se desplaza hacia una lejana estación espacial emite una luz roja hacia la estación. La longitud de onda del haz, según un medidor de longitud de onda que va a bordo de la nave, es de 632.8 nm. Si los astronautas de la estación espacial ven el rayo como un haz de color azul, cuya longitud de onda medida es de 514.5 nm, ¿cuál es la velocidad relativa de la nave con respecto a la estación espacial? ¿Cuál es el parámetro de corrimiento z en este caso?

Secciones 35.5 y 35.6

35.39 Sam ve dos fenómenos como si fueran simultáneos:

i) el fenómeno A ocurre en el punto (0, 0, 0) en el instante 0:00:00 del tiempo universal;

ii) el fenómeno B ocurre en el punto (500. m, 0, 0) en el mismo momento.

Tim rebasa a Sam a una velocidad de $0.999c\hat{x}$ y también ve los dos eventos.

a) ¿Qué hecho ocurre primero en el marco de referencia de Tim?

b) ¿Qué tanto después del primer fenómeno sucede el segundo evento en el marco de referencia de Tim?

35.40 Aplique la suma de velocidades relativista para confirmar que la velocidad de la luz con respecto a cualquier marco de referencia inercial es c. Suponga un movimiento unidimensional a lo largo de un eje x común.

35.41 Usted va manejando un automóvil por una autopista recta a una velocidad de $v = 50.0$ m/s con respecto al suelo. Un camión que viene en dirección contraria tiene la misma velocidad relativa. ¿Qué velocidad relativa lleva el vehículo que se acerca según lo observa usted?

35.42 Una nave espacial que se aproxima a la Tierra a $0.90c$ dispara un misil hacia la Tierra a una velocidad de $0.50c$, con respecto a la nave espacial. Según se ve desde la Tierra, ¿qué tan rápido se aproxima el misil a la Tierra?

35.43 En el ejemplo de la paradoja de los gemelos, Alice parte en una nave espacial que viaja a una estación espacial a 3.25 años luz alejada de la Tierra y luego regresa a una velocidad de $0.65c$.

a) Calcule la distancia total que Alice recorrió durante el viaje, según las mediciones de Alice.

b) Con la distancia total anterior, calcule la duración total del viaje según las mediciones de Alice.

•**35.44** En el ejemplo de la paradoja de los gemelos, Alice parte en una nave espacial que viaja a una estación espacial a 3.25 años luz alejada de la Tierra y luego regresa a una velocidad de $0.650c$. Esto se puede ver en términos del marco de referencia de Alice.

a) Demuestre que Alice tiene que viajar a una velocidad de $0.914c$ para establecer una velocidad relativa de $0.650c$ con respecto a la Tierra cuando Alice regresa a ésta.

b) Calcule la duración del vuelo de regreso de Alice a la Tierra con la velocidad anterior.

•**35.45** Roberto, de pie en el extremo posterior de un vagón de ferrocarril que mide 100. m, dispara una flecha hacia la parte delantera del vagón. La velocidad que él midió de la flecha es de $0.300c$. Jenny, quien está parada en el andén de la estación, vio todo esto cuando el tren pasó a una velocidad de $0.750c$. Determine lo siguiente según las observaciones de Jenny.

a) longitud del vagón;

b) velocidad de la flecha;

c) el tiempo que tardó la flecha en recorrer la longitud del vagón, y

d) la distancia recorrida por la flecha.

••**35.46** Considere el movimiento en una dimensión espacial. Para cualquier velocidad v, defina el parámetro θ mediante la relación $v = c \tanh \theta$, donde c es la velocidad de la luz en el vacío. Esta cantidad se denomina de varios modos: *parámetro de velocidad* o la *rapidez* que corresponde a la velocidad v.

a) Demuestre que para dos velocidades, las cuales se suman de acuerdo con la regla de Lorentz, los parámetros de velocidad correspondientes se suman algebraicamente, es decir, como las velocidades de Galileo.

b) Considere dos marcos de referencia en movimiento uno con respecto al otro a una velocidad v en la dirección x, con ejes paralelos y orígenes que coinciden cuando los relojes en el origen en ambos marcos muestran cero. Escriba la transformación de Lorentz entre los dos sistemas de coordenadas totalmente en términos del parámetro de velocidad que corresponde a v y las coordenadas.

Sección 35.7

35.47 ¿Cuál es la velocidad de una partícula cuya cantidad de movimiento es $p = mc$?

35.48 La masa en reposo de un electrón es de 0.511 MeV/c^2.

a) ¿Qué tan rápido se tiene que desplazar un electrón si su energía debe ser 10 veces su energía en reposo?

b) ¿Cuál es la cantidad de movimiento del electrón a esta velocidad?

35.49 El RHIC (colisionador relativista de iones pesados) es capaz de producir haces de núcleos de oro que colisionen; la energía cinética de cada haz es $A \cdot 100.$ GeV en el marco del centro de masa, donde A es la cantidad de nucleones en el oro (197). La energía de la masa de un nucleón es aproximadamente de 1.00 GeV. ¿Cuál es la energía equivalente del haz con blanco fijo en este caso? (Vea el ejemplo 35.6.)

35.50 ¿Qué tanto trabajo se requiere para acelerar un protón desde el reposo hasta una velocidad de $0.997c$?

35.51 En un acelerador de protones usado para tratar a enfermos de cáncer, los protones son acelerados a $0.61c$. Calcule la energía del protón y exprese su respuesta en MeV.

•**35.52** En algunos aceleradores de protones, los haces de protones se dirigen hacia otros para tener colisiones frontales. Suponga que en un acelerador así, los protones se desplazan a una velocidad relativa con respecto al laboratorio de $0.9972c$.

a) Calcule la velocidad de aproximación de un protón con respecto a otro con el cual está a punto de colisionar frontalmente. Exprese su respuesta como un múltiplo de c y use seis cifras significativas.

b) ¿Cuál es la energía cinética de cada haz de protones (en unidades de MeV) en el marco de referencia del laboratorio?

c) ¿Cuál es la energía cinética de uno de los protones que chocará (en unidades de MeV) en el marco en reposo del otro protón?

•**35.53** El filamento caliente de la pistola de electrones en un tubo de rayos catódicos libera electrones con energía cinética casi cero. Luego los electrones son acelerados bajo una diferencia de potencial de 5.00 kV, antes de ser dirigidos hacia la sustancia luminiscente sobre la pantalla del tubo.

a) Calcule la energía cinética que adquiere el electrón bajo esta diferencia de potencial de aceleración.

b) ¿Se mueve el electrón a velocidad relativista?

c) ¿Cuál es la energía total y la cantidad de movimiento del electrón? (Proporcione los valores relativista y no relativista de ambas magnitudes.)

35.54 Considere una colisión unidimensional a velocidades relativistas entre dos partículas con masa m_1 y m_2. La partícula 1 se desplaza inicialmente a una velocidad de $0.700c$ y choca con la partícula 2, la cual al principio está en reposo. Después del choque, la partícula 1 retrocede con una velocidad $0.500c$, mientras que la partícula 2 empieza a moverse a una velocidad $0.200c$. ¿Cuál es la razón m_2 / m_1?

•**35.55** En un experimento con partículas elementales, una partícula de masa m es disparada con cantidad de movimiento mc, a una partícula blanco de masa $2\sqrt{2}m$. Las dos partículas forman una nueva partícula (choque completamente inelástico). Determine:

a) la velocidad del proyectil antes del choque;

b) la masa de la nueva partícula, y

c) la velocidad de la nueva partícula después del choque.

•**35.56** Demuestre que la cantidad de movimiento y la energía se transforman desde un marco inercial a otro como $p'_x = \gamma(p_x - vE/c^2)$; $p'_y = p_y$; $p'_z = p_z$; $E' = \gamma(E - vp_x)$. *Sugerencia*: Revise la deducción de la transformación de Lorentz de espacio-tiempo.

•**35.57** Demuestre que $E^2 - p^2c^2 = E'^2 - p'^2c^2$, es decir, que $E^2 - p^2c^2$ es una invariante de Lorentz. *Sugerencia*: Revise la deducción que muestra que el intervalo espacio-tiempo es una invariante de Lorentz.

Secciones 35.8 y 35.9

35.58 La desviación de las características geométricas del espacio-tiempo cerca del campo gravitacional de la Tierra, con respecto al espacio-tiempo plano en la teoría de la relatividad especial, puede ser medida por la razón Φ/c^2, donde Φ es el potencial gravitacional de Newton en la superficie terrestre. Calcule el valor de esta cantidad.

35.59 Calcule el radio de Schwarzschild de un agujero negro cuya masa es:

a) igual a la del Sol,

b) igual a la de un protón. ¿Cómo es este resultado en comparación con la escala de dimensiones 10^{-15} m vinculada por lo general con un protón?

35.60 Si suponemos que la velocidad de los satélites para el GPS es aproximadamente de 4.00 km/s con respecto a la Tierra, calcule qué tanto más despacio por día van los relojes atómicos que están en los satélites, en comparación con los relojes atómicos estacionarios que están en la Tierra?

35.61 ¿Cuál es el radio de Schwarzschild del agujero negro que está en el centro de nuestra Vía Láctea? *Sugerencia*: La masa de este agujero negro se determinó en el ejemplo 12.4.

Problemas adicionales

35.62 Con objeto de que entre una limusina de 50.0 pies de largo a un garaje de 35.0 pies de largo, ¿qué tan rápido tendría que ir el conductor del vehículo en el marco de referencia del garaje? Comente qué sucede al garaje en el marco de referencia de la limusina.

35.63 Utilice las expresiones relativistas y compare la cantidad de movimiento de dos electrones, a saber, uno que se mueve a $2.00 \cdot 10^8$ m/s y el otro que se desplaza a $2.00 \cdot 10^3$ m/s. ¿Cuál es la diferencia en el porcentaje entre los valores de cantidad de movimiento clásico y estos valores?

35.64 El cohete *A* se cruza con la Tierra a una velocidad de $0.75c$. Al mismo tiempo, el cohete B se cruza con la Tierra a $0.95c$ con respecto a la Tierra en la misma dirección. ¿Qué tan rápido se desplaza B en relación con A cuando B pasa a A?

35.65 Determine la diferencia de energía cinética de un electrón que viaja a $0.9900c$ y a $0.9999c$, aplicando primero la mecánica estándar de Newton y luego aplicando la relatividad especial.

35.66 Justo antes del despegue, un pasajero que está en un avión que va de la ciudad A a la ciudad B sincroniza su reloj con el de un amigo suyo, quien está esperándolo en la ciudad B. El avión vuela a una velocidad constante de 240 m/s. En el instante que el avión toca tierra, los dos amigos verifican simultáneamente las manecillas de sus relojes. El reloj del pasajero del avión señala que tardó exactamente 3.00 h el viaje de A a B. Sin considerar ningún efecto por la aceleración:

a) ¿El reloj del amigo que espera en B muestra un tiempo mayor o menor?

b) ¿Cuál es la diferencia entre las lecturas de los dos relojes?

35.67 La potencia explosiva de la bomba atómica lanzada sobre Hiroshima casi al final de la Segunda Guerra Mundial fue de alrededor de 15.0 kilotones de TNT. Un kilotón es de casi $4.18 \cdot 10^{12}$ J de energía. Calcule la cantidad de masa que fue transformada en energía con esta bomba.

35.68 ¿A qué velocidad la longitud de una regla de un metro se verá de 90.0 cm?

35.69 ¿Cuál es la velocidad relativa entre dos objetos que se aproximan entre sí de frente, si cada uno está desplazándose a una velocidad de $0.600c$ según lo mide un observador en la Tierra?

35.70 Una vieja canción tiene las líneas "Mientras manejaba mi Cadillac, ¡qué sorpresa!; me seguía un pequeño Nash Rambler de casi un tercio de mi tamaño". El intérprete de esa canción supone que el Nash Rambler va a la misma velocidad. Suponga, a pesar de todo, que en lugar de ser en realidad una tercera parte de las dimensiones del Cadillac, la longitud apropiada del Rambler es igual que la del Cadillac. ¿Cuál sería la

velocidad del Rambler relativa al Cadillac para que la observación de la canción fuera exacta?

35.71 No debe recurrir a la dilatación del tiempo causada por su movimiento relativo con respecto al resto del mundo como un pretexto por llegar tarde a clase. Si bien es cierto que en relación con los del resto del salón el tiempo de usted corre más despacio, es probable que la diferencia sea insignificante. Suponga que en el fin de semana usted manejó su automóvil desde su universidad en el Oeste Medio hasta la ciudad de Nueva York y regresó: un viaje redondo de 2 200. millas con 20.0 horas de ida y 20.0 de vuelta. ¿Con qué cantidad, cuando mucho, diferiría su reloj con el del profesor?

35.72 Una nave espacial viaja a dos tercios de la velocidad de la luz directamente hacia un asteroide estacionario. Si la nave enciende sus faros delanteros, ¿cuál será la velocidad de la luz que viaje desde la nave al asteroide según lo observa

a) alguien en la nave?

b) alguien en el asteroide?

35.73 Dos estaciones espaciales estacionarias están separadas por una distancia de 100. años luz, según la medición de alguien que está en una de las estaciones. Una nave que viaja a $0.950c$ con respecto a las estaciones espaciales pasa por una de las estaciones y se dirige directamente hacia la otra estación. ¿Cuánto tardará en alcanzar la otra estación espacial según las mediciones de alguien en la estación? ¿Cuánto tiempo transcurrirá para un viajero que está en la nave espacial cuando viaja de una estación a otra, según las mediciones de alguien en una de las estaciones espaciales?

35.74 Un electrón es acelerado desde el reposo a través de un potencial de $1.0 \cdot 10^6$ V. ¿Cuál es la velocidad final?

35.75 En la época de los viajes interestelares, se organiza una expedición a una estrella interesante que está a 2 000.0 años luz de la Tierra. Para que sea posible dicha expedición, se llaman voluntarios para la misma y los organizadores les garantizan que el viaje redondo a la estrella no tardará más de 10.000% de la vida de un ser humano normal. (En ese tiempo, el ser humano normal llega a vivir 400.00 años.) ¿Cuál es la velocidad mínima a la que debe ir la expedición?

•**35.76** ¿Cuál es la energía de una partícula con velocidad de $0.800c$ y cantidad de movimiento de $1.00 \cdot 10^{-20}$ N s?

•**35.77** ¿En un juego de fútbol americano a altas velocidades, un corredor que va a 55.0% de la velocidad de la luz con respecto al campo lanza el balón a un receptor que corre a una velocidad de 65.0% de la velocidad de la luz con respecto al campo en la misma dirección. La velocidad del balón con respecto al corredor es 80.0% de la velocidad de la luz.

a) ¿Cuál será la velocidad del balón que percibe el receptor?

b) Si el corredor lanza un destello de luz al receptor, ¿con qué velocidad parecerán ir viajando los fotones hacia el receptor?

•**35.78** Usted cuenta con una fuente de electrones, ^{14}C, cuya energía cinética es igual a 0.305 veces la energía en reposo. Suponga que tiene un par de detectores capaces de reconocer el paso de electrones sin perturbarlos. Lo que usted quiere es demostrar que la expresión relativista de la cantidad de movimiento es correcta y que la incorrecta es la expresión no relativista. Si se utiliza una línea de referencia de 2.0 m de largo entre los detectores y usted, ¿cuál es la exactitud necesaria en el tiempo para demostrar que la cantidad de movimiento es correcta?

•**35.79** Una nave espacial viaja una distancia de $1.00 \cdot 10^{-3}$ años luz en 20.0 horas, como lo mide un observador estacionario en la Tierra. ¿Cuánto dura el viaje según el capitán de la nave?

•**35.80** Los procesos dinámicos que describe la teoría especial de la relatividad son de mayor significado que las características cinemáticas y que la dinámica de Newton no describe. Suponga que una hipotética partícula con masa en reposo de $1.000\ \text{GeV}/c^2$ y energía cinética de 1.000 GeV choca con otra partícula idéntica en reposo. De manera sorprendente, las dos partículas se fusionan para dar origen a una nueva partícula. La energía total y la cantidad de movimiento se conservan en el choque.

a) Determine la cantidad de movimiento y la velocidad de la primera partícula.

b) Calcule la masa en reposo y la velocidad de la nueva partícula.

••**35.81** Aunque trata con marcos de referencia inerciales, la teoría especial de la relatividad describe objetos acelerados sin ninguna dificultad. Naturalmente, la aceleración uniforme ya no quiere decir $dv/dt = g$, donde g es una constante, ya que eso daría una v que supera a c en el tiempo finito. En lugar de eso, quiere decir que la aceleración que experimenta el cuerpo que se está moviendo es constante: con cada incremento del tiempo propio del cuerpo $d\tau$, el cuerpo incrementa su velocidad según $dv = g d\tau$ de acuerdo con las mediciones en el marco inercial en el cual el cuerpo está momentáneamente en reposo. (Cuando se acelera el cuerpo, éste encuentra una secuencia de tales marcos, cada uno moviéndose con respecto a los otros.) Dada esta interpretación:

a) Escriba una ecuación diferencial para la velocidad v del cuerpo, que se mueve en una dimensión espacial, medida según el marco inercial en el cual el cuerpo estaba inicialmente en reposo (el "marco del piso"). Puede simplificar su ecuación si considera que los cuadrados y las potencias superiores de las diferenciales no se toman en cuenta.

b) Determine $v(t)$, donde tanto v como t se miden en el marco del piso.

c) Verifique que su solución se comporte en forma adecuada en el caso de valores grandes y pequeños de t.

d) Calcule la posición del cuerpo $x(t)$ cuando se mide en el marco del piso. Por facilidad, suponga que el cuerpo está en reposo en el tiempo del marco del piso $t = 0$, en la posición del marco del piso $x = c^2/g$.

e) Identifique la trayectoria del cuerpo en un diagrama espacio-tiempo (*diagrama de Minkowski*, en honor a Hermann Minkowski) con coordenadas x y ct, cuando se miden en el marco del piso.

f) En el caso de $g = 9.81\ \text{m/s}^2$, calcule cuánto tiempo tarda el cuerpo en acelerarse si parte del reposo hasta 70.7% de c, medido todo en el marco del piso, y cuánta distancia del marco del piso cubre el cuerpo en este tiempo.

36 Física cuántica

LO QUE APRENDEREMOS 1171

36.1 La naturaleza de la materia, el espacio y el tiempo 1171
36.2 Radiación de cuerpo negro 1172
36.3 Efecto fotoeléctrico 1177
Ejemplo 36.1 Función trabajo 1179
Ejemplo 36.2 Fotones de un apuntador láser 1181
36.4 Dispersión de Compton 1182
Ejemplo 36.3 Dispersión de Compton 1183
36.5 Naturaleza ondulatoria de las partículas 1185
Ejemplo 36.4 Longitud de onda de De Broglie de una gota de lluvia 1185
Experimento de doble rendija para partículas 1186
36.6 Relación de incertidumbre 1188
Ejemplo 36.5 Intento de deshacerse de una infracción por exceso de velocidad 1191
36.7 Espín 1192
Experimento de Stern-Gerlach 1192
Espín de partículas elementales y el principio de exclusión de Pauli 1192
36.8 Espín y estadística 1193
Condensado de Bose-Einstein 1197

LO QUE HEMOS APRENDIDO/ GUÍA DE ESTUDIO PARA EXAMEN 1198

Práctica para resolución de problemas 1200
Problema resuelto 36.1 Condensado de rubidio de Bose-Einstein 1200
Preguntas de opción múltiple 1201
Preguntas 1202
Problemas 1202

FIGURA 36.1 Una imagen tomada casi en la oscuridad con un dispositivo de visión nocturna.

LO QUE APRENDEREMOS

- Con base en la hipótesis cuántica, es posible deducir la ley de radiación de Planck para la potencia irradiada en un determinado intervalo de frecuencia. El enfoque cuántico evita la catástrofe ultravioleta que hace la explicación clásica no física en longitudes de onda cortas (frecuencias altas), y contiene las leyes de radiación clásicas como límites.
- Lo que normalmente consideraríamos una onda, tal como la luz, tiene características de partícula. El efecto fotoeléctrico se explica con la hipótesis cuántica diciendo que la luz consiste en cuantos elementales llamados fotones. La energía de un fotón es igual a su frecuencia multiplicada por la constante de Planck.
- El efecto de Compton es la dispersión de un fotón de alta energía (rayos X) por un electrón. Las observaciones para la dispersión de rayos X se explican mediante cinemática, que asume que el fotón tiene características de partículas.
- Lo que normalmente consideramos materia tiene también características de onda. La longitud de onda de De Broglie de una partícula se define como la constante de Planck dividida entre la magnitud de la cantidad de movimiento de la partícula y es la longitud de onda fundamental relacionada con una onda de materia.
- La relación de incertidumbre de Heisenberg estipula que el producto de la incertidumbre en la cantidad de movimiento por la incertidumbre de la posición, medidas en forma simultánea, tiene un límite inferior absoluto. Una relación de incertidumbre tiempo-energía tiene el mismo límite inferior que la cantidad de movimiento y la posición.
- Las partículas cuánticas elementales tienen una propiedad intrínseca llamada espín, que tiene la dimensión de la cantidad de movimiento angular. El espín está cuantizado. Las partículas se dividen en dos categorías: fermiones con espines que son múltiplos semienteros de la constante de Planck divididos entre 2π, y bosones con espines de múltiplos enteros de la constante de Planck divididos entre 2π.
- El principio de exclusión de Pauli expresa que dos fermiones no pueden ocupar el mismo estado cuántico al mismo tiempo. Esto significa que en un determinado átomo, dos fermiones no pueden tener exactamente números cuánticos idénticos, que son los números que caracterizan el estado cuántico de la partícula. Los bosones pueden condensarse a baja temperatura de tal manera que la mayor parte de ellos ocupan el mismo estado cuántico.

Las cámaras de visión nocturna se han convertido en el equipo estándar para la policía y la milicia en Estados Unidos. Contienen lentes y producen imágenes como la mayor parte de los instrumentos ópticos, pero su propósito principal es captar luz débil e intensificarla para que los usuarios puedan ver imágenes con muy poca luz (figura 36.1). La manera en la que funciona la cámara no depende de las propiedades del rayo u onda de la luz, sino de sus características de fotón, que analizaremos en este capítulo.

Cuando la luz interactúa con objetos materiales, revela con frecuencia una naturaleza como de partícula, con diminutos paquetes de ondas llamados *fotones* que interactúan con átomos o moléculas individuales o células biológicas. En una cámara de visión nocturna, los fotones se convierten en señales eléctricas en un proceso llamado *efecto fotoeléctrico*, y las señales se hacen más fuertes mediante dispositivos llamados *tubos fotomultiplicadores* o *placas microcanal*. (En este capítulo analizamos los procesos que sustentan estos dispositivos.) Luego, los electrones resultantes se vuelven a convertir en luz al chocar con una pantalla fosforescente. El proceso amplifica la luz para que podamos ver las imágenes en la oscuridad, pero elimina cierto detalle y toda la información de color, como se ve en la figura 36.1.

¿La existencia de fotones significa que, después de todo, la luz no es una onda? En este capítulo veremos que la diferencia entre una onda y una partícula no es clara. A escalas muy pequeñas, las ondas pueden actuar como partículas y éstas, a su vez, como ondas. Este descubrimiento dio lugar a cambios revolucionarios en nuestra comprensión de la física, de gran alcance como los cambios en espacio y tiempo descritos por la relatividad. Los capítulos restantes de este libro están dedicados al análisis de estos cambios, conocidos como física cuántica.

36.1 La naturaleza de la materia, el espacio y el tiempo

Por ahora usted ha aceptado la noción de que la materia consta de ciertos constituyentes llamados átomos. Originalmente se pensó que los átomos eran indivisibles, de ahí el nombre de *átomo*, que se deriva de la palabra griega $\alpha\tau o\mu o\varsigma$ (individual, indivisible). Veremos que en realidad tienen subestructura. Consisten en una "nube" de electrones que rodean un núcleo, que a su vez consta

de neutrones y protones. En la actualidad, los físicos creen que los electrones no tienen estructura, pero se sabe que los protones y neutrones constan cada uno de tres quarks, unidos por gluones (vea la sección 21.2). Se considera también que estos quarks y gluones son elementales; es decir, se cree que carecen de subestructura. El tema de los capítulos 37 al 40 trata de cómo los físicos han llegado a estas deducciones y conclusiones. Por ahora, es suficiente señalar que la materia es granular, consta de las piezas indivisibles más pequeñas.

¿Qué hay acerca del tiempo y el espacio, son granulares también? En el capítulo 35 sobre relatividad, encontramos algunos resultados bastante sorprendentes acerca de la conexión entre el tiempo y el espacio. Sin embargo, no hemos considerado aún la pregunta de si el tiempo o el espacio pueden subdividirse en cantidades infinitesimalmente pequeñas. En Cálculo se supone que el tiempo es un continuo, no granular, porque los límites de $\Delta t \rightarrow 0$ se usan para llegar a las definiciones de velocidad y aceleración. La energía y la cantidad de movimiento se relacionan entre sí de formas similares a como se relacionan el espacio y el tiempo. Esto hace surgir de inmediato la pregunta de si la energía y la cantidad de movimiento son cantidades continuas, o si existe algún gránulo de energía más pequeño y alguna cantidad de movimiento elemental. Por ejemplo, una bola que gira tiene energía cinética rotacional. Al incrementar su velocidad angular, incrementamos también su energía cinética. Pero, ¿podemos hacer el incremento infinitesimalmente pequeño, o hay algún cuanto de energía más pequeño que estemos obligados a añadir?

Empecemos esta investigación echando otra ojeada a la luz. La luz puede considerarse como una onda electromagnética, como muestra el capítulo 31. En nuestros estudios de la luz, exploramos primero la óptica geométrica en los capítulos 32 y 33, examinando la formación de imágenes con espejos, lentes y otros instrumentos ópticos. Consideramos la luz sólo como rayos, suponiendo que ésta se mueve a lo largo de líneas rectas. Al considerar, en el capítulo 34, los efectos físicos, como la interferencia y la difracción, nos vimos obligados a invocar el carácter ondulatorio de la luz. En el capítulo 34 se halló que el carácter ondulatorio de la luz entra en juego sólo cuando exploramos las dimensiones espaciales en el orden de la longitud de onda de la luz y que la óptica de rayos es una muy buena aproximación para las dimensiones espaciales que son muy grandes en comparación con la longitud de onda.

¿Nuestra descripción previa de la luz como una onda electromagnética será suficiente para describir los fenómenos que podemos observar? La respuesta es no, como se explica en las siguientes secciones.

36.2 Radiación de cuerpo negro

FIGURA 36.2 La lava volcánica emite luz y es un muy buen ejemplo de un radiador de cuerpo negro.

Cuando hablamos acerca de la radiación térmica en el capítulo 18, se introdujo el concepto idealizado de un cuerpo negro. Esta idealización se puede conocer con bastante exactitud examinando la radiación proveniente de un pequeño orificio en una gran cavidad mantenida a una temperatura T. Si vemos la luz visible que emerge de tal orificio a temperatura ambiente, el orificio se ve negro porque toda la luz que entra a la cavidad se dispersa y, en última instancia, es absorbida por las paredes. Sin embargo, a temperaturas mucho más altas, este orificio comienza a brillar en la parte visible del espectro electromagnético. Los ejemplos diarios de luz visible de radiación de cuerpo negro incluyen el color rojo apagado de los elementos de cocción de estufas eléctricas, la luz brillante del filamento de una bombilla incandescente y la luz del Sol (figura 36.2).

Revisemos primero de forma breve lo que se conoce acerca de esta radiación de cuerpo negro a partir de la física ondulatoria clásica y de las observaciones empíricas. La ley de radiación de Stefan-Boltzmann para la intensidad total I (energía irradiada por unidad de tiempo y área) de esta radiación de cuerpo negro es

$$I = \int_0^\infty \epsilon(\lambda) d\lambda = \sigma T^4. \tag{36.1}$$

Aquí $\epsilon(\lambda)$ es la **emitancia espectral** (con frecuencia llamada *radiación espectral*) como una función de la longitud de onda. Ésta es la potencia irradiada por unidad de área y longitud de onda, y tiene las unidades SI de $[\epsilon(\lambda)] = \text{W m}^{-3}$. La integral se extiende sobre todas las posibles longitudes de onda λ desde cero hasta infinito, y σ es la constante de Stefan-Boltzmann,

$$\sigma = 5.670400(40) \cdot 10^{-8}\ \text{Wm}^{-2}\text{K}^{-4}.$$

La característica más importante de esta ley de radiación (ecuación 36.1) es que la intensidad total de la radiación crece con la cuarta potencia de la temperatura.

En 1896 el físico alemán Wilhelm Wien (1864-1928) derivó empíricamente la **ley de Wien** para describir la emitancia espectral de un cuerpo negro

$$\epsilon_{\text{Wien}}(\lambda) = \frac{a}{\lambda^5} e^{-b/\lambda T} \quad \text{(aproximación para } \lambda \text{ pequeña)}, \tag{36.2}$$

donde a y b son constantes. La ley de Wien tuvo éxito para describir la emitancia espectral de los cuerpos negros para longitudes de onda cortas, pero fue menos exitosa en la descripción de la emitancia espectral para longitudes de onda largas. La **ley de desplazamiento de Wien** resume otro hallazgo experimental importante acerca de la emitancia espectral. Establece que la emitancia espectral tiene un máximo en cierta longitud de onda λ_m, y que su longitud de onda depende de la temperatura,

$$\lambda_m T = \text{constante} = 2.90 \cdot 10^{-3} \text{ K m}. \tag{36.3}$$

Al usar la representación de la luz como una onda electromagnética, el físico inglés Lord Rayleigh y Sir James Jeans se las ingeniaron para deducir una expresión para la emitancia espectral de esta radiación de cuerpo negro,

$$\epsilon_{\text{RJ}}(\lambda) = \frac{2\pi c k_{\text{B}} T}{\lambda^4} \quad \text{(aproximación para } \lambda \text{ grande)}. \tag{36.4}$$

Aquí c es la velocidad de la luz y k_{B} es la constante de Boltzmann,

$$k_{\text{B}} = 1.3806503(24) \cdot 10^{-23} \text{ J/K}.$$

Esta solución, sin embargo, tenía una falla evidente: cuando $\lambda \to 0$, esta expresión diverge. Este problema se conoció después como la *catástrofe ultravioleta* (recuerde que la radiación ultravioleta tiene longitudes de onda pequeñas). Si la ecuación 36.4 fuera correcta para todas las longitudes de onda, entonces la integral de la ecuación 36.1 divergiría y la intensidad irradiada por un cuerpo negro sería infinita a cualquier temperatura. Claramente esto es imposible. No obstante, para longitudes de onda grandes, el resultado obtenido por Rayleigh y Jeans se ajusta a las observaciones experimentales.

A fin de proporcionar una fórmula para la emitancia espectral que se ajuste a las observaciones en todas las longitudes de onda, en 1900 el físico alemán Max Planck tomó un paso radical. Propuso que la energía contenida en la luz, y en toda radiación electromagnética, interactúa con objetos sólidos en paquetes discretos. Planteó la hipótesis de que la energía de un haz es proporcional a la frecuencia de la luz,

$$E = hf, \tag{36.5}$$

donde h es la **constante de Planck** y tiene el valor

$$h = 6.62606876(52) \cdot 10^{-34} \text{ J s}. \tag{36.6}$$

Ya introdujimos la unidad de energía electrón-volt, 1 eV = $1.602178 \cdot 10^{-19}$ J, de modo que la constante de Planck también se puede expresar en términos de las unidades eV s: $h = 4.13567 \cdot 10^{-15}$ eV s.

Como verá después en este capítulo, muchas fórmulas en física cuántica tienen que ver con la constante de Planck dividida entre 2π. Debido a que éste es un fenómeno relativamente común, se acostumbra usar la notación $\hbar$ para denotar esta relación:

$$\hbar \equiv \frac{h}{2\pi} = 1.05457 \cdot 10^{-34} \text{ J s} = 6.5821 \cdot 10^{-16} \text{ eV s}. \tag{36.7}$$

La longitud de onda y frecuencia de la luz están relacionadas todavía con la velocidad vía $c = \lambda f$, así que podemos escribir también, en lugar de la ecuación 36.5,

$$E = hf = \frac{hc}{\lambda}. \tag{36.8}$$

La **ley de radiación de Planck**, hallada por el científico con base en la hipótesis de energía cuantizada, es

$$I_T(f) = \frac{2h}{c^2} \frac{f^3}{e^{hf/k_{\text{B}}T} - 1}. \tag{36.9}$$

Aquí $I_T(f)df$ es la potencia (cantidad de energía por unidad de tiempo) irradiada en el intervalo de frecuencia entre f y $f + df$ por un cuerpo negro a una temperatura T por unidad de área de superficie de la abertura del cuerpo negro y por unidad de ángulo sólido. El nombre para $I_T(f)$ es la *intensidad específica* o **brillantez espectral** y su unidad SI es W m^{-2} sr^{-1} Hz^{-1}. Por ahora,

sólo escribimos el resultado de Planck, pero lo revisaremos después, al final de este capítulo, para entender su dependencia de la frecuencia y la temperatura.

Note que la brillantez espectral no depende de la dirección. La brillantez espectral $I_T(f)$ se puede integrar en todo el hemisferio de las posibles direcciones para obtener la emitancia espectral $\epsilon_T(f)$:

$$\begin{aligned}\epsilon_T(f) &= \int_\Omega I_T(f)\cos\theta\, d\Omega = \int_0^{\pi/2}\left[\int_0^{2\pi} I_T(f)\, d\phi\right]\operatorname{sen}\theta\cos\theta\, d\theta \\ &= I_T(f)\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi/2}\operatorname{sen}\theta\cos\theta\, d\theta \\ &= I_T(f)2\pi\tfrac{1}{2} \\ &= \pi I_T(f).\end{aligned}$$

Por lo tanto, se encuentra que la emitancia espectral es exactamente un factor π más grande que la brillantez espectral,

$$\epsilon_T(f) = \pi I_T(f). \tag{36.10}$$

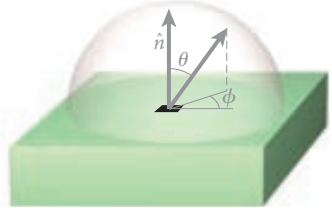


FIGURA 36.3 Radiación de cuerpo negro por un pequeño orificio negro en todas direcciones del hemisferio.

El factor $\cos\theta$ es la primera integral en la proyección del vector normal para el orificio $\hat{n}$ en la dirección de la irradiación, así que $\cos\theta$ representa la reducción efectiva del área de emisión unitaria como una función de un ángulo polar. La integral sobre el ángulo sólido del hemisferio es una integral doble sobre los ángulos θ desde 0 hasta $\pi/2$ y ϕ desde 0 hasta 2π (figura 36.3). Estas integrales se ejecutan fácilmente, como se muestra, porque $I_T(f)$ no depende de los ángulos. Al combinar la ecuación 36.10 con la ecuación 36.9,

$$\epsilon_T(f) = \frac{2\pi h}{c^2}\frac{f^3}{e^{hf/k_BT}-1}. \tag{36.11}$$

La emitancia espectral $\epsilon_T(f)$ tiene las unidades SI de W m^{-2} Hz^{-1}.

Podemos escribir también la brillantez espectral y la emitancia espectral como funciones de la longitud de onda en lugar de la frecuencia. Para hacer esto, se usa $c = \lambda f$, de modo que

$$I_T(\lambda) = I_T(f)\left|\frac{df}{d\lambda}\right| = I_T(f)\left|\frac{d}{d\lambda}\left(\frac{c}{\lambda}\right)\right| = I_T(f)\frac{c}{\lambda^2}.$$

Por lo tanto, la brillantez espectral como una función de la longitud de onda está dada como

$$I_T(\lambda) = \frac{2hc^2}{\lambda^5\left(e^{hc/\lambda k_BT}-1\right)}. \tag{36.12}$$

Sus unidades SI son W m^{-3} sr^{-1}. Como se hizo anteriormente, la emitancia espectral se puede obtener como una función de la longitud de onda integrando la brillantez espectral sobre todos los ángulos de emisión, que da como resultado un factor multiplicativo de π y

$$\epsilon(\lambda) = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5\left(e^{hc/\lambda k_BT}-1\right)}, \tag{36.13}$$

con unidades SI de W m^{-3}. Las cuatro versiones de la ley de Planck (ecuaciones 36.9, 36.11, 36.12 y 36.13) son igualmente válidas. Sin embargo, se debe tener cuidado al hablar de la brillantez espectral o la emitancia espectral. Ellas difieren por un factor de π, como se muestra, porque la emitancia espectral es la integral de la brillantez espectral sobre todos los ángulos de emisión en el hemisferio.

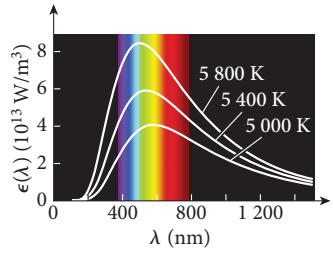


FIGURA 36.4 Emitancia espectral de Planck como una función de la longitud de onda para tres temperaturas: 5 800 K, 5 400 K y 5 000 K, de la parte superior a la inferior.

La figura 36.4 muestra la forma de la ley de radiación de Planck para la emitancia espectral como una función de la longitud de onda para tres temperaturas. La curva superior está calculada para una temperatura de 5 800 K, aproximadamente la temperatura de la superficie del Sol. La función de emitancia tiene un máximo cerca de una longitud de onda de 500 nm (verde-azul), de acuerdo con el resultado de la ecuación 36.3, la ley de desplazamiento de Wien. Las otras dos curvas son para 5 400 K, con un máximo en 540 nm (amarillo-verde) y 5 000 K, con un máximo en 580 nm (naranja). En esta figura están superpuestos los colores del espectro visible.

DEDUCCIÓN 36.1 Leyes de radiación

Demostremos que la leyes de Wien, de Rayleigh-Jeans, de radiación de Stefan-Boltzmann y del desplazamiento de Wien pueden derivarse de la ley de radiación de Planck, ecuación 36.13.

Ley de Wien: para valores pequeños de λ, el argumento de la función exponencial en la ley de Planck se vuelve grande, lo que nos permite escribir

$$\frac{1}{e^{hc/\lambda k_B T}-1} \approx e^{-hc/\lambda k_B T}.$$

Obtenemos entonces una expresión para la ley de Wien como un caso límite de la ley de Planck:

$$\epsilon(\lambda) = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5\left(e^{hc/\lambda k_B T}-1\right)} \approx \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5} e^{-hc/\lambda k_B T},$$

que tiene la misma dependencia de la longitud de onda que la ecuación 36.2, con las constantes definidas ahora como $a = 2\pi hc^2$ y $b = hc/k_B$.

Ley de Rayleigh-Jeans: para valores grandes de λ, el argumento de la función exponencial en la ley de Planck se vuelve pequeño. Podemos ampliar la función exponencial para argumentos pequeños como $e^x \approx 1 + x$. En este caso, tenemos entonces $e^{hc/\lambda k_B T} - 1 \approx hc / \lambda k_B T$, y encontramos para valores grandes de la longitud de onda,

$$\epsilon(\lambda) = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5\left(e^{hc/\lambda k_B T}-1\right)} \approx \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5\left(hc/\lambda k_B T\right)} = \frac{2\pi c k_B T}{\lambda^4},$$

que es exactamente lo que escribimos para la ley de Rayleigh-Jeans en la ecuación 36.4.

Ley de desplazamiento de Wien: para esta ley, necesitamos hallar la longitud de onda para la cual $\epsilon(\lambda)$ alcanza un máximo; es decir, necesitamos tomar la derivada con respecto a la longitud de onda y hallar la raíz. La derivada es

$$\begin{aligned}
\frac{d\epsilon(\lambda)}{d\lambda} &= \frac{d}{d\lambda}\left(\frac{2\pi hc^2}{\lambda^5\left(e^{hc/\lambda k_B T}-1\right)}\right) \\
&= -\frac{10\pi hc^2}{\lambda^6\left(e^{hc/\lambda k_B T}-1\right)} + \frac{2\pi h^2 c^3 e^{hc/\lambda k_B T}}{\lambda^7\left(e^{hc/\lambda k_B T}-1\right)^2 k_B T} \\
&= \frac{2\pi hc^2}{\lambda^7\left(e^{hc/\lambda k_B T}-1\right)^2 k_B T}\left(-5\lambda k_B T\left(e^{hc/\lambda k_B T}-1\right) + hce^{hc/\lambda k_B T}\right).
\end{aligned}$$

Excepto para el caso sin interés de $T \to \infty$, esta expresión puede ser cero sólo si el numerador es cero. Por lo tanto, necesitamos resolver

$$-5\lambda_m k_B T\left(e^{hc/\lambda_m k_B T}-1\right) + hce^{hc/\lambda_m k_B T} = 0,$$

donde λ_m es el valor de la longitud de onda para la cual la ley de radiación de Planck tiene su máximo. Si sustituimos $u = hc/\lambda_m k_B T$, entonces esta ecuación se reduce a

$$5\left(e^u - 1\right) = ue^u \Rightarrow 5 - 5e^{-u} = u.$$

Esta ecuación se puede resolver por simple iteración; por ejemplo, por medio de una hoja de cálculo. La raíz trivial es $u = 0$, pero no estamos interesados en esta solución, que corresponde a una longitud de onda infinita. Por lo tanto, empezamos nuestra iteración en un valor finito, por ejemplo 1, y calculamos $5 - 5e^{-1} = 3.1606$. Entonces usamos este nuevo valor e insertamos de nuevo, encontrando $5 - 5e^{-3.1606} = 4.7880$, y así sucesivamente. Encontrará que muy pronto alcanzará la convergencia y obtendrá

$$u = \frac{hc}{\lambda_m k_B T} = 4.9651 \Rightarrow \lambda_m T = \frac{hc}{k_B 4.9651}.$$

(*continúa*)

(*continuación*)

Al usar los valores de las constantes h, c, k_B, encontramos entonces que

$$\lambda_m T = 2.898 \cdot 10^{-3} \text{ K m},$$

que concuerda por completo con el valor hallado experimentalmente de la ecuación 36.3.

Ley de Stefan-Boltzmann: para obtener la intensidad total irradiada, I, necesitamos integrar la ley de radiación de Planck sobre la longitud de onda, desde cero hasta infinito. Encontramos que:

$$I = \int_0^\infty \epsilon(\lambda) d\lambda = \int_0^\infty \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5 \left(e^{hc/\lambda k_B T} - 1\right)} d\lambda = \frac{2k_B^4 \pi^5}{15h^3 c^2} T^4.$$

Al insertar los valores para la constante de Planck, la constante de Boltzmann y la velocidad de la luz, podemos verificar que la constante de Stefan-Boltzmann está, de hecho, dada por

$$\sigma = \frac{2k_B^4 \pi^5}{15h^3 c^2} = 5.6704 \cdot 10^{-8} \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-4}.$$

36.1 Ejercicio en clase:

El espectro visible de luz se extiende desde aproximadamente 380 nm (violeta-azul) hasta 780 nm (rojo). ¿Cuál es el intervalo correspondiente de energías de fotón en unidades de electrón-voltios?

a) 1.59 eV a 3.26 eV

b) $2.54 \cdot 10^{-19}$ eV a $5.23 \cdot 10^{-19}$ eV

c) $0.38 \cdot 10^{15}$ eV a $0.78 \cdot 10^{15}$ eV

d) 190 eV a 390 eV

De esta manera, vemos que la ley de radiación deducida por Planck contiene las leyes de radiación previamente conocidas como casos especiales, según ilustra la figura 36.5.

La ley de Planck es congruente con la ley de Wien para longitudes de onda cortas y concuerda con la ley de Rayleigh-Jeans en longitudes de onda largas. Este éxito resultó en la aceptación inmediata de la ley de radiación de Planck para cuerpos negros, aun cuando se basa en la suposición radical de estados de energía cuantizados. En particular, uno puede ver de la deducción 36.1 cómo se resuelve la hipótesis cuántica y evita la catástrofe ultravioleta clásica analizada antes (vea la ecuación 36.4): para una determinada frecuencia f, la energía hf es necesaria para crear un fotón. A medida que se incrementa la frecuencia, se vuelve cada vez menos probable que el sistema pueda suministrar la energía necesaria para la creación de un fotón. Esto da lugar a un corte a frecuencias altas y, por lo tanto, a longitudes de onda bajas, en concordancia con las observaciones. Así, la evitación observada de la catástrofe ultravioleta es una consecuencia directa de la naturaleza cuántica de la luz.

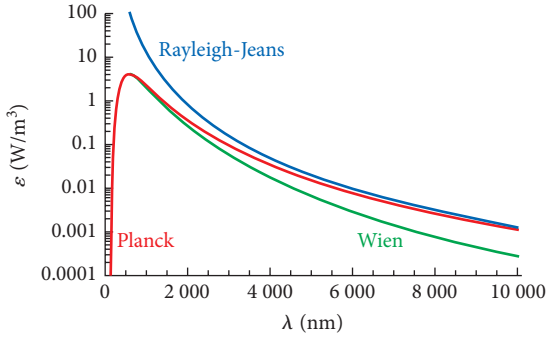


FIGURA 36.5 Comparación de la ley de radiación de Planck, la ley de radiación de Rayleigh-Jeans y la ley de Wien (usando las constantes de la deducción 36.1) para T = 5 000 K.

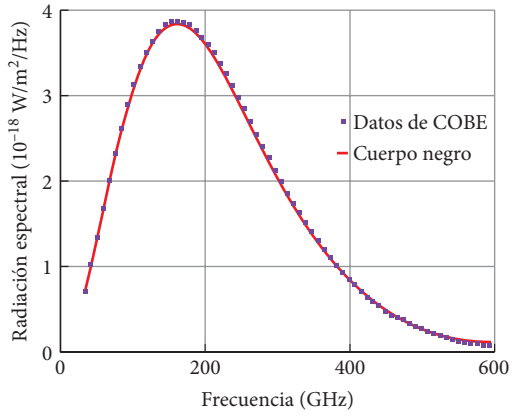


FIGURA 36.6 Datos de la radiación espectral de fotones de fondo de microondas como una función de la frecuencia. Los cuadros azules indican datos obtenidos por el satélite COBE, mientras que la curva roja es un mejor ajuste del espectro de Planck a una temperatura de 2.725 K.

El ejemplo más asombroso de un espectro de cuerpo negro se obtiene observando la radiación de fondo cósmica. Esta radiación es un remanente del Big Bang y es extraordinariamente uniforme en todo el universo. La misión del satélite COBE en 1990 y más recientemente la misión del satélite WMAP han demostrado esto de modo sorprendentemente detallado. Como indica la figura 36.6, la misión COBE halló que la radiación de fondo cósmica es la de un cuerpo negro perfecto a una temperatura de 2.725 ± 0.001 K; es decir, todo el universo es un radiador de cuerpo negro perfecto. George Smoot y John Mather, los líderes del equipo COBE, recibieron el Premio Nobel de Física 2006 por los logros de esta misión de satélite. (Un análisis más detallado de la radiación de fondo cósmica se presenta en el capítulo 40.)

Así como la radiación de cuerpo negro se usó para medir la temperatura del universo, la radiación de cuerpo negro se puede usar para medir la temperatura de objetos sin tocarlos físicamente. Si un objeto está suficientemente caliente, irradiará fotones en el intervalo visible, como se analizó al comienzo de esta sección. Por ejemplo, la temperatura del hierro fundido en una fábrica de acero se puede medir analizando fotones irradiados del hierro fundido al rojo vivo. Los objetos cercanos a la temperatura ambiente irradian fotones principalmente en el intervalo infrarrojo. Los termómetros infrarrojos modernos se pueden usar para medir la temperatura de una persona observando la radiación infrarroja del tímpano de la persona. Los termómetros infrarrojos se usan también para medir la temperatura de alimentos y componentes eléctricos.

36.3 Efecto fotoeléctrico

La hipótesis de Planck de ciertos cuantos de energía discretos más pequeños posibles se vio originalmente como una construcción computacional, no como una revolución real en la física. Sin embargo, este punto de vista cambió en 1905, con la explicación de Einstein del efecto fotoeléctrico. Einstein resolvió el acertijo del efecto fotoeléctrico proponiendo que la luz se comporta como si consistiera en paquetes localizados, o cuantos, de energía-luz. Heinrich Hertz descubrió originalmente el efecto fotoeléctrico en 1886 y Robert A. Millikan lo demostró en forma definitiva en 1916, quien verificó de modo cuantitativo todas las predicciones de Einstein. La explicación de Einstein del efecto fotoeléctrico le hizo ganar el Premio Nobel de Física en 1921. En 1923, Compton demostró de manera concluyente la naturaleza cuantizada de la luz, como veremos en la sección 36.4. El químico estadounidense Gilbert Lewis (1875-1946) acuñó el término **fotón** en 1926 en referencia a esos cuantos de energía-luz. Para el resto de este capítulo, se hará referencia a los fotones como los cuantos de la luz y toda la radiación electromagnética.

En el **efecto fotoeléctrico**, la luz es capaz de liberar los electrones de la superficie de un metal adecuado, creando una corriente eléctrica. Para ver una aplicación práctica del efecto fotoeléctrico, no tenemos más que ver la puerta de un elevador. ¿Cómo detecta esta puerta que alguien está en la entrada? La respuesta es un fotosensor, que por lo común consiste en una fuente de luz y un receptor de luz que utiliza el efecto fotoeléctrico. Si un objeto, tal como una persona, se localiza entre la fuente de luz y el receptor, este último ya no recibe luz y dispara interruptores eléctricos para mantener abierta la puerta del elevador. El mismo principio se aplica a los modernos abridores de puertas de garajes, en los que se requiere usar un fotosensor para evitar aplastar una persona con la puerta al bajar.

Se puede realizar una serie de experimentos para examinar el efecto fotoeléctrico. La figura 36.7 muestra el montaje básico. Del lado izquierdo está una fuente de luz, que podría ser una bombilla, como se muestra, o un diodo emisor de luz (que se utiliza en muchos fotocircuitos) o sólo la luz del Sol. Del lado derecho está un fotosensor, que consta de una pieza de metal (cátodo, forma rectangular) y una placa metálica (ánodo, línea negra) dentro de un recipiente de vidrio al vacío. Un metal que se usa con frecuencia para el fotosensor es el cesio. Este fotosensor es parte de un circuito con una fuente de voltaje y un amperímetro. Entre la fuente de luz y el fotosensor está un filtro que sólo deja pasar un color de luz (azul en este caso.) Los experimentos producen las siguientes observaciones:

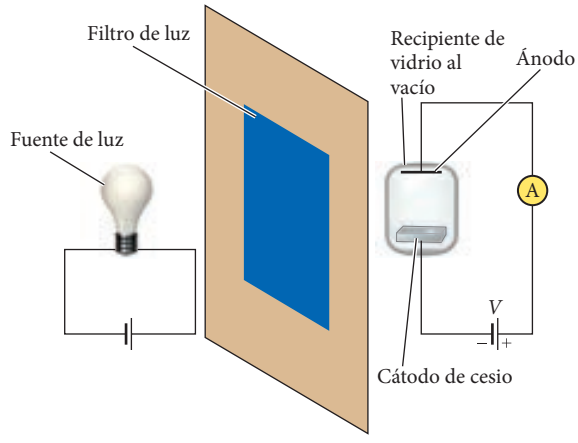


FIGURA 36.7 Diagrama de circuito para el efecto fotoeléctrico.

- Con el voltaje puesto en $V = 0$ y un filtro azul, se detecta una corriente en el amperímetro. Esto indica que los electrones están cruzando el espacio entre el fotometal y la otra placa. Si se incrementa la intensidad de la luz, sube también la corriente medida, indicando que más electrones se mueven en el espacio.
- Con un filtro rojo, ninguna corriente es detectable en el amperímetro. Este hallazgo no cambia como una función de la intensidad de la luz.
- Con un filtro azul y un valor positivo V, la corriente que fluye por el amperímetro aumenta. Conforme cambia el voltaje a valores cada vez más negativos, la corriente medida en al amperímetro se reduce de modo gradual y luego se detiene en algún valor umbral del voltaje.

De estos experimentos, se concluye que los electrones deben liberarse de la superficie del metal cuando la luz choca con él. Estos electrones deben tener una energía cinética, y el máximo de esta energía cinética puede medirse aplicando un voltaje negativo al ánodo (placa superior). Los electrones necesitan vencer este voltaje para cruzar el espacio desde el fotocátodo hasta la placa del ánodo. Si los electrones (carga $q = -e$) empiezan con una energía cinética máxima de $K_{\text{máx}}$ desde la superficie del cátodo y llegan al ánodo con energía cinética cero después de vencer un potencial de $V = -V_0$, entonces, del teorema de trabajo-energía, encontramos:

$$W = \Delta K + \Delta U = (0 - K_{\text{máx}}) + ((-e)(-V_0) - 0) = -K_{\text{máx}} + eV_0 = 0 \Rightarrow$$

$$eV_0 = K_{\text{máx}} = \tfrac{1}{2}mv_{\text{máx}}^2. \qquad (36.14)$$

(La aproximación no relativista $\frac{1}{2}mv^2$ para la energía cinética de los electrones se puede usar aquí, porque los electrones se están moviendo lentamente en este caso.) El potencial V_0 se conoce como *potencial de frenado*, y para un determinado material depende del color de la luz, que implica una dependencia de la frecuencia del potencial de frenado. Medidas minuciosas revelan una dependencia lineal de V_0 en la frecuencia f. Además, debajo de cierta frecuencia, este tipo de potencial se vuelve cero. La luz con una frecuencia menor no es capaz de dar a los electrones en el fotocátodo energía suficiente para escapar de su superficie.

Los problemas conceptuales clave desde el punto de vista de la física ondulatoria clásica pueden resumirse así:

- Normalmente, un haz de luz de cualquier frecuencia puede expulsar electrones de un metal, siempre que la luz tenga suficiente intensidad. Sin embargo, las observaciones muestran que el haz de luz incidente debe tener una frecuencia mayor que el valor mínimo $f_{\text{mín}}$, sin importar su intensidad. La explicación de Einstein fue que la energía del cuanto energía-luz (ahora llamado fotón) es proporcional a la frecuencia, $E = hf$.
- Generalmente, la energía cinética máxima de los electrones expulsados debe incrementarse con la intensidad creciente del haz de luz. Sin embargo, las observaciones muestran que, al aumentar la intensidad del haz de luz, aumenta el número de electrones expulsados por segundo, no su energía; sólo incrementando la frecuencia de la luz aumenta la energía de los electrones expulsados.

El cuadro físico del efecto fotoeléctrico es que un fotón con una energía determinada por la ecuación 36.5 choca con un electrón en la superficie del metal y lo expulsa del material, siempre que el electrón gane energía suficiente para vencer la atracción del electrón al material.

Para un determinado material, se requiere una energía mínima para liberar un electrón de su superficie. Esta energía mínima se llama **función trabajo**, ϕ, y es una constante para un determinado material. La energía cinética máxima que puede tener un electrón después de la colisión con el fotón y ser liberado de la superficie del metal es entonces $K_{\text{máx}} = hf - \phi$. Debido a que $K_{\text{máx}}$ no puede ser negativa, esta ecuación nos dice que hay una frecuencia de luz mínima (umbral)

$$f_{\text{mín}} = \phi/h \tag{36.15}$$

necesaria para que ocurra el efecto fotoeléctrico, congruente con los resultados experimentales. La tabla 36.1 muestra las funciones trabajo y las frecuencias umbral correspondientes y las longitudes de onda de corte para varios materiales. Usando la conexión entre la energía cinética máxima y

Tabla 36.1 Funciones trabajo, las frecuencias mínimas correspondientes y las longitudes de onda máximas para elementos comunes

Elemento	ϕ (eV)	$f_{\text{mín}}$ (10^{15} Hz)	$\lambda_{\text{máx}}$ (nm)	Elemento	ϕ (eV)	$f_{\text{mín}}$ (10^{15} Hz)	$\lambda_{\text{máx}}$ (nm)
Aluminio	4.1	0.99	302	Magnesio	3.7	0.89	335
Berilio	5	1.21	248	Mercurio	4.5	1.09	276
Cadmio	4.1	0.99	302	Níquel	5	1.21	248
Calcio	2.9	0.70	428	Niobio	4.3	1.04	288
Carbono	4.8	1.16	258	Potasio	2.3	0.56	539
Cesio	2.1	0.51	590	Platino	6.3	1.52	197
Cobalto	5	1.21	248	Selenio	5.1	1.23	243
Cobre	4.7	1.14	264	Plata	4.7	1.14	264
Oro	5.1	1.23	243	Sodio	2.3	0.56	539
Hierro	4.5	1.09	276	Uranio	3.6	0.87	344
Plomo	4.1	0.99	302	Cinc	4.3	1.04	288

el potencial de frenado en la ecuación 36.14, encontramos entonces para la dependencia de la frecuencia del potencial de frenado en el efecto fotoeléctrico,

$$eV_0 = hf - \phi. \tag{36.16}$$

EJEMPLO 36.1 Función trabajo

Suponga que está usando un circuito como el que se ilustra en el lado derecho de la figura 36.7 y que usted tiene un fotosensor con un material desconocido como fotocátodo. Al usar luz de longitud de onda 250 nm (ultravioleta), encuentra que tiene que aplicar un potencial de frenado de 2.86 V para eliminar la corriente. Al usar luz de longitud de onda de 400 nm (azul-violeta), usted mide un valor de 1.00 V para el potencial de frenado, y con una longitud de onda de 630 nm (naranja) usted mide un potencial de detención de 0.130 V.

PROBLEMA

¿Cuál es el valor de la función trabajo de este material?

SOLUCIÓN

Quizás es más fácil resolver este problema en forma gráfica. La ecuación 36.16 muestra que el potencial de frenado, la función trabajo y la frecuencia tienen una relación lineal, y debido a que las relaciones lineales pueden dibujarse como líneas rectas, es mejor convertir las longitudes de onda en las frecuencias correspondientes por medio de $f = c/\lambda$. Luego graficamos el potencial de frenado V_0 como una función de la frecuencia para los tres puntos de datos (figura 36.8). Cuando ajustamos una línea recta por estos puntos, la línea nos da un valor de –2.1 V en $f = 0$. Usando la ecuación 36.16, hallamos para la función trabajo:

$$eV_0(f=0) = -\phi \Rightarrow \phi = -eV_0(f=0) = -e(-2.1\text{ V}) = 2.1\text{ eV}.$$

Al examinar la tabla 36.1, podemos ver que el material empleado para este fotosensor es probablemente cesio, el material con la menor función trabajo de todos los elementos listados.

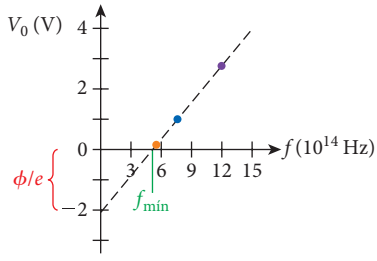


FIGURA 36.8 Potencial de frenado aplicado como una función de la frecuencia de la luz para un material fotosensor particular.

36.1 Oportunidad de autoevaluación

Suponiendo que la función trabajo del ejemplo 36.1 tiene, de hecho, un valor de 2.1 eV, calcule la energía cinética máxima que los electrones emitidos pueden tener en los tres casos dados de luz de diferentes longitudes de onda que inciden en el fotosensor.

En el capítulo 35, acerca de la relatividad, se demostró que la cantidad de movimiento y la energía de cualquier partícula se relacionan mediante $E^2 = p^2c^2 + m^2c^4$. Un fotón tiene masa cero, así que su energía y cantidad de movimiento se relacionan mediante $E = pc$. (Cuando el símbolo p se usa sin flecha, significa la magnitud de la cantidad de movimiento; sin embargo, podemos referirnos a p simplemente como la cantidad de movimiento.) Para la cantidad de movimiento de un fotón podemos escribir entonces, de la ecuación 36.8:

$$p = \frac{E}{c} = \frac{hf}{c} = \frac{h}{\lambda}. \tag{36.17}$$

Por esto, vemos que la cantidad de movimiento y la energía de un fotón son proporcionales a la frecuencia e inversamente proporcionales a la longitud de onda de la radiación electromagnética correspondiente. Un fotón actúa como una partícula, aun cuando se describe mediante una frecuencia. La luz actúa como una onda incluso si consta de partículas llamadas fotones. Esta **dualidad onda-partícula** de la luz es conceptualmente difícil de entender y mantuvo ocupados a físicos y filósofos durante la primera parte del siglo xx.

Varios problemas prácticos están relacionados con detectar fotones simples de luz visible. Primero, como se demostró, cada fotón tiene energía sólo en el intervalo entre 1.6 y 3.3 eV. Expresado en unidades SI, esto está en el intervalo entre $2.6 \cdot 10^{-19}$ y $5.2 \cdot 10^{-19}$ J, una cantidad muy pequeña de energía. Incluso los mejores fotocátodos tienen una eficiencia cuántica de sólo 30% o menos para un

fotón en este intervalo de energía, lo que significa que sólo 30% de los fotones que chocan con el fotocátodo logran en realidad liberar un electrón. Segundo, un electrón liberado representa sólo una carga muy pequeña y, por lo tanto, sólo una corriente muy pequeña. Para registrar con facilidad una corriente medible, se requiere generar muchos electrones de cada fotoelectrón. Muchos dispositivos prácticos realizan esto con tubos fotomultiplicadores.

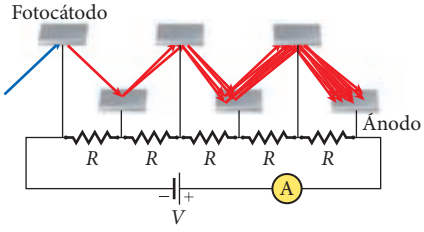


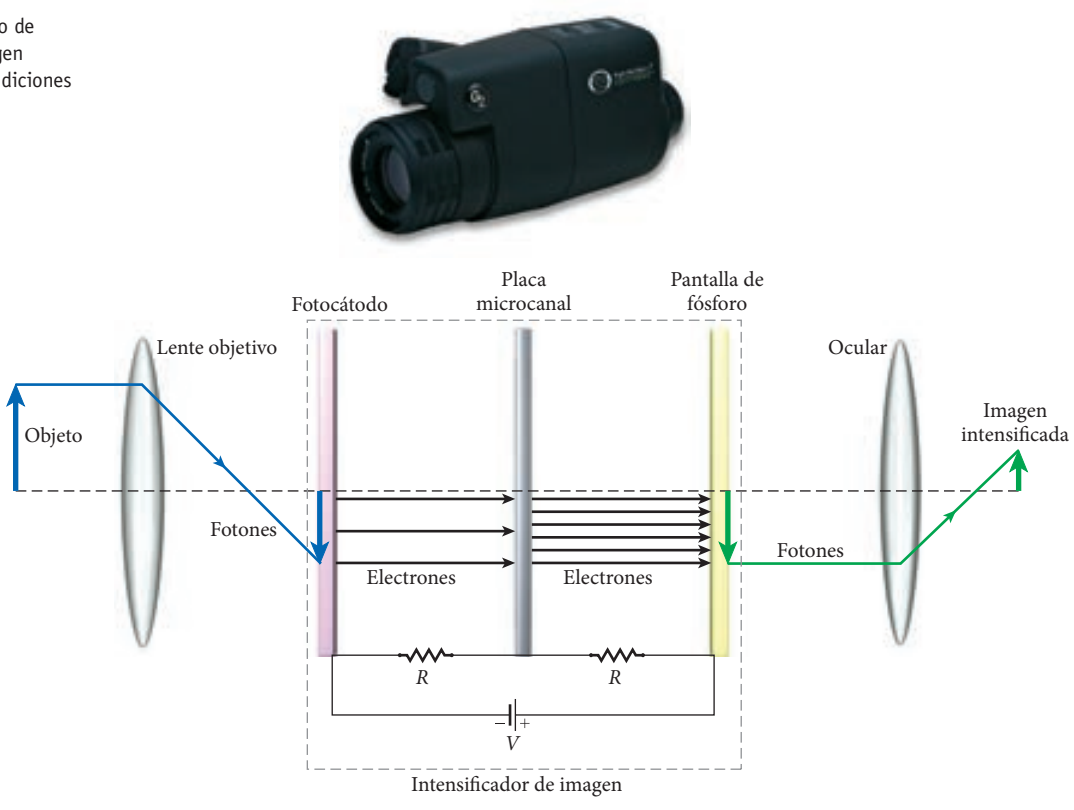
FIGURA 36.9 Esquema de un tubo fotomultiplicador. La flecha azul representa un solo fotón, y las flechas rojas representan electrones.

Un **tubo fotomultiplicador** hace uso del hecho de que un electrón que choca con una superficie metálica con energía cinética del orden de 100 eV suele expulsar varios electrones en el proceso. Por lo tanto, un fotocátodo y un ánodo se combinan en un tubo al vacío con varias placas intermedias, llamados *dínodos*. Cada dínodo se mantiene a una diferencia de potencial de varios cientos de voltios en relación con sus vecinos (figura 36.9). Los tubos fotomultiplicadores disponibles comercialmente tienen cadenas de hasta $n = 14$ y cada dínodo produce en promedio η electrones por cada electrón que choca con él, donde η puede tener valores de hasta 3.5. La ganancia total de tal tubo fotomultiplicador es entonces η^n. Para $n = 14$ y $\eta = 3.4$, por ejemplo, este efecto da como resultado un factor de ganancia de $2.76 \cdot 10^7$; es decir, casi 28 millones de electrones se producen en el ánodo por cada fotoelectrón expulsado del fotocátodo por un solo fotón.

Otra aplicación de la detección de fotones son los dispositivos de visión nocturna, tecnología mencionada al inicio de este capítulo. En la figura 36.10 se muestra un esquema de un dispositivo de visión nocturna.

Un dispositivo de visión nocturna usa un fotocátodo muy parecido a un tubo fotomultiplicador. Sin embargo, en este caso toda la imagen se enfoca en el fotocátodo mediante la lente objetivo. Los fotones incidentes ocasionan que el fotocátodo libere electrones. Una diferencia de potencial de alrededor de 1 000 V acelera estos electrones hacia una placa microcanal que contiene una configuración de millones de canales que funcionan como tubos fotomultiplicadores miniatura, multiplicando el número de electrones por un factor de alrededor de 10^4. Una segunda diferencia

FIGURA 36.10 Un dispositivo de visión nocturna produce una imagen intensificada de un objeto en condiciones de poca luz.



de potencial de alrededor de 1 000 V entre la placa microcanal y una pantalla de fósforo acelera los electrones multiplicados para que choquen en la pantalla y causen la luz verde de emisión donde golpean la pantalla, formando una imagen intensificada. Esta luz es enfocada entonces por el ocular para producir una imagen como la mostrada en la figura 36.1. Este dispositivo de visión nocturna funciona amplificando bajos niveles de luz. Hay otro dispositivo de visión nocturna que usa luz infrarroja emitida por objetos calientes para observarlos en la oscuridad.

Otros métodos se usan también para detectar fotones individuales y convertirlos en una señal eléctrica. Entre éstos, los más notables son los dispositivos de transferencia de carga (CCD, del inglés *charge-coupled devices*) y los dispositivos semiconductores de óxido metálico complementarios (CMOS, del inglés *complementary metal oxide semiconductor*), que forman en la actualidad la base de toda cámara digital y grabadora de video en el mercado. Sin embargo, una comprensión de la física que sustenta un dispositivo CCD o CMOS requiere estudio de semiconductores. En el capítulo 38 acerca de la física atómica se explicará cómo funciona un CCD.

EJEMPLO 36.2 Fotones de un apuntador láser

Un objeto que usted ve emite fotones que viajan desde este objeto hasta sus retinas, donde los fotones disparan señales eléctricas que son enviadas a su cerebro. Consideremos una fuente de luz para comenzar a entender los números de fotones en cuestión.

PROBLEMA

¿Cuál es el número aproximado de fotones emitidos por segundo por un apuntador láser verde de 5.00 mW?

SOLUCIÓN

Los apuntadores láser verdes operan por lo común a una longitud de onda de 532 nm. (Más adelante en este capítulo se verá la razón para este valor.) Una longitud de onda de 532 nm corresponde a una frecuencia de

$$f = \frac{c}{\lambda} = \frac{2.998 \cdot 10^{8}\ \text{m/s}}{5.32 \cdot 10^{-7}\ \text{m}} = 5.635 \cdot 10^{14}\ \text{Hz}.$$

Con la hipótesis de Planck, $E = hf$, podemos calcular ahora la energía contenida en un solo fotón emitido por el apuntador láser verde:

$$E = hf = (6.626 \cdot 10^{-34}\ \text{J s})(5.635 \cdot 10^{14}\ \text{s}^{-1}) = 3.73 \cdot 10^{-19}\ \text{J}.$$

Debido a que el apuntador láser tiene un valor nominal de 5.00 mW, emite 5.00 mJ de energía cada segundo. Así que el número de fotones emitidos en cada segundo es

$$n = \frac{5.00 \cdot 10^{-3}\ \text{J}}{3.73 \cdot 10^{-19}\ \text{J}} = 1.34 \cdot 10^{16}.$$

En otras palabras, este pequeño apuntador láser portátil emite más de trece mil millones de millones de fotones cada segundo.

DISCUSIÓN

El valor de la constante de Planck ya se dio en unidades de eV s, así que la energía de un solo fotón emitido de este apuntador láser verde se puede expresar también en estas unidades:

$$E = hf = (4.13567 \cdot 10^{-15}\ \text{eV s})(5.635 \cdot 10^{14}\ \text{s}^{-1}) = 2.33\ \text{eV}.$$

Ahora usted podría comenzar a entender la utilidad de la unidad de energía eV para tratar con fenómenos atómicos y cuánticos. La escala de energía representativa para este proceso en este campo es el electrón-volt.

36.2 Ejercicio en clase

Usted tiene una fuente de luz de una determinada intensidad y longitud de onda. Usted reduce la longitud de onda mientras deja la intensidad sin cambio. ¿Cuál de las siguientes declaraciones es cierta?

a) Obtendrá más fotones por segundo de la fuente de luz.

b) Obtendrá menos fotones por segundo de la fuente de luz.

c) El número de fotones emitidos por segundo permanecerá sin cambio, pero la energía de cada uno se reduce.

d) El número de fotones emitidos por segundo permanecerá igual, pero se incrementará la energía de cada uno.

e) La cantidad de fotones emitida por segundo no cambiará, cada uno se moverá más lento.

36.2 Oportunidad de autoevaluación

Calcule el número de fotones en el espectro visible emitido cada segundo por nuestro Sol. Para resolver esta tarea, necesita saber que la radiación del Sol tiene una intensidad de 1 370 W/m^2 en la Tierra, que ésta se ubica a una distancia de 148 millones de km del Sol. De esta información usted puede calcular la potencia total de salida del Sol. Entonces, del examen de la figura 36.4, se puede ver que alrededor de $\frac{1}{4}$ de los fotones en la radiación del Sol están en el espectro visible.

36.4 Dispersión de Compton

El análisis del espectro electromagnético en el capítulo 31 consideró los rayos X como las ondas electromagnéticas con frecuencias de aproximadamente 100 a 100 000 veces mayores que las de la luz visible. Con nuestro cuadro actual del espectro electromagnético que consta de fotones, vemos que los fotones de rayos X tienen energías de cientos a cientos de miles de electrón-voltios. Los rayos X se pueden producir acelerando electrones a varios miles de electrón-voltios (varios keV) de energía cinética y luego dispararlos hacia un papel metálico. La desaceleración de los electrones en el papel crea los rayos X. Estos rayos X se llaman **Bremsstrahlung**, que es la palabra alemana para radiación de desaceleración. (Ocurre también otro proceso en el que los átomos se excitan y luego emiten rayos X de ciertas energías; este proceso se analiza en el capítulo 37.) La teoría electromagnética clásica puede hacer ciertas predicciones para la radiación electromagnética de cargas aceleradas, pero una comprensión completa requiere en realidad una teoría llamada **electrodinámica cuántica**, desarrollada en la década de 1950 por los físicos estadounidenses Julian Schwinger (1918-1994) y Richard Feynman (1918-1988), y el físico japonés Sin-Itiro Tomonaga (1906-1979), por la que en 1965 compartieron el Premio Nobel de Física.

Por ahora, considere lo que sucede cuando un rayo X dispersa un electrón. Primero, ¿qué predice el cuadro ondulatorio de luz? Si una onda choca con un pequeño objeto estacionario como un electrón, el principio de Huygens nos dice que una onda esférica se origina a partir del objeto, dispersando (reflejando) la onda entrante. La onda dispersada tiene la misma frecuencia y longitud de onda que la onda entrante. Sin embargo, en 1923, el físico estadounidense Arthur Holly Compton (1892-1962) descubrió que los rayos X dispersan electrones en reposo produciendo rayos X con longitudes de onda más largas que los rayos X originales. Una longitud de onda más grande implica una frecuencia más pequeña y, por lo tanto, una energía y cantidad de movimiento menores para los fotones de rayos X, de acuerdo con la ecuación 36.8.

Si uno acepta que los fotones de luz tienen propiedades como la cantidad de movimiento y la energía parecidas a las de las partículas, entonces una interacción de un rayo X y un electrón se puede analizar como la dispersión de una bola de billar por otra. Debido a que los fotones se mueven a la velocidad de la luz, y a que las energías de rayos X no son insignificantes en comparación con la masa del electrón, tenemos que emplear la dinámica relativista (capítulo 35) y no simplemente las fórmulas desarrolladas en el capítulo 7 sobre cantidad de movimiento y colisiones. Sin embargo, lo que permanece sin cambio es que las leyes de conservación de la energía y de la cantidad de movimiento se usan para llegar al resultado deseado.

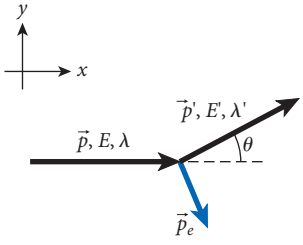


FIGURA 36.11 Conservación de la cantidad de movimiento en la dispersión de Compton.

Llamemos la energía del fotón de rayos X antes de la colisión E y después de ella E'. Entonces las magnitudes de la cantidad de movimiento del fotón correspondientes antes y después de la colisión son $p = E/c$ y $p' = E'/c$. El electrón no tiene cantidad de movimiento antes de la colisión porque se supone que está en reposo. Durante la colisión, recibe una cantidad de movimiento $\vec{p}_e$. Un diagrama del proceso de dispersión se muestra en la figura 36.11. La energía del electrón antes de la colisión es simplemente su energía de reposo $m_e c^2$, y su energía después de la colisión es

$$E_e = \sqrt{\left(p_e c\right)^2 + \left(m_e c^2\right)^2}.$$

La conservación de la energía y la cantidad de movimiento durante la colisión significa, entonces, que

$$\vec{p}' + \vec{p}_e = \vec{p} \tag{36.18}$$

$$E' + E_e = E + m_e c^2. \tag{36.19}$$

La deducción 36.2 muestra que la longitud de onda final del rayo X se puede expresar como

$$\lambda' = \lambda + \frac{h}{m_e c}\left(1 - \cos\theta\right), \tag{36.20}$$

donde θ es el ángulo entre el fotón que entra y el que sale. Ésta es la fórmula para la **dispersión de Compton**, que relaciona la longitud de onda del fotón después de la dispersión con la longitud de onda del fotón incidente.

DEDUCCIÓN 36.2 Dispersión de Compton

Para derivar la ecuación 36.20, aislamos $\vec{p}_e$ en la ecuación 36.18 y E_e en la ecuación 36.19. Para la primera ecuación, esto da como resultado $\vec{p}_e = \vec{p} - \vec{p}'$. Se elevan al cuadrado ambos miembros para obtener

$$p_e^2 = \left(\vec{p} - \vec{p}'\right)^2 = p^2 + p'^2 - 2pp'\cos\theta. \tag{i}$$

Al reordenar y tomar el cuadrado de cada miembro para la ecuación 36.19, se obtiene

$$E_e = E - E' + m_e c^2 \Rightarrow$$

$$E_e^2 = \left(E - E' + m_e c^2\right)^2 \Rightarrow$$

$$p_e^2 c^2 + m_e^2 c^4 = \left(E - E'\right)^2 + m_e^2 c^4 + 2\left(E - E'\right)m_e c^2,$$

donde hemos hecho uso de la relación relativista energía-cantidad de movimiento $E_e^2 = p_e^2 c^2 + m_e^2 c^4$ (vea la sección 35.7) del lado izquierdo de la última línea de este cálculo. Podemos hacer uso también de la relación entre la cantidad de movimiento y la energía $E = pc$ para el fotón y obtener

$$p_e^2 c^2 + m_e^2 c^4 = \left(p - p'\right)^2 c^2 + m_e^2 c^4 + 2\left(p - p'\right)m_e c^3.$$

Al restar el término $m_e^2 c^4$ de ambos miembros y dividir entre un factor común c^2 se obtiene

$$p_e^2 = \left(p - p'\right)^2 + 2\left(p - p'\right)m_e c. \tag{ii}$$

Las ecuaciones (i) y (ii) tienen el mismo lado izquierdo y, por lo tanto, sus lados derechos deben ser iguales también:

$$p^2 + p'^2 - 2pp'\cos\theta = \left(p - p'\right)^2 + 2\left(p - p'\right)m_e c.$$

Al usar $(p - p')^2 = p^2 + p'^2 - 2pp'$, obtenemos

$$p^2 + p'^2 - 2pp'\cos\theta = p^2 + p'^2 - 2pp' + 2\left(p - p'\right)m_e c \Rightarrow$$

$$2pp'\left(1 - \cos\theta\right) = 2\left(p - p'\right)m_e c.$$

Ahora usamos la relación de la ecuación 36.17 entre la cantidad de movimiento y la longitud de onda del fotón, $p = h/\lambda$, y encontramos

$$2\frac{h}{\lambda}\frac{h}{\lambda'}\left(1 - \cos\theta\right) = 2\left(\frac{h}{\lambda} - \frac{h}{\lambda'}\right)m_e c \Rightarrow \frac{h}{m_e c}\left(1 - \cos\theta\right) = \lambda' - \lambda,$$

que es el resultado expresado en la ecuación 36.20.

La relación de las constantes $h/m_e c$ tiene la dimensión de una longitud, como puede verse de la ecuación 36.20. Esta característica de un electrón se llama la **longitud de onda de Compton** del electrón y tiene el valor

$$\lambda_e = \frac{h}{m_e c} = \frac{6.626 \cdot 10^{-34}\ \text{J s}}{(9.109 \cdot 10^{-31}\ \text{kg})(2.998 \cdot 10^{8}\ \text{m/s})} = 2.426 \cdot 10^{-12}\ \text{m}. \tag{36.21}$$

EJEMPLO 36.3 Dispersión de Compton

Un rayo X con una frecuencia de $3.3530 \cdot 10^{19}$ Hz choca con una hoja metálica y el fotón dispersado es detectado a un ángulo de 32.300 grados con respecto a la dirección del rayo X original.

PROBLEMA

¿Cuál es la energía del fotón entrante y la del fotón dispersado, en unidades de eV?

(*continúa*)

36.3 Oportunidad de autoevaluación

Los electrones dentro de un metal no están del todo en reposo, sino que tienen energías cinéticas de unos cuantos eV. ¿Por qué es permisible suponer que el electrón está en reposo en la derivación de la fórmula de dispersión de Compton?

(*continuación*)

SOLUCIÓN

Primero, trabajemos con el fotón entrante. Convertir su frecuencia en energía es una aplicación directa de $E = hf$. Puesto que deseamos saber la respuesta en unidades de eV, debemos usar el valor de la constante de Planck en unidades de eV s:

$$E = hf = (4.13567 \cdot 10^{-15}\ \text{eV s})(3.3530 \cdot 10^{19}\ \text{s}^{-1}) = 1.3867 \cdot 10^{5}\ \text{keV} = 138.67\ \text{keV}.$$

Para hallar la energía del fotón dispersado, necesitamos usar el resultado de la dispersión de Compton (vea la figura 36.11). Para esta ecuación, necesitamos la longitud de onda del fotón incidente, que podemos obtener de la frecuencia por medio de

$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{2.9979 \cdot 10^{8}\ \text{m/s}}{3.3530 \cdot 10^{19}\ \text{s}^{-1}} = 8.941 \cdot 10^{-12}\ \text{m}.$$

Ahora usamos el resultado obtenido para la dispersión de un fotón desde un electrón, incluyendo el valor de la longitud de onda de Compton (ecuación 36.23):

$$\lambda' = \lambda + \frac{h}{m_e c}(1 - \cos\theta) = \left(8.941 \cdot 10^{-12}\ \text{m}\right) + \left(2.426 \cdot 10^{-12}\ \text{m}\right)\left(1 - \cos\left(32.300°\right)\right)$$

$$\lambda' = 9.3164 \cdot 10^{-12}\ \text{m}.$$

Al convertir esta nueva longitud de onda en energía, se obtiene finalmente

$$E' = \frac{hc}{\lambda'} = \frac{(4.13567 \cdot 10^{-15}\ \text{eV s})(2.9979 \cdot 10^{8}\ \text{m/s})}{9.3164 \cdot 10^{-12}\ \text{m}} = 133.08\ \text{keV}.$$

PROBLEMA

¿Cuál es la energía cinética del electrón después de la colisión? ¿Cuál es la magnitud de la cantidad de movimiento del electrón después de la colisión? Suponga que el fotón incidente viajó a lo largo del eje *x* positivo, que el evento de dispersión tiene lugar en el plano *xy*, y use unidades de cantidad de movimiento de keV/*c*.

SOLUCIÓN

La energía se conserva en este evento de dispersión de un fotón desde un electrón. (Esto no sorprende porque la conservación de la energía fue uno de los principios de partida en la deducción de la fórmula de dispersión de Compton.) Así, la energía cinética que el electrón recibe en este proceso de dispersión es simplemente igual a la pérdida de energía que experimenta el fotón:

$$K_e = E - E' = 138.67\ \text{keV} - 133.08\ \text{keV} = 5.59\ \text{keV}.$$

La energía total del electrón es su energía cinética más su energía de reposo, $m_e c^2$,

$$E_e = K_e + m_e c^2 = \sqrt{p_e^2 c^2 + m_e^2 c^4}\,.$$

Al despejar de esta ecuación el valor absoluto del vector de cantidad de movimiento del electrón, encontramos

$$p_e = \frac{1}{c}\sqrt{E_e^2 - m_e^2 c^4} = \frac{1}{c}\sqrt{\left(K_e + m_e c^2\right)^2 - m_e^2 c^4} = \frac{1}{c}\sqrt{K_e^2 + 2K_e m_e c^2} = 75.79\ \text{keV}/c.$$

OTRA SOLUCIÓN

La cantidad de movimiento del electrón también se puede obtener por medio de la conservación de la cantidad de movimiento:

$$\vec{p}_e = \vec{p} - \vec{p}'.$$

Debido a que hemos calculado la energía del fotón antes y después de la colisión, podemos obtener las magnitudes de los vectores cantidad de movimiento de los fotones inicial y final en unidades de keV/*c*:

$$p = E/c = 138.67\ \text{keV}/c$$

$$p' = E'/c = 133.08\ \text{keV}/c.$$

La cantidad de movimiento inicial del fotón, $\vec{p}$, sólo tiene una componente *x*, porque se supone que viajó a la largo del eje *x* positivo. Se deduce que

$$p_x = 138.67\ \text{keV}/c$$

$$p_y = 0.$$

El ángulo del fotón emitido se especificó en el planteamiento inicial del problema como 32.300 grados. Se obtiene entonces para los componentes cartesianos del vector cantidad de movimiento final

$$p'_x = (133.08\ \text{keV}/c)\cos(32.300°) = 112.49\ \text{keV}/c$$
$$p'_y = (133.08\ \text{keV}/c)\ \text{sen}(32.300°) = 71.11\ \text{keV}/c.$$

Así, tenemos para los componentes de la cantidad de movimiento del electrón,

$$p_{e,x} = p_x - p'_x = 138.67\ \text{keV}/c - 112.49\ \text{keV}/c = 26.18\ \text{keV}/c$$
$$p_{e,y} = p_y - p'_y = -71.11\ \text{keV}/c.$$

Ahora podemos obtener el valor absoluto del vector cantidad de movimiento del electrón mediante nuestro procedimiento usual de tomar la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de los componentes,

$$p_e = \sqrt{p_{e,x}^2 + p_{e,y}^2} = 75.78\ \text{keV}/c.$$

Éste es el mismo resultado que se obtuvo antes, que muestra que nuestros dos métodos de solución son congruentes entre sí.

36.4 Oportunidad de autoevaluación

¿Por qué debe tener rayos X para observar el efecto de Compton? Puede explicar por qué este efecto no sería observable para luz visible?

36.5 Naturaleza ondulatoria de las partículas

Hasta aquí, hemos establecido que los fotones son las partículas cuánticas de la luz y de la demás radiación electromagnética. Sin embargo, todo lo que hemos dicho acerca de la naturaleza ondulatoria de la luz todavía es cierto; por ejemplo, podemos demostrar la interferencia y la difracción, que son fenómenos ondulatorios comunes. Considerar la luz como partículas cuánticas no invalida el comportamiento ondulatorio de la luz, del mismo modo que el comportamiento de la luz como un rayo puede verse como un caso límite especial de la descripción ondulatoria más general de la luz.

Dado el carácter cuántico de la luz y el carácter de partícula de las ondas electromagnéticas, ¿las cosas que ordinariamente consideramos partículas, como electrones y átomos, tienen también propiedades de ondas? Esto es exactamente lo que el príncipe Louis de Broglie (1892-1987), un estudiante graduado francés en ese entonces, propuso en 1923. Su tesis de doctorado, de dos páginas, contenía esta hipótesis y le hizo ganar el Premio Nobel de Física en 1929.

Si las partículas tienen carácter ondulatorio, entonces ¿cuál es la longitud de onda apropiada? Para la luz, encontramos (ecuación 36.17) que la cantidad de movimiento de un fotón es $p = h/\lambda$. Así, De Broglie probó lo mismo para partículas y propuso como relevante la longitud de **onda de materia** como onda,

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv\gamma} = \frac{h}{mv}\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}. \qquad (36.22)$$

Esta longitud de onda, la longitud de onda de De Broglie, depende de la masa m y la velocidad v de una partícula. En la ecuación 36.22 se usó la forma relativista de la cantidad de movimiento, $p = mv\gamma$, pero en la bibliografía se presenta con frecuencia la aproximación no relativista

$$\lambda = \frac{h}{mv} \quad \text{(aproximación no relativista)}, \qquad (36.23)$$

descrita como la **longitud de onda de De Broglie**. Como muestra la figura 36.12 para el caso de un electrón, hasta velocidades de 40% de la velocidad de la luz, la aproximación relativista es muy cercana al resultado exacto en la ecuación 36.22.

Como puede verse en la figura 36.12, la longitud de onda de De Broglie de un electrón, inclusive uno que se mueve a 10% de la velocidad de la luz, es del orden de un décimo de un nanómetro. ¿Cuáles son las longitudes de onda características de De Broglie para objetos macroscópicos? En el ejemplo 36.4 se muestra un cálculo.

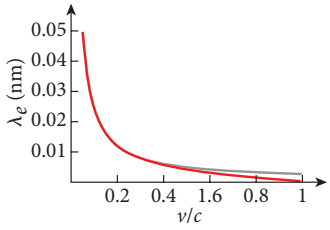


FIGURA 36.12 Longitud de onda de De Broglie de un electrón como una función de su velocidad. Rojo: resultado exacto; gris: aproximación relativista.

36.3 Ejercicio en clase

¿Cuál de las siguientes declaraciones es cierta?

a) Los objetos más masivos y rápidos tienen longitudes de onda de De Broglie más grandes que los objetos menos masivos y más lentos.

b) Los objetos menos masivos y más rápidos tienen longitudes de onda de De Broglie más grandes que los objetos más masivos y lentos.

c) Los objetos más masivos y lentos tienen longitudes de onda de De Broglie más grandes que los objetos menos masivos y más rápidos.

d) Los objetos menos masivos y más lentos tienen longitudes de onda de De Broglie más grandes que los objetos más masivos y más rápidos.

EJEMPLO 36.4 Longitud de onda de De Broglie de una gota de lluvia

El tamaño de las gotas de lluvia varía de alrededor de 0.50 mm de diámetro a 5.0 mm de diámetro. En el extremo inferior de este intervalo de tamaño, las gotas caen con velocidades de 2 m/s; en el extremo superior, con velocidades de hasta 9 m/s.

(*continúa*)

(*continuación*)

PROBLEMA

¿Cuál es el intervalo de longitudes de onda de De Broglie para gotas de lluvia?

SOLUCIÓN

La masa y el diámetro de una gota de lluvia se relacionan por medio de

$$m = V\rho = \tfrac{4}{3}\pi r^3\rho = \tfrac{1}{6}\pi d^3\rho,$$

donde ρ es la densidad, r es el radio y d es el diámetro de una gota. La densidad del agua es $\rho = 1\,000\ \text{kg/m}^3$, de modo que la masa de una gota de $d = 0.50$ mm es $6.5\cdot10^{-8}$ kg, y la masa de una gota de $d = 5.0$ mm es $6.5\cdot10^{-5}$ kg.

Para las velocidades extremadamente pequeñas en consideración en este ejemplo, se justifica usar la aproximación no relativista $\lambda = h/mv$ para la longitud de onda de De Broglie. Obtenemos entonces para la gota de lluvia más pequeña

$$\lambda = \frac{h}{mv} = \frac{6.626\cdot10^{-34}\ \text{J s}}{(6.5\cdot10^{-8}\ \text{kg})(2\ \text{m/s})} = 5\cdot10^{-27}\ \text{m}$$

y para las gotas de lluvia más grandes $\lambda = 1\cdot10^{-30}$ m.

DISCUSIÓN

Incluso las gotas de lluvia más pequeñas y que se mueven más lento tienen longitudes de onda de De Broglie que son muchos órdenes de magnitud más pequeñas que los diámetros de átomos individuales, que son aproximadamente 10^{-10} m. Así, podemos ignorar de modo seguro las implicaciones de la naturaleza ondulatoria de las partículas para objetos macroscópicos. Cualquier objeto que sea lo suficientemente grande para que lo podamos ver a simple vista, y que se mueva con la rapidez suficiente para poder discernir alguna clase de movimiento, tiene una longitud de onda de De Broglie tan pequeña que cancela cualquier observación de fenómenos ondulatorios cuánticos para este objeto.

36.5 Oportunidad de autoevaluación

Construya una gráfica de la longitud de onda de De Broglie de un electrón como una función de su energía cinética, para energías cinéticas entre 1 y 1 000 eV. ¿Hay una diferencia visible en este intervalo de energías si usted usa una aproximación no relativista de $p = \sqrt{2mK}$?

Como hemos visto en el ejemplo de dispersión de Compton, la relación de energía cinética-cantidad de movimiento está dada por

$$p = \frac{1}{c}\sqrt{E^2 - m^2c^4} = \frac{1}{c}\sqrt{(K+mc^2)^2 - m^2c^4} = \frac{1}{c}\sqrt{K^2 + 2Kmc^2}.$$

Por lo tanto, la longitud de onda de De Broglie se puede escribir también como una función de la energía cinética de la partícula:

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{hc}{\sqrt{K^2 + 2Kmc^2}}.$$

Hasta aquí hemos analizado sólo la posibilidad teórica de la naturaleza ondulatoria de las partículas, siguiendo simplemente el postulado de De Broglie. ¿Dónde está la demostración experimental? Antes de realizar esta demostración, es útil volver al capítulo 34, el capítulo de la óptica ondulatoria, y ver lo que hace a una onda ser una onda.

Experimento de doble rendija para partículas

Para proporcionar evidencia experimental de la existencia de la naturaleza ondulatoria de las partículas, es necesario demostrar que los objetos como electrones, neutrones, protones o átomos, que tienen masa y, por lo común, se consideran partículas, pueden exhibir comportamiento como de onda. En el capítulo 34 se demostró que los dos efectos físicos principales que caracterizan a las ondas son la interferencia y la difracción. ¿Qué tipo de experimento podría mostrar interferencia y/o difracción de la materia?

Young pudo demostrar el carácter ondulatorio de la luz al hacer pasar luz por dos rendijas delgadas, separadas una distancia d. El patrón de interferencia producido de esta forma se muestra en la figura 36.13.

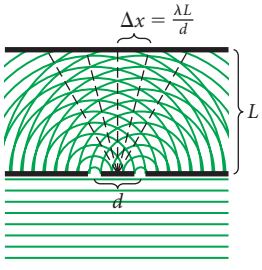


FIGURA 36.13 Interferencia de doble rendija para la luz.

En el experimento de doble rendija, franjas de interferencia brillante aparecen en la pantalla a una distancia L de las rendijas. Siempre que la línea del centro de las dos rendijas a una franja brillante forme un ángulo pequeño con la perpendicular a la pantalla, la distancia desde esta franja a una franja vecina está dada por

$$\Delta x = \frac{\lambda L}{d}. \qquad (36.24)$$

Sin embargo, en la derivación del capítulo 34 de esta fórmula para los máximos de interferencia, fue necesario usar la condición de que el ancho de una rendija es del orden de la longitud de onda de la onda de luz. Para electrones que se mueven con rapidez moderada, la longitud de onda de De Broglie es del orden de un décimo de nanómetro o menos y, por lo tanto, es más de tres órdenes de magnitud más pequeña que la longitud de onda de la luz visible. Producir una doble rendija con separación de rendija d suficientemente pequeña y una sola rendija de ancho a para realizar un experimento de doble rendija para electrones, representa un problema técnico considerable. También, si deseamos usar partículas más pesadas, como protones o neutrones, entonces los problemas técnicos crecen porque la longitud de onda de De Broglie es inversamente proporcional a la masa de una partícula que se mueve a una determinada velocidad.

Por esta razón, un experimento de doble rendija para comprobar el carácter ondulatorio de los electrones no se realizó luego de que De Broglie postuló su revolucionaria idea. En cambio, un experimento realizado en 1927 por los físicos estadounidenses Clinton Davisson (1881-1958) y Lester H. Germer (1896-1971), que trabajaban en Bell Telephone Laboratories en Nueva Jersey, proporcionó la demostración de la existencia física de la naturaleza ondulatoria de las partículas. Davisson y Germer continuaron su trabajo inicial acerca de la dispersión de Bragg de rayos X en cristales y dispersaron un haz de electrones de un cristal de níquel, observando patrones de interferencia similares a los producidos por rayos X. En la actualidad, también se pueden dispersar haces de neutrones en cristales; el físico estadounidense Clifford G. Shull (1915-2001) y el físico canadiense Bertram Brockhouse (1918-2003) recibieron el Premio Nobel de Física de 1994 por ser pioneros en la investigación de estas técnicas. Los rayos X, los electrones y los neutrones proporcionan patrones de dispersión de Bragg equivalentes, demostración de que la naturaleza ondulatoria de las partículas es real.

Sólo desde principios de la década de 1960 ha habido tecnología suficientemente precisa para realizar experimentos de dispersión de doble rendija con los electrones. Por lo que podemos pensar ahora acerca de lo que sucederá en este experimento y luego comparar nuestro razonamiento con el resultado del experimento. La preparación básica del experimento se muestra en la figura 36.14. De la placa se emite un electrón (la placa se calienta para hacer esto, pero no se muestra el calentador aquí) y luego se acelera mediante un voltaje V. Después, pasa por una doble rendija (centro) en su camino hacia la pantalla arriba.

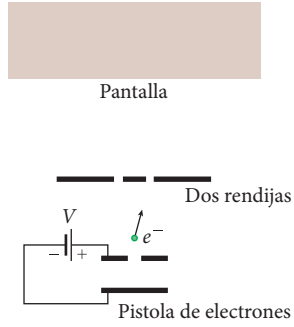


FIGURA 36.14 Montaje experimental para un experimento de doble rendija del electrón.

Si los electrones se comportan como partículas, viajan en líneas rectas desde la pistola de electrones por una de las rendijas y hacia la pantalla. Entonces predecimos que veremos los electrones en dos líneas sobre la pantalla: las imágenes de las dos rendijas. Podemos permitir que los electrones se desvíen un poco cuando pasan por una rendija, de modo que la distribución de los electrones que pasan por cada rendija será un poco dispersa. Debido a que la separación de rendija d es muy pequeña, las dos distribuciones de los electrones que pasan por las dos rendijas se traslaparán en la pantalla. Esta expectativa clásica de comportamiento como partícula conduce entonces a una distribución del número de electrones que chocan con cierta región de la pantalla que se bosqueja en la figura 36.15*a*). Aquí la distribución de los electrones que pasan por la rendija izquierda se muestra en azul, y en rojo la de los electrones que pasan por la rendija derecha. En color verde se indica la suma de las dos, la intensidad total de la distribución que debe registrarse si se corrobora nuestra expectativa de comportamiento parecido al de la partícula.

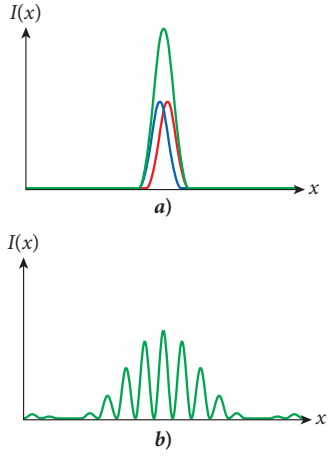


FIGURA 36.15 Distribución de intensidad (número de electrones que chocan con la pantalla por unidad de longitud) a lo largo de la pantalla en un experimento de doble rendija del electrón. *a*) Expectativa clásica de comportamiento tipo partícula; *b*) expectativa si los electrones muestran características de la naturaleza ondulatoria de las partículas.

Por otro lado, si los electrones muestran características como de onda, entonces la intensidad debe estar gobernada por los efectos combinados de la interferencia y la difracción, justo como se observó para la luz en el capítulo 34 sobre óptica ondulatoria. En este caso (compare la sección 34.9), la intensidad como una función de la coordenada x a lo largo de la pantalla debe ser

$$I(x) = I_{\text{máx}} \cos^2\left[\frac{\pi d}{\lambda L}x\right]\left[\frac{\lambda L}{\pi a x}\operatorname{sen}\left[\frac{\pi a}{\lambda L}x\right]\right]^2. \qquad (36.25)$$

Aquí d es la separación de rendija, a es el ancho de cada una de las rendijas y L es la distancia entre la doble rendija y la pantalla. Ésta es la terminología usada en el experimento de interferencia de Young con luz, pero ahora λ es la longitud de onda de De Broglie del electrón (ecuación 36.22). La función $I(x)$ de la ecuación 36.25 se bosqueja en la figura 36.15*b*).

La figura 36.16 muestra que el patrón de electrones que chocan con la pantalla (manchas amarillas) podría parecerse al de la distribución de intensidad dada en la ecuación 36.25. Para este cálculo, se usó la longitud de onda de De Broglie de 12.2 pm, una separación de rendija de 3.0 nm, un ancho de rendija de 1.0 nm y una distancia a la pantalla de 1.0 m. La parte inferior

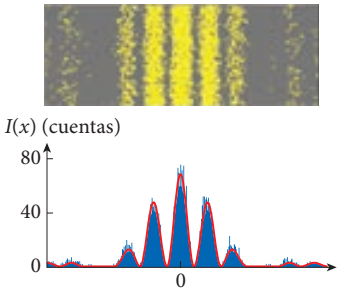


FIGURA 36.16 Conexión entre choques de electrones individuales en la pantalla (manchas amarillas en la parte superior) e histograma de cuenta (azul, parte inferior), con distribución de intensidad predicha (curva roja).

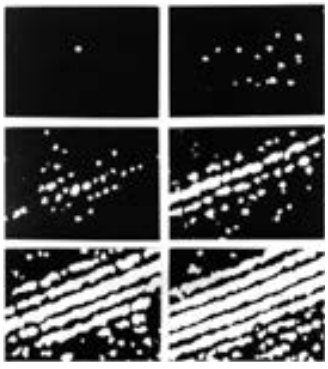


FIGURA 36.17 Patrón de interferencia experimental del electrón con doble rendija a medida que se forma con el tiempo.

de esta figura muestra el histograma de conteo; es decir, el número de electrones que chocan en un intervalo dado de la coordenada x a lo largo de la pantalla. Superpuesto en rojo sobre el histograma de conteo azul está la distribución de intensidad de la ecuación 36.25.

¿Cuál es el resultado del experimento real? Los electrones pueden ser disparados por las rendijas y en la pantalla individualmente, así que se puede observar que el patrón emerge como una función del tiempo. P. G. Merli, y colaboradores, realizaron en 1976 este experimento; el resultado se muestra en la figura 36.17. El panel inferior derecho ilustra el resultado de este experimento, con las franjas de interferencia claramente visibles. El experimento demuestra en forma clara que los electrones presentan fenómenos de interferencia como de ondas.

Sin embargo, la misma figura deja ver más: se puede ver que cada electrón deja una marca al chocar con una cierta área muy localizada de la pantalla. Por lo tanto, tampoco es cierta la idea de que cada electrón se distribuye de algún modo sobre la pantalla, proporcional a la distribución de intensidad total.

Debido a que los fotones tienen propiedades de partículas, se podría esperar que los fotones que chocan con las dobles rendijas exhibieran la granularidad mostrada en la figura 36.17. Cuando se realiza el experimento de doble rendija con un fotón a la vez, se observa un patrón similar al mostrado para los electrones de la figura 36.17.

Así, ¿qué hace a un electrón decidir a dónde ir? Ésta es la pregunta central de la física cuántica. Entender la respuesta nos dirá la mayor parte de lo que es esencial acerca del mundo cuántico atómico.

¿Son esenciales ambas rendijas para que surja este patrón de interferencia? En otras palabras, ¿el electrón se mueve de alguna manera por ambas rendijas al mismo tiempo? Si una rendija está cerrada, el patrón de interferencia sobre la pantalla desaparece, y sólo se produce un máximo: la imagen de la rendija. El resultado corresponde entonces a la curva roja o azul de la figura 36.15*a*), dependiendo de la rendija que se cubra.

¿Qué pasa si, en cambio, fuera posible medir por cuál rendija se mueve el electrón sin cerrar la otra rendija? Quizás esto se podría realizar usando el hecho de que el electrón tiene una carga y, por lo tanto, representa una corriente cuando se mueve por una rendija. Tal vez se podría medir esta corriente conforme el electrón se mueve por una rendija.

36.4 Ejercicio en clase

Antes de ir más adelante, veamos si puede inferir el resultado de medir por cuál rendija pasa el electrón. Si realizamos la medición de la corriente que representa el electrón pasando por las rendijas, ¿cuál de los siguientes será el resultado?

a) Exactamente un medio de cada electrón pasa por cada una de las rendijas.

b) Cada electrón pasa por sólo una rendija. Los electrones que pasan por la rendija izquierda causan la parte izquierda del patrón de interferencia, y los electrones que pasan por la rendija derecha causan la parte derecha.

c) Cada uno de los electrones pasa por sólo una rendija. Los electrones que pasan por la rendija izquierda causan la parte derecha del patrón de interferencia, y los electrones que pasan por la rendija derecha causan la parte izquierda.

d) Cada uno de los electrones pasa por sólo una rendija, pero cuando se mide qué electrón pasa por cuál rendija, se destruye el patrón de interferencia en la pantalla y se observa sólo el máximo central en ésta.

Encontramos que cualquier intento de asociar un electrón con una rendija particular destruye el patrón de interferencia. Este resultado debe ser más aceptable una vez que exploremos más a fondo el carácter ondulatorio de los electrones y otros objetos que normalmente consideramos partículas.

36.6 Relación de incertidumbre

¿Con cuánta precisión es posible medir las propiedades físicas como localización, cantidad de movimiento, energía o tiempo? Además, ¿con qué precisión se pueden medir en forma simultánea? Esta pregunta nunca se considera en mecánica clásica, donde se supone que todas las cantidades dinámicas se pueden medir con precisión arbitraria con instrumentación mejorada.

Sin embargo, en el área cuántica subatómica, donde las partículas exhiben carácter de onda (ondas de materia de De Broglie) y donde las ondas se comportan como partículas (fotones), la respuesta no es tan simple. Por ejemplo, ¿cómo se puede especificar el lugar preciso de una onda? Quizá más importante, ¿el proceso de medir una propiedad física de un objeto cuántico influye el resultado de esa medición, así como las mediciones futuras? Por ejemplo, cuando medimos la posición de un objeto, registramos por lo general las ondas de luz emitidas desde ese objeto. No obstante, esas ondas de luz emitidas también llevan cantidad de movimiento, como lo hemos visto en este capítulo. Por lo tanto, podemos anticipar que el proceso de medir la posición de una partícula y su cantidad de movimiento no puede hacerse en forma simultánea con precisión arbitraria.

Sea Δx la incertidumbre en una medición de la posición de una partícula y Δp_x, la incertidumbre en la medición de su cantidad de movimiento, en el mismo sentido en el que se hace en estadística. En esta disciplina, el resultado de una serie de mediciones independientes de una cantidad se cita en términos del valor medio, que es el promedio de las mediciones, más/menos la desviación estándar, que es una medida del ancho de la distribución de las mediciones. Cuando se realiza una medición física en el laboratorio, el resultado debe expresarse en términos del valor promedio más/menos la incertidumbre en la medición. Esta incertidumbre puede ser de origen estadístico o sistemático, pero por ahora no estamos interesados en esta distinción.

La sorprendente declaración que surge de la física cuántica es que la cantidad de movimiento y la posición de un objeto no pueden medirse de forma simultánea con precisión arbitraria. Mientras más preciso intentemos medir la cantidad de movimiento de un objeto, menos precisa es la información sobre su posición, y viceversa. Esta declaración física se plasma en términos matemáticos en la forma de la **relación de incertidumbre de Heisenberg**,

$$\Delta x \cdot \Delta p_x \geq \tfrac{1}{2}\hbar. \tag{36.26}$$

En 1927, el físico alemán Werner Heisenberg (1901-1976) descubrió esta relación y causó un cambio revolucionario en nuestra comprensión del proceso de medición, así como de nuestra capacidad fundamental para conocer el mundo físico. El capítulo 37 volverá a esta relación de incertidumbre y se utilizará para hacer cálculos. Por ahora, sólo deseamos incentivar esta relación y, para hacerlo, usaremos las mismas consideraciones sugeridas por Heisenberg en su artículo original. Esta deducción heurística usa el denominado microscopio de rayos gamma.

DEDUCCIÓN 36.4 Microscopio de rayos gamma y la relación de incertidumbre

Si usted desea ver algo en un microscopio, tiene que reflejar luz del objeto y capturarla en las lentes del microscopio. El tamaño mínimo Δx del objeto que aún puede resolver con el microscopio está limitado por la difracción (vea el capítulo 34), según se determina mediante

$$\Delta x = \frac{\lambda}{2 \operatorname{sen} \alpha} \approx \frac{\lambda \ell}{d}. \tag{i}$$

Aquí λ es la longitud de onda de la luz y α es el ángulo de abertura (figura 36.18). En esta figura, d es el tamaño de la abertura de la lente del microscopio y ℓ es la distancia entre el objeto y la lente, que se supone que es grande en comparación con la abertura de la lente, entonces $2 \operatorname{sen}\alpha \approx d/\ell$. Para resolver tamaños pequeños, necesitamos emplear luz con una longitud de onda corta, es decir, rayos gamma. Estos fotones de rayos gamma llevan una cantidad de movimiento $p = h/\lambda$ (vea la ecuación 36.17).

Al iluminar nuestro objeto (un electrón) con rayos gamma (círculo amarillo, que indica un haz que apunta hacia la página), los fotones rebotan del objeto y son desviados hacia la lente vía dispersión de Compton. En un caso extremo, un fotón puede rebotar en el electrón y desviarse al borde derecho de la lente. Este fotón tiene una cantidad de movimiento $\vec{p}_{\gamma 1}$, como se muestra en la figura. Su componente de la cantidad de movimiento en la dirección x es $p_{\gamma 1,x} = p_{\gamma 1} \operatorname{sen}\alpha = h \operatorname{sen}\alpha/\lambda$. El electrón recibe la componente de la cantidad de movimiento x opuesta $p_{e1,x}$, que apunta a la izquierda, debido al impacto hacia atrás. En el otro extremo, un fotón recibe cantidad de movimiento $\vec{p}_{\gamma 2}$ después de la colisión con el electrón y se dispersa hacia el borde del microscopio, que causa un retroceso del electrón con la misma magnitud que antes, pero en la dirección opuesta.

(*continúa*)

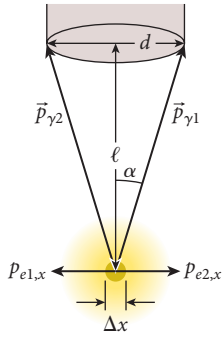


FIGURA 36.18 Configuración geométrica de un microscopio de rayos gamma y las cantidades de movimiento de interacción fotón-electrón.

(*continuación*)

Podemos detectar un fotón que ha entrado al microscopio, pero no a lo largo de la distancia *d*. Esto significa que es indeterminado qué retroceso recibió el electrón. Así, la cantidad de movimiento del electrón tiene una incertidumbre de

$$\Delta p_x = 2\left|p_{\gamma 1,x}\right| = \frac{2h \operatorname{sen} \alpha}{\lambda}. \tag{ii}$$

Al combinar esta ecuación con (i), hallamos

$$\Delta p_x = \frac{2h \operatorname{sen} \alpha}{\lambda} = \frac{h}{\Delta x}.$$

Encontramos que el producto de la incertidumbre mínima en el tamaño del electrón y la incertidumbre del momento del electrón es la constante de Planck, *h*.

DISCUSIÓN

Es posible que sienta que el argumento anterior tiene que ver con una discusión acalorada, y en cierto grado así es. La respuesta que encontramos es un factor de 4π mayor que la respuesta exacta para el producto mínimo de la cantidad de movimiento y las incertidumbres de coordenada dadas en la ecuación 36.26. Sin embargo, una relación numérica exacta no es el punto del ejemplo del microscopio de rayos gamma. En cambio, muestra un cierto límite inferior de las incertidumbres en la coordenada y la cantidad de movimiento correspondiente que puede observarse simultáneamente. Esto por sí mismo es un hecho asombroso y una consecuencia de la física cuántica.

Heisenberg expresó también otra relación de incertidumbre, para las incertidumbres en la medición de la energía de un objeto, ΔE, y la incertidumbre en medir el tiempo, Δt. Es formalmente similar a la relación de incertidumbre coordenada-cantidad de movimiento de la ecuación 36.26 y dice

$$\Delta E \cdot \Delta t \geq \tfrac{1}{2}\hbar. \tag{36.27}$$

DEDUCCIÓN 36.4 Incertidumbre energía-tiempo

De la relación de incertidumbre coordenada-cantidad de movimiento, es directo deducir la relación tiempo-energía para una partícula libre no relativista. Para tal partícula, la energía es totalmente energía cinética y, por lo tanto, la incertidumbre en la energía es

$$\Delta E = \Delta\left(\frac{p^2}{2m}\right) = \frac{\Delta\left(p^2\right)}{2m} = \frac{2p\Delta p}{2m} = v\Delta p.$$

La incertidumbre en el tiempo está dada por

$$\Delta t = \frac{\Delta x}{v}.$$

Al multiplicar estos dos resultados, encontramos que:

$$\Delta E \cdot \Delta t = (v\Delta p)\cdot(\Delta x / v) = \Delta x \cdot \Delta p \geq \tfrac{1}{2}h,$$

donde hemos usado la ecuación 36.26 en el último paso.

La relación de incertidumbre energía-tiempo estipula que la conservación de la energía clásica puede ser violada por cierta cantidad de energía para algún intervalo de tiempo, porque el estado cuántico podría no tener un valor de energía definido. Sin embargo, mientras más grande sea la "violación" de la conservación de la energía, más corto puede ser el intervalo de tiempo para esta "violación".

¿Estas relaciones de incertidumbre entran en conflicto con nuestra experiencia diaria? En otras palabras, ¿qué tan importantes son las limitaciones fundamentales impuestas por la relación de incertidumbre? Examinemos un ejemplo.

EJEMPLO 36.5 Intento de deshacerse de una infracción por exceso de velocidad

PROBLEMA

Cuando usted conduce en una autopista alemana, encuentra que algunas secciones tienen en realidad un límite de velocidad. Ocasionalmente la policía alemana coloca trampas de velocidad en estas secciones. Miden la velocidad del vehículo y toman una fotografía del conductor al mismo tiempo, como prueba de que en realidad tienen a la persona correcta que comete el delito. Una estudiante alemana de física recibe una fotografía de ella y su automóvil (BMW 318Ci, masa 1 462 kg, incluyendo al conductor y el combustible del tanque), con una notificación de que estaba conduciendo a 132 km/h en una zona de límite de velocidad de 100 km/h. Ella observa que la fotografía que tomó la policía es muy definida y fija su posición hasta una incertidumbre de 1 mm. Ella argumenta que la relación de incertidumbre evita que la policía determine de manera precisa su velocidad y, por lo tanto, no debe ser infraccionada, o por lo menos no obtener una por más de 30 km/h sobre el límite de velocidad, lo que ocasionaría que perdiera su licencia de conducir. ¿Tendrá éxito esta estrategia?

SOLUCIÓN

Si el juez sabe física, la estudiante no tendrá éxito. Aquí está la razón: si se conoce la masa del automóvil con suficiente precisión, entonces la incertidumbre en la velocidad se determina de la incertidumbre de la cantidad de movimiento como

$$\Delta v = \frac{1}{m}\Delta p.$$

Por medio de la relación de incertidumbre, encontramos la incertidumbre en la cantidad de movimiento como $\Delta p \geq \frac{1}{2}\hbar/\Delta x$, lo que nos da un valor de incertidumbre en la velocidad de

$$\Delta v = \frac{1}{m}\Delta p \geq \frac{\hbar}{2m\Delta x}.$$

Al usar la constante (vea la ecuación 36.7) $\hbar = 1.05457 \cdot 10^{-34}$ J s y los valores de $\Delta x = 10^{-3}$ m y $m = 1\,462$ kg dada en el problema, encontramos numéricamente

$$\Delta v \geq \frac{1.05457 \cdot 10^{-34}\ \text{J s}}{2(1\,462\ \text{kg})(10^{-3}\ \text{m})} = 3.6 \cdot 10^{-35}\ \text{m/s}.$$

El resultado es que la restricción de la incertidumbre mínima de la medición en la velocidad debido a la relación de incertidumbre es 35 órdenes de magnitud, demasiado pequeña para ser útil como defensa.

36.5 Ejercicio en clase

En el ejemplo 36.5, si los demás parámetros permanecen iguales, pero la masa del automóvil es el doble del valor expresado, entonces la incertidumbre resultante en la velocidad habría sido

a) la misma.

b) la mitad de la del ejemplo.

c) un cuarto de la del ejemplo.

d) el doble de la del ejemplo.

e) cuatro veces la del ejemplo.

36.6 Oportunidad de autoevaluación

¿Con qué precisión tendría que arreglarse la posición del automóvil del ejemplo 36.5 para que la estudiante tuviera éxito con su afirmación de que no debería retirársele su licencia de conducir debido a que la incertidumbre en la velocidad tenía que ser mayor que 2.00 km/h?

La relación de incertidumbre es quizás el resultado más importante analizado en este capítulo y tiene consecuencias de largo alcance. La relación de incertidumbre establece un límite fundamental acerca de cuán precisamente podemos medir y, por lo tanto, conocer algo acerca de nuestro mundo. Para objetos macroscópicos, el efecto de la relación de incertidumbre se puede ignorar de modo seguro en casi todas las aplicaciones. Éste no es el punto. En cambio, el punto es que existe un límite irremontable con la precisión de las mediciones de pares de variables, como la cantidad de movimiento y la posición o la energía y el tiempo. El ejemplo del microscopio de rayos gamma parece implicar que el intento de medir la ubicación imparte de algún modo un simple retroceso en el objeto que iba a medirse. Pero en el mundo cuántico, los objetos caracterizados normalmente como partículas tienen carácter ondulatorio, así como entendemos que una onda tiene carácter de partícula. Básicamente, la relación de incertidumbre se deriva de esta dualidad partícula-onda. Esto se analizará con más detalle en el capítulo 37, donde aprenderemos cómo calcular las propiedades con las herramientas de la mecánica cuántica.

36.7 Espín

Experimento de Stern-Gerlach

En 1920, dos físicos alemanes, Otto Stern (1885-1969) y Walther Gerlach (1889-1979), realizaron uno de los experimentos más importantes en la historia de la física cuántica. En este experimento, intentaron distinguir entre la descripción clásica y la cuántica de los átomos.

La configuración básica del experimento de Stern-Gerlach se muestra en la figura 36.19. Un horno produce un gas de átomos de plata (eléctricamente neutros). Se permite que estos átomos escapen del horno por un orificio y formen un "haz" de átomos de plata, que se mueven a lo largo de una recta (puntos verdes en la figura). Los átomos de plata entran entonces a un intenso campo magnético no homogéneo, creado por un imán como el que se muestra, y continúan hacia una pantalla.

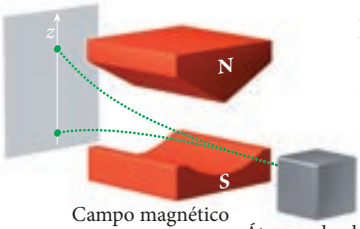


FIGURA 36.19 Preparación básica del experimento de Stern-Gerlach.

En el capítulo 28, sección 28.5, se hizo alusión al hecho de que los átomos pueden tener un momento magnético

$$\vec{\mu} = -\frac{e}{2m}\vec{L},$$

donde $\vec{L}$ es la cantidad de movimiento angular. En la sección 28.5 se consideró el momento magnético debido sólo a un cambio en una órbita circular, y la cantidad de movimiento angular fue angular orbital. En el capítulo 27, sección 27.6, se demostró que la energía potencial de un dipolo magnético en un campo magnético es $U = -\vec{\mu}\cdot\vec{B}$. La fuerza está dada entonces como el valor negativo del gradiente de la energía potencial. En un campo magnético que cambia sólo como una función de la coordenada z, la fuerza es

$$F_z = -\frac{\partial}{\partial z}\left(-\vec{\mu}\cdot\vec{B}\right) = \mu_z \frac{\partial B}{\partial z}.$$

Stern y Gerlach intentaron determinar si era cuantizada la cantidad de movimiento angular orbital. Enviar átomos con un momento magnético por un campo magnético no homogéneo causa una desviación del haz, debido a la interacción del gradiente del campo $\partial B/\partial z$ con la componente z del momento magnético del átomo, μ_z. Desde el punto de vista clásico, el momento magnético puede tener cualquier valor a lo largo del eje z en el intervalo entre $-|\vec{\mu}|$ y $+|\vec{\mu}|$, que debe producir una línea en la pantalla que corresponde a todas las desviaciones posibles. Sin embargo, en un cuadro cuántico, sólo son posibles los valores discretos de la componente z de la cantidad de movimiento angular, que producirían sólo puntos discretos en la pantalla, separados por áreas vacías, como se ilustra en la figura 36.19.

Sabemos ahora que la cantidad de movimiento angular orbital de un átomo de plata en su estado basal es cero, esto se mostrará en el capítulo 38, donde se calculan los estados de los átomos y sus cantidades de movimiento angulares orbitales. De esta manera, si en este experimento se hubiera medido la separación del haz de átomos de plata debido sólo a su cantidad de movimiento angular orbital, el experimento habría sido una falla. Sin embargo, la cantidad de movimiento angular total del átomo *no* es sólo angular orbital. Además, cada partícula elemental en el átomo tiene un momento angular intrínseco, que no tiene equivalente clásico. El momento angular intrínseco se llama **espín**.

Espín de partículas elementales y el principio de exclusión de Pauli

Las partículas elementales tienen cantidad de movimiento angular intrínseco característico, o espín. Hay dos grupos fundamentalmente diferentes de partículas elementales: las que tienen valores enteros (en múltiplos de la constante de Planck $\hbar$) de espín y las que tienen valores semienteros. Algunas partículas elementales tienen espín 0, pero para nuestros propósitos aquí, contamos esto como un espín entero.

Las partículas elementales con espines semienteros se llaman **fermiones**, en honor del físico italiano Enrico Fermi (1901-1954). Los fermiones incluyen el electrón, el protón y el neutrón; en otras palabras, los bloques de construcción de la materia que nos rodea. Un fermión con espín $\frac{1}{2}\hbar$ puede venir en dos estados cuánticos de espín diferentes, indicados por $+\frac{1}{2}\hbar$ y $-\frac{1}{2}\hbar$, que por convención representan la proyección de su espín sobre el eje de coordenadas z. Encontraremos otros números cuánticos en los siguientes capítulos, pero por ahora todo lo que necesitamos saber es que las partículas de espín $\frac{1}{2}\hbar$ vienen en dos variedades, las cuales por lo común se llaman *espín arriba* y *espín abajo*.

Las partículas elementales con valores enteros de espín se llaman **bosones**, en honor del físico indio Satyendra Nath Bose (1894-1974). Los fotones que se introdujeron al principio de este capítulo como cuantos de luz, son ejemplos de bosones y tienen espín $1\hbar$.

En los capítulos 39 y 40 sobre partículas elementales y física nuclear, volveremos al espín y daremos otros ejemplos de espines semienteros y enteros de partículas elementales e intentaremos hallar un principio de organización más general. Por ahora, podemos tratar las dos clases de partículas fundamentalmente diferentes, bosones y fermiones, como conceptos de trabajo.

Una regla extremadamente importante para los fermiones es el **principio de exclusión de Pauli**: ningún par de fermiones puede ocupar el mismo estado cuántico al mismo tiempo y en el mismo lugar. En cualquier átomo dado, ningún par de fermiones puede tener números cuánticos exactamente idénticos. Debido a que la energía está cuantizada, cada estado cuántico de energía en un determinado sistema puede ser ocupado, a lo sumo, por dos fermiones: un espín arriba y otro espín abajo. En los capítulos restantes de este libro, volveremos una y otra vez a las consecuencias de este principio de exclusión de Pauli. En el capítulo 37 se introducen las funciones de onda y luego se demuestra que las funciones de onda de dos partículas para fermiones y bosones tienen fundamentalmente simetrías diferentes. En el capítulo 38 se demostrarán los efectos del principio de exclusión de Pauli en la construcción de átomos multielectrón y la tabla periódica resultante de los elementos. En los capítulos 39 y 40 se demostrará que este principio da lugar a la energía de Fermi dentro del núcleo.

36.8 Espín y estadística

En el capítulo 19 se presentó la función de distribución de probabilidad para partículas idénticas *clásicas*. Para estas partículas idénticas, la función de distribución se llama distribución de Maxwell-Boltzmann,

$$g(E)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{1}{k_{\mathrm{B}}T}\right)^{3/2}\sqrt{E}e^{-\frac{E}{k_{\mathrm{B}}T}},$$

donde E es la energía, T es la temperatura y k_{B} es la constante de Boltzmann. (En la derivación de la distribución de Maxwell-Boltzmann, examinamos sólo la distribución de energía cinética de moléculas en un gas, pero esta función es válida para todas las distribuciones de energía de partículas clásicas.) En esta derivación se ignoran los efectos cuánticos. Ahora deseamos examinar cómo cambian esta distribución los efectos cuánticos.

El resultado de Maxwell-Boltzmann se puede volver a escribir de una manera un poco diferente para partículas en estados de energía discretos E_i. Para un total de N partículas en un sistema, el número esperado de partículas con energía E_i es N_i, y la fracción esperada de partículas en el estado de energía E_i es $n_i = N_i/N$, donde

$$n_i=\frac{N_i}{N}=\frac{g_i e^{-E_i/k_{\mathrm{B}}T}}{Z}=\frac{g_i}{e^{(E_i-\mu)/k_{\mathrm{B}}T}}. \tag{36.28}$$

Aquí g_i es la degeneración del estado de energía E_i, es decir, el número de estados diferentes en el sistema que tienen la misma energía E_i. La cantidad μ se llama el *potencial químico* y tiene las mismas unidades que la energía. El potencial químico es la cantidad por la que la energía del sistema cambiaría si se añadiera una partícula, manteniendo fijas las demás propiedades del sistema. La cantidad Z que hemos introducido se llama la **función de partición**,

$$Z=\sum_i g_i e^{-E_i/k_{\mathrm{B}}T}. \tag{36.29}$$

La función de partición codifica las propiedades termodinámicas del sistema, y tomando las derivaciones apropiadas de la función de partición, se pueden reproducir muchas de las propiedades del sistema.

En la derivación de la distribución de Maxwell-Boltzman se supuso que cada una de las partículas del ensamble es una partícula clásica. Lo que queremos dar a entender por *clásica* es que todas las partículas son distinguibles entre sí. Sin embargo, las partículas cuánticas son indistinguibles de partículas parecidas. (Por ejemplo, un protón no puede ser distinguido de otro protón.) Así, la función de distribución tiene que modificarse de modo apropiado.

Para ver cómo puede funcionar esto en la práctica, consideremos la forma más simple de distribuir dos partículas en dos estados diferentes. Etiquete estos estados como a y b (figura 36.20). Primero, consideremos el caso de partículas distinguibles, marcadas 1 y 2. Ésta es la **distribución de Maxwell-Boltzmann** clásica. En este caso, hay cuatro configuraciones diferentes de nuestro sistema. Podemos tener ambas partículas en el estado a, podemos tener la partícula 1 en el estado a y la par-

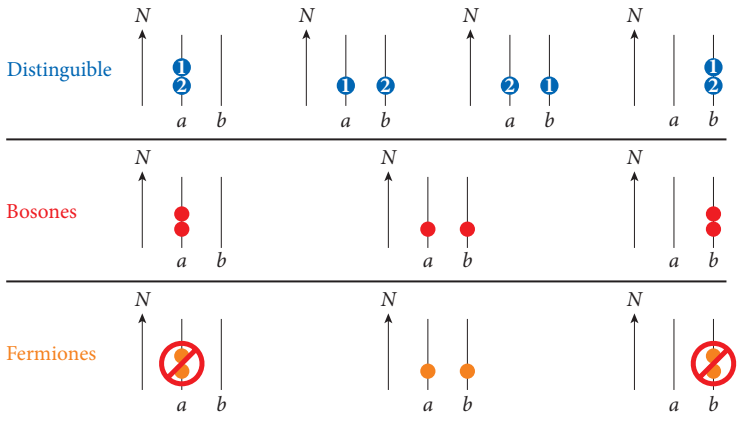


FIGURA 36.20 Distribución de dos partículas en dos estados distintos.

tícula 2 en el estado *b*, podemos tener la partícula 1 en el estado *b* y la partícula 2 en el estado *a*, y por último, podemos tener ambas partículas en el estado *b*. Esto significa que nuestro sistema de dos partículas puede tener cuatro estados distintos (configuraciones) en los que puede estar, si dos partículas son distinguibles. A continuación, considere dos bosones de espín cero, partículas cuánticas indistinguibles. Esto se conoce como la **distribución de Bose-Einstein**. En este caso, ambas partículas pueden estar en el estado *a* o ambas en el estado *b*, como en el caso de partículas distinguibles. Sin embargo, si una de ellas está en el estado *a* y la otra en el estado *b*, entonces no importa cuál es cuál, porque son indistinguibles. Por lo tanto, el sistema de dos partículas tiene sólo tres estados diferentes para bosones, y no cuatro como en el caso para partículas distinguibles. Por último, el caso más fácil se obtiene para dos fermiones idénticos de espín-$\frac{1}{2}$ (por ejemplo, dos electrones con "espín arriba"). Este caso se llama **distribución de Fermi-Dirac**. El principio de exclusión de Pauli dice que estos dos fermiones idénticos no pueden ocupar el mismo estado cuántico. (En el panel inferior de la figura 36.20, este hecho se indica por el signo de *Prohibido*, un círculo rojo con una diagonal cruzada, sobre las dos configuraciones en las que ambos fermiones residirían en el mismo estado.) En este caso, el sistema bipartícula de fermiones idénticos puede estar sólo en una configuración, donde los estados cuánticos *a* y *b* están ocupados cada uno por un fermión.

Volvamos ahora al caso más complicado de la distribución de energía para el caso de un sistema de 5 partículas que comparten un total de 6 cuantos de energía en un modelo unidimensional. Para las partículas clásicas, los 6 cuantos de energía pueden ser compartidos por una partícula que lleva los 6 cuantos de energía y las otras 4 partículas cada una con energía cero. Esta compartición de la energía total de 6 cuantos se puede escribir como 6 = 6+0+0+0+0+0. Puesto que las partículas son distinguibles, tenemos que estar al tanto de cuál de los 5 lleva los 6 cuantos, y esta partición de energía puede suceder entonces de 5 maneras distintas. La energía puede distribuirse también como 6 = 5+1+0+0+0+0. Cada una de las 5 partículas puede ser la portadora de los 5 cuantos, y luego cada una de las 4 partículas restantes puede llevar la restante. Así, esta partición de energía particular puede suceder en $g_i = 5\ 4 = 20$ maneras distintas. En la figura 36.21 mostramos todas las particiones posibles de esos 6 cuantos de energía en 5 partículas. Los números en azul sobre cada diagrama muestran la cantidad de formas distintas en las que puede suceder la misma

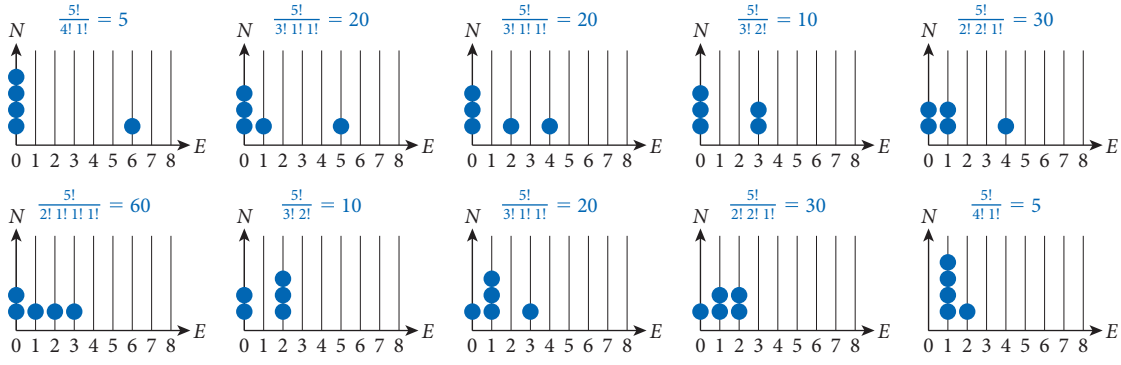


FIGURA 36.21 Todas las posibles particiones de 6 cuantos de energía para 5 partículas distinguibles.

configuración intercambiando las posibles partículas. El número total de particiones de energía diferentes entre las 5 partículas es la suma de los números listados arriba de cada panel y es 210.

Ahora podemos calcular la probabilidad para cada estado de energía que será ocupado contando a cuántas particiones ocurre cada estado de energía, multiplicado por la frecuencia con la que ocurre esta partición y luego dividiendo el resultado entre el número total de particiones.

Esto se hace en la figura 36.22 y el resultado se representa mediante los cuadros azules. Por ejemplo, consideremos la probabilidad para una partícula que lleva 4 cuantos de energía. Las únicas particiones para las cuales el estado $E = 4$ es poblado por una partícula se muestran en los paneles medio y derecho de la figura 36.21 y sólo una partícula está en cada uno de los estados $E = 4$. El panel de en medio representa 20 estados y el panel de la derecha 30 estados diferentes. Puesto que el número total de estados es 210, la probabilidad de hallar ocupado el nivel $E = 4$ es $f(4) = (1 \cdot 20 + 1 \cdot 30)/210 = 0.238$. Las probabilidades de ocupación para los otros valores de la energía se encuentran de la misma forma.

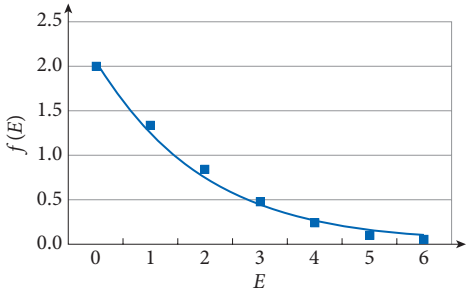


FIGURA 36.22 Ocupación promedio para cada estado de energía, que corresponde a las particiones de la figura previa.

En la figura 36.22 se muestra también el resultado (línea azul) de la función exponencial analítica de la ecuación 36.28. Es notable que para tal número pequeño de partículas y estados de energía, el límite exponencial ya esté también aproximado. La temperatura T y el potencial químico μ que aparecen en la ecuación 36.28 pueden extraerse de la condición de que la suma sobre las probabilidades de ocupación tiene que totalizar el número de partículas (5 en este caso) y que la suma de los productos de los tiempos de probabilidad de ocupación por la energía tiene que sumar el número total de cuantos de energía en el sistema (6 en este caso).

Ahora podemos preguntar cómo tienen que cambiar estas consideraciones si estamos tratando con partículas indistinguibles. Para bosones, hemos hecho ya la mayor parte del trabajo, porque podemos arreglar los bosones como en la figura 36.21. Sin embargo, puesto que los bosones son indistinguibles, las permutaciones de las diferentes partículas no producen nuevos estados. Por lo tanto, los factores de peso que cuentan el número de estados para una determinada configuración de partículas entre estados de energía son siempre 1 para cada panel en la figura 36.21. Por ello, los bosones tienen sólo 10 particiones de energía, en lugar de las 210 halladas para partículas distinguibles. Si ahora deseamos calcular la probabilidad para la ocupación del estado $E = 4$, entonces encontramos que ésta es $f(4) = (1+1)/10 = 0.2$.

La distribución resultante para bosones idénticos se muestra en la figura 36.23 (símbolos rojos) y se compara con el caso clásico (línea azul) que recién analizamos. Las distribuciones son notablemente similares, pero aparecen importantes diferencias pequeñas, que no sólo son artefactos numéricos. Por ejemplo, la ocupación del nivel $E = 0$ se incrementa ligeramente en el caso del bosón relativo a las partículas distinguibles clásicas. Puesto que cada vez más partículas se añaden al sistema, este efecto se volverá cada vez más pronunciado. Esto es de nuevo una manifestación del hecho, ya analizado, de que a los bosones les gusta ocupar por lo general los mismos estados que a otros bosones.

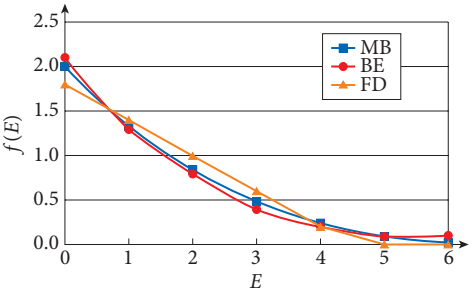


FIGURA 36.23 Comparación de las distribuciones de Maxwell-Boltzman (MB), Bose-Einstein (BE) y Fermi-Dirac (FD) obtenidas para el problema de compartir 6 cuantos de energía entre 5 partículas.

Para el problema de distribuir los mismos 6 cuantos de energía sobre 5 fermiones, podría parecer que los fermiones pueden ser distribuidos en los estados de energía como en la figura 36.21. Sin embargo, el principio de exclusión de Pauli no permite esto. Cada estado de energía puede ser ocupado, a lo sumo, por un fermión espín arriba y un fermión espín abajo. Por lo tanto, la ocupación en cada nivel no puede pasar de 2. Esto elimina siete particiones de la figura 36.21, porque éstas tienen tres o más partículas en el mismo estado de energía. Las únicas tres particiones que quedan son las que se muestran en la figura 36.24. Para ilustrar, suponga que el sistema tiene tres fermiones espín arriba y dos espín abajo. Para las particiones izquierda y derecha en la figura 36.24, sólo un fermión está en un estado individualmente ocupado, que por lo tanto tiene que ser el espín arriba sin pareja. El panel de en medio muestra tres fermiones en estados ocupados por uno solo, y dos de éstos

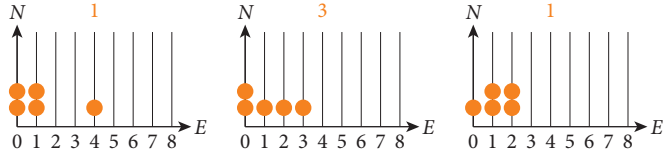
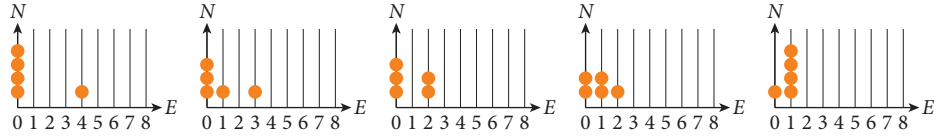


FIGURA 36.24 Posibles formas de distribuir 6 cuantos de energía entre 5 fermiones.

tienen que ser espín arriba y uno espín abajo. Puesto que cada uno de los tres estados de energía puede contener el fermión espín arriba, el panel de en medio representa un total de tres estados. Esto significa que para este sistema están disponibles un total de 5 estados. Calcular la ocupación del nivel $E = 4$ ahora da como resultado $f(4) = 1/5 = 0.2$ (que es, por probabilidad, el mismo valor que para los bosones). La línea anaranjada de la figura 36.23 muestra las ocupaciones promedio para todos los niveles de energía. La ocupación para el estado $E = 0$ se suprime en el caso de los fermiones respecto a las partículas clásicas.

36.6 Ejercicio en clase

¿Cuáles de las siguientes distribuciones son formas posibles de distribuir 4 cuantos de energía sobre 5 fermiones con espín $\frac{1}{2}\hbar$?



36.7 Oportunidad de autoevaluación

Produzca una gráfica de los números de ocupación promedio para distribuir 8 cuantos de energía sobre 5 partículas. ¿Cuántos estados en total están disponibles en los casos de fermiones, bosones y partículas clásicas?

Después de haber realizado este ejercicio para un conjunto muy pequeño de partículas, terminemos esta sección escribiendo las distribuciones para un conjunto mucho más grande de partículas presentes en un sistema físico. Para los bosones, esta distribución límite de Bose-Einstein del número de partículas en un determinado estado de energía E_i es

$$N_i = \frac{1}{e^{(E_i-\mu)/k_B T} - 1}. \tag{36.30}$$

Para fermiones, la distribución de Fermi-Dirac es

$$N_i = \frac{g_i}{e^{(E_i-\mu)/k_B T} + 1}. \tag{36.31}$$

donde g_i es la degeneración del estado i. (En nuestro ejemplo anterior de fermión, este número es $g_i = 2$ para cada estado, porque debido al principio de exclusión de Pauli, cada estado puede ser ocupado sólo por un fermión espín arriba y uno espín abajo.)

Algunas veces estas distribuciones se expresan por medio de la definición de la actividad absoluta,

$$z = e^{\mu/k_B T}.$$

La distribución de Bose-Einstein se escribe entonces como

$$N_i = \frac{1}{e^{E_i/k_B T}/z - 1},$$

y la distribución de Fermi-Dirac es

$$N_i = \frac{g_i}{e^{E_i/k_B T}/z + 1}.$$

Ambas funciones de distribución se aproximan a la distribución de Maxwell-Boltzmann para actividad absoluta insignificantemente pequeña, $z \ll 1$.

Para estados de energía que están suficientemente cercanos entre sí, los valores discretos de los estados de energía E_i pueden ser reemplazados por una variable de energía continua E. Entonces, la probabilidad de hallar una partícula en energía E en el límite de Maxwell-Boltzmann puede escribirse como

$$f_{MB}(E) = \frac{1}{ae^{E/k_B T}}, \tag{36.32}$$

donde a es una constante de normalización. Esta constante de normalización es una función del potencial químico y la degeneración. Del mismo modo, la probabilidad de hallar una partícula en la energía E en el caso de Fermi-Dirac puede escribirse como

$$f_{FD}(E) = \frac{1}{ae^{E/k_B T} + 1}. \tag{36.33}$$

La distribución de Fermi-Dirac con $g_i = 2$ se grafica en la figura 36.25 como una función de la relación de la energía divida entre el potencial químico. La función se muestra para tres tempera-

turas distintas. Para $k_B T \ll \mu$, esta función se aproxima a una función escalón que cae de un valor de 2 a 0 en $E = \mu$. Para temperaturas más altas, esta transición de ocupación alta a ocupación baja se vuelve cada vez menos compleja.

Para el caso de Bose-Einstein,

$$f_{BE}(E) = \frac{1}{ae^{E/k_B T} - 1}. \tag{36.34}$$

Como se expresó, los fotones son bosones y, por lo tanto, están sujetos a las estadísticas de Bose-Einstein. Para el caso especial de fotones, el potencial químico es cero y, en consecuencia, la constante de normalización en la ecuación 36.34 tiene el valor $a = 1$. Si la energía del fotón se aproxima a cero, entonces $e^{E/k_B T}$ tiende al valor 1, y desaparece el denominador en la ecuación 36.34. Esto significa que la ocupación de estados con muy baja energía puede incrementarse sin límite para los fotones.

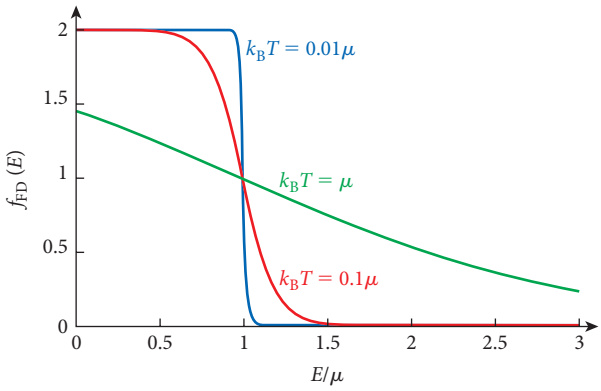


FIGURA 36.25 Distribución de Fermi-Dirac para tres temperaturas distintas.

Examinemos de nuevo la fórmula de radiación de Planck (ecuación 36.9) para la brillantez espectral como una función de la longitud de onda $I_T(f) = 2hc^{-2} f^3 / \left(e^{hf/k_B T} - 1\right)$. Puesto que $E = hf$ para fotones, el denominador contiene el factor $\left(e^{E/k_B T} - 1\right)$, que hemos obtenido para la distribución de Bose-Einstein para fotones. Así, la brillantez espectral de Planck puede volverse a escribir ahora como una función de la energía del fotón,

$$I_T(E) = \frac{2E^3}{h^2 c^2 \left(e^{E/k_B T} - 1\right)} = \frac{2E^3}{h^2 c^2} f_{BE}(E). \tag{36.35}$$

En consecuencia, la fórmula de radiación obtenida por Planck dice que la brillantez espectral como una función de la energía del fotón es proporcional a la tercera potencia de la energía por la probabilidad de Bose-Einstein de hallar un fotón en esa energía.

Condensado de Bose-Einstein

En su artículo original en 1924, Bose analizó el espectro de cuerpo negro para fotones. Einstein amplió este trabajo en el mismo año para átomos con espín entero. Einstein observó que, a temperatura muy baja, una gran fracción de los átomos va hacia el estado cuántico de energía más bajo: "Una parte se condensa, el resto permanece como un 'gas ideal saturado'." Para que esto suceda, los átomos deben estar lo suficientemente cerca de sus vecinos como para que sus ondas de De Broglie (vea la ecuación 36.23) se traslapen entre sí. Se puede demostrar que esta condición implica, para la densidad ρ de átomos por unidad de volumen, que $\rho \cdot \lambda^3 > 2.61$, donde λ es la longitud de onda de De Broglie.

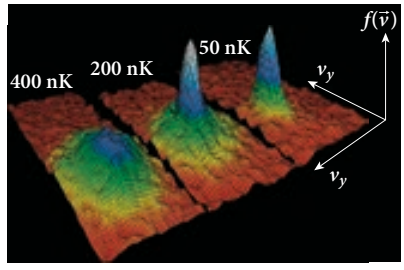


FIGURA 36.26 Condensación de Bose-Einstein de átomos de rubidio en una trampa magnética. El grupo de Wieman-Cornell produjo este cuadro en 1995 y se incluyó en su conferencia Nobel. (Los autores del libro añadieron los ejes.) El panel de en medio muestra la apariencia del condensado de Bose-Einstein. En el panel derecho, casi todos los átomos están en el condensado.

¿Cómo podemos lograr obtener un condensado de Bose-Einstein (CBE) en el laboratorio? Carl Wieman y Eric Cornell usaron una trampa magnética para colectar átomos de rubidio, que forman bosones de espín 1 a bajas temperaturas y en un intenso campo magnético. Usaron un enfriamiento láser para reducir la temperatura, pero esto fue insuficiente para alcanzar la temperatura de transición para el CBE. Al reducir gradualmente la profundidad de la trampa, permitieron que los átomos con energías más altas escaparan de la trampa, dejando atrás sólo los átomos de menor energía. Con este método de enfriamiento evaporativo se las arreglaron para enfriar sus átomos a temperaturas por debajo de unos cuantos nK. Luego, apagaron su trampa y permitieron que se expandieran los átomos atrapados. Un gas ideal simple de átomos se expandirá debido al movimiento térmico, pero el CBE se muestra como una segunda característica que se expande sólo a la tasa mínima requerida por el principio de incertidumbre de Heisenberg. Poco tiempo después, obtuvieron la imagen de la nube expandida, que por esta época había alcanzado una extensión espacial del orden de 0.2 mm, y encontraron la distribución mostrada en la figura 36.26. En esta figura se observan los resultados de tres experimentos distintos a diferentes temperaturas. Resulta claro que el cuadro a 200 nK es cualitativamente diferente del de 400 nK. A 200 nK el pico central indica la presencia del CBE. El panel derecho muestra la situación a una temperatura de 50 nK, en la que ahora en esencia los átomos de rubidio son parte del CBE.

Sólo seis años después de este descubrimiento, este trabajo de CBE dio como resultado el Premio Nobel de Física en 2001 para Wieman y Cornell, que compartieron con Wolfgang Ketterle, cuyo grupo había realizado un trabajo similar sobre el CBE para otros sistemas al mismo tiempo. El estudio del CBE florece ahora en muchos laboratorios alrededor del mundo y continuamos aprendiendo muchos hechos asombrosos acerca de los átomos, condensados y mecánica cuántica.

LO QUE HEMOS APRENDIDO | GUÍA DE ESTUDIO PARA EXAMEN

- La constante de Planck es $h = 6.62606876(52) \cdot 10^{-34}$ J s, y la energía de un fotón es $E = hf$.
- La ley de radiación de Planck para la potencia irradiada en el intervalo de frecuencia f y $f + df$, la brillantez espectral como una función de la frecuencia, es

$$I_T(f) = \frac{2h}{c^2} \frac{f^3}{e^{hf/k_B T} - 1}.$$

  Ésta evita la divergencia ultravioleta que hace no físicos a sus predecesores clásicos en la región de alta frecuencia, y contiene las leyes de radiación clásicas como casos límite.
- La brillantez espectral como una función de la longitud de onda es

$$I_T(\lambda) = \frac{2hc^2}{\lambda^5 \left(e^{hc/\lambda k_B T} - 1 \right)}.$$

- La emitancia espectral se relaciona con la brillantez espectral mediante un factor multiplicativo simple de π, $\epsilon_T(f) = \pi I_T(f)$.
- La integración de la emitancia espectral sobre todas las frecuencias (o longitudes de onda) produce la intensidad radiada, $I = \int_0^\infty \epsilon(\lambda) d\lambda = \sigma T^4$ con la constante de Boltzmann

$$\sigma = \frac{2k_B^4 \pi^5}{15h^3 c^2} = 5.6704 \cdot 10^{-8} \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-4}.$$

- Lo que consideramos normalmente una onda tiene carácter de partícula. El efecto fotoeléctrico se explica con la hipótesis cuántica asignando propiedades de partícula al fotón, el cuanto elemental de luz. Esta hipótesis cuántica da la dependencia correcta de la frecuencia y el potencial de frenado, $eV_0 = hf - \phi$, donde ϕ es la función trabajo. La función trabajo es una constante que depende del material usado.
- El efecto de Compton describe la longitud de onda λ' del fotón después de que un fotón de longitud de onda λ se dispersa por un electrón como

$$\lambda' = \lambda + \frac{h}{m_e c}(1 - \cos\theta).$$

- La longitud de onda de Compton de un electrón es

$$\lambda_e = \frac{h}{m_e c} = 2.426 \cdot 10^{-12} \text{ m}.$$

- Lo que normalmente consideramos materia tiene también características de onda. La longitud de onda de De Broglie se define como

$$\lambda = \frac{h}{p}.$$

  Esto se puede demostrar realizando experimentos de interferencia tipo doble rendija con electrones. Con los electrones, encontramos la misma clase de patrones de interferencia que para los fotones.
- La relación de incertidumbre de Heisenberg estipula que el producto de la incertidumbre en la cantidad de movimiento por la incertidumbre en la posición tiene una cota inferior absoluta, $\Delta x \cdot \Delta p_x \geq \frac{1}{2}\hbar$. La relación de incertidumbre energía-tiempo es $\Delta E \cdot \Delta t \geq \frac{1}{2}\hbar$.
- Las partículas cuánticas elementales tienen una propiedad intrínseca llamada espín, que tiene las dimensiones de una cantidad de movimiento angular. El espín está cuantizado, dividiendo las partículas en dos categorías: fermiones con espines que son múltiplos semienteros de $\hbar$, y bosones con espines que son múltiplos enteros de $\hbar$.
- El principio de exclusión de Pauli establece que ningún par de fermiones pueden ocupar el mismo estado cuántico al mismo tiempo en el mismo lugar. En cualquier átomo dado, ningún par de fermiones puede tener exactamente números cuánticos idénticos.
- Los bosones pueden condensarse a baja temperatura de tal modo que una fracción muy importante de ellos ocupa el mismo estado cuántico.

TÉRMINOS CLAVE

semitancia espectral, p. 1172
ley de Wien, p. 1173
ley de desplazamiento de Wien, p. 1173
constante de Planck, p. 1173
ley de radiación de Planck, p. 1173
brillantez espectral, p. 1173
fotón, p. 1177
efecto fotoeléctrico, p. 1177
función trabajo, p. 1178
dualidad onda-partícula, p. 1179
tubo fotomultiplicador, p. 1180
Bremsstrahlung, p. 1182
electrodinámica cuántica, p. 1182
dispersión de Compton, p. 1182
longitud de onda de Compton, p. 1183
ondas de materia, p. 1185
longitud de onda de De Broglie, p. 1185
relación de incertidumbre de Heisenberg, p. 1189
espín, p. 1192
fermiones, p. 1192
bosones, p. 1192
principio de exclusión de Pauli, p. 1193
función de partición, p. 1193
distribución de Maxwell-Boltzmann, p. 1193
distribución de Bose-Einstein, p. 1194
distribución de Fermi-Dirac, p. 1194

NUEVOS SÍMBOLOS Y ECUACIONES

$h = 6.62606876(52) \cdot 10^{-34}$ J s, constante de Planck

ϕ, función trabajo en el efecto fotoeléctrico, $eV_0 = hf - \phi$

$\lambda' = \lambda + \dfrac{h}{m_e c}(1 - \cos\theta)$, fórmula de dispersión de Compton

$\lambda_e = \dfrac{h}{m_e c} = 2.426 \cdot 10^{-12}$ m, longitud de onda de Compton de un electrón

$\Delta x \cdot \Delta p_x \geq \frac{1}{2}\hbar$, relación de incertidumbre de Heisenberg para la posición y la cantidad de movimiento

$\Delta E \cdot \Delta t \geq \frac{1}{2}\hbar$, relación de incertidumbre de Heisenberg para la energía y el tiempo

RESPUESTAS A LAS OPORTUNIDADES DE AUTOEVALUACIÓN

36.1 $K_{máx} = (f - f_{mín})h = fh - \phi$.

36.2 148 millones de km = $148 \cdot 10^6 \cdot 10^3$ m = $1.48 \cdot 10^{11}$ m

$$P = \left(4\pi r^2\right) I = 4\pi\left(1.48 \cdot 10^{11}\ \text{m}\right)^2 \left(1\,370\ \text{W/m}^2\right) = 3.77 \cdot 10^{26}\ \text{W}$$

En el espectro visible $P_{visible} = P/4 = 9.43 \cdot 10^{25}$ W.

En 1 segundo, $9.43 \cdot 10^{25}$ J de energía son emitidos por el Sol. Suponga que la longitud de onda promedio del fotón visible es λ = 550 nm. La energía de cada fotón es entonces

$$E = hf = h\frac{c}{\lambda} = \left(6.626 \cdot 10^{-34}\ \text{J s}\right)\frac{3.00 \cdot 10^8\ \text{m/s}}{550 \cdot 10^{-9}\ \text{m}} = 3.61 \cdot 10^{-19}\ \text{J}$$

$$N = P_{visible}/E = \left(9.43 \cdot 10^{25}\ \text{W}\right)/\left(3.61 \cdot 10^{-19}\ \text{J}\right)$$

$= 2.6 \cdot 10^{44}$ fotones visibles por segundo.

36.3 Cantidad de movimiento del electrón de $m_e c^2$ = 511 keV

$$E^2 = \left(m_e c^2\right)^2 + \left(pc\right)^2 = \left(m_e c^2 + K\right)^2$$

$$pc = \sqrt{\left(m_e c^2 + K\right)^2 - \left(m_e c^2\right)^2}$$

$$= \sqrt{\left(511\ \text{keV} + 1.00 \cdot 10^{-3}\ \text{keV}\right)^2 - \left(511\ \text{keV}\right)^2} = 1.01\ \text{keV}$$

Cantidad de movimiento del rayo X de 100 keV:

$$\left(m_e c^2\right)^2 + \left(pc\right)^2 = \left(m_e c^2 + K\right)^2$$

$pc = K$ = 100 keV

La cantidad de movimiento del electrón es 1% del rayo X, insignificante.

36.4 Para la luz visible, la energía del fotón varía de 1.59 eV a 3.27 eV.

Para un fotón de 2.26 eV, la cantidad de movimiento es

$$\left(m_e c^2\right)^2 + \left(pc\right)^2 = \left(m_e c^2 + K\right)^2$$

$pc = K$ = 2.26 eV

Cantidad de movimiento del electrón de 1.00 eV: $m_e c^2$ = 511 keV

$$E^2 = \left(m_e c^2\right)^2 + \left(pc\right)^2 = \left(m_e c^2 + K\right)^2$$

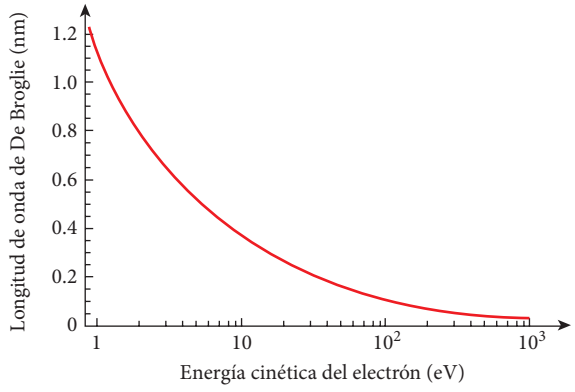
$$pc = \sqrt{\left(m_e c^2 + K\right)^2 - \left(m_e c^2\right)^2}$$

$$= \sqrt{\left(511\ \text{keV} + 1.00 \cdot 10^{-3}\ \text{keV}\right)^2 - \left(511\ \text{keV}\right)^2} = 1.01\ \text{keV}$$

$(pc)_{fotón}/(pc)_{electrón}$ = (2.26 eV)/(1 010 eV) = $2.24 \cdot 10^{-3}$

La cantidad de movimiento del fotón visible es 0.224% de la cantidad de movimiento del electrón, insignificante.

36.5



La longitud de onda de De Broglie para un electrón con una energía cinética de 1 000 eV es

λ = 0.0387879 nm.

Al calcular la cantidad de movimiento de modo no relativista, obtenemos

λ = 0.0388068 nm.

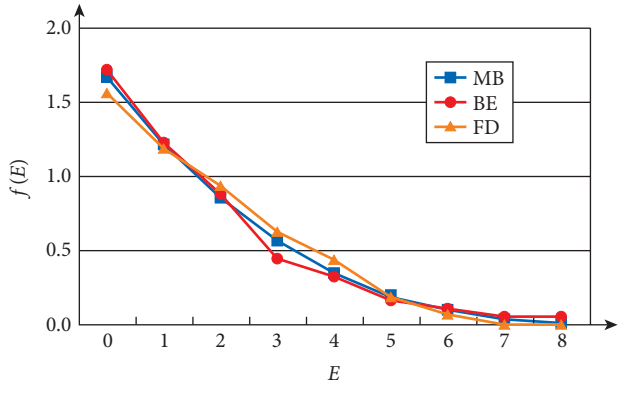
La diferencia es pequeña.

36.6 Δv = 2.00 km/h = 0.556 m/s

$$\Delta x \cdot \Delta p \geq \tfrac{1}{2}\hbar$$

$$\Delta x \geq \frac{\hbar}{2\Delta p} = \frac{\hbar}{2m\Delta v} = \frac{1.05457 \cdot 10^{-34}\ \text{J s}}{2(1\,462\ \text{kg})(0.556\ \text{m/s})} = 6.49 \cdot 10^{-38}\ \text{m}.$$

36.7 Los números de estados son 18, 16, 495, respectivamente.



PRÁCTICA PARA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Lineamientos para resolución de problemas

1. El punto de partida para la mayor parte de cálculos que tienen que ver con fotones o el comportamiento ondulatorio de la materia es relacionar las propiedades de energía de la partícula E y la cantidad de movimiento p con las propiedades de onda de longitud de onda λ y frecuencia f. Las relaciones clave son $E = hf$, $p = E/c = hf/c = h/\lambda$ y $\lambda = h/p$.

2. Sea cuidadoso y congruente al aplicar las unidades. Con frecuencia, convertir las unidades a metros y kilogramos ayudará a seguir la pista de exponentes de unidades. El uso de electrón-voltios a menudo simplificará sus cálculos, pero asegúrese de usar la constante de Planck con las unidades apropiadas: $h = 6.626 \cdot 10^{-34}$ J s o $h = 4.136 \cdot 10^{-15}$ eV s.

3. Para comprobar su trabajo, es útil tener en mente algunos órdenes de magnitud aproximados: el tamaño de un átomo es 10^{-10} m; la masa del electrón es 10^{-30} kg; la carga de un protón o electrón es 10^{-19} C; a temperatura ambiente, $k_B T = \frac{1}{40}$ eV.

PROBLEMA RESUELTO 36.1 Condensado de rubidio de Bose-Einstein

PROBLEMA

¿Cuál es la densidad mínima de átomos de rubidio necesaria en una trampa magnética a una temperatura de 200 nK a fin de tener una probabilidad de observar el inicio de la condensación de Bose-Einstein? (*Sugerencia*: La masa de un átomo de rubidio-87 es $1.5 \cdot 10^{-25}$ kg.)

SOLUCIÓN

PIENSE

En nuestra sección del condensado de Bose-Einstein, expresamos que los átomos de rubidio deben estar bastante cerca entre sí para que puedan traslaparse en un sentido mecánico cuántico. Ahí se citó este criterio como $\rho \cdot \lambda^3 > 2.61$. Por lo tanto, nuestra tarea equivale a hallar la longitud de onda de De Broglie de átomos de rubidio en movimiento térmico a una temperatura de 200 nK.

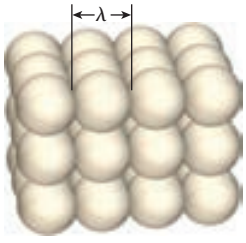


FIGURA 36.27 Esbozo del traslape de átomos de rubidio en la trampa.

ESBOCE

Un bosquejo quizá no es tan necesario en este caso, pero en la figura 36.27 se intenta por lo menos ver la relación entre la extensión mecánica cuántica de la función de onda atómica, la longitud de onda de De Broglie, y el espaciamiento del vecino más próximo de los átomos en la trampa.

INVESTIGUE

Hemos expresado ya que el criterio para la densidad está dado como

$$\rho \cdot \lambda^3 > 2.61. \tag{i}$$

La longitud de onda de De Broglie λ se dio como

$$\lambda = \frac{h}{p} \tag{ii}$$

en la ecuación 36.22. Para el momento p de un átomo de rubidio se usa el hecho de que la energía cinética de un átomo en un gas se determina mediante la energía térmica a la temperatura dada,

$$E = \frac{p^2}{2m} = \frac{3}{2} k_B T \Rightarrow p = \sqrt{3 m k_B T}. \tag{iii}$$

SIMPLIFIQUE

Al insertar la ecuación (iii) en la ecuación (ii), encontramos para la longitud de onda de De Broglie, en este caso,

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{3 m k_B T}}. \tag{iv}$$

Al despejar de la ecuación (i) la densidad e insertar nuestra fórmula para la longitud de onda de De Broglie en la ecuación (iv), se obtiene

$$\rho > \frac{2.61}{\lambda^3} = \frac{2.61\left(3 m k_B T\right)^{3/2}}{h^3}.$$

CALCULE

Al insertar los valores de las constantes ($h = 6.63 \cdot 10^{-34}$ J s, $k_B = 1.38 \cdot 10^{-23}$ J/K) y la temperatura dada ($T = 200$ nK $= 2 \cdot 10^{-7}$ K), obtenemos, para la longitud de onda de De Broglie,

$$\lambda = \frac{6.63 \cdot 10^{-34} \text{ J s}}{\sqrt{3(1.5 \cdot 10^{-25} \text{ kg})(1.38 \cdot 10^{-23} \text{ J/K})(2 \cdot 10^{-7} \text{ K})}} = 5.9491 \cdot 10^{-7} \text{ m}$$

y, por lo tanto, para la densidad

$$\rho > \frac{2.61}{\lambda^3} = 1.2396 \cdot 10^{19} \text{ m}^{-3}.$$

REDONDEE

Puesto que la temperatura se dio sólo hasta un dígito significativo, nuestra respuesta para la longitud de onda de De Broglie es $\lambda = 6 \cdot 10^{-7}$ m. Note que éste es aproximadamente un factor 1 000 veces más grande que el diámetro atómico del rubidio, que es de alrededor de $5 \cdot 10^{-10}$ m.

Para la densidad mínima necesaria para tener una probabilidad de observar la CBE, nuestro resultado redondeado de manera apropiada es $\rho > 1 \cdot 10^{19}$ m^{-3}.

VUELVA A REVISAR

¿La densidad de 10^{19}átomos/m^3 es un número grande o pequeño? Comparémoslo con la densidad de las moléculas de agua y moléculas de aire. Un metro cúbico de agua líquida contiene $3 \cdot 10^{28}$ moléculas de agua, y un metro cúbico de aire contiene $3 \cdot 10^{25}$ moléculas de nitrógeno y oxígeno. Así, la densidad del gas de átomos de rubidio en la trampa es de alrededor de un millón de veces menor que la densidad del aire en condiciones atmosféricas normales.

Si tenemos un millón de átomos en una trampa a una densidad de 10^{19} átomos/m^3 en una configuración aproximadamente esférica, ¿cuál es el radio de la esfera? El volumen total ocupado por el millón de átomos es

$$V = \frac{N}{\rho} = \frac{10^6}{10^{19} \text{ m}^{-3}} = 10^{-13} \text{ m}^3.$$

Debido a que el volumen de una esfera es $V = \frac{4}{3}\pi r^3$, encontramos que el radio de la esfera que contiene un millón de átomos a esta densidad es

$$r = \left(\frac{3}{4\pi} V\right)^{1/3} = 30 \text{ } \mu\text{m}.$$

Esto aclara que el condensado de Bose-Einstein podría no ser representado de forma directa en el experimento que realizaron Cornell y Wieman. Esto es porque ellos necesitaron apagar la trampa y dejar que se expandiera su contenido por al menos un factor de 10 en cada dirección antes de que pudieran producir las imágenes del tipo mostrado en la figura 36.26.

PREGUNTAS DE OPCIÓN MÚLTIPLE

36.1 Luz ultravioleta de longitud de onda 350 nm incide en un material con un potencial de frenado de 0.25 voltios. La función trabajo del material es

a) 4.0 eV. *b*) 3.3 eV. *c*) 2.3 eV. *d*) 5.2 eV.

36.2 La existencia de una frecuencia de corte en el efecto fotoeléctrico

a) no puede explicarse por medio de la física clásica.

b) muestra que el modelo que proporciona la física clásica no es correcto en este caso.

c) muestra que en este caso se debe usar un modelo de luz del fotón.

d) muestra que la energía del fotón es proporcional a su frecuencia.

e) todo lo anterior.

36.3 Para tener una fotocorriente más grande, de lo siguiente ¿qué debe ocurrir? (seleccione los cambios correctos)

a) luz más brillante *c*) frecuencia más alta

b) luz tenue *d*) frecuencia más baja

36.4 ¿Cuál de lo siguiente tiene la longitud de onda de De Broglie más pequeña?

a) Un electrón que viaja a 80% de la velocidad de la luz.

b) Un protón que viaja a 20% de la velocidad de la luz.

c) Un núcleo de carbono que viaja a 70% de la velocidad de la luz.

d) Un núcleo de helio que viaja a 80% de la velocidad de la luz.

e) Un núcleo de litio que viaja a 50% de la velocidad de la luz.

36.5 Un cuerpo negro es un sistema ideal que

a) absorbe 100% de la luz que incide en él, pero no puede emitir luz propia.

b) emite 100% de la luz que genera, pero no puede absorber su propia radiación.

c) absorbe 100% de la luz que incide en él, o emite 100% de la radiación que genera.

d) absorbe 50% de la luz que incide en él, y emite 50% de la radiación que genera.

e) ennegrece por completo cualquier cuerpo negro que entra en contacto con él.

36.6 ¿Cuál de las siguientes declaraciones es cierta si la intensidad de un haz de luz se incrementa mientras su frecuencia se mantiene igual?

a) Los fotones ganan mayores velocidades.

b) La energía de los fotones se incrementa.

c) Aumenta el número de fotones por unidad de tiempo.

d) Se incrementa la longitud de onda de la luz.

36.7 ¿Cuál de los siguientes tiene la mayor temperatura?

a) Un objeto calentado al blanco.

b) Un objeto calentado al rojo vivo.

c) Un objeto calentado al azul.

36.8 Los electrones que tienen un intervalo reducido de energías cinéticas chocan con una doble rendija, con separación D entre las rendijas. Los electrones forman un patrón sobre una pantalla fluorescente con una separación Δx entre las franjas en la pantalla. Si el espaciamiento entre las rendijas se reduce a $D/2$, la separación entre las franjas será:

a) Δx

b) $2\Delta x$

c) $\Delta x/2$

d) ninguna de éstas

PREGUNTAS

36.9 ¿Por qué un objeto calentado al blanco es más caliente que uno al rojo vivo?

36.10 Después de leer este capítulo, opine acerca de si un electrón es una partícula o una onda.

36.11 Si me miro en un espejo mientras uso una camisa azul, veo una camisa azul en mi reflexión, no una camisa roja. Pero de acuerdo con el efecto de Compton, los fotones que rebotan deben tener una menor energía y, por lo tanto, una longitud de onda más grande. Explique por qué mi reflexión muestra el mismo color de camisa que estoy usando.

36.12 El vacío en el espacio profundo no está vacío, sino que un mar hirviente de partículas y antipartículas se está formando y aniquilando de forma constante. Determine el tiempo de vida mínimo para que se forme un par protón-antiprotón sin violar la relación de incertidumbre de Heisenberg.

36.13 Considere un universo en el que la constante de Planck es 5 J s. ¿Cómo cambiaría un juego de tenis? Considere las interacciones de cada uno de los jugadores con la pelota y la interacción de ésta con la red.

36.14 En mecánica clásica, para una partícula sin fuerza neta sobre ella, ¿qué información se requiere para predecir dónde estará la partícula cierto tiempo después? ¿Por qué esta predicción no es posible en mecánica cuántica?

36.15 ¿Cuál sería el resultado que esperaría un físico clásico de dirigir una lámpara UV más brillante sobre una superficie metálica, en términos de la energía de los electrones emitidos? ¿Cómo difiere esto de lo que predice la teoría del efecto fotoeléctrico?

36.16 ¿Qué es más dañino para el tejido humano, una fuente de luz de 60 W de luz visible o una fuente de 2 mW de rayos X? Explique su elección.

36.17 Los neutrones son fermiones con espín $\frac{1}{2}$. Un haz no polarizado de neutrones tiene un número igual de espines en los estados +1/2 y −1/2. Cuando un haz de electrones no polarizados se pasa por ^{3}He no polarizado, los neutrones pueden ser absorbidos por el ^{3}He para crear ^{4}He. Si el ^{3}He se polariza, de modo que estén alineados los espines de los neutrones en el núcleo del ^{3}He, ¿será absorbido el mismo número de neutrones en el haz de neutrones no polarizado por el ^{3}He polarizado? ¿Cuán bien será absorbido por el ^{3}He cada uno de los dos estados de espín del haz de neutrones no polarizado?

36.18 Está realizando un experimento de efecto fotoeléctrico. Con un fotocátodo hecho de cesio, usted lo ilumina primero con un haz láser verde (λ = 514.5 nm) de potencia 100 mW. A continuación, usted duplica la potencia de su haz láser, a 200 mW. ¿Cómo se comparan las energías por electrón de los electrones emitidos por el cátodo para estos dos casos?

PROBLEMAS

Una • y dos •• indican un nivel creciente de dificultad.

Sección 36.2

36.19 Calcule las longitudes de onda pico de

a) la luz solar que recibe la Tierra, y

b) la luz emitida por la Tierra.

Suponga que las temperaturas de superficie del Sol y la Tierra son 5 800. K y 300. K, respectivamente.

36.20 Calcule el intervalo de temperaturas para las que la emisión pico de la radiación de cuerpo negro de un filamento incandescente ocurre dentro del intervalo visible del espectro electromagnético. Considere que el espectro visible va de 380 nm a 780 nm. ¿Cuál es la intensidad total de la radiación desde el filamento en estas dos temperaturas?

36.21 Se descubre que los rayos gamma de ultraalta energía vienen del ecuador de nuestra galaxia, con energías de hasta $3.5 \cdot 10^{12}$ eV. ¿Cuál es la longitud de onda de esta luz? ¿Cómo se compara la energía de esta luz con la masa en reposo de un protón?

36.22 Considere un objeto a temperatura ambiente (20. °C) y la radiación que emite. Para la radiación en el pico de la densidad de energía espectral, calcule

a) la longitud de onda, *c*) la energía de un fotón.

b) la frecuencia, y

•**36.23** La temperatura de su piel es aproximadamente 35.0 °C.

a) Suponiendo que es un cuerpo negro, ¿cuál es la longitud de onda pico de la radiación que emite?

b) Si se supone un área de superficie total de 2.00 m^2, ¿cuál es la potencia total emitida por su piel?

c) Con base en su respuesta en *b*), ¿por qué usted no brilla como una bombilla?

•**36.24** Un material semiconductor puro sin defectos absorberá sólo la radiación electromagnética que incide en ese material si la energía de cada uno de los fotones en el haz incidente es más grande que el valor umbral conocido como el "espacio de banda" del semiconductor. Los espacios de banda conocidos a temperatura ambiente para el germanio, silicio y galio arseniuro, tres semiconductores ampliamente usados, son 0.66 eV, 1.12 eV y 1.42 eV, respectivamente.

a) Determine el intervalo de transparencia a temperatura ambiente de estos semiconductores.

b) Compárelos con el intervalo de transparencia de ZnSe, un semiconductor con espacio de banda de 2.67 eV, y explique el color amarillo observado experimentalmente para los cristales de ZnSe.

c) ¿Cuál de estos materiales se podría usar para un detector de luz para la longitud de onda de comunicaciones óptica de 1 550 nm?

•**36.25** La masa de una moneda de diez centavos de dólar estadounidense es de 2.268 g, su diámetro es de 17.91 mm y su espesor es de 1.350 mm. Determine

a) la energía radiante que sale de una moneda por segundo a temperatura ambiente;

b) el número de fotones que salen de la moneda por segundo (suponga que los fotones tienen la longitud de onda del pico de la distribución para esta estimación), y

c) el volumen de aire para tener energía igual a 1 segundo de radiación de la moneda.

Sección 36.3

36.26 La función trabajo de cierto material es 5.8 eV. ¿Cuál es el umbral fotoeléctrico para este material?

36.27 ¿Cuál es la energía cinética máxima de los electrones expulsados de una superficie de sodio por la luz de 470 nm de longitud de onda?

36.28 La longitud de onda umbral para el efecto fotoeléctrico en una aleación específica es 400. nm. ¿Cuál es la función trabajo en eV?

36.29 En un experimento de efecto fotoeléctrico, un haz láser de longitud de onda desconocida se hace brillar sobre un cátodo de cesio (función trabajo ϕ = 2.100 eV). Se encuentra que se requiere un potencial de frenado de 0.310 V para eliminar la corriente. A continuación, el mismo láser se hace brillar sobre un cátodo hecho de un material desconocido y se encuentra que se necesita un potencial de detención de 0.110 V para eliminar la corriente.

a) ¿Cuál es la función trabajo para el cátodo desconocido?

b) ¿Cuál sería un candidato posible para el material de este cátodo desconocido?

36.30 Usted ilumina una superficie de cinc con luz de 550 nm. ¿Qué tanto tiene que subir el voltaje de frenado para suprimir por completo la corriente fotoeléctrica?

36.31 Luz blanca, λ = 400. a 750. nm, cae en bario (ϕ = 2.48 eV) .

a) ¿Cuál es la energía cinética máxima de los electrones expulsados de él?

b) ¿Una luz de longitud de onda más larga expulsaría electrones?

c) ¿Qué longitud de onda de luz expulsaría electrones con energía cinética cero?

•**36.32** Para determinar la función trabajo del material de un fotodiodo, usted midió la energía cinética máxima de 1.50 eV que corresponde a cierta longitud de onda. Después, usted reduce la longitud de onda en 50.0% y encuentra que la energía cinética máxima de los fotoelectrones es 3.80 eV. A partir de esta información determine

a) la función trabajo del material, y

b) la longitud de onda original.

Sección 36.4

36.33 Rayos X de longitud de onda λ = 0.120 nm se dispersan desde carbono. ¿Cuál es el desplazamiento de la longitud de onda de Compton para fotones detectados a un ángulo de 90.0° respecto al haz incidente?

36.34 Un fotón de rayos X de 2.0 MeV se dispersa de un electrón libre en reposo hacia un ángulo de 53°. ¿Cuál es la longitud de onda del fotón dispersado?

36.35 Un fotón con longitud de onda de 0.30 nm choca con un electrón que inicialmente está en reposo. Si el fotón rebota a un ángulo de 160°, ¿cuánta energía perdió en la colisión?

•**36.36** Rayos X que tienen una energía de 400.0 keV experimentan dispersión de Compton desde un objetivo. Los rayos dispersados se detectan a 25.0° respecto a los rayos incidentes. Determine

a) la energía cinética de los rayos X dispersados, y

b) la energía cinética del electrón rechazado.

•**36.37** Considere el equivalente de la dispersión de Compton, pero el caso en el que un fotón se dispersa de un protón libre.

a) Si rayos X de 140. keV rebotan de un protón a 90.0°, ¿cuál es su cambio fraccionario de energía $(E_0 - E)/E_0$?

b) ¿Qué energía del fotón sería necesaria para causar un cambio de 1.00 % en la energía en dispersión a 90.0°?

•**36.38** Un fotón de rayos X con una energía de 50.0 keV choca con un electrón que está inicialmente en reposo dentro de un metal. El fotón se dispersa a un ángulo de 45°. ¿Cuál es la energía cinética y la cantidad de movimiento (magnitud y dirección) del electrón después de la colisión? Usted podría usar la relación no relativista que conecta la energía cinética con la cantidad de movimiento del electrón.

Sección 36.5

36.39 Calcule la longitud de onda de

a) un fotón de 2.00 eV, y

b) un electrón con 2 eV de energía cinética.

36.40 ¿Cuál es la longitud de onda de De Broglie de un automóvil de $2.000 \cdot 10^3$ kg que se mueve a una velocidad de 100.0 km/h?

36.41 Una molécula de nitrógeno de masa $m = 4.648 \cdot 10^{-26}$ kg tiene una velocidad de 300.0 m/s.

a) Determine su longitud de onda de De Broglie.

b) ¿Qué tan apartadas están las dobles rendijas si se observa un patrón de franjas de la molécula de nitrógeno, con las franjas apartadas 0.30 cm, en una pantalla de 70.0 cm enfrente de las rendijas?

36.42 Partículas alfa son aceleradas por una diferencia de potencial de 20.0 kV. ¿Cuál es su longitud de onda de De Broglie?

36.43 Considere un electrón cuya longitud de onda de De Broglie es igual a la longitud de onda de la luz verde (cerca de 550 nm).

a) Al tratar al electrón desde la perspectiva no relativista, ¿cuál es su velocidad?

b) ¿Su cálculo confirma que es suficiente un tratamiento no relativista?

c) Calcule la energía cinética del electrón en eV.

•**36.44** Después de comentarle acerca de la hipótesis de De Broglie que las partículas de cantidad de movimiemto p tienen características de onda con longitud de onda $\lambda = h/p$, su compañero de cuarto de 60.0 kg empieza a pensar en su destino como onda y le pregunta si podría ser difractado al pasar por la puerta de 90.0 cm de ancho de su dormitorio.

a) ¿Cuál es la velocidad máxima a la que su compañero puede pasar por la puerta a fin de ser difractado en forma significativa?

b) Si se requiere un paso para pasar la puerta, ¿cuánto tiempo le debe tomar a su compañero dar ese paso (suponga que la longitud de su paso es 0.75 m) a fin de que sea difractado?

c) ¿Cuál es la respuesta a la pregunta de su compañero? *Sugerencia*: Suponga que ocurre una difracción importante cuando el ancho de la apertura de difracción es menos que 10.0 veces la longitud de onda de la onda que es difractada.

••**36.45** Considere las ondas de De Broglie para una partícula newtoniana de masa m, cantidad de movimiento $p = mv$ y energía $E = p^2/(2m)$, es decir, ondas con longitud de onda $\lambda = h/p$ y frecuencia $f = E/h$.

a) Calcule la relación de dispersión $\omega = \omega(k)$ para estas ondas.

b) Calcule las velocidades de fase y grupo de estas ondas. ¿Cuál de éstas corresponde a la velocidad clásica de la partícula?

••**36.46** Considere ahora ondas de De Broglie para una partícula (relativista) de masa m, cantidad de movimiento $p = mv\gamma$ y energía total $E = mc^2\gamma$, con $\gamma = [1 - (v/c)^2]^{-1/2}$. Las ondas tienen longitud de onda $\lambda = h/p$ y frecuencia $f = E/h$ como antes, pero con la cantidad de movimiento y energía relativistas.

a) Calcule la relación de dispersión para estas ondas.

b) Calcule las velocidades de fase y grupo de estas ondas. ¿Ahora cuál corresponde a la velocidad clásica de la partícula?

Sección 36.6

36.47 Una partícula de 50.0 kg tiene una longitud de onda de De Broglie de 20.0 cm.

a) ¿Qué tan rápido se está moviendo la partícula?

b) ¿Cuál es la incertidumbre de velocidad más pequeña de la partícula si su incertidumbre de posición es 20.0 cm?

36.48 Durante el periodo requerido para que la luz pase por un átomo de hidrógeno ($r = 0.53 \cdot 10^{-10}$ m), ¿cuál es la menor incertidumbre en la energía para el átomo? Exprese su respuesta en electrón voltios.

36.49 Un neutrón libre ($m = 1.67 \cdot 10^{-27}$ kg) tiene una vida promedio de 900. s. ¿Cuál es la incertidumbre en su masa (en kg)?

36.50 Suponga que Fuzzy, un pato mecánico-cuántico, vive en un mundo en el que la constante de Planck $\hbar = 1.00$ J s. Fuzzy tiene una masa de 0.500 kg e inicialmente se sabe que está dentro de un estanque de 0.750 m de ancho. ¿Cuál es la incertidumbre mínima en la velocidad de Fuzzy? Si se supone que esta incertidumbre prevalece durante 5.00 s, ¿qué tan lejos podría estar Fuzzy del estanque después de 5.00 s?

36.51 Un electrón está confinado en una caja con una dimensión de 20.0 μm. ¿Cuál es la velocidad mínima que puede tener el electrón?

•**36.52** Una partícula de polvo de masa $1.00 \cdot 10^{-16}$ kg y diámetro 5.00 μm está confinada a una caja de 15.0 μm de largo.

a) ¿Cómo sabrá si la partícula está en reposo?

b) Si la partícula no está en reposo, ¿cuál será el alcance de su velocidad?

c) Con el alcance menor de velocidad, ¿cuánto tardará en moverse una distancia de 1.00 mm?

Sección 36.8

••**36.53** Considere un estado cuántico de energía E, que puede ser ocupado por algún número n de ciertas partículas bosónicas, inclusive $n = 0$. A temperatura absoluta T, la probabilidad de hallar n partículas en el estado se determina mediante $P_n = N \exp(-nE/k_B T)$, donde k_B es la constante de Boltzmann y el factor de normalización N se determina por el requisito de que la suma de las probabilidades es la unidad. Calcule el valor medio o esperado de n, es decir, la ocupación, de este estado, dada esta probabilidad.

•**36.54** Considere el mismo estado cuántico del problema anterior, con una distribución de probabilidad de la misma forma, pero con partículas fermiónicas, de modo que los posibles números de ocupación son $n = 0$ y $n = 1$. Calcule la ocupación media $\langle n \rangle$ del estado en este caso.

••**36.55** Considere un sistema constituido de N partículas. La energía promedio por partícula está dada por $\langle E \rangle = (\sum E_i e^{-E_i/k_B T}) / Z$ donde Z es la función de partición definida en la ecuación 36.29. Si éste es un sistema de dos estados con $E_1 = 0$ y $E_2 = E$ y $g_1 = g_2 = 1$, calcule la capacidad calorífica del sistema, definida como $N(d\langle E \rangle/dT)$ y aproxime su compor-

tamiento a temperaturas muy altas y muy bajas (es decir, $k_B T \gg 1$ y $k_B T \ll 1$).

Problemas adicionales

36.56 Dado que la función trabajo del tungsteno es 4.55 eV, ¿cuál es el potencial de frenado en un experimento que usa cátodos de tungsteno a 360 nm?

36.57 Encuentre las relaciones de longitudes de onda de De Broglie de un protón de 100 MeV a un electrón de 100 MeV.

36.58 Un *Einstein* (*E*) es una unidad de medida igual al número de Avogadro ($6.02 \cdot 10^{23}$) de protones. ¿Cuánta energía está contenida en 1 Einstein de luz violeta (λ = 400. nm)?

36.59 En el beisbol, una bola de 100. g puede viajar tan rápido como 100 millas por hora (mph). ¿Cuál es la longitud de onda de De Broglie de esta bola? La nave espacial *Voyager*, con una masa de cerca de 250. kg, está viajando actualmente a 125 000 km/h. ¿Cuál es su longitud de onda de De Broglie?

36.60 ¿Cuál es la incertidumbre mínima en la velocidad de una partícula de 1.0 nanogramo que está en reposo en la cabeza de un alfiler de 1.0 mm de ancho?

36.61 Un dispositivo fotovoltaico utiliza luz monocromática de longitud de onda 700. nm que incide normal en una superficie de área de 10.0 cm^2. Calcule la tasa de flujo de fotones si la intensidad de la luz es 0.300 W/cm^2.

36.62 La constante solar medida por satélites terrestres es aproximadamente 1 400. W/m^2. Aunque el Sol emite luz de diferentes longitudes de onda, el pico del espectro de longitud de onda está en 500. nm.

a) Encuentre la frecuencia de fotón correspondiente.

b) Determine la energía del fotón correspondiente.

c) Calcule el flujo numérico de fotones que llegan a la Tierra, suponiendo que toda la luz emitida por el Sol tiene la misma longitud de onda pico.

36.63 Dos placas de plata en el vacío están separadas por 1.0 cm y tienen una diferencia de potencial de 20. kV entre ellas. ¿Cuál es la longitud de onda más grande de luz que puede hacerse brillar en el cátodo para producir una corriente por el ánodo?

36.64 ¿Cuántos fotones por segundo deben chocar con una superficie de área 10.0 m^2 para producir una fuerza de 0.100 N sobre la superficie, si los fotones son luz monocromática de longitud de onda 600. nm? Suponga que los fotones son absorbidos.

36.65 Suponga que la función de onda que describe un electrón predice una dispersión estadística de $1.00 \cdot 10^{-4}$ m/s en la velocidad del electrón. ¿Cuál es la dispersión estadística correspondiente en su posición?

36.66 ¿Cuál es la temperatura de un cuerpo negro cuya longitud de onda pico emitida está en la porción de rayos X del espectro?

36.67 Un ojo de ave nocturna puede detectar luz monocromática de frecuencia $5.8 \cdot 10^{14}$ Hz con una potencia tan pequeña como $2.333 \cdot 10^{-17}$ W. ¿Cuál es el número correspondiente de fotones por segundo que puede detectar el ojo de un ave nocturna?

36.68 Un láser ultravioleta particular produce radiación de longitud de onda 355 nm. Suponga que éste se usa en un experimento fotoeléctrico con una muestra de calcio. ¿Cuál será el potencial de frenado?

36.69 ¿Cuál es la longitud de onda de un electrón que se acelera desde el reposo por una diferencia de potencia de $1.00 \cdot 10^{-5}$ V?

•**36.70** Compton usó fotones de longitud de onda 0.0711 nm.

a) ¿Cuál es la longitud de onda de los fotones dispersados en θ = 180.°?

b) ¿Cuál es la energía de estos fotones?

c) Si el objetivo fuera un protón y no un electrón, ¿cómo cambiaría su respuesta en *a*)?

•**36.71** Calcule el número de fotones que se originan en el Sol, que son recibidos en la atmósfera superior de la Tierra por año.

•**36.72** Un electrón libre en un gas es golpeado por un rayo X de 8.5 nm, que experimenta un incremento en la longitud de onda de 1.5 pm. ¿Qué tan rápido se está moviendo el electrón después de la interacción con el rayo X?

•**36.73** Un acelerador aumenta la energía cinética de un protón de modo que la longitud de onda de De Broglie del protón es $3.5 \cdot 10^{-15}$ m. ¿Cuáles son el momento y la energía del protón?

•**36.74** Los detectores de centelleo para rayos gamma transfieren la energía de un fotón de rayos gamma a un electrón dentro de un cristal, vía el efecto fotoeléctrico o dispersión de Compton. El electrón transfiere su energía a los átomos en el cristal, que la vuelve a emitir como un destello de luz mediante un tubo fotomultiplicador. El impulso de carga producido por el tubo fotomultiplicador es proporcional a la energía depositada originalmente en el cristal; esto puede medirse de modo que sea posible mostrar un espectro de energía. Los rayos gamma absorbidos por el efecto fotoeléctrico se registran en el espectro, en la energía completa de las gammas. Los electrones dispersados de Compton son registrados también, en un intervalo de energías más bajas conocido como la meseta de Compton. La energía más alta de éstos forma el *borde de Compton* de la meseta. Los fotones de rayos gamma dispersados 180.° por el efecto de Compton aparecen como un *pico de retrodispersión* en el espectro. Para fotones de rayos gamma de energía 511 KeV, calcule las energías del borde de Compton y el pico de retrodispersión en el espectro.

37 Mecánica cuántica

LO QUE APRENDEREMOS 1207

37.1 Función de onda 1207
Función de onda y probabilidad 1208
Cantidad de movimiento 1209
Energía cinética 1210
37.2 Ecuación de Schrödinger 1210
37.3 Pozo de potencial infinito 1211
Energía de una partícula 1214
Ejemplo 37.1 Electrón en una caja 1215
Pozos multidimensionales 1215
37.4 Pozos de potencial finitos 1217
Caso 1: energía mayor que la profundidad del pozo 1218
Caso 2: energía menor que la profundidad del pozo, estados ligados 1219
Ejemplo 37.2 Pozo de potencial finito 1220
Ejemplo 37.3 Estados ligados 1221
Efecto túnel 1223
Ejemplo 37.4 Efecto túnel de neutrones 1224
Microscopio de escáner de efecto túnel 1224
37.5 Oscilador armónico 1225
Oscilador armónico clásico 1225
Oscilador armónico cuántico 1226
37.6 Funciones de onda y mediciones 1228
Ejemplo 37.5 Posición y energía 1229
Relación de incertidumbre para funciones de onda de osciladores 1231
37.7 Principio de correspondencia 1232
37.8 Ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo 1233
Funciones propias y valores propios 1234
37.9 Función de onda de muchas partículas 1234
Función de onda de dos partículas 1234
Ejemplo 37.6 La molécula de hidrógeno 1236
Función de onda de múltiples fermiones 1237
Computación cuántica 1237
37.10 Antimateria 1238
Ejemplo 37.7 Aniquilación de materia 1241

LO QUE HEMOS APRENDIDO/ GUÍA DE ESTUDIO PARA EXAMEN 1242

Práctica para resolución de problemas 1244
Problema resuelto 37.1 Medio oscilador 1245
Preguntas de opción múltiple 1246
Preguntas 1247
Problemas 1248

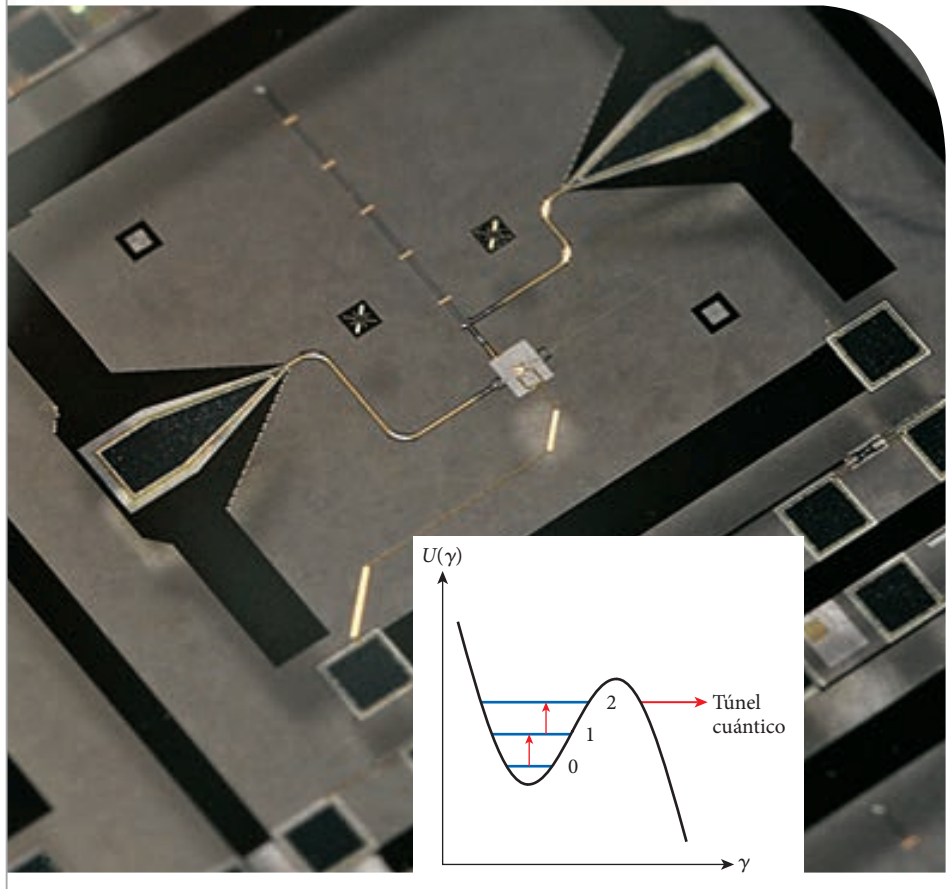


FIGURA 37.1 Uno de los primeros dispositivos experimentales utilizados para la computación cuántica; en el recuadro en la parte inferior: una representación esquemática de un potencial para los estados cuánticos que se emplean en este proceso.

LO QUE APRENDEREMOS

- Una partícula es descrita por su función de onda compleja. El cuadrado absoluto de la función de onda compleja es la probabilidad de encontrar una partícula en alguna posición. La integral del cuadrado de la función de onda a lo largo de todo el espacio es igual a 1.
- La ecuación de Schrödinger es la ecuación de onda no relativa para una partícula en un potencial $U(x)$.
- Ecuaciones de onda que son soluciones para el problema de una partícula limitada a un pozo de potencial infinito son funciones sinusoidales. Los valores de energía de las soluciones son proporcionales al cuadrado del número cuántico de la solución. Las soluciones para el problema de un potencial de altura infinita tienen colas exponenciales que alcanzan la región clásicamente prohibida.
- Si una partícula encuentra una barrera de potencial de altura y ancho finitos, podrá abrir un túnel a través de esta barrera, incluso si tiene menos energía que la altura de la barrera. La probabilidad de que esta partícula abra un túnel a través de la barrera depende en forma exponencial del ancho de la barrera.
- Las soluciones de la función de onda para el potencial del oscilador armónico son polinomios de Hermite. Los correspondientes valores propios de energía están igualmente espaciados. Funciones de onda de osciladores con $n = 0$ tienen el producto mínimo de incertidumbre de la cantidad de movimiento y posición permitido por el principio de incertidumbre.
- El principio de correspondencia declara que si la diferencia de energía ΔE entre estados de energía adyacentes se vuelve pequeña en relación con la energía total E, la solución cuántica se acerca a su límite clásico.
- El operador hamiltoniano (o simplemente abreviado, el hamiltoniano) es el operador de la energía total. Este operador es lineal. Por lo tanto, una combinación lineal de dos soluciones de la ecuación de Schrödinger, que se basa en el hamiltoniano, también es una solución.
- La función de onda de dos partículas para bosones (no interactuando) es el producto simetrizado de funciones de onda de una partícula, y la función de onda de dos partículas para fermiones (no interactuando) es el producto antisimetrizado.

El capítulo 36 introdujo algunas de las ideas básicas de la física cuántica, incluyendo fotones, materia que tiene un comportamiento ondulatorio y el principio de incertidumbre. En este capítulo extendemos estas ideas a cálculos de la dinámica de partículas en la escala atómica. Enfatizamos conceptos físicos más que detalles matemáticos, que pueden llegar a estar muy involucrados en estos cálculos. Sin embargo, las ideas de la mecánica cuántica han producido descubrimientos prácticos que no se podrían imaginar tan sólo con la física clásica.

Muchos de los investigadores de la física moderna tuvieron serias dudas sobre lo que realmente son las funciones de onda y por qué las distribuciones de probabilidad ocupan un lugar central en la predicción de resultados. Por ejemplo, el físico danés Niels Bohr (1885-1962) dijo una vez: "Cualquiera que no haya sido impactado por la física cuántica no la ha entendido." Y el gran físico estadounidense Richard Feynman (1918-1988) escribió: "Creo que puedo decir con certeza que nadie entiende la mecánica cuántica. . . No vaya a seguir diciéndose a sí mismo, si lo puede evitar, 'pero cómo puede ser así?. . . Nadie puede saber cómo puede ser así." Pero ahora, en el siglo XXI, la mecánica cuántica se ha establecido como una de las áreas más exactas y completas de toda la ciencia física.

Cuando hablábamos sobre ondas luminosas y ondas sonoras, analizamos los conceptos de ondas esféricas y ondas planas. Estas ondas son ejemplos específicos de funciones de onda que resuelven una ecuación de onda en particular. Del mismo modo podemos preguntar ahora cuál es la función de onda del electrón, o qué es la función de onda de cualquier otro objeto del que podemos convencionalmente pensar como partícula. Esa pregunta nos llevará a ver la mecánica en el mundo cuántico y nos introducirá a lo que convencionalmente se llama *mecánica cuántica*, en la que exploramos las consecuencias observables del comportamiento ondulado de partículas. En los últimos años hubo intentos extensivos de ir más allá de la simple comprensión de los sistemas cuánticos, de manipularlos y de usarlos para propósitos como la computación cuántica (vea la figura 37.1), lo cual lleva consigo la promesa de revolucionar la nanociencia y la nanotecnología.

37.1 Función de onda

Revisemos brevemente lo que hemos logrado hasta ahora en nuestra investigación del mundo cuántico. Nuevamente empezamos con la luz. En el capítulo 36 vimos que el efecto fotoeléctrico y la dispersión de Compton pueden explicarse sólo si la luz tiene propiedades de partículas. Sin

embargo, en el capítulo 31 sobre ondas electromagnéticas vimos también que la luz es una onda electromagnética de la forma $E = E_{máx}$ sen $(\kappa x - \omega t)$, donde κ es el número de onda y ω es la frecuencia angular. También vimos que la intensidad de la onda es proporcional al cuadrado del campo eléctrico. Hemos usado esta relación nuevamente en el capítulo 34 sobre la óptica de ondas para calcular la intensidad del patrón de interferencia de dos ondas luminosas. Puesto que la oscilación del campo eléctrico en espacio y tiempo representa la función de onda de la luz, queda claro que, para la luz, la intensidad es proporcional al cuadrado de la función de onda.

¿Cuál es la correspondiente función de onda de un electrón? O de modo más generalizado: ¿cuál es la función de onda cuántica de una partícula?

En la notación común, $\psi(\vec{r},t)$ se escribe para la **función de onda** para denotar que depende de la coordenada espacial $\vec{r}$ y el tiempo t. Es común el uso de la letra griega minúscula psi, ψ, para la función de onda. Igual podríamos haber usado $y(\vec{r},t)$ para describir la función de onda, como lo hicimos en el capítulo 15 al examinar los fenómenos generales de onda. Sin embargo, a principios del siglo XX, los pioneros de la física cuántica usaban el símbolo $\psi(\vec{r},t)$, lo que llegó a ser la notación estándar. Además, el uso de y para la función de onda, que no es una coordenada ni una distancia, podría confundirse con nuestro uso común de y.

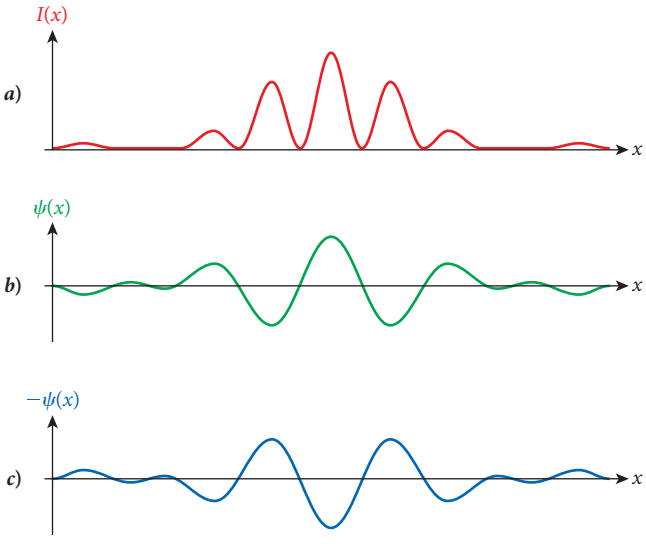


FIGURA 37.2 *a*) Distribución de intensidad para el electrón en la posición de la pantalla en el experimento de doble ranura del electrón; *b*) y *c*) dos posibles funciones de onda correspondientes a esta distribución de intensidad.

Podrá hacerse de mucha idea física estudiando problemas mecánicos en una dimensión espacial. Para la función de onda unidimensional usamos la notación $\psi(x,t)$. Para empezar aún con más sencillez, primero consideramos la función de onda en el espacio de coordenadas y regresamos más tarde a la dependencia del tiempo. Si estamos interesados únicamente en la distribución espacial de la función de onda, usamos la notación $\psi(x)$.

¿Cuál es la función de onda $\psi(x)$ del electrón en la posición de pantalla en el experimento de doble ranura del capítulo 36 (sección 36.5)? Igual que para fotones, la función de onda es proporcional a la raíz cuadrada de la intensidad dada por la ecuación 36.25. La intensidad se muestra en la figura 37.2*a*). Las partes *b*) y *c*) de la misma figura muestran dos posibles funciones de onda que corresponden a esta distribución de intensidad, que se distinguen entre sí por un factor de multiplicación de -1. Observe que la función de onda puede tener dos valores positivos y negativos, mientras que la intensidad tiene un valor mínimo de cero (es decir, nunca es negativo).

Función de onda y probabilidad

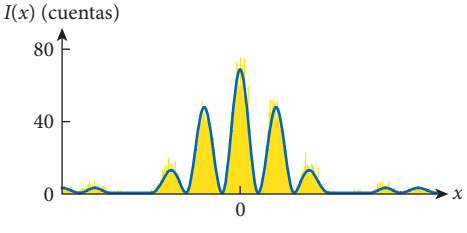


FIGURA 37.3 Distribución de intensidad (número de electrones que impactan en la pantalla por unidad de longitud) a lo largo de la pantalla en el experimento de doble ranura de electrones. Histograma amarillo: número de electrones que impactan en la pantalla en un intervalo de coordenadas.

¿Cuál es el significado físico de la función de onda cuántica de una partícula? La figura 37.3 (repetición de la figura 36.16) muestra la conexión entre las posiciones en las que los electrones impactan en la pantalla y la distribución de intensidad resultante de la interferencia de doble ranura.

Queda claro que el número de cuentas por bin de alguna unidad de longitud (histograma amarillo) y la intensidad (línea azul) son proporcionales entre sí. El número de cuentas por bin dividido entre el número total de electrones es la probabilidad de que un electrón impacte en el intervalo marcado por el bin. Denotemos el ancho del bin por dx, porque queremos usar bins microscópicamente pequeños. De este modo, la probabilidad de que un electrón impacte en el intervalo entre x y $x+dx$ es proporcional a $I(x)dx$. Por último, ya que recientemente establecimos que la intensidad es proporcional al cuadrado de la función de onda, podemos escribir para la probabilidad $\Pi(x)$ de que el electrón impacte el intervalo entre x y $x+dx$,

$$\Pi(x)dx = |\psi(x)|^2\, dx. \tag{37.1}$$

Esto es equivalente a decir que $|\psi(x)|^2$ es la densidad de probabilidad de encontrar la partícula en la posición x. La probabilidad es un número sin dimensión entre 0 y 1, así que la densidad de probabilidad debe tener la dimensión física de longitud inversa porque dx tiene la dimensión de una longitud.

¿Por qué es la notación del cuadrado del valor absoluto de la función de onda en la ecuación 37.1, en lugar de solamente el cuadrado de la función de onda? Resulta que la función de onda puede tener una amplitud compleja. De este modo, un número positivo queda asegurado sólo si se toma el cuadrado absoluto de esta amplitud.

La probabilidad de encontrar un electrón en particular en cualquier posición en el espacio debe ser 1, porque debe estar en alguna parte del espacio. Esto da la condición de normalización para la función de onda

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x)|^2 \, dx = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x)^* \psi(x) dx = 1, \tag{37.2}$$

donde $\psi(x)^*$ es el complejo conjugado de $\psi(x)$. Esta condición de normalización nos permitirá determinar la amplitud de la función de onda. Esta ecuación dice que la integral del cuadrado absoluto de la función de onda a lo largo de todo el espacio tiene el valor 1, porque si buscamos en todas partes del espacio, entonces la probabilidad integrada de encontrar el electrón en alguna parte es 1.

Con ayuda de los números complejos podemos ahora escribir una forma conveniente para la dependencia en el espacio coordenado de la función de onda de una partícula en libre movimiento. Esta función de onda debe ser una onda progresiva, puesto que la partícula se mueve libremente, así que se puede esperar que la función de onda sea sinusoidal, como la forma de onda para una onda electromagnética. Estas funciones de onda dependen del tiempo y del espacio. La dependencia del tiempo se abordará más adelante. Por ahora nos enfocamos en la dependencia únicamente de la coordenada x, colocando $t = 0$. La función de onda de partículas se escribe como una combinación lineal de oscilaciones de seno y coseno con el número de onda $\kappa = 2\pi/\lambda$, donde λ es la longitud de onda de De Broglie que se introdujo en el capítulo 36,

$$\psi(x) = C\cos(\kappa x) + D\,\mathrm{sen}(\kappa x).$$

Usando la notación de números complejos, la misma función de onda se puede escribir como

$$\psi(x) = Ae^{i\kappa x} + Be^{-i\kappa x}. \tag{37.3}$$

Los coeficientes C y D, así como A y B, son por lo general números complejos. Los coeficientes A y B se pueden elegir para adecuarse a la situación física en particular, bajo la condición de que la función de onda global sea normalizada, de acuerdo con la ecuación 37.2.

¿Por qué es más conveniente usar la notación de números complejos? Una respuesta a esta pregunta se da en la siguiente subsección con relación a la cantidad de movimiento que corresponde a una función de onda.

37.1 Oportunidad de autoevaluación

Usando la fórmula de Euler para números complejos, demuestre que las dos expresiones que se dan aquí para $\psi(x)$ son idénticas y que las amplitudes están relacionadas mediante $A + B = C$ e $i(A - B) = D$.

Cantidad de movimiento

Suponga que tenemos una partícula en libre movimiento con una función de onda de la forma de la ecuación 37.3. Por ahora, coloque $B = 0$. Esto simplificará nuestro trabajo y pronto aprenderemos el significado del término B. Por lo tanto, tenemos

$$\psi(x) = Ae^{i\kappa x} \tag{37.4}$$

como nuestra función de onda. ¿Cuál es la cantidad de movimiento asociada con esta función de onda? De acuerdo con la relación de De Broglie $\lambda = h/p$, el número de onda se puede escribir

$$\kappa = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{h/p} = p\frac{2\pi}{h} = \frac{p}{\hbar},$$

nuevamente usando la notación corta $\hbar = h/2\pi$. Por consiguiente,

$$p = \hbar\kappa. \tag{37.5}$$

¿Qué operación aplicada a la función de onda resultará en un producto de la función de onda multiplicado por cantidad de movimiento? Probemos el siguiente *Ansatz*:

$$\mathbf{p}\psi(x) = -i\hbar\frac{d}{dx}\psi(x). \tag{37.6}$$

Aquí hemos usado la notación

$$\mathbf{p} = -i\hbar\frac{d}{dx}$$

para denotar el **operador** de cantidad de movimiento; es decir, el operador que resulta en el producto de la cantidad de movimiento y la función de onda cuando se aplica a la función de onda. Esta manera de escribir el operador de la cantidad de movimiento es motivada para darse cuenta de que tomando la derivada de $\psi(x) = Ae^{i\kappa x}$ con respecto a x es equivalente a multiplicar la función de onda por el factor $i\kappa$. Sin embargo, este operador de cantidad de movimiento resulta ser más general y funciona para todas las funciones de onda, no sólo la de la ecuación 37.4.

Podemos tomar la derivada y convencernos nosotros mismos de que este *Ansatz* tiene sentido para nuestra función de onda:

$$-i\hbar\frac{d}{dx}\psi(x) = -i\hbar\frac{d}{dx}Ae^{i\kappa x} = -i\hbar A\frac{d}{dx}e^{i\kappa x} = -i\hbar A(i\kappa)e^{i\kappa x} = \hbar\kappa Ae^{i\kappa x} = \hbar\kappa\psi(x) = p\psi(x).$$

De este modo, nuestro operador de cantidad de movimiento, aplicado a la función de onda $\psi(x) = Ae^{i\kappa x}$ efectivamente nos da el producto de esta función de onda con su cantidad de movimiento $p = \hbar\kappa$. Por lo tanto, es apropiado interpretar nuestra función de onda (ecuación 37.4) como la de una partícula libre moviéndose con una cantidad de movimiento positiva $p = \hbar\kappa$. Por el contrario, una función de onda $\psi(x) = Be^{-i\kappa x}$ describe una partícula libre moviéndose con la componente negativa x de cantidad de movimiento $-p$, es decir, a lo largo del eje x negativo. La función de onda más general (ecuación 37.3), por ende, describe una superposición de ondas moviéndose hacia la izquierda y hacia la derecha.

Energía cinética

Hemos visto que podemos introducir un operador de cantidad de movimiento y aplicarlo a la función de onda cuántica de una partícula a fin de encontrar su cantidad de movimiento. ¿Existen otros operadores que pueden aplicarse a funciones de onda para encontrar las cantidades clásicas equivalentes? Una de estas cantidades clásicas es la energía cinética de una partícula. Clásicamente, la energía cinética se puede escribir como $K = p^2/2m$, así que, siguiendo la idea de la ecuación 37.6, introducimos un operador para la energía cinética como

$$\mathbf{K}\psi(x) = \frac{1}{2m}\mathbf{p}^2\psi(x) = \frac{1}{2m}\left(-i\hbar\frac{d}{dx}\right)^2\psi(x) = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}\psi(x). \tag{37.7}$$

Esta ecuación se puede entender como la definición general del operador de energía cinética. ¿Qué pasa para el caso especial en el que este operador se aplica a la función de onda de una partícula de libre movimiento con una cantidad de movimiento $p = \hbar\kappa$, una que tiene una función de onda $\psi(x) = Ae^{i\kappa x}$? Esto nos da

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}\psi(x) = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}Ae^{i\kappa x} = -i\kappa\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d}{dx}Ae^{i\kappa x} = \kappa^2\frac{\hbar^2}{2m}Ae^{i\kappa x} = \frac{p^2}{2m}Ae^{i\kappa x} = KAe^{i\kappa x}.$$

En efecto, esto funciona como se advirtió. El operador de energía cinética aplicado a la función de onda de una partícula libre produce esta energía cinética. Observe que la inserción de la función de onda $\psi(x) = Be^{-i\kappa x}$ hubiera resultado en el mismo valor para la energía cinética porque $(-\kappa)^2 = \kappa^2$. Por lo tanto, para la superposición de una onda que se mueve hacia la izquierda y hacia la derecha con un número de onda κ, el operador de energía cinética aplicado a la función de onda de la ecuación 37.3 resulta en

$$\mathbf{K}(Ae^{i\kappa x} + Be^{-i\kappa x}) \equiv -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}(Ae^{i\kappa x} + Be^{-i\kappa x}) = \frac{\hbar^2\kappa^2}{2m}(Ae^{i\kappa x} + Be^{-i\kappa x}). \tag{37.8}$$

37.2 Ecuación de Schrödinger

Dado que un electrón se puede representar por una función de onda, ¿cuál es la ecuación de movimiento que describe cuando esta función de onda depende de espacio y tiempo? Tal ecuación nos daría soluciones para la función de onda que son consistentes con las observaciones que hasta ahora se han analizado en este capítulo. Particularmente, las soluciones deberán tener longitudes de onda de De Broglie del tipo que se encuentran en el capítulo 36, y los cuadrados absolutos de las soluciones deberán reproducir los resultados del experimento de dispersión de doble rendija. El físico austriaco Erwin Schrödinger (1887-1961) encontró una de estas ecuaciones en 1925 y ahora lleva su nombre. Es el fundamento para toda la mecánica cuántica no relativista. Con "no relativista" nos referimos a todos los casos físicos en los que las velocidades de los objetos son pequeñas en comparación con la velocidad de la luz, así que la energía cinética se puede escribir

como $p^2/2m$. La siguiente discusión aplica la ecuación de Schrödinger a los electrones, pero la ecuación de Schrödinger también es válida para cualquier otro objeto que convencionalmente sea considerado como una partícula.

Por ahora consideramos únicamente problemas unidimensionales para investigar su solución estática; es decir, sus soluciones independientemente del tiempo. La **ecuación de Schrödinger** para este caso es

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi(x)}{dx^2}+U(x)\psi(x)=E\psi(x). \tag{37.9}$$

En esta ecuación $U(x)$ representa la energía potencial, que puede ser diferente para posiciones distintas, y E es la energía mecánica total de la onda. Ya hemos introducido el primer término en esta ecuación como el operador de la energía cinética, así que podemos pensar en la ecuación de Schrödinger como una expresión de la ley de conservación de energía para nuestra función de onda,

$$\Big(K(x)+U(x)\Big)\psi(x)=E\psi(x).$$

Si la energía potencial es cero en todas partes, entonces $U(x) = 0$ y la energía total es igual a la energía cinética. Para este caso ya hemos encontrado la solución, porque la ecuación de Schrödinger se reduce entonces simplemente a la ecuación 37.8. En la ausencia de una energía potencial, la solución de la ecuación de Schrödinger es, por ende, $\psi(x) = Ae^{i\kappa x} + Be^{-i\kappa x}$.

¿Cuál es la solución para una energía potencial muy grande? A físicos como nosotros nos gusta usar el límite de una energía potencial *infinita* a fin de obtener una solución simple. Para una energía potencial infinita en algún punto en el espacio, la ecuación de Schrödinger demanda que ya sea que la energía E sea infinita o la función de onda tenga el valor de cero en esta posición. No estamos interesados en el caso de energía infinita no física, así que la función de onda tiene que ser cero en esta región. Por lo tanto, es físicamente imposible que una partícula se encuentre en una región con energía potencial infinita. Llamamos a esta zona la región prohibida.

Partiendo de casos de simple limitación de cero energía potencial y energía potencial infinita, se pueden construir soluciones de la función de onda más complicadas para distribuciones de energía potencial. A fin de encontrar la solución para estas funciones de onda, tenemos que recordar que

- la función de onda debe ser continua en el espacio (es decir, no debe hacer ningún "salto", lo que crearía posiciones en las que las derivadas de la función de onda son indefinidas);
- la función de onda debe ser cero en regiones con energía potencial infinita, como dijimos antes, y
- la función de onda es normalizada (es decir, cumple con la condición de normalización de la ecuación 37.2).

37.3 Pozo de potencial infinito

Nuestro primer ejemplo de una distribución de energía potencial en el espacio es el de un **pozo de potencial infinito**. Esto es matemáticamente hablando el caso más simple y proporciona el entendimiento de interesantes situaciones físicas. Para un pozo de potencial infinito, defina la energía potencial como una función de la coordenada espacial x como

$$U(x)=\begin{cases}\infty & \text{para } x<0\\ 0 & \text{para } 0\le x\le a\\ \infty & \text{para } x>a.\end{cases} \tag{37.10}$$

Para este caso, el valor es cero para la función de onda para todos los valores fuera del intervalo de coordenadas espaciales entre 0 y a (figura 37.4). En particular, esto también implica un valor de 0 en los límites de intervalo. Dentro de este intervalo de coordenadas espaciales, la función de onda es del tipo que se encuentra en la ecuación 37.3, $\psi(x) = Ae^{i\kappa x} + Be^{-i\kappa x}$. Como se ha establecido antes, esta solución es matemáticamente equivalente a $\psi(x) = C\cos(\kappa x) + D\,\text{sen}(\kappa x)$. Esta forma de escribir la función de onda es ventajosa en este caso porque sabemos que $\psi(0) = 0$. Si sustituimos $x = 0$ en la función de onda nos da

$$\psi(0)=C\cos(\kappa\cdot 0)+D\,\text{sen}(\kappa\cdot 0)=C=0.$$

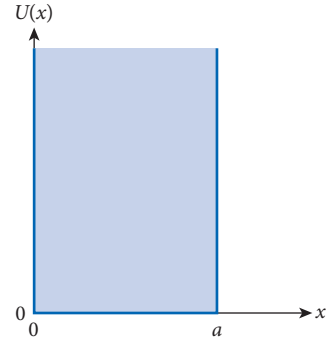


FIGURA 37.4 Un pozo de potencial infinito. La región permitida con valores no infinitos del potencial está sombreado en azul.

De este modo, el coeficiente C debe ser cero y el término de coseno no puede contribuir a la solución, dada la solución de $\psi(x) = D\,\text{sen}(\kappa x)$ en el intervalo entre 0 y a. Físicamente esto tiene sentido, porque la superposición de la onda que corre hacia la izquierda $Be^{-i\kappa x}$ y de la onda que corre hacia la derecha $Ae^{i\kappa x}$ resulta en una onda estacionaria, lo que es la solución apropiada para una onda atrapada entre dos barreras de potencial infinitamente altas.

Por lo tanto, nuestro resultado preliminar es que nuestra función de onda se puede escribir como

$$\psi(x) = \begin{cases} 0 & \text{para } x < 0 \\ D\,\text{sen}(\kappa x) & \text{para } 0 \le x \le a \\ 0 & \text{para } x > a. \end{cases}$$

Puesto que nuestras funciones de onda deben ser continuas, existen restricciones para posibles soluciones dentro del intervalo entre 0 y a, ya que sólo pueden usarse aquellas soluciones que desaparecen en los límites. En $x = 0$, esto sucede automáticamente porque la función seno siempre es 0 en este punto. Sin embargo, en $x = a$, la condición del límite es

$$\psi(x = a) = D\,\text{sen}(\kappa a) = 0.$$

Esto implica que no todos los valores de la longitud de onda $\lambda = 2\pi/\kappa$ son posibles, sino solamente aquellos para los cuales se cumple

$$\kappa a = \frac{2\pi a}{\lambda} = n\pi \quad \text{para todo } n = 1, 2, 3, ...$$

porque la función seno es cero cada vez que su argumento es un número entero múltiplo de π. (Técnicamente, $n = 0$ también es permitido, pero para cualquier valor finito de a esto implica una longitud de onda infinita no física. También se permitirían números negativos, pero dado que $\text{sen}(-x) = -\text{sen}(x)$, éstos no nos dan soluciones adicionales más allá de las que ya están contenidas en los números enteros positivos.) Por ende, las posibles longitudes de onda en este pozo de potencial sólo son aquellas con

$$\lambda_n = \frac{2a}{n} \quad \text{para todo } n = 1, 2, 3, \ldots. \tag{37.11}$$

Luego, las únicas soluciones posibles de la ecuación de Schrödinger para el problema del pozo de potencial infinito son

$$\psi(x) = \begin{cases} 0 & \text{para } x < 0 \\ D\,\text{sen}\left[\dfrac{n\pi x}{a}\right] \text{ con } n = 1, 2, 3, \ldots & \text{para } 0 \le x \le a \\ 0 & \text{para } x > a. \end{cases}$$

Casi terminamos, pero aún tenemos que determinar la amplitud D de la función de onda. A fin de obtenerla usamos la condición de normalización (ecuación 37.2):

$$\begin{aligned} 1 &= \int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x)|^2\,dx = \int_{-\infty}^{0} |\psi(x)|^2\,dx + \int_{0}^{a} |\psi(x)|^2\,dx + \int_{a}^{\infty} |\psi(x)|^2\,dx \\ &= 0 + \int_{0}^{a} \left| D\text{sen}\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\right|^2 dx + 0 \\ &= |D|^2 \int_{0}^{a} \text{sen}^2\left(\frac{n\pi x}{a}\right) dx \\ &= |D|^2 \frac{a}{2}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $|D|^2 = 2/a$. Cualquier número complejo z puede escribirse como $z = re^{i\theta}$ y $|z| = r$ para cualquier ángulo de fase θ. La magnitud de D es $\sqrt{2/a}$, así que en general podemos escribir $D =$

$\sqrt{2/a}\,e^{i\theta}$. Para simplificar, seleccionamos este ángulo de fase como 0 y de esta manera tenemos la solución completa para la función de onda de una partícula limitada a un pozo de potencial con paredes infinitamente altas:

$$\psi(x)=\begin{cases}0 & \text{para } x<0\\ \sqrt{\dfrac{2}{a}}\,\text{sen}\left[\dfrac{n\pi x}{a}\right] \text{ con } n=1,2,3,\ldots & \text{para } 0\le x\le a\\ 0 & \text{para } x>a.\end{cases} \tag{37.12}$$

En la solución (ecuación 37.12) cada valor de n corresponde a una diferente función de onda posible para una partícula en un pozo infinito. Para distinguirlas, cada función de onda está etiquetada con un índice que indica este número n, el **número cuántico principal**. De este modo, $\psi_1(x)$ denota la solución para el número cuántico 1, y así sucesivamente. La figura 37.5*a*) muestra las soluciones de la función de onda para los cuatro números cuánticos más bajos.

Anteriormente vimos que la probabilidad de encontrar una partícula en una posición dada es proporcional al cuadrado absoluto de la función de onda. Por lo tanto, graficamos en la figura 37.5*b*) el cuadrado absoluto de las funciones de onda que corresponden a los cuatro números cuánticos más bajos. Esto muestra la probabilidad relativa de dónde, en el pozo, se podrá esperar encontrar la partícula cuando se realiza una medición de posición.

La elección de simples números enteros —es decir, números cuánticos— es una característica típica de sistemas mecánicos cuánticos. Condiciones de límite en las funciones de onda fuerzan la existencia de soluciones que son cuantizadas. El análisis de átomos, núcleos atómicos y partículas elementales en los capítulos 38-39 demostrará que hay diferentes números cuánticos en muchas situaciones.

La solución del capítulo 15 para una cuerda vibrante tiene muchas similitudes con la solución para una partícula en un pozo de potencial infinito. Puesto que la cuerda está sujetada en ambos extremos, nodos de la función de onda aparecen en los extremos, permitiendo sólo la oscilación fundamental y sus armónicos. El potencial infinitamente alto fuera del intervalo [0,a] logra el mismo efecto de la "sujeción" de la función de onda de una partícula en los límites del pozo de potencial. Por lo tanto, las soluciones de ondas estacionarias para la clásica cuerda vibrante y para la partícula cuántica en un pozo de potencial infinito son matemáticamente idénticas.

Por último, comparemos la distribución de probabilidad cuántica con la clásica para el caso que acabamos de considerar. En el caso clásico, la partícula permanece atrapada entre 0 y a. Entre estos dos puntos se mueve con una velocidad de $v=\sqrt{2E/m}$.

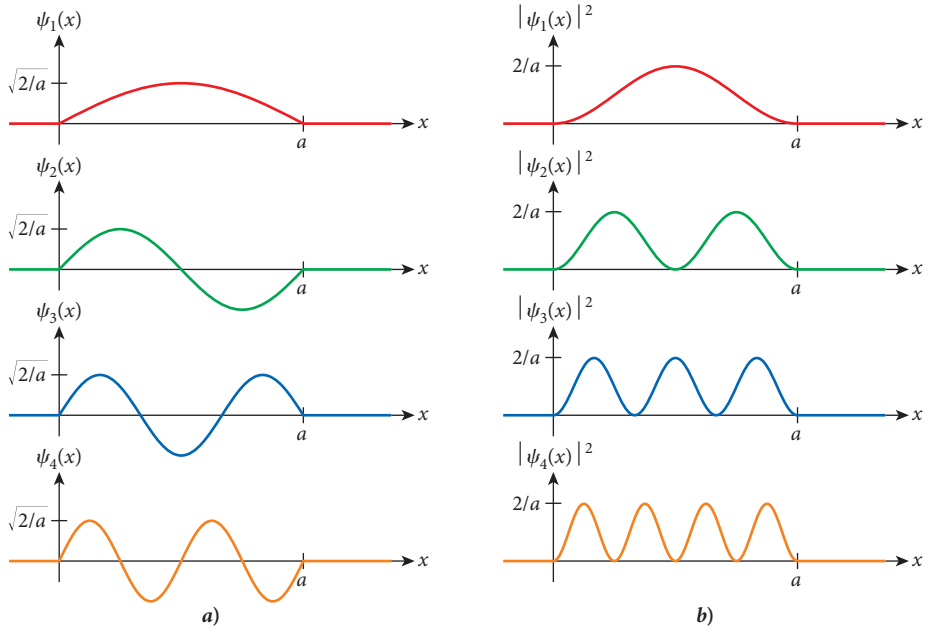


FIGURA 37.5 *a*) Funciones de onda correspondientes a los cuatro números cuánticos más bajos en un pozo de potencial infinito; *b*) probabilidad de encontrar la partícula con esta función de onda en cualquier posición particular en el pozo.

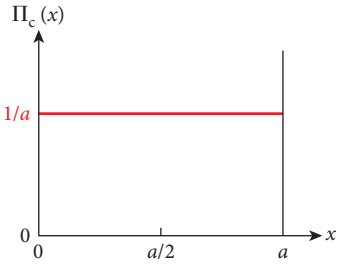


FIGURA 37.6 Distribución de probabilidad clásica de encontrar una partícula en cualquier posición particular atrapada en un pozo de potencial infinito.

La probabilidad de encontrar una partícula en un punto dado en el espacio es proporcional a la fracción dt del tiempo total que la partícula pasa en las inmediaciones dx del punto x. En cambio, este intervalo de tiempo dt es inversamente proporcional a la velocidad $v(x)$ que tiene en este punto, $dt = dx/v(x)$. De este modo, la probabilidad clásica de encontrar una partícula en el intervalo entre x y $x + dx$ es

$$\Pi_c(x)dx \propto \frac{1}{v(x)}. \tag{37.13}$$

Si v es independiente de la posición, entonces la probabilidad clásica de encontrar una partícula debe ser una constante como una función de la posición. La distribución de probabilidad resultante se muestra en la figura 37.6.

Si se compara este resultado con la distribución de probabilidad de la mecánica cuántica en la figura 37.5*b*), se notan claras diferencias. La distribución de probabilidad de la mecánica cuántica oscila entre 0 y un valor máximo de $2/a$, mientras que el valor clásico representa el promedio de esta oscilación, $1/a$. La relación entre la distribución de probabilidad clásica y la de la mecánica cuántica se analiza con mayor detalle más adelante, en este capítulo.

Energía de una partícula

La ecuación de Schrödinger 37.9 depende de la energía total de una partícula. Ahora que tenemos la solución completa de la función de onda para una partícula en un pozo de potencial infinito, encontremos la energía total que corresponde a esta solución en este caso. Fuera del intervalo entre $x = 0$ y $x = a$, la función de onda es cero, así que la partícula correspondiente tiene cero probabilidad de residir allí. De este modo, la región exterior no contribuye a la energía. Dentro del intervalo entre 0 y a no hay energía potencial. Por lo tanto, la energía total es igual a la energía cinética de la partícula. La ecuación 37.7 nos dice cómo calcular esta energía cinética:

$$\mathbf{K}\psi(x) = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi(x)}{dx^2}.$$

Para cada número cuántico n, sin embargo, se deberá esperar un resultado diferente para la energía cinética y, por ende, para la energía total. Marque esta energía total correspondiente al número cuántico n como E_n. Para el caso de la partícula en el pozo de potencial infinito,

$$\begin{aligned} E_n\psi_n(x) &= -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi_n(x)}{dx^2} \\ &= -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}\left(\sqrt{\frac{2}{a}}\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\right) \\ &= -\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{n\pi}{a}\right)\frac{d}{dx}\left(\sqrt{\frac{2}{a}}\cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\right) \\ &= \frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2\left(\sqrt{\frac{2}{a}}\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\right) \\ &= \frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2\psi_n(x). \end{aligned}$$

La energía total E_n correspondiente al número cuántico n es, por lo tanto, proporcional al cuadrado de n:

$$E_n = \frac{\hbar^2\pi^2}{2ma^2}n^2, \qquad n = 1,2,3,\ldots. \tag{37.14}$$

La energía también depende en forma inversa del cuadrado de la anchura del potencial a y, en forma inversa, de la masa m de la partícula. Estas energías se pueden representar como líneas horizontales en una gráfica de energía *versus* posición. Este tipo de gráfica se llama **diagrama de nivel de energía** y se muestra en la figura 37.7. Puesto que las energías de estos estados son más bajas que la altura (infinita) del pozo de potencial, se refiere a los estados correspondientes como **estados ligados**. El pozo de potencial infinito tiene un número infinito de estados ligados.

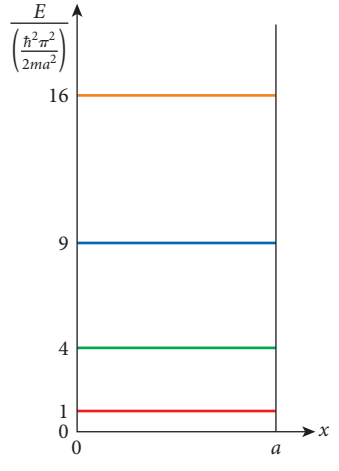


FIGURA 37.7 Los cuatro niveles de energía más bajos en un pozo de potencial infinito. Los colores de los niveles de energía corresponden a los colores de las correspondientes funciones de onda en la figura 37.5.

EJEMPLO 37.1 Electrón en una caja

Esta solución para un pozo de potencial infinito se llama a veces una "partícula en una caja rígida" y nos permite modelar simplemente un electrón ligado a un átomo o un protón ligado a un núcleo atómico, como lo muestra el siguiente ejemplo.

PROBLEMA

¿Cuál es la energía cinética de la función de onda con el número cuántico más bajo para un electrón confinado a una caja con un ancho de 2.00 Å ≡ $2.00 \cdot 10^{-10}$ m?

SOLUCIÓN

La masa del electrón es $m = 9.109 \cdot 10^{-31}$ kg. En este caso la respuesta entera es

$$E_1 = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2ma^2} = \frac{(1.0546 \cdot 10^{-34}\ \text{J s})^2 \pi^2}{2(9.109 \cdot 10^{-31}\ \text{kg})(2.00 \cdot 10^{-10}\ \text{m})^2} = 1.51 \cdot 10^{-18}\ \text{J}.$$

De modo alterno, este valor de energía se puede expresar en unidades de electrón-volts:

$$E_1 = (1.51 \cdot 10^{-18}\ \text{J})/(1.602 \cdot 10^{-19}\ \text{J/eV}) = 9.43\ \text{eV}.$$

DISCUSIÓN

El capítulo 38 demostrará que los átomos tienen diámetros típicos de 10^{-10} m, así que este ejemplo nos permite estimar que la escala de energía típica para electrones en átomos tiene que ser del orden de 10 eV. Los átomos reales son mucho más complicados que un simple modelo de una caja con paredes infinitamente altas, pero esta manera de pensar permite estimaciones bien informadas acerca de las escalas de energía involucradas en un problema físico.

Al realizar el mismo ejercicio para un protón (con una masa aproximadamente 2 000 veces más grande que la de un electrón) confinado a una caja con un ancho de 10^{-15} m a 10^{-14} m, que es la dimensión típica de un núcleo atómico, se obtiene la respuesta de $5 \cdot 10^7$ eV a $5 \cdot 10^6$ eV. Concluimos que escalas típicas de energía nuclear están en el orden de 5 a 50 MeV, una primera conjetura sorprendentemente buena.

37.1 Ejercicio en clase

Si reducimos el ancho del pozo de potencial a la mitad de su valor original, entonces la energía de la función de onda $n = 3$

a) permanece igual;

b) se reduce por un factor de 2;

c) se reduce por un factor de 4;

d) se incrementa por un factor de 2;

e) se incrementa por un factor de 4.

37.2 Oportunidad de autoevaluación

¿Cómo cambian las soluciones para las funciones de onda y las energías en el problema del pozo de potencial infinito si reemplazamos la función de energía potencial de la ecuación 37.10 con una que aún es infinita fuera del intervalo entre 0 y a, pero tiene un valor constante de $c \neq 0$ dentro de este intervalo?

Pozos multidimensionales

La idea de un pozo de potencial infinito unidimensional se puede extender a la de un pozo multidimensional en el que una partícula está restringida en el plano xy o incluso a una caja rectangular en el espacio tridimensional. No damos la derivación matemática de la solución completa para estas situaciones; en su lugar hacemos hincapié en las características generales.

Primero, pensemos en lo que será diferente cuando nuestros cálculos se extiendan de una a dos dimensiones espaciales. La energía potencial ahora puede ser una función de ambas variables x y y, y así escribimos que $U(x,y)$. Esto significa que la función de onda se debe escribir como una función de las mismas dos variables, $\psi(x,y)$. En nuestras consideraciones clásicas de la energía cinética vimos que esto se puede escribir como

$$K = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{p_y^2}{2m}.$$

En analogía con lo que acabamos de deducir para el problema unidimensional (vea la ecuación 37.6), los componentes x y y del operador de cantidad de movimiento se pueden escribir como

$$\mathbf{p}_x \psi(x,y) = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \psi(x,y)$$

$$\mathbf{p}_y \psi(x,y) = -i\hbar \frac{\partial}{\partial y} \psi(x,y).$$

El único cambio en cuanto al problema unidimensional es que se tienen que usar derivadas parciales, lo cual es apropiado para el cálculo multivariable. (Una derivada parcial con respecto a una

variable trata a las demás variables como constantes.) Luego el operador de energía cinética para la función de onda cuántica se puede escribir como

$$\mathbf{K}\psi(x,y)=\frac{1}{2m}\mathbf{p}_x^2\psi(x,y)+\frac{1}{2m}\mathbf{p}_y^2\psi(x,y)$$
$$=-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi(x,y)-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial y^2}\psi(x,y).$$

Por último, la ecuación bidimensional de Schrödinger se presenta así:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi(x,y)}{\partial x^2}-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi(x,y)}{\partial y^2}+U(x,y)\psi(x,y)=E\psi(x,y).$$

Para proceder tenemos que especificar la forma de la energía potencial. Si la energía potencial se puede escribir como el producto de una función que depende únicamente de x por otra que depende únicamente de y —es decir, $U(x,y) = U_1(x)\cdot U_2(y)$— entonces el problema se torna **separable**. Esto significa que la función de onda también es un producto de dos funciones y que cada una depende únicamente de una variable $\psi(x,y) = \psi_1(x)\cdot\psi_2(y)$.

Además, si usamos el caso simplificado de un pozo de potencial infinito bidimensional y rectangular,

$$U(x,y)=U_1(x)\cdot U_2(y)$$
$$\text{con: } U_1(x)=\begin{cases}\infty & \text{para } x<0\\ 0 & \text{para } 0\le x\le a\\ \infty & \text{para } x>a\end{cases},\quad U_2(y)=\begin{cases}\infty & \text{para } y<0\\ 0 & \text{para } 0\le y\le b\\ \infty & \text{para } y>b\end{cases}$$

entonces las soluciones que obtenemos son productos de las funciones de onda obtenidas en la ecuación 37.12 en las direcciones x y y. De manera explícita, estas funciones de onda son

$$\psi(x,y)=\psi_1(x)\cdot\psi_2(y) \tag{37.15}$$

$$\psi_1(x)=\begin{cases}0 & \text{para } x<0\\ \sqrt{\frac{2}{a}}\,\text{sen}\left[\frac{n_x\pi x}{a}\right] \text{ con } n_x=1,2,3,\ldots & \text{para } 0\le x\le a\\ 0 & \text{para } x>a\end{cases}$$

$$\psi_2(y)=\begin{cases}0 & \text{para } y<0\\ \sqrt{\frac{2}{b}}\,\text{sen}\left[\frac{n_y\pi y}{b}\right] \text{ con } n_y=1,2,3,\ldots & \text{para } 0\le y\le b\\ 0 & \text{para } y>b.\end{cases}$$

Estas soluciones se muestran en la figura 37.8 para los valores más bajos de los números cuánticos n_x y n_y.

De la misma manera con la que llegamos a la solución para los valores de energía correspondientes a los números cuánticos n unidimensionales en la ecuación 37.14, obtenemos la solución para las energías correspondientes a estas funciones de onda bidimensionales

$$E_{n_x,n_y}=\frac{\hbar^2\pi^2}{2ma^2}n_x^2+\frac{\hbar^2\pi^2}{2mb^2}n_y^2. \tag{37.16}$$

Si, por ejemplo, $a = b$ (potencial cuadrado), entonces el mismo valor de energía se puede obtener usualmente por más de una manera. Por ejemplo, los estados con números cuánticos ($n_x = 1$, $n_y = 2$) y ($n_x = 2$, $n_y = 1$) tienen la misma energía. Esto se llama "degeneración".

Si los pozos de potencial no son rectangulares, entonces la solución usualmente no se puede escribir en una forma simple. Sin embargo, en muchos casos el problema sí se puede resolver numéricamente. De manera experimental se pueden generar pozos de potencial para electrones muy altos (no del todo infinitos) bidimensionales mediante el arreglo de varios átomos en superficies planas en forma de corrales. La figura 37.9 muestra un ejemplo de esto, en el que la codificación con colores (imagen grande) o protuberancias (recuadro de tonalidades grises) representa las distribuciones de probabilidad para la función de onda de electrones dentro de corrales, consistente en átomos de hierro arreglados en diferentes formas en una superficie plana

37.3 Oportunidad de autoevaluación

¿Puede usted usar las mismas consideraciones y escribir las funciones de onda y energías para un pozo de potencial tridimensional y rectangular?

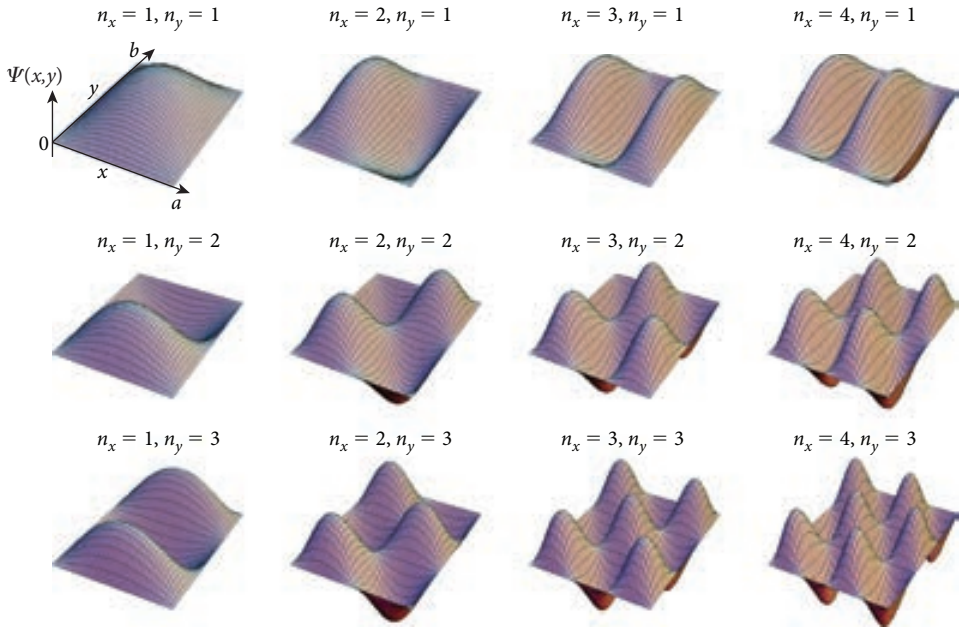


FIGURA 37.8 Funciones de onda con los números cuánticos más bajos en un pozo de potencial infinito bidimensional y rectangular.

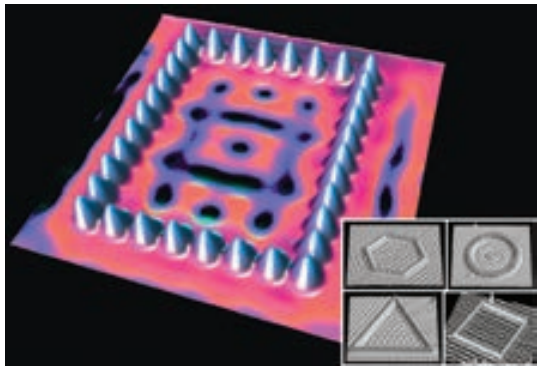


FIGURA 37.9 Corral cuántico bidimensional y rectangular hecho de átomos de hierro individuales arreglados sobre una superficie de cobre. La codificación de colores dentro del corral muestra la densidad de probabilidad de la onda del electrón. El recuadro de modalidades grises muestra varios corrales de diferentes formas, y las protuberancias indican la densidad de probabilidad de la onda del electrón. Estos arreglos fueron creados mediante el uso de un microscopio de barrido de efecto túnel.

de cobre. El instrumento que se usa, primero, para arreglar los átomos en los modos ilustrados y, segundo, para generar estas imágenes experimentales se llama microscopio de barrido de efecto túnel, lo cual se discutirá con mayor detalle más adelante en este capítulo.

37.4 Pozos de potencial finitos

Volvamos al caso unidimensional y resolvamos un problema que es un poco más complicado que aquel de un pozo de potencial con potencial infinitamente alto fuera del pozo. Ahora queremos obtener una solución para el caso en el que la pared del pozo no es infinitamente alta, sino que tiene una altura finita.

La forma del **pozo de potencial finito** que queremos estudiar se muestra en la figura 37.10: la energía potencial $U(x)$ es cero dentro del intervalo de 0 a a, es infinita para todos los valores de $x < 0$, y tiene un valor constante finito de $U_1 > 0$ para $x > a$,

$$U(x) = \begin{cases} \infty & \text{para} \quad x < 0 \\ 0 & \text{para} \quad 0 \le x \le a \\ U_1 & \text{para} \quad x > a. \end{cases}$$

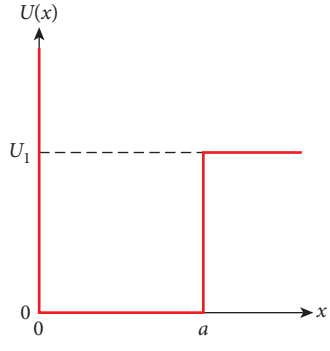


FIGURA 37.10 Pozo de energía potencial finito.

Al igual que en el caso del potencial infinito, construimos una solución para cada una de las tres regiones por separado y luego combinamos estas soluciones, una con la otra en las fronteras. La solución sigue siendo la misma que antes para $x < 0$, donde la función de onda debe tener un valor constante de 0. En el intervalo de 0 a a, la función de onda nuevamente debe tener la forma general de $\psi(x) = C\cos(\kappa x) + D\,\text{sen}(\kappa x)$. Y nuevamente, puesto que la función de onda tiene que

ser continua y $\psi(0) = 0$, el coeficiente C debe ser 0, lo que nos da la solución de $\psi(x) = D\,\text{sen}\,(\kappa x)$ en el intervalo entre 0 y a.

Para $x > a$, sin embargo, hay nuevos efectos. En esta región la ecuación de Schrödinger es

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + U_1\psi(x) = E\psi(x).$$

El reordenamiento de esta ecuación conduce a

$$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} = \frac{2m(U_1 - E)}{\hbar^2}\psi(x). \tag{37.17}$$

Consideremos la forma de esta ecuación: la segunda derivada de la función de onda es igual a la función de onda misma, multiplicada por una constante, $2m(U_1 - E)/\hbar^2$. Aún no sabemos cuál será la energía E, pero ya podemos distinguir dos diferentes casos.

Caso 1: energía mayor que la profundidad del pozo

Para $E > U_1$ tenemos $2m(U_1 - E)/\hbar^2 < 0$, y obtenemos soluciones oscilatorias del mismo tipo que dentro del intervalo entre 0 y a, pero con una longitud de onda diferente y, por ende, un número de onda diferente:

$$\psi(x) = E\cos(\kappa' x) + F\ \text{sen}\,(\kappa' x) \quad \text{para} \quad x > a \text{ y } E > U_1.$$

¿De qué manera están relacionados los números de onda κ' y κ? Recuerde que dentro del intervalo [0,a] no hay energía potencial, la energía total es energía cinética, y hemos encontrado que $E = \hbar^2\kappa^2/2m$. Para $x > a$ y $E > U_1$, la energía cinética es entonces simplemente $E - U_1$, y, por lo tanto, $E - U_1 = \hbar^2\kappa'^2/2m$. Por lo tanto,

$$\kappa' = \sqrt{\kappa^2 - \frac{2mU_1}{\hbar^2}}. \tag{37.18}$$

De este modo, el número de onda $\kappa' < \kappa$, y, por ello, la longitud de onda de la oscilación espacial es mayor en la región con $U(x) = U_1 > 0$ que en la región donde $U(x) = 0$.

La función de onda para este caso de energía total mayor que la altura del pozo de potencial $E > U_1$ es entonces

$$\psi(x) = \begin{cases} 0 & \text{para} \quad x < 0 \\ D\,\text{sen}\,(\kappa x) & \text{para} \quad 0 \le x \le a \\ F\cos(\kappa' x) + G\,\text{sen}\,(\kappa' x) & \text{para} \quad x > a. \end{cases}$$

¿Cómo determinamos la solución completa? Tenemos que encontrar los valores para los coeficientes de amplitud D, F y G. Estos tres números se pueden determinar a partir de las siguientes tres condiciones:

- La función de onda debe ser continua en los límites $x = a$ (como se explicó arriba).
- Las derivadas de la función de onda deben ser continuas en $x = a$ (como se explicará a continuación).
- El cuadrado absoluto de la función de onda debe ser normalizado a 1.

La lógica para la segunda condición es que la cantidad de movimiento está relacionada con la derivada de la función de onda, así que si la derivada de la función de onda fuera discontinua, entonces la cantidad de movimiento sería indefinida en el punto de discontinuidad. Observe que los números de onda κ y κ' ya no están restringidos por estas condiciones ni tampoco lo están los posibles valores de la energía E. Todas las energías mayores que el valor U_1 resultarán posibles.

No queremos pasar a través de toda el álgebra en este momento; esto se hace normalmente en un curso de mecánica cuántica de nivel superior. Sin embargo, a partir de la estructura que hemos elaborado hasta ahora (figura 37.11) ya podemos hacer un esbozo del tipo de función de onda que podemos esperar. Esta función de onda tiene las características de ser continua y tener una derivada continua en todas partes. También, en general, las oscilaciones en la región con $U > 0$ tienen una mayor longitud de onda (debido a la ecuación 37.18) y amplitud (debido a la mayor longitud de onda y las primeras dos condiciones recién mencionadas) que las de la región con $U = 0$. Hacemos énfasis una vez más que en este caso no sólo tenemos posibles longitudes de onda discretas, sino un continuo infinito de longitudes de onda.

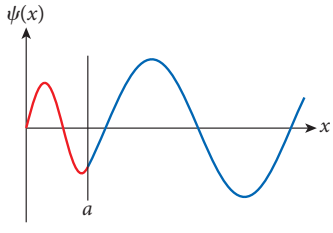


FIGURA 37.11 Función de onda para el pozo de potencial finito, con energía más grande que el salto de potencial.

Caso 2: energía menor que la profundidad del pozo, estados ligados

En este caso la energía de la partícula es menor que la profundidad del pozo de potencial, así que las funciones de onda que cumplen con la condición $E < U_1$ forman estados ligados. Parte de nuestra tarea es averiguar si existe algún estado ligado o no. Puesto que incluso la energía más baja de la función de onda en el pozo infinito tiene un valor finito de no cero, esperamos que para cada pozo de potencial poco profundo no ocurra ningún estado ligado.

Para $E < U_1$, la constante $2m(U_1 - E)/\hbar^2$ tiene un valor más grande que cero, así que, en lugar de soluciones oscilatorias, obtenemos soluciones exponenciales para la ecuación diferencial 37.17. Para mostrar esto en detalles cuantitativos, introducimos una constante γ:

$$\gamma = \sqrt{\frac{2m(U_1 - E)}{\hbar^2}}. \tag{37.19}$$

Luego la ecuación diferencial 37.17 que tenemos que resolver en la región $x > a$ se vuelve

$$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} = \gamma^2\psi(x).$$

Tiene la solución:

$$\psi(x) = Fe^{-\gamma x} + Ge^{\gamma x} \quad \text{para} \quad x > a \text{ y } E < U_1.$$

(El hecho de que esto es una solución puede verificarse tomando la segunda derivada e insertándola nuevamente en la ecuación diferencial.) Descarte la solución de incremento exponencial $e^{\gamma x}$ porque esta solución se vuelve infinita conforme nos acercamos a $x \to \infty$. Luego nuestra función de onda no sería normalizable; es decir, la integral del cuadrado absoluto de la función de onda no podría tener el valor 1 de acuerdo con la ecuación 37.2. Por ende, $G = 0$, y nuestra solución se vuelve

$$\psi(x) = Fe^{-\gamma x} \quad \text{para} \quad x > a \text{ y } E < U_1.$$

Nuevamente la función de onda para las tres regiones se puede escribir

$$\psi(x) = \begin{cases} 0 & \text{para} \quad x < 0 \\ D \operatorname{sen}(\kappa x) & \text{para} \quad 0 \le x \le a \\ Fe^{-\gamma x} & \text{para} \quad x > a. \end{cases} \tag{37.20}$$

Las condiciones de tener una función de onda normalizada que sea continua y que tenga una derivada continua en $x = a$ proporciona tres ecuaciones para las dos amplitudes desconocidas D y F, así como el número de onda κ. La otra constante que aparece en esta solución, γ, no es independiente de κ. Esto se puede ver usando la ecuación definida en 37.19 para γ, y por el hecho de que cuando la energía potencial es cero en la región $0 \le x \le a$, la energía total E, que es constante, es simplemente $E = \hbar^2\kappa^2/2m$. Esto resulta en

$$\gamma^2 = \frac{2m(U_1 - E)}{\hbar^2} = \frac{2mU_1}{\hbar^2} - \frac{2mE}{\hbar^2} = \frac{2mU_1}{\hbar^2} - \kappa^2. \tag{37.21}$$

Antes de calcular un caso representativo con más detalle, pensemos primero acerca de las características generales de la solución que esperamos obtener. Igual que en el caso del pozo de potencial infinito, la función de onda en el caso del pozo de potencial finito oscila en forma sinusoidal en la región donde desaparece la energía potencial. Sin embargo, ahora la función de onda tiene permiso de "perderse" hacia la pared, aunque tiene un valor de decremento exponencial conforme x incrementa más allá de a. Esta fuga permite que la longitud de onda para $x < a$ sea algo más larga que la longitud de onda de la función de onda del pozo infinito, porque ahora la longitud de onda se derrama en $x > a$. Una longitud de onda más larga implica un número de onda más pequeño. Puesto que la energía total es proporcional al cuadrado del número de onda, se puede esperar que los valores de energía correspondientes a las funciones de onda en el pozo de potencial finito sean más bajas que sus contrapartes en el pozo infinito. Otra manera de declarar ese resultado es decir que las funciones de onda en el pozo infinito están más "localizadas" y, por lo tanto, tienen energías cinéticas más grandes que sus contrapartes correspondientes en el pozo de profundidad finita.

EJEMPLO 37.2 Pozo de potencial finito

PROBLEMA

Suponga que un electrón debe tener por lo menos dos estados ligados en un pozo de la forma indicada en la figura 37.10. Si el ancho es $a = 1.30$ nm, ¿qué altura necesita tener el salto de potencial U_1 para la longitud de onda del estado $n = 2$ para ser 20% más grande de lo que sería en un pozo de potencial infinito del mismo ancho?

SOLUCIÓN

Este problema debe ser tratado por pasos. Primero, la ecuación 37.11 dio el resultado para el pozo infinito $\lambda_n = 2a/n$ para todos los $n = 1,2,3,\ldots$. De este modo, obtenemos para $n = 2$ la longitud de onda $\lambda_2 = 2a/2 = a$. (Como de costumbre, en este punto no vamos a insertar el valor para a, sino que dejaremos el resultado en forma general e insertamos los números sólo al final.)

Una longitud de onda 20% más grande que la longitud de onda para el pozo infinito es, en este caso, $\lambda_2' = 1.2\lambda_2 = 1.2a$. El valor correspondiente del número de onda es, por ende, $\kappa_2' = 2\pi/\lambda_2' = 2\pi/(1.2a)$. Puesto que el número de onda es inversamente proporcional a la longitud de onda, y la longitud de onda necesita incrementar en 20%, el número de onda tiene que ser reducido por el mismo factor: $\kappa_2' = \kappa_2/1.2$. (Nuevamente posponemos la inserción de valores numéricos para el número de onda hasta el final.)

La función de onda general para este problema es dada por la ecuación 37.20:

$$\psi_2(x) = \begin{cases} 0 & \text{para } x < 0 \\ D\,\text{sen}\left(\kappa_2' x\right) & \text{para } 0 \le x \le a \\ Fe^{-\gamma x} & \text{para } x > a. \end{cases}$$

Veamos las condiciones de frontera en $x = a$. La demanda de continuidad de la función de onda requiere

$$D\,\text{sen}\left(\kappa_2' a\right) = Fe^{-\gamma a} \Rightarrow \text{sen}\left(\kappa_2' a\right) = \frac{F}{D}e^{-\gamma a}. \tag{i}$$

Tome la derivada de la función de onda y luego considere la condición de continuidad para la derivada de la función de onda. La derivada es

$$\frac{d}{dx}\psi_2(x) = \begin{cases} 0 & \text{para } x < 0 \\ \kappa_2' D\cos\left(\kappa_2' x\right) & \text{para } 0 \le x \le a \\ -\gamma F e^{-\gamma x} & \text{para } x > a. \end{cases}$$

Una primera derivada continua en $x = a$ requiere entonces

$$\kappa_2' D\cos\left(\kappa_2' a\right) = -\gamma F e^{-\gamma a} \Rightarrow -\frac{\kappa_2'}{\gamma}\cos\left(\kappa_2' a\right) = \frac{F}{D}e^{-\gamma a}. \tag{ii}$$

Hemos reescrito las ecuaciones (i) y (ii) de tal manera que tengan los mismos lados derechos. Por lo tanto, sus lados izquierdos también tienen que ser iguales, y así obtenemos

$$-\frac{\kappa_2'}{\gamma}\cos\left(\kappa_2' a\right) = \text{sen}\left(\kappa_2' a\right) \Rightarrow$$

$$\gamma = -\kappa_2' \cot\left(\kappa_2' a\right). \tag{37.22}$$

Tomar el cuadrado de esta ecuación resulta en

$$\gamma^2 = \kappa_2'^2 \cot^2\left(\kappa_2' a\right). \tag{iii}$$

Sin embargo, también sabemos que en la ecuación 37.21 habíamos calculado la relación para γ^2:

$$\gamma^2 = \frac{2mU_1}{\hbar^2} - \kappa_2'^2. \tag{iv}$$

La combinación de las ecuaciones (iii) y (iv) nos da

$$\kappa_2'^2 \cot^2\left(\kappa_2' a\right) = \frac{2mU_1}{\hbar^2} - \kappa_2'^2 \Rightarrow$$

$$\frac{2mU_1}{\hbar^2} = \kappa_2'^2\left(1 + \cot^2\left(\kappa_2' a\right)\right) \Rightarrow$$

$$U_1 = \frac{\hbar^2 \kappa_2'^2}{2m}\left(1 + \cot^2\left(\kappa_2' a\right)\right).$$

Formalmente, ésta es nuestra respuesta. Ahora podemos insertar nuestros números. Ya hemos observado que $\kappa_2' = 2\pi/\lambda_2' = 2\pi/(1.2a)$; por lo tanto, $\kappa_2' a = 2\pi/1.2$. Ahora podemos calcular el factor $\cot^2(\kappa_2' a)$:

$$\cot^2\left(\kappa_2' a\right) = \cot^2\left(2\pi/1.2\right) = 0.3333 = \tfrac{1}{3}.$$

Por ende, el salto de potencial debe tener una altura de $1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$ veces la energía E_2 de la función de onda ψ_2. Esta energía es

$$E_2 = \frac{\hbar^2 \kappa_2'^2}{2m} = \frac{\hbar^2 (2\pi/1.2a)^2}{2m} = \frac{h^2}{2.88ma^2}$$

$$= \frac{(6.626 \cdot 10^{-34}\ \text{J s})^2}{2.88(9.109 \cdot 10^{-31}\ \text{kg})(1.30 \cdot 10^{-9}\ \text{m})^2}$$

$$= 9.90 \cdot 10^{-20}\ \text{J} = 0.618\ \text{eV}.$$

Nuestra respuesta final es $U_1 = \frac{4}{3}E_2 = 0.823$ eV.

Observe que $\kappa_2' = \kappa_2/1.2$ como lo exigió el mismo problema. Puesto que $E \propto \kappa^2$ para el pozo de potencial, la energía E_2 es un factor de $(1/1.2)^2 = 0.694$ más bajo que la del pozo infinito.

DISCUSIÓN

Este ejemplo es bastante típico. Muestra cómo tenemos que usar las condiciones de continuidad de la función de onda y sus derivadas en las fronteras para establecer ecuaciones que nos permitan resolver las constantes indeterminadas en las soluciones genéricas. En este caso, nuestra solución genérica fue del mismo tipo que la ecuación 37.20, con las constantes U_1, D, F, κ_2', γ, que había que determinar. La ecuación para la continuidad de la función de onda se expresó en la ecuación (i), y para la continuidad de la derivada, en la ecuación (ii). Una tercera ecuación se obtuvo de la relación entre γ y κ_2', expresada en la ecuación 37.21. Puesto que κ_2' fue especificado en el texto de la pregunta, necesitaríamos cuatro ecuaciones para resolver nuestras cuatro cantidades desconocidas restantes. La continuidad de ψ y su derivada en la frontera y la relación entre γ y κ_2' fue suficiente para resolver U_1. Para encontrar D y F tendríamos que usar la condición de normalización (ecuación 37.2).

El ejemplo 37.2 presentó una condición que predeterminó la forma de la función de onda mediante la especificación del valor deseado del número de onda. Un problema mucho más convencional es el de encontrar qué funciones de onda caben en un potencial de una profundidad dada. Haremos esto en el siguiente ejemplo. Para hacer nuestra tarea más fácil, simplemente usamos los mismos números que en el ejemplo anterior.

EJEMPLO 37.3 Estados ligados

PROBLEMA

Si un electrón queda atrapado en un pozo de potencial finito del tipo que muestra la figura 37.10 con una profundidad de pozo de $U_1 = 0.823$ eV y un ancho $a = 1.30$ nm, ¿qué números de onda corresponden a los posibles estados ligados de este pozo?

SOLUCIÓN

La profundidad del pozo es la misma que en el ejemplo 37.2, así que una solución para el número de onda κ deberá corresponder al valor $2\pi/(1.2a)$, el punto de partida en ese ejemplo.

(*continúa*)

(*continuación*)

También encontramos dos condiciones para la constante de decaimiento exponencial γ. La ecuación 37.22 nos dio $\gamma = -\kappa\cot(\kappa a)$, y la ecuación 37.21 nos dio $\gamma = \sqrt{2mU_1/\hbar^2 - \kappa^2}$. La combinación de estos resultados nos da

$$\sqrt{\frac{2mU_1}{\hbar^2} - \kappa^2} = -\kappa\cot(\kappa a) \Rightarrow$$
$$\sqrt{\frac{2a^2mU_1}{\hbar^2} - (\kappa a)^2} = -(\kappa a)\cot(\kappa a).$$

Hemos omitido el índice 2 para el número de onda κ, que usábamos en las ecuaciones arriba mencionadas, porque queremos buscar todos los valores posibles de κ que cumplan con esta ecuación. Esta ecuación usualmente no tiene ninguna solución algebraica, pero la podemos resolver numéricamente de modo bastante sencillo. Las constantes numéricas en nuestro caso son $a = 1.30$ nm y $2a^2mU_1/\hbar^2 = 36.5$. Por lo tanto, tenemos que resolver la ecuación

$$\sqrt{36.5 - y^2} = -y\cot y, \text{con } y = \kappa a.$$

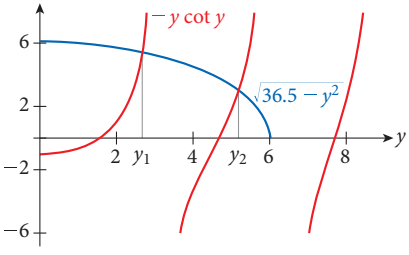


FIGURA 37.12 Encontrando los números de onda para los estados ligados.

En la figura 37.12 graficamos las dos funciones raíz $\sqrt{36.5 - y^2}$ (en azul) y $-y\cot y$ (en rojo) y encontramos las posiciones donde se intersecan.

Como puede ver, sólo hay dos posiciones en las que las dos funciones tienen el mismo valor. Por lo tanto, nuestro pozo de potencial con la profundidad $U_1 = 0.823$ eV y el ancho $a = 1.30$ nm sólo tiene dos estados ligados. Numéricamente encontramos $y_1 = \kappa_1 a = 2.68$ y $y_2 = \kappa_2 a = 5.23$. Este segundo valor no es otra cosa que $2\pi/1.2$, porque esto es el valor a partir del cual el ejemplo anterior fue construido. Sin embargo, el valor de $\kappa_1 = 2.68/a$ es información nueva. Observe que ahora $\kappa_2 \neq 2\kappa_1$, a diferencia del caso del pozo de potencial infinito.

37.2 Ejercicio en clase

Si duplicamos el ancho del pozo de potencial a 2.6 nm y dejamos la profundidad igual que en el ejemplo 37.3, entonces el número de estados ligados

a) permanece igual;

b) se incrementa;

c) se reduce.

Para concluir nuestra discusión de los estados ligados en este ejemplo, mostramos en la figura 37.13 las energías que corresponden a los dos estados ligados, superpuestas en la forma de las funciones de energía potenciales que se usaron para el pozo de potencial.

Por último, la figura 37.14*a*) muestra las funciones de onda que corresponden a los dos valores encontrados para el número de onda como funciones de la coordenada espacial x/a. La gráfica superior es para la función de onda multiplicada por $\sqrt{a}$, correspondiente al número de onda κ_1 y la energía E_1, y la gráfica inferior para κ_2 y E_2. La parte roja de la curva corresponde a la parte sinusoidal de la función de onda en la región libre de potencial. La parte azul es la penetración exponencial de la función de onda en la región en la que la energía potencial es mayor que la energía del electrón; ésta es la clásica región prohibida. Es obvio en la figura que las dos partes de la función de onda están correctamente emparejadas, puesto que la función de onda es continua y tiene una derivada continua en la frontera $x/a = 1$. A fin de obtener cada una de estas funciones de onda, tenemos que resolver un sistema de ecuaciones del tipo usado en el ejemplo anterior.

El hecho de que un electrón puede penetrar la frontera de potencial en la región clásicamente prohibida de $x > a$ es un fenómeno único en el mundo cuántico. Por lo general, el electrón simplemente rebotaría de la pared y podría ser encontrado en algún punto entre $x = 0$ y $x = a$. En el cuadro cuántico, esto ya no es el caso. Conforme a la ecuación 37.1, la probabilidad de que el electrón se encuentre en el intervalo espacial dx puede calcularse como $\Pi(x) = |\psi(x)|^2\,dx$.

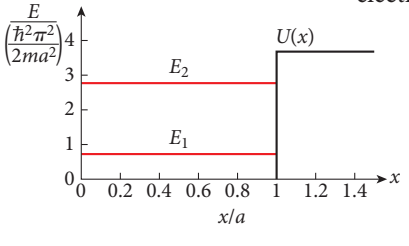


FIGURA 37.13 Energías de las dos funciones de onda más bajas en el pozo de potencial finito.

En la figura 37.14*b*) hemos calculado $a|\psi(x)|^2$ para ambas funciones de onda de estado ligado. La integración de esta área debajo de la curva da el resultado que, para el estado ligado con el número de onda κ_1, la probabilidad de encontrar el electrón entre $x = 0$ y $x = a$ es 96.9% (área roja) y la probabilidad de encontrar el electrón en la región clásicamente prohibida $x > a$ es 3.1% (área azul). Si el electrón reside en el estado ligado con el número de onda κ_2, tiene una probabilidad de 18.6% de ser encontrado en la región clásicamente prohibida, y un 81.4% en $0 < x < a$. Puesto que la energía del segundo estado es mayor que la del primer estado y cerca de la profundidad del pozo de potencial, el electrón puede penetrar más a la región clásicamente prohibida y, por consiguiente, tiene una mayor probabilidad de ser encontrado ahí.

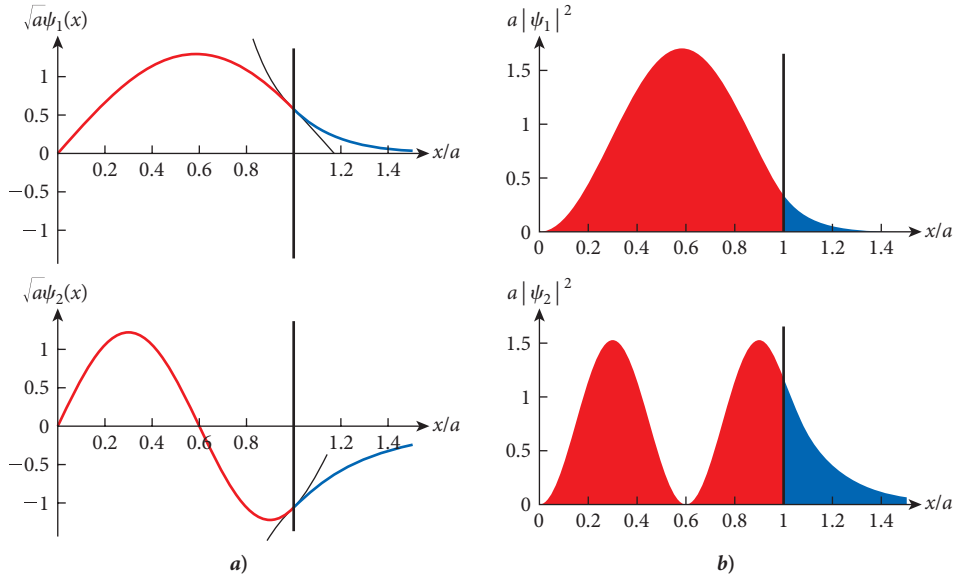


FIGURA 37.14 *a*) Las dos funciones de onda con los valores más bajos del número de onda para un salto de potencial infinito en $x = a$ como función de x/a. El color rojo muestra la función sinusoidal para la región de cero potencial, y el color azul muestra la función exponencial en la región clásicamente prohibida. *b*) Distribuciones de probabilidad correspondientes para encontrar el electrón en una coordenada dada. El área azul marca la probabilidad de encontrar el electrón en la región clásicamente prohibida. Las cuatro gráficas tienen factores de escala tales que la frontera en $x = a$ aparece en el valor de 1 en la abscisa y de tal modo que el área en la parte *b*) son las probabilidades para encontrar la partícula dentro de la correspondiente región de la abscisa.

Efecto túnel

Si la función de onda puede llegar a la región clásicamente prohibida, entonces ¿qué pasaría si el salto de potencial de altura finita que se muestra en la figura 37.10 sólo tiene un ancho finito? Esta situación se muestra en la figura 37.15*a*), que muestra una gráfica de la función de la energía potencial

$$U(x)=\begin{cases}\infty & \text{para } x<0\\ 0 & \text{para } 0\le x\le a\\ U_1 & \text{para } a<x<b\\ 0 & \text{para } x\ge b.\end{cases}$$

Nuevamente, la función de onda en las diferentes regiones se puede escribir como:

$$(x)=\begin{cases}0 & \text{para } x<0\\ D\,\text{sen}\,(\kappa x) & \text{para } 0\le x\le a\\ Fe^{-\gamma x} & \text{para } a<x<b\\ G\,\text{sen}\,(\kappa x+\phi) & \text{para } x\ge b.\end{cases}$$

Observe que el mismo valor se puede usar para el número de onda κ en ambos lados de la barrera en este caso, porque el potencial es cero en ambas regiones. En la sección anterior resolvimos la función de onda en la región $0 \le x \le b$. La función de onda tiene una parte sinusoidal [la curva roja en la figura 37.15*b*)] en la región entre 0 y a y una parte exponencialmente decreciente [curva azul en la parte *b*)] entre a y b. Lo que es diferente ahora es que la función de onda no sigue decayendo en forma exponencial más allá de $x = b$, sino que oscila nuevamente de modo sinusoidal para $x > b$ con el mismo número de onda κ entre 0 y a. Este proceso se llama **efecto túnel**. La forma exacta de la función de onda [la curva verde en la parte *b*)] para $x > b$ es nuevamente determinada al hacer coincidir la función de onda y su primera derivada en la frontera $x = b$, exactamente como lo hicimos anteriormente en $x = a$.

La figura 37.15*c*) muestra la gráfica de la densidad de probabilidad para esta función de onda. Queda claro que hay algo de probabilidad no cero para la función de onda para abrir un túnel a través de la barrera de energía de potencial y emerger del otro lado. Clásicamente, por el contrario, una partícula ubicada en $0 < x < a$ con la misma energía total no tendría la energía suficiente para escapar y permanecería atrapada por siempre en la región $0 \le x \le a$.

37.4 Oportunidad de autoevaluación

¿Puede usar las condiciones de continuidad de la función de onda y su derivada en el límite $x = b$ para obtener los valores del cambio de fase ϕ y la amplitud G en la función de onda para el túnel a través de un paso de energía potencial?

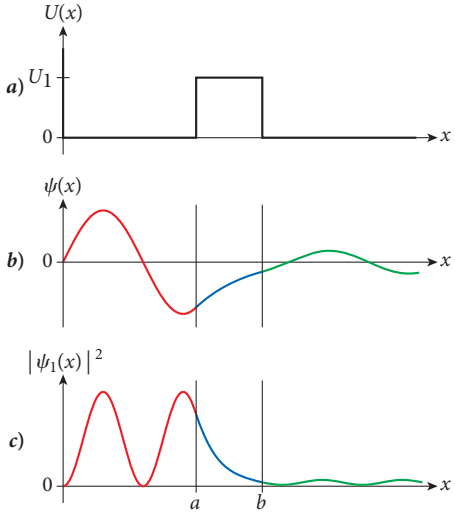


FIGURA 37.15 *a*) Salto de energía potencial de altura finita y ancho finito; *b*) función de onda abriendo un túnel a través de la barrera de energía de potencial; *c*) distribución de densidad de probabilidad para encontrar la función de onda en una posición x.

El **coeficiente de transmisión** T se define como la proporción del cuadrado absoluto de la amplitud de onda en la salida de la barrera con el cuadrado absoluto de la amplitud de onda en la entrada a la barrera. Para la función de onda $Fe^{-\gamma x}$ en la región de la barrera, el coeficiente de transmisión resulta ser

$$T = \frac{|\psi(b)|^2}{|\psi(a)|^2} = \frac{|Fe^{-\gamma b}|^2}{|Fe^{-\gamma a}|^2} = |e^{-\gamma(b-a)}|^2 = e^{-2\gamma(b-a)}. \tag{37.23}$$

Por lo tanto, el coeficiente de transmisión depende exponencialmente del ancho de la barrera $b-a$. Observe que la probabilidad de que la partícula esté a la derecha de la barrera ($x \le a$) es proporcional a $|\psi(a)|^2$. La probabilidad que se encuentra a la derecha de la barrera ($x \ge b$) es proporcional a $|\psi(b)|^2$. Por ello, el coeficiente de transmisión T mide la probabilidad de que una partícula que impacta en la barrera del lado izquierdo saldrá del lado derecho de la barrera.

De manera fascinante, este proceso de abrir un túnel a través de una barrera de energía potencial se puede observar en la naturaleza, por ejemplo, en el decaimiento alfa de núcleos pesados. Es un modelo burdo pero efectivo del proceso de decaimiento alfa imaginar que la partícula alfa está atrapada dentro de una barrera de energía potencial formada por el núcleo pesado en aproximadamente la misma forma que muestra la figura 37.15*a*). Con el paso del tiempo, la función de onda de la partícula alfa sale de la trampa de energía potencial. Cuando esto sucede, decimos que el núcleo sufre un "decaimiento alfa", que significa que emite una partícula alfa y lo convierte en otro núcleo. Los detalles de este proceso de decaimiento se cubrirán con mayor detalle en el capítulo 40.

EJEMPLO 37.4 Efecto túnel de neutrones

PROBLEMA

Si un neutrón de 22.4 MeV de energía cinética encuentra una barrera de potencial rectangular de 36.2 MeV de altura y un ancho de 8.4 fm, ¿cuál es la probabilidad de que el neutrón sea capaz de abrir un túnel a través de esta barrera?

SOLUCIÓN

La probabilidad de abrir un túnel se dio en la ecuación 37.23 como $\Pi_t = T = e^{-2\gamma(b-a)}$. A sabiendas de que el ancho de la barrera es $b - a = 8.4$ fm, lo único que tenemos que hacer para completar nuestra tarea es averiguar el valor de la constante de decaimiento γ. La ecuación 37.19 aplica en el presente caso, y así podemos escribir

$$\gamma = \sqrt{\frac{2m(U_1 - E)}{\hbar^2}}.$$

A fin de insertar números podemos escribir $\hbar$ en unidades que son muy útiles en la física nuclear y de partículas: $\hbar c = 197.34$ MeV fm $\Leftrightarrow \hbar = 197.34$ MeV fm/c. La masa del neutrón tiene el valor $m_n = 1.6749 \cdot 10^{-27}$ kg $= 939.57$ MeV/c^2. Si insertamos nuestras constantes, encontramos para la constante de decaimiento

$$\gamma = \sqrt{\frac{2(939.57 \text{ MeV}/c^2)(36.2 \text{ MeV} - 22.4 \text{ MeV})}{(197.34 \text{ MeV fm}/c)^2}} = 0.816 \text{ fm}^{-1}.$$

Por lo tanto, obtenemos para la probabilidad de abrir un túnel

$$\Pi_t = e^{-2\gamma(b-a)} = e^{-2(0.816)(8.4)} = 1.11 \cdot 10^{-6}.$$

37.3 Ejercicio en clase

Si queremos incrementar la probabilidad de abrir un túnel en este caso, deberíamos

a) incrementar la altura de la barrera y/o incrementar el ancho de la barrera;

b) incrementar la altura de la barrera y/o reducir el ancho de la barrera;

c) reducir la altura de la barrera y/o incrementar el ancho de la barrera;

d) reducir la altura de la barrera y/o reducir el ancho de la barrera.

Microscopio de escáner de efecto túnel

En 1981 el físico suizo Heinrich Rohrer (1933-) y el físico alemán Gerd Binnig (1947-) descubrieron que el efecto túnel se puede usar para crear imágenes de superficies de materiales y, por primera vez, obtener imágenes de átomos. Se les otorgó la mitad del premio Nobel de 1986 en Física por este descubrimiento. Su trabajo fue un salto en concepto y un gran logro técnico en aquel

tiempo, pero la física básica subyacente es en realidad relativamente sencilla de entender mediante los conceptos que hemos desarrollado hasta aquí.

En la figura 37.16*a*) se muestra el potencial de un electrón en un átomo. El capítulo 23 mostró que este potencial es el potencial de Coulomb, $U(r) \propto 1/r$. Este potencial está representado con la línea negra como función de una coordenada espacial, y nuestro átomo se encuentra en x_0. Sobreponemos un esbozo cualitativo del cuadrado absoluto de la función de onda del electrón en este potencial. (El capítulo 38 mostrará cálculos exactos para el átomo de hidrógeno.) En la figura 37.16*b*-*d*), un segundo átomo, ubicado en x_1, se mueve cada vez más cerca hacia el átomo ubicado en x_0. Al mover el segundo átomo, monitoreamos la distribución de potencial resultante, así como la correspondiente función de onda. La barrera de potencial que impide que el electrón se mueva del átomo en x_0 al átomo en x_1 se hace más angosta y, al mismo tiempo, más baja conforme los átomos se mueven más cerca el uno al otro. Por lo tanto, la función de onda del electrón es capaz de abrir un túnel a través de la barrera. Cálculos cuantitativos muestran que la corriente del túnel incrementa rápidamente si la distancia entre los dos átomos se reduce a partir de un punto determinado.

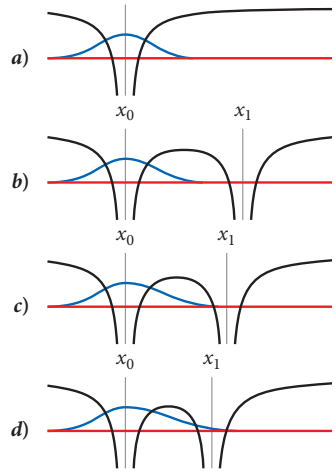


FIGURA 37.16 Líneas negras: potencial de un electrón en un átomo como función de la coordenada; líneas azules: esbozo de la correspondiente distribución de probabilidad de electrones. *a*) Átomo individual aislado; *b*), *c*), *d*) la situación para dos átomos en varias distancias relativas.

El principio del **microscopio de escaneo de efecto túnel** (**STM**, del inglés *scanning tunneling microscope*) es el mover muy cuidadosamente una punta del tamaño de un solo átomo cada vez más cerca de la superficie del material que queremos investigar, así como el de registrar la corriente debida a electrones de efecto túnel en este proceso (figura 37.17). ¿Cómo es posible producir una punta del tamaño de un solo átomo? Para empezar, un alambre muy delgado se corta en ángulo. Esto produce una punta muy fina, pero no del tamaño de un solo átomo. Sin embargo, uno de los átomos al final usualmente se extenderá ligeramente más que los que lo rodean. Esta mínima extensión es suficiente, ya que la corriente del túnel depende sensiblemente de la distancia. Por lo tanto, esta punta actúa como un átomo.

La punta se mueve arriba y abajo en un ciclo retroalimentado que intenta mantener la corriente del túnel medida en un valor constante. Luego la punta es guiada sobre la superficie en la vía exploratoria representada por la línea púrpura en la figura 37.17*a*). Este proceso nos permite obtener imágenes de superficies con una resolución atómica. Por ejemplo, la superficie de un pedazo de platino se muestra en la figura 37.17*b*).

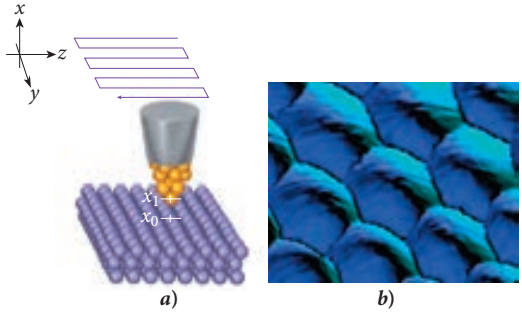


FIGURA 37.17 *a*) Escaneo de la superficie con una punta de átomo sencillo; *b*) datos actuales para la superficie de una muestra de platino.

37.5 Oscilador armónico

Los tres potenciales más comúnmente usados en cálculos de mecánica cuántica son el pozo de potencial, el potencial central $1/r$ y el potencial del oscilador. Abordaremos el potencial central $1/r$ en el capítulo 38, y en las secciones 37.3 y 37.4 ya se investigó extensivamente el pozo de potencial. Esto sólo deja el potencial del oscilador.

Oscilador armónico clásico

El capítulo 14, que se dedicó al estudio de las oscilaciones armónicas, mostró que osciladores ocurren en muchas situaciones físicas. Ahora surge la pregunta: ¿cuál es la representación cuántica de un oscilador armónico? Esto quiere decir que queremos conocer las posibles funciones de onda y energías que corresponden a la función de energía potencial para el siguiente oscilador armónico:

$$U(x) = \tfrac{1}{2}kx^2 = \tfrac{1}{2}m\omega_0^2 x^2.$$

Esta función de energía potencial se encuentra graficada en la figura 37.18. Aquí k es la *constante elástica* y se mide en unidades de N/m, mientras que la frecuencia angular $\omega_0 = \sqrt{k/m}$. (*Observe*:

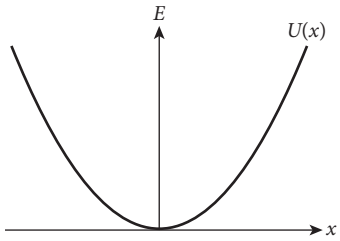


FIGURA 37.18 Energía potencial como función de la posición para un oscilador armónico.

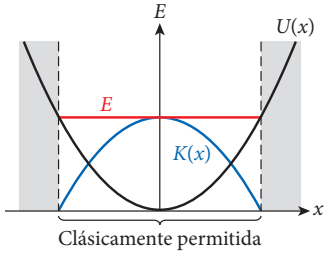


FIGURA 37.19 Región clásicamente permitida para una partícula en un potencial del oscilador.

En este capítulo usamos varios símbolos que se ven como una letra k: k es el símbolo para la constante elástica, κ se usa para el número de onda, K es el valor de la energía cinética y $\mathbf{K}$ es el operador de energía cinética. Es fácil confundirlos, ¡así que tenga mucho cuidado!)

Antes de continuar, primero revisemos la situación para una partícula clásica en uno de estos pozos de potencial del oscilador armónico; por ejemplo, una masa en un resorte o un péndulo. Para una energía total dada E, la energía cinética de esta partícula se puede calcular tomando la diferencia entre la energía total y la energía potencial, $K(x) = E - U(x)$. Si recordamos que la energía cinética no puede asumir valores negativos, obtenemos luego una región en el espacio coordenado en la que se permite la partícula con una energía total dada, denotada como "clásicamente permitida" en la figura 37.19.

Los puntos en los que la energía cinética (curva azul en la figura 37.19) alcanza el valor cero forman la frontera de esta región clásicamente permitida. Estos puntos se llaman puntos clásicos de retorno porque un oscilador clásico "se da la vuelta" aquí. Fuera de los puntos de retorno se ubica la región clásicamente permitida (región sombreada en la figura 37.19), en la que una partícula clásica con la energía mecánica total E jamás puede penetrar.

Oscilador armónico cuántico

Ahora investiguemos el oscilador cuántico. Si insertamos la función de energía potencial del oscilador en la ecuación general de Schrödinger 37.9, encontramos

$$\begin{aligned} -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + \tfrac{1}{2}m\omega_0^2x^2\psi(x) &= E\psi(x) \Rightarrow \\ \frac{d^2\psi(x)}{dx^2} &= -\frac{2m}{\hbar^2}\left(E - \tfrac{1}{2}m\omega_0^2x^2\right)\psi(x) \Rightarrow \\ \frac{d^2\psi(x)}{dx^2} &= -\left(\frac{2mE}{\hbar^2} - \frac{m^2\omega_0^2}{\hbar^2}x^2\right)\psi(x). \end{aligned} \tag{37.24}$$

Nuevamente vemos que los posibles valores de la energía sólo pueden asumir valores discretos. En este caso son

$$E_n = \left(n + \tfrac{1}{2}\right)\hbar\omega_0, \quad n = 0,1,2,\ldots. \tag{37.25}$$

Las funciones de onda tienen la forma general de gaussianas $\left(e^{-ax^2}\right)$ multiplicadas por polinomios especiales, los llamados polinomios de Hermite. Las funciones de onda correspondientes a los valores más bajos del número cuántico de energía n son

$$\begin{aligned} \psi_0(x) &= \frac{1}{\sqrt{\sigma}\pi^{1/4}}e^{-x^2/2\sigma^2} \\ \psi_1(x) &= \frac{1}{\sqrt{\sigma}\pi^{1/4}}\frac{1}{\sqrt{2}}\left(2\frac{x}{\sigma}\right)e^{-x^2/2\sigma^2} \\ \psi_2(x) &= \frac{1}{\sqrt{\sigma}\pi^{1/4}}\frac{1}{\sqrt{8}}\left(4\frac{x^2}{\sigma^2} - 2\right)e^{-x^2/2\sigma^2} \\ \psi_3(x) &= \frac{1}{\sqrt{\sigma}\pi^{1/4}}\frac{1}{\sqrt{48}}\left(8\frac{x^3}{\sigma^3} - 12\frac{x}{\sigma}\right)e^{-x^2/2\sigma^2} \\ \psi_4(x) &= \frac{1}{\sqrt{\sigma}\pi^{1/4}}\frac{1}{\sqrt{384}}\left(16\frac{x^4}{\sigma^4} - 48\frac{x^2}{\sigma^2} + 12\right)e^{-x^2/2\sigma^2} \end{aligned} \tag{37.26}$$

donde la constante σ se define como

$$\sigma = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega_0}}. \tag{37.27}$$

Esta constante tiene las dimensiones físicas de longitud y es la mitad de ancha que la gaussiana. La forma general de la función de onda para el oscilador armónico se puede escribir como

$$\psi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{\sigma}\pi^{1/4}}\frac{1}{\sqrt{n!\,2^n}}H_n(x/\sigma)e^{-x^2/2\sigma^2}. \tag{37.28}$$

El polinomio de Hermite $H_n(x)$ es un polinomio del rango n; es decir, la potencia más alta de x es x^n, y se puede definir en términos de las derivadas de la función gaussiana:

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}.$$

DEDUCCIÓN 37.1 Función de onda y energía del oscilador

La derivación entera de la solución completa (ecuación 37.28) es algo larga y no se mostrará aquí. Aun así es instructivo verificar que una de las soluciones dadas en la ecuación 37.26 cumple con la ecuación 37.24. Mostramos como ejemplo que $\psi_1(x)$ es realmente una solución de la ecuación de Schrödinger 37.24 con energía $E_1 = (\frac{1}{2} + 1)\hbar\omega_0 = \frac{3}{2}\hbar\omega_0$.

Empiece por tomar la segunda derivada de $\psi_1(x)$ con respecto a x. Para hacer esto de manera más eficiente, reescriba la función de onda como

$$\psi_1(x) = \frac{1}{\sqrt{\sigma}\pi^{1/4}} \frac{1}{\sqrt{2}} \left(2\frac{x}{\sigma}\right) e^{-x^2/2\sigma^2} = Axe^{-x^2/2\sigma^2}.$$

Aquí A es sólo una constante de normalización, así que la primera y segunda derivadas de esta función son

$$\frac{d}{dx}\psi_1(x) = Ae^{-x^2/2\sigma^2} - A\frac{x^2}{\sigma^2}e^{-x^2/2\sigma^2}$$

$$\frac{d^2}{dx^2}\psi_1(x) = -A\frac{3x}{\sigma^2}e^{-x^2/2\sigma^2} + A\frac{x^3}{\sigma^4}e^{-x^2/2\sigma^2}.$$

La inserción de esta segunda derivada en la ecuación de Schrödinger resulta en

$$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} = -\left(\frac{2mE}{\hbar^2} - \frac{m^2\omega_0^2}{\hbar^2}x^2\right)\psi(x) \Rightarrow$$

$$-A\frac{3x}{\sigma^2}e^{-x^2/2\sigma^2} + A\frac{x^3}{\sigma^4}e^{-x^2/2\sigma^2} = -\left(\frac{2mE}{\hbar^2} - \frac{m^2\omega_0^2}{\hbar^2}x^2\right)Axe^{-x^2/2\sigma^2}$$

$$= -\left(\frac{2mE}{\hbar^2}x - \frac{m^2\omega_0^2}{\hbar^2}x^3\right)Ae^{-x^2/2\sigma^2}.$$

Ahora factorice el término común $Ae^{-x^2/2\sigma^2}$ y clasifique los términos en potencias de x:

$$Ae^{-x^2/2\sigma^2}\left(\left(\frac{2mE}{\hbar^2} - \frac{3}{\sigma^2}\right)x + \left(\frac{1}{\sigma^4} - \frac{m^2\omega_0^2}{\hbar^2}\right)x^3\right) = 0. \quad \text{(i)}$$

Puesto que $Ae^{-x^2/2\sigma^2} \neq 0$, la ecuación que antecede se puede cumplir para todas las x, sólo si los coeficientes multiplicando a x y x^3 son ambos 0. Al examinar el coeficiente para x^3 encontramos:

$$\frac{1}{\sigma^4} - \frac{m^2\omega_0^2}{\hbar^2} = 0 \Rightarrow \sigma = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega_0}}.$$

Esto confirma la ecuación 37.27. Además, encontramos para el coeficiente para x en la ecuación (i):

$$\frac{2mE}{\hbar^2} - \frac{3}{\sigma^2} = 0 \Rightarrow E = \frac{3}{2}\frac{\hbar^2}{m\sigma^2}.$$

Al usar el resultado de la ecuación 37.27 que acabamos de deducir, encontramos entonces:

$$E = \frac{3}{2}\frac{\hbar^2}{m\sigma^2} = \frac{3}{2}\frac{\hbar^2}{m\left(\hbar/m\omega_0\right)} = \frac{3}{2}\hbar\omega_0.$$

De este modo, hemos demostrado que $\psi_1(x)$ como definido en la ecuación 37.26 es realmente una solución de la ecuación de Schrödinger con la energía E_1 como dada en la ecuación 37.25.

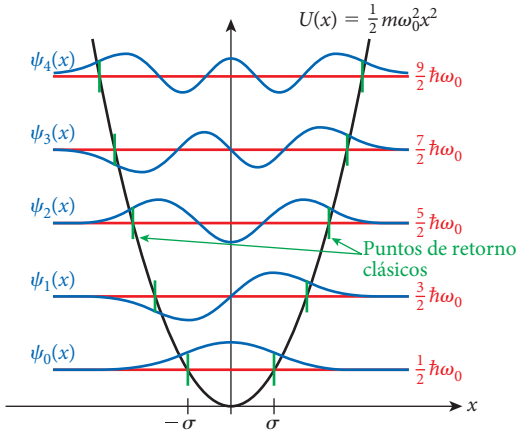


FIGURA 37.20 Funciones de ondas del oscilador (azul) correspondientes a los cinco valores de energía más baja (rojo) del potencial del oscilador armónico (negro). Los puntos de retorno clásicos para cada función de onda están indicados por cortas líneas verticales de color verde.

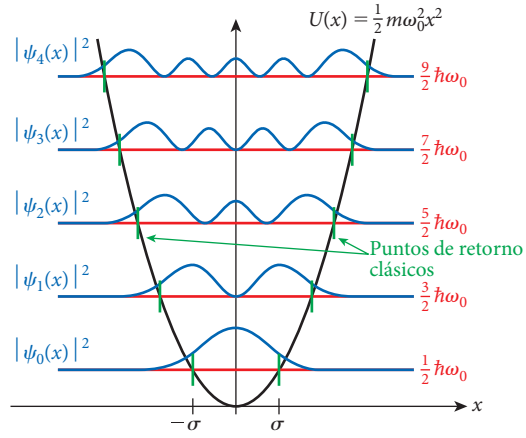


FIGURA 37.21 Distribuciones de probabilidad para encontrar un electrón en un potencial del oscilador con una energía en particular en un punto en particular en el espacio.

Es importante darse cuenta de que los valores de energía posibles en un oscilador armónico unidimensional tienen intervalos regulares, con una diferencia de energía constante de $\hbar\omega_0$ entre niveles de energía adyacentes. Una gran variedad de sistemas en la física de materia condensada, atómica y nuclear muestra espectros discretos de energía con un espaciamiento constante entre los niveles. Cada vez que un sistema físico muestra esta característica, se puede suponer con seguridad que indica algún tipo de vibración cuántica en el sistema.

Las funciones de onda del oscilador de la ecuación 37.26 se muestran en la figura 37.20. Para evitar una posible confusión, observe que dos diferentes gráficas que usan distintos ejes verticales están aquí sobrepuestas, con un eje x horizontal común. La parábola negra muestra la energía potencial como función de x, y las líneas horizontales rojas muestran las posibles energías totales que corresponden a soluciones de la ecuación de Schrödinger. Ambas usan un eje vertical en unidades de energía. Las intersecciones de las líneas rojas de energía total con la parábola de energía potencial marcan los puntos de retorno clásicos y son indicados por las cortas líneas verticales de color verde. Sin embargo, las líneas azules muestran cada función de onda y no tienen las unidades de energía y, por ende, corresponden a una diferente escala vertical. Para cada función de onda, la línea de $\psi = 0$ es ajustada para caer en la línea horizontal que marca el nivel de energía que corresponde a esta particular función de onda. Esto ofrece una manera elegante de mostrar las funciones de onda, sus puntos de retorno clásicos y sus correspondientes valores de energía, todo en la misma gráfica. Podemos mostrar en forma cuantitativa cómo cada función de onda se "escapa" a la región clásicamente prohibida.

La figura 37.21 ilustra las distribuciones de probabilidad que corresponden a cada función de onda. Nuevamente, ellas son simplemente los cuadrados absolutos de cada función de onda. Observe que entre más alto sea el número cuántico n, más pequeña resultará ser el rango de penetración de la correspondiente función de onda más allá del punto de retorno clásico. Este resultado se puede entender si se considera la forma del potencial $U(x)$: para valores mayores de la energía E, el potencial tiene mayor pendiente en la posición de los puntos de retorno clásicos para esta energía.

37.6 Funciones de onda y mediciones

Suponga que obtuviéramos una función de onda de mecánica cuántica para una cierta situación. ¿Cómo se podrá usar esta función de onda para obtener información sobre las propiedades físicas del objeto con el cual la función de onda está asociada? ¿Cómo se puede calcular posición, velocidad, cantidad de movimiento, energía cinética, etcétera?

La ecuación 37.2 introduce la condición de normalización para la función de onda,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x)|^2\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x)\psi(x)dx = 1.$$

Para medir el valor medio de cualquier cantidad observable, aplique un operador que corresponda a esta operación a la función de onda ψ (por ejemplo: $\mathbf{p}\psi = p\psi$). Luego multiplique el resultado por

ψ^* (para obtener la probabilidad $\psi^*\psi$ en el integrando) a lo largo de todo el espacio. Por ejemplo, para averiguar la cantidad de movimiento promedio asociada con una función de onda, aplique el operador de cantidad de movimiento (ecuación 37.6) a la función de onda e integre:

$$\langle p \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x)\mathbf{p}\psi(x)dx = -i\hbar \int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x)\frac{d}{dx}\psi(x)dx. \tag{37.29}$$

De manera similar, cualquier cantidad que es una función de la cantidad de movimiento puede calcularse usando integrales que involucren la derivada de la función de onda. Por ejemplo, la energía cinética media se puede obtener como

$$\langle K \rangle = \frac{1}{2m}\langle p^2 \rangle = \frac{1}{2m}\int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x)\mathbf{p}^2\psi(x)dx = -\frac{\hbar^2}{2m}\int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x)\frac{d^2}{dx^2}\psi(x)dx. \tag{37.30}$$

Es un tanto más sencillo encontrar los valores medios para cantidades que dependen de la posición x. Para encontrar la posición media, podemos calcular esta integral:

$$\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x)x\psi(x)dx. \tag{37.31}$$

Los valores medios denotados entre los paréntesis angulares $\langle\ \rangle$ frecuentemente se denominan **valores esperados**; es decir, los valores esperados de los resultados de la medición. Esta explicación para el proceso formal de conducir una medición es bastante abstracta, así que consideremos un ejemplo de cómo llegar a los números reales.

EJEMPLO 37.5 Posición y energía

PROBLEMA

¿Cuál es la posición media para un electrón (masa $m = 9.109 \cdot 10^{-31}$ kg = 511 keV/c^2) en la función de onda $n = 0$ del potencial del oscilador armónico con una constante de frecuencia angular de $\omega_0 = 1.00 \cdot 10^{16}$ s^{-1}? ¿Cuál es la energía cinética media?

SOLUCIÓN

De acuerdo con la ecuación 37.26, la solución de la ecuación de Schrödinger con el potencial del oscilador armónico es

$$\psi_0(x) = Ae^{-x^2/2\sigma^2} = \frac{1}{\sqrt{\sigma}\pi^{1/4}}e^{-x^2/2\sigma^2}.$$

La masa del electrón y la frecuencia angular del oscilador entran en el parámetro de anchura $\sigma = \sqrt{\hbar/m\omega_0}$. Aquí nuevamente usamos la notación de la constante de normalización $A = 1/(\sqrt{\sigma}\pi^{1/4})$ para reducir el trabajo de tener que apuntar las integrales que siguen.

Primero calcule la posición media. Siguiendo la ecuación 37.31, esto puede observarse y calcularse como

$$\begin{aligned}\langle x \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x)x\psi(x)dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} Ae^{-x^2/2\sigma^2}\, xAe^{-x^2/2\sigma^2}\, dx \\ &= A^2\int_{-\infty}^{\infty} xe^{-x^2/\sigma^2}\, dx \\ &= 0.\end{aligned}$$

Estos pasos merecen una explicación. Primero, cuando insertamos la función de onda, usamos el hecho de que la función de onda es real, sin ninguna parte imaginaria, así que en este caso

(*continúa*)

(*continuación*)

$\psi^*(x) = \psi(x)$. En el siguiente paso eliminamos el factor constante de A^2 de la integral y multiplicamos las dos gaussianas sumando sus argumentos. Por último, llegamos a nuestro resultado de 0 para la integral cuando nos damos cuenta de que x es una función impar y e^{-x^2/σ^2} es una función par de x; por lo tanto, su producto debe ser una función impar de x, lo que resulta en una integral de valor cero cuando los límites de integración son simétricos.

De hecho, podríamos leer inmediatamente este resultado viendo la figura 37.21 y observando que la distribución de probabilidad $|\psi_0(x)|^2$ es simétrica con respecto a 0. Sin embargo, observamos que la integral de arriba es la primera de varias similares, es instructivo pasar explícitamente a través de todos los pasos y luego confirmar que realmente encontramos la solución esperada.

Después de este calentamiento, abordemos la cuestión más complicada de la energía cinética media. De acuerdo con la ecuación 37.30, tenemos que resolver

$$\langle K\rangle = -\frac{\hbar^2}{2m}\int_{-\infty}^{\infty}\psi^*(x)\frac{d^2}{dx^2}\psi(x)dx$$

$$= -\frac{\hbar^2}{2m}\int_{-\infty}^{\infty}Ae^{-x^2/2\sigma^2}\frac{d^2}{dx^2}Ae^{-x^2/2\sigma^2}dx.$$

Tomando la segunda derivada de la función de onda del oscilador con $n = 0$ nos da

$$\frac{d}{dx}Ae^{-x^2/2\sigma^2} = -A\frac{x}{\sigma^2}e^{-x^2/2\sigma^2}$$

$$\frac{d^2}{dx^2}Ae^{-x^2/2\sigma^2} = A\left(\frac{x^2}{\sigma^4}-\frac{1}{\sigma^2}\right)e^{-x^2/2\sigma^2}.$$

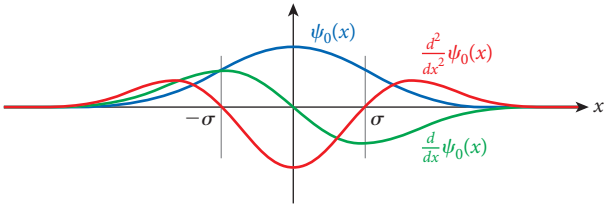


FIGURA 37.22 La función de onda del oscilador $n = 0$ (azul) y la primera (verde) y segunda (rojo) derivadas como función de la posición. Las líneas verticales grises marcan los puntos de retorno clásicos.

Estas primeras y segundas derivadas se grafican en la figura 37.22, donde también se muestran los puntos de retorno clásicos. Para la función de onda cuántica, éstos son los puntos dados en los que la segunda derivada de la función de onda tiene un valor de 0. (Podemos ver de la ecuación 37.9 que si $E = U$, entonces $\frac{d^2}{dx^2}\psi(x) = 0$.)

Ahora podemos proceder con la integración de arriba y obtener

$$\langle K\rangle = -\frac{A^2\hbar^2}{2m}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2/2\sigma^2}\frac{d^2}{dx^2}e^{-x^2/2\sigma^2}dx$$

$$= -\frac{A^2\hbar^2}{2m}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2/2\sigma^2}\left(\frac{x^2}{\sigma^4}-\frac{1}{\sigma^2}\right)e^{-x^2/2\sigma^2}dx$$

$$= -\frac{A^2\hbar^2}{2m}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2/\sigma^2}\left(\frac{x^2}{\sigma^4}-\frac{1}{\sigma^2}\right)dx$$

$$= -\frac{A^2\hbar^2}{2m\sigma^4}\int_{-\infty}^{\infty}x^2e^{-x^2/\sigma^2}dx + \frac{A^2\hbar^2}{2m\sigma^2}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2/\sigma^2}dx$$

$$= -\frac{A^2\hbar^2}{2m\sigma^4}\tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}\sigma^3 + \frac{A^2\hbar^2}{2m\sigma^2}\sqrt{\pi}\sigma$$

$$= \frac{\hbar^2}{4m\sigma^2}.$$

En el último paso hemos empleado $A^2 = 1/(\sigma\sqrt{\pi})$, que resulta de la definición de A. Casi acabamos. Al usar $\sigma = \sqrt{\hbar/m\omega_0}$ (vea la ecuación 37.27), encontramos

$$\langle K\rangle = \frac{\hbar^2}{4m(\hbar/m\omega_0)} = \tfrac{1}{4}\hbar\omega_0.$$

Finalmente, si insertamos el valor dado para ω_0 nos da nuestra respuesta numérica:

$$\begin{aligned}\langle K\rangle &= \tfrac{1}{4}\hbar\omega_0 = \tfrac{1}{4}(1.055\cdot10^{-34}\ \text{J s})(1.00\cdot10^{16}\ \text{s}^{-1})\\ &= 2.64\cdot10^{-19}\ \text{J}\\ &= 1.65\ \text{eV}.\end{aligned}$$

DISCUSIÓN

¡Nuestro resultado asciende exactamente a la mitad de la energía total del oscilador en el estado $n = 0$! Observe también que esta respuesta sólo depende del valor de la frecuencia angular ω_0 y no de la masa m. Otra partícula con una masa distinta, atrapada en el mismo potencial del oscilador, tendría la misma energía cinética media en el estado de $n = 0$.

Relación de incertidumbre para funciones de onda de osciladores

El capítulo 36 exploraba la importancia fundamental de la relación de incertidumbre de Heisenberg $\Delta x\cdot\Delta p \geq \frac{1}{2}\hbar$. En este momento, pudimos motivar la relación sólo mediante la inspección del "microscopio de rayos gamma" que Heisenberg imaginó como un *Gedankenexperiment* (experimento de pensamiento) en su estudio original de 1927 sobre la relación de incertidumbre. El mismo estudio también contenía una prueba matemática mucho más general. No reconstruiremos esta prueba aquí. Sin embargo, podemos calcular las incertidumbres de la cantidad de movimiento y posición para las funciones de onda del oscilador que hemos encontrado, para ver cuál es el resultado. Hagamos esto para el estado de $n = 0$.

Por definición, el cuadrado de la incertidumbre en la posición es $(\Delta x)^2 = \left\langle \left(x - \langle x\rangle\right)^2 \right\rangle$. Acabamos a encontrar para el estado de $n = 0$ que $\langle x\rangle = 0$. En este caso (y sólo cuando $\langle x\rangle = 0$), encontramos $(\Delta x)^2 = \langle x^2\rangle$. Para encontrar entonces la incertidumbre en la posición, tenemos que calcular la integral

$$\begin{aligned}(\Delta x)^2 = \langle x^2\rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} Ae^{-x^2/2\sigma^2}\, x^2\, Ae^{-x^2/2\sigma^2}\, dx\\ &= A^2\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-x^2/\sigma^2}\, dx\\ &= \tfrac{1}{2}A^2\sqrt{\pi}\sigma^3 = \tfrac{1}{2}\sigma^2 \Rightarrow\\ \Delta x &= \frac{\sigma}{\sqrt{2}}.\end{aligned}$$

Para esta función de onda, la incertidumbre en la cantidad de movimiento es $(\Delta p)^2 = \left\langle \left(p - \langle p\rangle\right)^2 \right\rangle = \langle p^2\rangle$, porque la cantidad de movimiento media también es cero. Además, la energía cinética media, que es $\langle K\rangle = \langle p^2\rangle / 2m$, para esta forma de onda se había calculado en el ejemplo 37.5. Así encontramos que

$$(\Delta p)^2 = \langle p^2\rangle = 2m\langle K^2\rangle = 2m\frac{\hbar^2}{4m\sigma^2} = \frac{\hbar^2}{2\sigma^2} \Rightarrow$$

$$\Delta p = \frac{\hbar}{\sqrt{2}\sigma}.$$

Si se multiplican los dos resultados para la incertidumbre en posición y cantidad de movimiento, el oscilador armónico en el estado $n = 0$ se puede escribir así:

$$\Delta x\cdot\Delta p = \frac{\sigma}{\sqrt{2}}\frac{\hbar}{\sqrt{2}\sigma} = \tfrac{1}{2}\hbar.$$

Esto significa que el estado de $n = 0$ del oscilador armónico es un estado con la incertidumbre mínima que físicamente sea posible. Observe también que este resultado es independiente del ancho σ y, por ende, no depende de la frecuencia angular o masa en el problema. También se puede demostrar que el producto de la incertidumbre para una función de onda del oscilador con el número cuántico n es dado por $\Delta x\cdot\Delta p = (\frac{1}{2} + n)\hbar$.

37.5 Oportunidad de autoevaluación

Calcule el valor medio de la cantidad de movimiento en este estado o simplemente declare el resultado como un resultado de argumentos de simetría.

37.6 Oportunidad de autoevaluación

Calcule el valor medio de la energía cinética en los estados de $n = 1,2,3\ldots$ del oscilador armónico. ¿Existe un simple atajo, o cada vez tiene que ejecutar la integral para una nueva función de onda?

37.7 Principio de correspondencia

Cuando investigamos la mecánica relativista, encontramos una transición cómoda a la mecánica newtoniana no relativista cuando la velocidad de un objeto se vuelve pequeña en comparación con la velocidad de la luz. En el límite $v \ll c$, el caso de física clásica se recupera de la descripción relativista. De modo similar, podemos preguntar si es posible recuperar el caso de la mecánica clásica de la mecánica cuántica y en qué límite. Para abordar esta pregunta, examinamos la distribución de probabilidad para encontrar un electrón en el potencial del oscilador en algún punto en particular en el espacio coordenado; luego podemos comparar los resultados para los osciladores clásicos y cuánticos.

Igual que lo hicimos para la partícula clásica en una caja, podemos calcular la distribución de probabilidad clásica para encontrar una partícula con la energía total E en un potencial del oscilador. La ecuación 37.13 declara que la probabilidad clásica para encontrar una partícula en algún punto en el espacio coordenado es inversamente proporcional a la velocidad de la partícula en este punto. La velocidad puede ser calculada como función del potencial del oscilador armónico a partir de la conservación de la energía,

$$E = K + U = \tfrac{1}{2}mv^2 + \tfrac{1}{2}m\omega_0^2 x^2.$$

La solución de esta ecuación para la velocidad nos da

$$v = \sqrt{\frac{2E}{m} - x^2\omega_0^2}.$$

De este modo, la distribución de probabilidad clásica de una partícula en un potencial del oscilador armónico se puede escribir

$$\Pi_c(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{\dfrac{2E}{m} - x^2\omega_0^2}}.$$

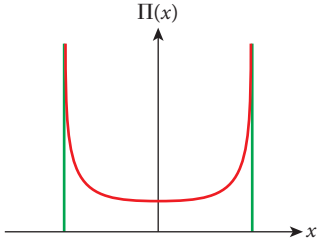


FIGURA 37.23 Distribución de probabilidad clásica para encontrar una partícula en una posición en particular en un potencial del oscilador (curva roja); puntos de retorno clásicos (línea vertical verde).

Esta función es definida solamente entre los dos puntos de retorno clásicos ubicados en

$$x_t = \pm\sqrt{\frac{2E}{m\omega_0^2}}.$$

(El factor de π en el denominador de la función de distribución de probabilidad asegura que la integral de esta función de probabilidad es 1.) La figura 37.23 muestra la distribución de probabilidad resultante, con los puntos de retorno marcados por dos líneas verticales de color verde.

Sin embargo, las distribuciones de probabilidad cuántica en la figura 37.21 no parecen coincidir para nada con la distribución de probabilidad clásica de la figura 37.23. En el caso clásico, la probabilidad de encontrar la partícula alcanza el punto máximo cerca de los puntos de retorno clásicos. Por otro lado, en el caso cuántico que se muestra en la figura 37.21, la distribución de probabilidad parece plana o incluso de pico en el centro. A partir de nuestra experiencia con una partícula en una caja, quizá no estamos sorprendidos de que la función de onda cuántica penetra parcialmente más allá del punto de retorno clásico. No obstante, debe causar algo de preocupación el hecho de que las características básicas de las distribuciones de probabilidad en el caso clásico y cuántico no parezcan corresponder entre sí para nada.

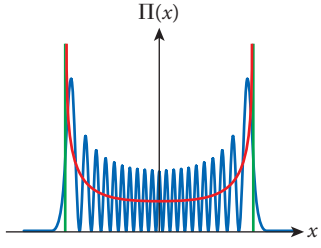


FIGURA 37.24 Lo mismo que la figura 37.23, pero ahora con la distribución de probabilidad para la función de onda del oscilador cuántico $n = 20$ superpuesta.

Esta conclusión cambia cuando examinamos una función de onda de un oscilador cuántico para un valor grande del número cuántico n, como se hace en la figura 37.24 para $n = 20$. Para los números cuánticos mayores, la distribución de probabilidad del oscilador cuántico aún oscila y aún penetra ligeramente más allá de los puntos de retorno clásicos. Sin embargo, ahora la probabilidad empieza a oscilar alrededor de un valor medio que corresponde al límite clásico.

Recuerde que la diferencia de energía entre energías adyacentes permitidas del oscilador cuántico es una constante, $\Delta E = \hbar\omega_0$. Si esta diferencia de energía ΔE se vuelve pequeña en relación con la energía total E, $\Delta E/E \ll 1$ —lo cual es equivalente a decir que el número cuántico (por decir, n) es grande—, la solución cuántica se acerca a su límite clásico. Ésta es una característica general de la mecánica cuántica que convencionalmente se llama **principio de correspondencia**.

37.8 Ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo

Hasta ahora nos hemos ocupado únicamente de problemas independientes del tiempo; es decir, problemas que no cambian con el tiempo. Sin embargo, electrones y otras partículas se mueven. ¿Qué ecuación puede describir la correspondiente dependencia del tiempo del comportamiento ondulatorio de la materia? Aparte de describir la dependencia de la coordenada espacial x, la función de onda ahora también tiene que depender del tiempo t. Todavía nos limitaremos al movimiento en una dirección espacial y supondremos que la energía potencial es constante en el tiempo; es decir, que es una función únicamente de la coordenada x. La ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo se vuelve entonces

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Psi(x,t)+U(x)\Psi(x,t)=i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi(x,t). \tag{37.32}$$

Aquí utilizamos el símbolo $\Psi(x,t)$ para denotar la función de onda cuántica y su dependencia de espacio y tiempo. En este punto no estamos interesados en las soluciones generales de esta ecuación diferencial parcial, ni estamos interesados en derivarla de algún principio general. Sin embargo, quisiéramos ver si podemos encontrar soluciones especiales que nos permitan escribir la función de onda general como producto de dos funciones que dependen cada una solamente de una variable

$$\Psi(x,t)=\psi(x)\chi(t).$$

Este intento de resolver una ecuación diferencial parcial se llama comúnmente "separación de variables". Veamos qué ocurre si insertamos este *Ansatz* en la ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo 37.32:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\big(\psi(x)\chi(t)\big)+U(x)\big(\psi(x)\chi(t)\big)=i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\big(\psi(x)\chi(t)\big)\Rightarrow$$

$$-\chi(t)\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi(x)+\chi(t)U(x)\psi(x)=i\hbar\psi(x)\frac{\partial}{\partial t}\chi(t).$$

Dividimos ambos lados de esta ecuación entre el producto $\psi(x)\chi(t)$ y encontramos

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi(x)+U(x)\psi(x)\right)\frac{1}{\psi(x)}=\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\chi(t)\right)\frac{1}{\chi(t)}.$$

Ahora el lado izquierdo es una función únicamente de x y el lado derecho es únicamente una función de t. Esta igualdad puede aplicarse a todos los x y t solamente si cada lado es igual a la misma constante. Motivados por la ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo 37.9, llamamos a esta constante E, la energía que entra en la ecuación 37.9. El lado izquierdo de esta ecuación lleva entonces a

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}\psi(x)+U(x)\psi(x)\right)\frac{1}{\psi(x)}=E\Rightarrow$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}\psi(x)+U(x)\psi(x)=E\psi(x),$$

lo que reconocemos como nuestra ecuación de Schrödinger independiente del tiempo. Mediante el mismo argumento encontramos para el lado derecho de nuestra ecuación

$$E=\left(i\hbar\frac{d}{dt}\chi(t)\right)\frac{1}{\chi(t)}\Rightarrow$$

$$\frac{d}{dt}\chi(t)=-\frac{i}{\hbar}E\chi(t)\Rightarrow$$

$$\chi(t)=Ae^{-iEt/\hbar}=Ae^{-i\omega t}$$

donde introducimos nuevamente la frecuencia angular ω vía $E=\hbar\omega$. Podemos colocar la constante de normalización A a 1, porque $\left|e^{-i\omega t}\right|^2=1$, y, por lo tanto, la condición de normalización para la función de onda se ha cumplido. Nuestra solución global es, por ende,

$$\Psi(x,t)=\psi(x)e^{-i\omega t}, \tag{37.33}$$

donde $\psi(x)$ es una solución normalizada de la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo con la energía $E = \hbar\omega$. Una función de onda de la forma de la ecuación 37.33 se llama *solución estacionaria* o **estado estacionario** de la ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo. Esta condición mínima para la existencia de estos estados estacionarios es que la energía potencial sea independiente del tiempo, es decir, constante en el tiempo. Un estado estacionario es un estado con una energía exacta si la energía potencial es constante en el tiempo. Esto es igual que en la mecánica newtoniana, donde la energía mecánica total E se conserva. Recuerde que puede haber muchas otras soluciones a la ecuación de Schrödinger 37.32, pero la clase especial de soluciones con energía bien definida se puede escribir en la forma separable de la ecuación 37.33.

Funciones propias y valores propios

Igual que definimos un operador **K** para la energía cinética en la ecuación 37.7, también podemos introducir un operador **H**, que, aplicado a la función de onda, ofrece un producto del valor de energía multiplicado por la función de onda,

$$\mathbf{H}\psi(x) = E\psi(x). \tag{37.34}$$

Si se compara esto con la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo, se puede ver que este operador puede escribirse formalmente como

$$\mathbf{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + U(x) = \mathbf{K} + \mathbf{U}. \tag{37.35}$$

Este operador **H** se llama **operador hamiltoniano**. En álgebra lineal, si es posible aplicar un operador a una función y obtener una constante multiplicada por esta misma función, entonces esta función se llama $\psi(x)$ una **función propia** y la constante un **valor propio**. Por lo tanto, un estado estacionario es una función propia del operador hamiltoniano **H** con un valor propio E.

El operador hamiltoniano es lineal: para cualquier función $\xi_1(x)$ y $\xi_2(x)$ y las constantes a_1 y a_2,

$$\mathbf{H}\big(a_1\xi_1(x) + a_2\xi_2(x)\big) = a_1\mathbf{H}\xi_1(x) + a_2\mathbf{H}\xi_2(x). \tag{37.36}$$

Además, si dos funciones $\psi_1(x)$ y $\psi_2(x)$ son soluciones con los valores propios E_1 y E_2, entonces la aplicación del operador hamiltoniano a la combinación lineal $\psi(x) = a_1\psi_1(x) + a_2\psi_2(x)$ da

$$\begin{aligned}\mathbf{H}\psi(x) &= \mathbf{H}\big(a_1\psi_1(x) + a_2\psi_2(x)\big)\\ &= a_1\mathbf{H}\psi_1(x) + a_2\mathbf{H}\psi_2(x)\\ &= a_1E_1\psi_1(x) + a_2E_2\psi_2(x).\end{aligned}$$

Observe que $\psi(x) = a_1\psi_1(x) + a_2\psi_2(x)$ *no* es una función propia de **H** en el caso general de que $E_1 \neq E_2$.

37.9 Función de onda de muchas partículas

Hasta ahora hemos analizado la mecánica cuántica sólo para el caso en el que una sola partícula está presente. Para seguir adelante tenemos que discutir las características generales de la función de onda cuando dos o más partículas están presentes.

Función de onda de dos partículas

Comencemos con dos partículas y supongamos que conocemos la función de onda para el caso en el que sólo una partícula está presente. Además, limitémonos nuevamente al caso estático (independiente del tiempo). Luego, la ecuación de Schrödinger para la función de onda de una partícula $\psi(x)$ está dada por la ecuación 37.9. Si ahora ponemos dos partículas en el mismo potencial, entonces necesitamos calcular cómo cada una de las partículas interactúa con el potencial externo y cómo ellas interactúan entre sí. El caso general de las dos partículas interactuando entre sí está fuera del alcance de este libro. Sin embargo, el hecho de considerar el caso en el que las dos partículas no interactúan entre sí nos aporta importantes conocimientos físicos y es útil en muchas situaciones físicas.

Primero pensemos en la notación. Queremos caracterizar la coordenada de la partícula 1 mediante x_1 y la de la partícula 2 mediante x_2. Entonces la función de onda de una sola partícula

de la partícula 1 en el estado a se llamará $\psi_a(x_1)$ y el de la partícula 2 en el estado b se llamará $\psi_b(x_2)$. Para la función de onda de dos partículas como función de ambas coordenadas x_1 y x_2, usaremos la notación $\Psi(x_1, x_2)$.

Recuerde el análisis de espín y estadística en el capítulo 36. Ahora tenemos que discutir tres diferentes casos:

Partículas distinguibles: un ejemplo es un electrón y un neutrón en un pozo de potencial infinito. Este es el caso más sencillo porque la función de onda para el estado de dos partículas es simplemente el producto de los dos estados de partícula sencilla:

$$\Psi(x_1, x_2) = \psi_a(x_1) \cdot \psi_b(x_2). \tag{37.37}$$

Bosones idénticos: un ejemplo es dos fotones dentro de una cavidad espejeada, uno de ellos en el estado a y el otro en el estado b. Puesto que bosones de una especie (bosones idénticos) son partículas indistinguibles, no podemos decir definitivamente que el bosón 1 está en el estado a y el bosón idéntico 2 está en el estado b. Es igualmente posible que el bosón 2 esté en el estado a y el bosón 1 esté en el estado b. La función de onda de dos partículas tiene que ser simétrica (permanecer igual) bajo el intercambio de los índices de dos partículas. En lugar de escribir la función de onda de dos partículas como el producto de las funciones de onda de la partícula sola, tenemos que añadir un término de intercambio. La manera de escribir esto en forma matemática es

$$\Psi^B(x_1, x_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\psi_a(x_1) \cdot \psi_b(x_2) + \psi_a(x_2) \cdot \psi_b(x_1)\right). \tag{37.38}$$

Aquí usamos el superíndice B para recordar que ésta es la función de onda simetrizada de dos partículas para bosones. El factor $1/\sqrt{2}$ frente a la suma asegura que la función de onda de dos partículas es normalizada a 1.

Fermiones idénticos: un ejemplo es dos electrones en un átomo, uno de ellos en el estado a y el otro en el estado b. Fermiones de una especie son también indistinguibles, pero no pueden ocupar el mismo estado de manera simultánea. De este modo, la función de onda de dos partículas tiene que ser asimétrica (cambiar el signo) bajo el intercambio de los índices de las dos partículas, así que $\Psi = 0$ cuando $a = b$, como veremos más adelante. Matemáticamente esto se expresa como

$$\Psi^F(x_1, x_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\psi_a(x_1) \cdot \psi_b(x_2) - \psi_a(x_2) \cdot \psi_b(x_1)\right). \tag{37.39}$$

Nuevamente usamos un superíndice, en este caso F, para recordar que ésta es la función de onda asimétrica de dos partículas para fermiones idénticos.

Se puede ver que las expresiones para la función de onda de dos partículas de bosones (ecuación 37.38) y fermiones (ecuaciones 37.39) difieren sólo en el signo del término de intercambio: + para bosones y – para fermiones. Observe que la función de onda en la ecuación 37.39 cumple con el requerimiento básico del principio de exclusión de Pauli, que declara que dos fermiones no pueden ocupar el mismo estado cuántico al mismo tiempo. Si ponemos $b = a$ en esta ecuación, entonces

$$\Psi^F(x_1, x_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\psi_a(x_1) \cdot \psi_a(x_2) - \psi_a(x_2) \cdot \psi_a(x_1)\right) = 0.$$

Además, si intercambiamos la posición de los dos fermiones, entonces encontramos

$$\begin{aligned}\Psi^F(x_2, x_1) &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\psi_a(x_2) \cdot \psi_b(x_1) - \psi_a(x_1) \cdot \psi_b(x_2)\right) \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\psi_a(x_1) \cdot \psi_b(x_2) - \psi_a(x_2) \cdot \psi_b(x_1)\right) \\ &= -\Psi^F(x_1, x_2).\end{aligned}$$

Por tal motivo, si intercambiamos la posición de los dos fermiones, la función de onda sufre un cambio de signo.

Este cambio de signo es central para varios temas actuales de investigación en física: el cambio de signo en la función de onda de dos fermiones limita severamente el uso de modelación por computadora para sistemas físicos en los cuales fermiones pueden intercambiar lugares como parte de la evolución de tiempo del sistema. El problema es que este cambio de signo causa muchas

37.4 Ejercicio en clase

En la ecuación 37.39, el término $\psi_a(x_2) \cdot \psi_b(x_1)$ entra con un signo negativo, y el término $\psi_a(x_1) \cdot \psi_b(x_2)$ con un signo positivo. ¿Qué importancia tiene esta convención de signos?

a) Éste es el único signo posible para ambos términos, porque el segundo término es el "término de intercambio" y, por ende, debe tener un signo negativo.

b) No importa cuál recibe qué signo; lo único que importa es que tengan signos opuestos. Si usted multiplica la función de onda por un factor global de -1, entonces aún obtiene una función de onda válida.

c) La convención de signos para el término de intercambio es arbitraria; podría ser positivo o negativo. Pero el primer término siempre tiene que ser positivo.

d) Ambos términos pueden tener ambos signos, y cada una de las cuatro convenciones de signos (++,−−,−+,+−) conduce a una función de onda válida.

cantidades que deben calcularse en la computadora para promediar cero en simulaciones por computadora y, entonces, en muchas situaciones dos cantidades que deben ser divididas una entre la otra están muy cercanas a cero, lo que resulta en inmensas incertidumbres en los resultados numéricos. A esto se le llama "problema de signos de fermiones", que es universal en la física teórica de cuerpos múltiples y los físicos continúan inventando muchos planteamientos ingeniosos para tratar de superar las limitaciones computacionales que esto impone, hasta la fecha sin éxito.

¿Podemos también tener una función de onda simétrica en el espacio coordenado para un sistema de dos fermiones? ¡La respuesta es sí! El requerimiento de asimetrización de la función de onda de dos fermiones significa que la función de onda global tiene que cumplir con la ecuación 37.39. Sin embargo, la función de onda es el producto de la función de onda de espín y la función de onda del espacio coordenado. Por lo tanto, si la función de onda de espín es simétrica bajo intercambio (dos fermiones con proyección de espín idéntico), entonces la función de onda del espacio coordenado tiene que ser asimétrica. También, si la función de onda de espín es asimétrica (dos fermiones con proyección de espín opuesto), entonces la función de onda del espacio coordenado tiene que ser simétrica bajo intercambio, como muestra el ejemplo 37.6.

EJEMPLO 37.6 La molécula de hidrógeno

Uno de los ejemplos más impresionantes de la importancia de la simetría de intercambio en la función de onda es el enlace covalente en la molécula de hidrógeno. Una molécula de hidrógeno consiste en dos átomos de hidrógeno, cada uno consistente en un electrón y un protón. En un átomo de hidrógeno aislado, el electrón es unido al protón por medio del potencial de Coulomb que, como vimos en el capítulo 23, es proporcional a $1/r$. El capítulo 38 mostrará cómo calcular la función de onda del electrón en el átomo de hidrógeno. Por ahora, necesitamos saber principalmente sólo que esta función de onda tiene su valor más grande en el origen, la posición del núcleo, y cae en forma exponencial en la dirección radial.

Cuando dos átomos de hidrógeno están en gran proximidad uno del otro, pueden interactuar compartiendo sus electrones en forma igual. Este proceso de compartir electrones en el proceso de unión química se llama *enlace covalente*, a diferencia del *enlace iónico*, en el que uno o más electrones son removidos de un átomo y luego predominantemente giran alrededor del otro átomo.

La figura 37.25 muestra las funciones de onda asimétrica *a*) y simétrica *b*) de dos electrones en el espacio coordenado para la molécula de hidrógeno. La hilera superior muestra la función de onda a lo largo del eje a través de ambos núcleos, lo que se puede comparar con las dos funciones de onda de un solo electrón centradas en ±0.37 Å, la separación de equilibrio de los dos núcleos en la molécula de hidrógeno. La hilera del medio muestra el cuadrado absoluto de la función de onda, que es la densidad de probabilidad de encontrar un electrón en un valor dado de la coordenada x. La hilera inferior muestra la densidad de probabilidad de encontrar el electrón en el plano xy, con codificación de color, de tal manera que el amarillo corresponde a los valores más bajos y el negro a los más altos.

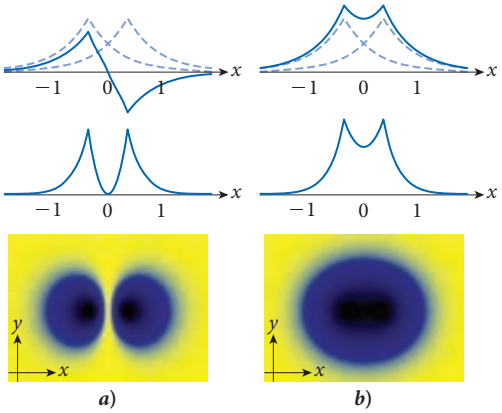


FIGURA 37.25 Funciones de onda de espacio coordenado de electrones en la molécula de hidrógeno; *a*) función de onda asimétrica; *b*) función de onda simétrica. Se muestran las funciones de onda de dos partículas (hilera superior), densidades de probabilidad (hilera del medio) a lo largo del eje mayor y las distribuciones de densidad en el plano bidimensional (hilera inferior).

Para la función de onda simétrica del espacio coordenado [figura 37.25*b*)], una parte significativa de la probabilidad de encontrar un electrón es movida hacia la región entre los dos núcleos. Esto significa que ambos núcleos ven un potencial atractivo en la dirección hacia uno y otro, debido a la interacción de Coulomb de los núcleos con los electrones. La profundidad de este potencial debido a la interacción de intercambio es 4.52 eV en la separación de equilibrio de 0.74 Å, lo que lleva a una fuerza atractiva neta entre los dos átomos que proporciona el enlace covalente para la molécula de H_2. La condición para este enlace es que los dos electrones deben tener proyecciones de espín opuestas, o sea un *espín arriba* y un *espín abajo*. Si ambos tienen la misma proyección de espín, entonces la función de onda de espacio coordenado tiene que ser asimétrica, como muestra la figura 37.25*a*). La resultante degradación neta de la densidad de electrones en la región entre los dos núcleos lleva a un potencial repulsivo en todas las distancias de los núcleos y, por ende, no hay enlace.

Función de onda de múltiples fermiones

La estructura de la ecuación 37.39 muestra que es la misma expresión que la que obtenemos para el factor determinante de una matriz de dos por dos en las funciones de onda de una sola partícula:

$$\Psi^F(x_1,x_2)=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{vmatrix}\psi_a(x_1) & \psi_a(x_2)\\ \psi_b(x_1) & \psi_b(x_2)\end{vmatrix}.$$

Este factor determinante se llama comúnmente **determinante de Slater**. El determinante de Slater puede ser generalizado para el caso de muchos fermiones en el sistema. Si hay n fermiones, entonces la función de onda del fermión n es el determinante de una matriz de $n\times n$ donde la hilera es un estado dado de una sola partícula y la columna es una coordenada de partícula:

$$\Psi^F(x_1,x_2,\ldots,x_n)=\frac{1}{\sqrt{n!}}\begin{vmatrix}\psi_1(x_1) & \psi_1(x_2) & \cdots & \psi_1(x_n)\\ \psi_2(x_1) & \psi_2(x_2) & \cdots & \psi_2(x_n)\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \psi_n(x_1) & \psi_n(x_2) & \ldots & \psi_n(x_n)\end{vmatrix}. \tag{37.40}$$

Este determinante de Slater contiene todas las posibles permutaciones de funciones de onda de una sola partícula a través de todas las coordenadas de las partículas. Nuevamente, el factor $1/\sqrt{n!}$ asegura que la función de onda de muchos fermiones es normalizada; es decir, la integral a través de todo el espacio del cuadrado absoluto de la función de onda es 1 cuando las funciones de onda de una sola partícula son correctamente normalizadas.

Computación cuántica

Una de las áreas de investigación actuales más activas en la mecánica cuántica es el campo del cómputo cuántico. Un gran número de grupos de físicos en todo el mundo utilizan diferentes sistemas físicos para tratar de implementar computadoras cuánticas. Entre los múltiples sistemas que se consideran, se encuentran cadenas de átomos atrapados, puntos cuánticos en semiconductores, electrones en la superficie de helio líquido y colecciones de *buckyballs* (moléculas de C_{60} en la forma de un balón de futbol soccer). En forma regular, se generan nuevas ideas sobre qué sistemas cuánticos utilizar, y muchos grupos están trabajando en su refinamiento. Lo que todas las computadoras cuánticas propuestas tienen en común es que trabajan con las funciones de onda de múltiples partículas de estos sistemas.

Para entender el potencial de la computación cuántica, consideremos, antes que nada, el funcionamiento de una computadora clásica. Una computadora clásica está basada en algoritmos que trabajan con informaciones digitadas que se guardan en "bits". Un bit puede estar en dos estados, ya sea encendido o apagado. Convencionalmente los números 1 y 0 representan estos dos estados. Observe que nada aparece entre 0 y 1 en las computadoras convencionales de hoy en día; es todo o nada. Un "byte" es una colección de 8 bits. Por lo tanto, una posible representación para un valor particular de un byte podría ser 01100010, lo que significa que los 8 bits en los que consiste este byte están en sus respectivas posiciones de encendido o apagado conforme lo indican los números, un dígito para cada bit.

Ahora considere un sistema cuántico de dos estados, entre los cuales se pueden inducir transiciones a través de alguna interacción con una fuerza exterior, pero entre los cuales las transiciones no ocurren en forma espontánea a través de la emisión o la absorción de un solo fotón. Si se le deja en paz, una partícula en uno de los dos estados deberá quedarse en este estado por mucho tiempo.

Convencionalmente, los dos estados cuánticos se denotan como $|0\rangle$ y $|1\rangle$ para hacer una analogía con el bit clásico que puede tener el valor de 0 o 1. Sin embargo, en la mecánica cuántica, un sistema puede estar en una superposición de dos estados, como se observó en la sección anterior. Por lo tanto, el equivalente cuántico del bit, el **qbit**, se define como una función de onda que es una superposición de los dos estados $|0\rangle$ y $|1\rangle$,

$$|\psi\rangle=c_1|1\rangle+c_0|0\rangle$$

donde c_1 y c_0 son números complejos y representan las amplitudes de probabilidad de que el sistema esté en el estado $|1\rangle$ y $|0\rangle$, respectivamente (figura 37.26). Los números c_1 y c_0 no son completamente independientes, porque el requerimiento de que la suma de las probabilidades para que la partícula se encuentre en el estado $|0\rangle$ y $|1\rangle$ sea igual a 1 precisa $|c_1|^2+|c_0|^2=1$.

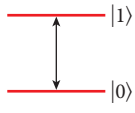


FIGURA 37.26 Simple representación gráfica de un solo qbit.

A partir de un qbit es sencillo generalizar n qbits, por lo menos desde un punto de vista conceptual. Suponga una colección de sistemas individuales de dos estados que no son independientes entre sí. Luego el estado del sistema global se puede escribir como la suma de las combinaciones de los estados individuales. Para un sistema de dos qbits, la función de onda se puede escribir como

$$|\psi\rangle = c_{11}|11\rangle + c_{10}|10\rangle + c_{01}|01\rangle + c_{00}|00\rangle$$

donde c_{00}, c_{01}, c_{10} y c_{11} son nuevamente números complejos, con la condición de normalización de que $|c_{11}|^2 + |c_{10}|^2 + |c_{01}|^2 + |c_{00}|^2 = 1$. Para tres qbits podemos escribir

$$|\psi\rangle = c_{111}|111\rangle + c_{110}|110\rangle + c_{101}|101\rangle + c_{100}|100\rangle + c_{011}|011\rangle + c_{010}|010\rangle + c_{001}|001\rangle + c_{000}|000\rangle.$$

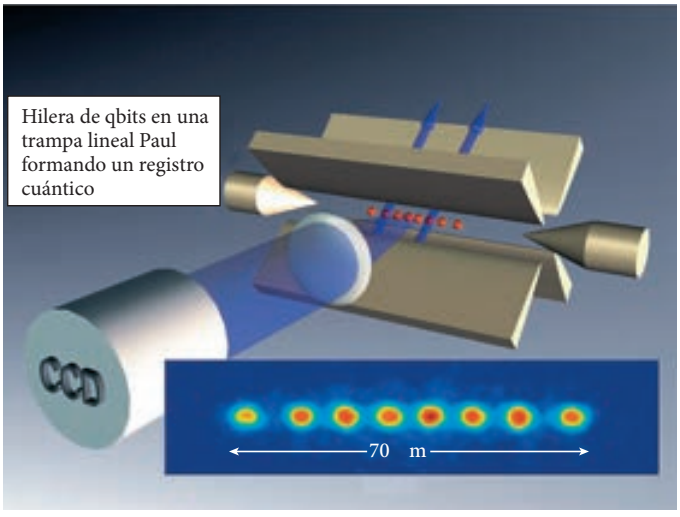


FIGURA 37.27 Posible implementación de una computadora cuántica como una cadena de 8 iones Ca individuales retenidos dentro de una trampa Paul, que es un dispositivo que utiliza campos eléctricos oscilantes para atrapar iones. La figura muestra un dibujo esquemático del aparato, y el recuadro es la imagen de la fluorescencia inducida de los iones atrapados.

Podemos fácilmente generalizar esta ecuación para números más grandes de qbits. El número de términos en las funciones de onda para 1 qbit es 2, para 2 qbits es 4 y para 3 qbits es 8; el número de términos en la función de onda para n qbits es 2^n. En toda la promesa de la potencia del cómputo cuántico surge este número de 2^n. Si una computadora clásica opera en un registro de n bits, entonces ejecuta n operaciones simultáneamente. Sin embargo, si una computadora cuántica opera en un registro de n qbits, entonces ejecuta 2^n operaciones simultáneamente. La figura 37.27 muestra un diagrama de un concepto en particular para una computadora cuántica.

Muchas declaraciones ejemplares están a la orden aquí. Primero que nada, el hecho de investigar la función de onda de los estados de qbits necesariamente cambia la información almacenada en los qbits. Esto requiere el desarrollo de algoritmos especiales de corrección de errores, que enmienden un error sin destruir el estado cuántico. En segundo lugar, aún no se ha implementado una verdadera computadora cuántica que pueda hacer más que ejecutar unas cuantas operaciones de demostración. Además, el cómputo cuántico es una construcción probabilista por naturaleza. Un cálculo se tiene que repetir varias veces para obtener un resultado confiable. Sólo para un número pequeño de algoritmos se ha evidenciado que una computadora cuántica puede tomar plena ventaja de las operaciones simultáneas de 2^n teóricamente posibles. Uno de estos algoritmos es la factorización de grandes enteros en números primos. Este problema ha atraído un enorme interés y también financiamiento, porque en la actualidad los esquemas de encriptación más comúnmente utilizados cuentan con el hecho de que es imposible usar las computadoras de la actualidad para factorizar grandes enteros en la vida humana. En comparación, una computadora cuántica funcional, con aproximadamente 100 qbits, podría ejecutar esa tarea en segundos.

37.10 Antimateria

En la sección anterior analizamos el operador hamiltoniano en la mecánica cuántica, que representa la energía total de una partícula. Sin embargo, utilizamos la fórmula clásica $K = p^2/2m$ para la energía cinética, lo que sólo es apropiado para velocidades que son pequeñas en comparación con la velocidad de la luz. En el capítulo 35 sobre la relatividad, hemos observado que la relación más general entre cantidad de movimiento y energía está dada por

$$E = \pm\sqrt{p^2c^2 + m^2c^4}.$$

La pregunta es entonces: ¿es posible construir una estructura de física cuántica que también sea correcta para velocidades que *no* son pequeñas en comparación con la velocidad de la luz? En otras palabras, ¿podemos construir una teoría cuántica relativista? La primera persona en ave-

riguar cómo hacer esto fue el físico inglés Paul Adrien Maurice Dirac (1902-1984). Publicó su famosa **ecuación de Dirac** en 1928 y por este logro compartió en 1933 el premio Nobel en Física con Erwin Schrödinger.

No intentaremos derivar o incluso motivar la ecuación de Dirac. La mayoría de los departamentos de Física de las universidades jamás mencionan esta ecuación en un curso general de introducción. Sin embargo, podemos apuntarla, explicar la notación, compararla con la ecuación equivalente no relativista de Schrödinger y explorar algunas de las consecuencias físicas. Usted puede tratar las siguientes dos páginas como un recurso al que podrá regresar en el curso de sus futuros estudios. O quizá ver esta ecuación lo motivará a explorar este tema más a detalle en este momento.

La ecuación de Dirac para una partícula "libre", es decir, una partícula que no está sujeta a un potencial o fuerza externa, es

$$\left(\gamma_0 mc^2 + \sum_{i=1}^{3} \gamma_i p_i c\right)\Psi(\vec{r},t) = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi(\vec{r},t). \tag{37.41}$$

En esta ecuación, c es la velocidad de la luz, m es la masa en reposo de la partícula y p_i es el operador de cantidad de movimiento en una de las tres direcciones ortogonales (x, y, z) que hemos introducido en la sección 37.1. Los símbolos γ_0, γ_1, γ_2, γ_3 se refieren a las llamadas matrices de Dirac:

$$\gamma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \gamma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

La función de onda $\Psi(\vec{r},t)$ en la ecuación 37.41 es ahora un "espinor" de cuatro componentes, en lugar de un escalar de un componente, como es el caso para las funciones de ondas de mecánica cuántica que hemos discutido hasta ahora:

$$\Psi(\vec{r},t) = \begin{pmatrix} \Psi_1(\vec{r},t) \\ \Psi_2(\vec{r},t) \\ \Psi_3(\vec{r},t) \\ \Psi_4(\vec{r},t) \end{pmatrix}.$$

La ecuación de Dirac 37.41 es la extensión relativistamente correcta de la ecuación de Schrödinger 37.32 para el caso tridimensional libre de potencial:

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\Psi(\vec{r},t) = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi(\vec{r},t).$$

Podemos proceder con la solución de la ecuación de Dirac de una manera parecida a lo que hicimos para la ecuación de Schrödinger. Por ejemplo, podemos escribir la dependencia del tiempo de la solución para la partícula libre como

$$\Psi(\vec{r},t) = \Psi_0(\vec{r})e^{-iEt/\hbar}. \tag{37.42}$$

La función de onda estática $\Psi_0(\vec{r})$ cumple con la ecuación independiente del tiempo de Dirac con el valor propio de energía E,

$$\left(\gamma_0 mc^2 + \sum_{i=1}^{3} \gamma_i p_i c\right)\Psi_0(\vec{r}) = E\Psi_0(\vec{r}). \tag{37.43}$$

Buscamos soluciones de onda plana de la forma que se mueve a lo largo de un eje coordenado en particular, que convencionalmente se elige como el eje z:

$$\Psi_0(\vec{r}) = we^{ipz/\hbar}. \tag{37.44}$$

Aquí p es la cantidad de movimiento de la partícula. (Puesto que se mueve a lo largo del eje z, su componente de cantidad de movimiento a lo largo de este eje es el valor absoluto de su cantidad

de movimiento; es decir, la longitud de su vector de cantidad de movimiento.) También, w es un espinor constante de cuatro componentes. La inserción de este *Ansatz* para $\Psi_0(\vec{r})$ en la ecuación estática de Dirac 37.43 resulta en la ecuación matricial

$$\begin{pmatrix} mc^2 & 0 & pc & 0 \\ 0 & mc^2 & 0 & -pc \\ pc & 0 & -mc^2 & 0 \\ 0 & -pc & 0 & -mc^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \end{pmatrix} = E \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \end{pmatrix}. \tag{37.45}$$

Las soluciones para las posibles energías son

$$E(p) = \pm\sqrt{m^2c^4 + p^2c^2}\,. \tag{37.46}$$

Esto es satisfactorio porque recuperamos la relación de energía/cantidad de movimiento a la que hemos llegado en el capítulo 35 mediante el uso de la mecánica relativista. Los dos componentes superiores del espinor w, w_1 y w_2 representan entonces las soluciones para energías positivas: uno para "espín arriba" y uno para "espín abajo". Los dos componentes inferiores w_3 y w_4 son las soluciones de "espín arriba" y "espín abajo" para energías negativas.

La importancia de la ecuación de Dirac está en el hecho de que unifica las dos extensiones de la mecánica clásica en una descripción consistente. El capítulo 35 mostró que una descripción relativista es necesaria para velocidades del objeto que son comparables con la velocidad de la luz, y que la mecánica relativista contiene a la mecánica clásica como un caso especial para velocidades que son pequeñas en comparación con la velocidad de la luz. En el capítulo 36 y en el presente hemos visto que necesitamos una descripción cuántica para sistemas muy pequeños y que, por medio del principio de correspondencia, la mecánica clásica también surge como un caso especial de la mecánica cuántica. La ecuación de Dirac contiene mecánica cuántica relativista y tiene mecánica cuántica no relativista como un caso especial; por lo tanto, produce una estructura general muy satisfactoria y estéticamente atractiva.

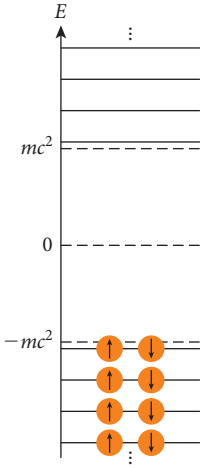


FIGURA 37.28 El vacío de Dirac, en el que todos los estados de energía negativa están completamente ocupados.

¿Qué hay de las soluciones de energía negativa en la ecuación 37.46? ¿Cómo se pueden interpretar éstas? Hasta aquí, en todos nuestros análisis de mecánica cuántica, hemos supuesto que la energía de una partícula libre siempre es positiva. Esto nos permite pensar en el concepto del estado fundamental como el estado con la energía más baja. Sin embargo, si estados con energía negativa están disponibles, ¿qué impide a un electrón colocado en un estado de energía positiva decaer en un estado de energía negativa y luego seguir a través de una secuencia de estados de energía sucesivamente más baja mediante la emisión de un fotón cada vez?

Para superar este problema de radiación interminable, Dirac propuso la solución que se ilustra en la figura 37.28: todos los estados posibles de energía negativa están ya completamente ocupados por una partícula de espín arriba y una de espín abajo. Esta imagen de lo que percibimos como espacio vacío como un "mar" de estados ocupados de energía negativa del electrón suele llamarse **mar de Dirac**. ¿Qué son estas partículas postuladas en estados de energía negativa? ¿Tienen la misma masa que el electrón? ¿Son reales o apenas una construcción de pensamiento que ayudó a que un modelo defectuoso sobreviva las inspecciones de consistencia? En particular, ¿es posible remover uno de estos electrones de energía negativa del mar de Dirac y crear un hoyo en su lugar?

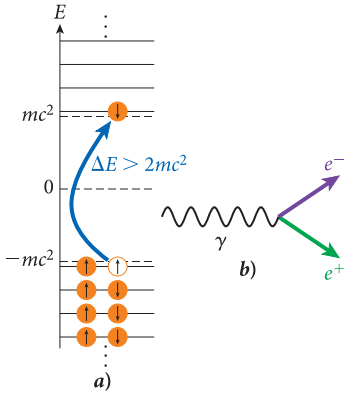


FIGURA 37.29 Creación de un hoyo en el mar de Dirac: creación de un par electrón-positrón. *a*) Diagrama de energía; *b*) esbozo en el espacio coordenado.

La respuesta a esta última pregunta es sí. Un hoyo en el mar de Dirac actúa igual que una partícula de espín $\frac{1}{2}$ con la misma masa que un electrón, pero con una carga y proyección de espín opuesta. Para crear uno de estos hoyos en el mar de Dirac, se tiene que remover uno de los electrones del mar de Dirac y debe elevarse a un estado de energía positiva. Levantar el electrón a través del hueco prohibido de $-mc^2$ a mc^2 requiere depositar en el vacío una energía de por lo menos el doble de la masa del electrón multiplicado por la velocidad de luz al cuadrado (figura 37.29). Puesto que la energía de la masa del electrón es 511 keV, se requiere por lo menos 1.022 MeV de energía para levantar un electrón a un estado de energía positiva y, al mismo tiempo, crear un hoyo en el mar de Dirac.

Este hoyo de carga positiva en el mar de Dirac con la misma masa que el electrón no es sólo un truco algebraico convencional, sino una partícula real. El físico estadounidense Carl Anderson (1905-1991) descubrió esta partícula, de nombre positrón, en 1932, con placas fotográficas expuestas a radiación cósmica. Este experimento proporcionó una confirmación triunfal para la teoría de Dirac. A pesar de este éxito, la idea del mar de Dirac con un número infinito de partículas llenando todos los estados de energía disponibles no parece ser muy elegante. En particular,

la idea de que un vacío tiene energía infinita parece ser contraintuitiva. Teorías del campo cuántico más modernas han reemplazado a algunas de estas ideas conceptuales, pero las dificultades básicas de cantidades infinitas aún están presentes, haciendo creer a muchos profesionales que se necesitan avances en el futuro.

El **positrón** es la **antipartícula** del electrón, un ejemplo de **antimateria**. Cada fermión obedece a la ecuación de Dirac y, por lo tanto, la misma imagen de un mar de Dirac lleno aplica al estado fundamental del vacío. De este modo cada fermión tiene una antipartícula. El físico italiano Emilio Segrè (1905-1989) y el estadounidense Owen Chamberlain (1920-2006) descubrieron la antipartícula al protón, el antiprotón, en 1955. En 1995, físicos descubrieron los primeros átomos de antihidrógeno en CERN. Desde el año 2000, CERN tiene una "fábrica de antimateria" en la que se producen y estudian átomos de antihidrógeno ultrafríos. Una de las muchas preguntas a contestar es si la antimateria responde a la gravedad de la misma forma que la materia regular.

Una antipartícula también se puede aniquilar si encuentra a su socio de partícula. Este proceso de **aniquilación** se dibuja en la figura 37.30. En el proceso de aniquilación, la masa entera de ambas partículas se convierte en energía. Por lo tanto, a partir de la combinación de la teoría cuántica y la relatividad surge una nueva imagen de la relación entre masa y energía: masa y energía pueden convertirse una en la otra, y la masa es simplemente una forma más de energía.

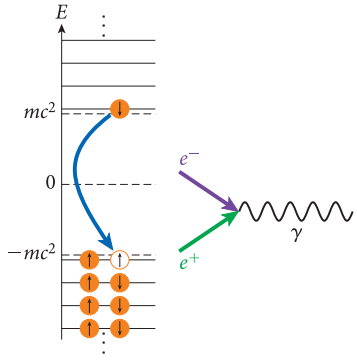


FIGURA 37.30 Aniquilación de electrón-positrón.

EJEMPLO 37.7 Aniquilación de materia

La aniquilación de materia-antimateria es una fuente popular de energía en los libros y películas de ciencia ficción. Esta idea convenientemente ignora el hecho de que no existe ninguna fuente de antimateria en cualquier parte del mundo ni en nuestro sistema solar ni, muy probablemente, en el universo entero. (Pensaremos más sobre esto en los capítulos 39 y 40 sobre la física subatómica.) Toda la antimateria que se podría utilizar como una fuente de energía primero se tendría que crear. Además, por lo menos, la misma cantidad de energía se debería invertir en este proceso de la que se podría ganar posteriormente de la aniquilación. No obstante, es interesante averiguar cuánta energía se liberaría en el proceso de aniquilación.

PROBLEMA

¿Cuánta energía se liberaría si usted pudiera aniquilar una lata de gaseosa llena de antiagua con agua regular?

SOLUCIÓN

Una lata de gaseosa contiene 0.330 litros de líquido. Si este líquido es agua, entonces su masa es de 0.330 kg, porque el agua tiene una densidad de 1 000 kg/m^3, así que 1 litro de agua tiene una masa de 1 kg. Puesto que la masa de una antipartícula (que constituye la antimateria) es la misma que la masa de la partícula correspondiente, la masa del antiagua es también 0.330 kg. Por lo tanto, tenemos que aniquilar un total de 2 × 0.330 kg de masa (0.330 kg de antiagua y 0.330 kg de agua).

La energía contenida en esta masa se obtiene mediante la multiplicación de la masa total por el cuadrado de la velocidad de la luz.

$$E = mc^2 = (0.660\ \text{kg})(3.00 \cdot 10^8\ \text{m/s})^2 = 5.94 \cdot 10^{16}\ \text{J}.$$

Para ver cuánta energía es esto, hagamos una pregunta de seguimiento.

PROBLEMA

Las plantas de energía nuclear más grandes producen 1 200 MW. ¿Cuánto tiempo tendría que trabajar una de estas plantas de energía nuclear a fin de producir la misma cantidad de energía que la lata de gaseosa llena de antiagua?

SOLUCIÓN

Una planta de energía de 1 200 MW produce $1.2 \cdot 10^9$ J de energía utilizable cada segundo. Por ende, el número de segundos que tarda en producir $E = 5.94 \cdot 10^{16}$ J es

$$\frac{5.94 \cdot 10^{16}\ \text{J}}{1.2 \cdot 10^9\ \text{J/s}} = 4.95 \cdot 10^7\ \text{s}.$$

¡Esto es un tiempo mayor que 1.5 años!

LO QUE HEMOS APRENDIDO | GUÍA DE ESTUDIO PARA EXAMEN

- El cuadrado absoluto de la función de onda compleja $\psi(x)$ es la densidad de probabilidad de encontrar una partícula en alguna posición. La función de onda es normalizada a

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x)|^2 \, dx = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x)^* \psi(x) dx = 1.$$

- El operador para la cantidad de movimiento es

$$\mathbf{p}\psi(x) = -i\hbar \frac{d}{dx}\psi(x).$$

- El operador para la energía cinética es

$$\mathbf{K}\psi(x) = \frac{1}{2m}\mathbf{p}^2\psi(x) = \frac{1}{2m}\left(-i\hbar\frac{d}{dx}\right)^2\psi(x) = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}\psi(x).$$

- La ecuación de Schrödinger para una partícula en un potencial $U(x)$ está dada por

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + U(x)\psi(x) = E\psi(x).$$

- La solución de la función de onda para una partícula confinada en el pozo infinito con paredes ubicadas en $x = 0$ y $x = a$ es

$$\psi(x) = \begin{cases} 0 & \text{para } x < 0 \\ \sqrt{\frac{2}{a}} \operatorname{sen}\left[\frac{n\pi x}{a}\right] \text{ con } n = 1,2,3,\ldots & \text{para } 0 \le x \le a \\ 0 & \text{para } x > a. \end{cases}$$

Los valores propios de energía correspondientes son

$$E_n = \frac{\hbar^2\pi^2}{2ma^2}n^2, \quad n = 1,2,3,\ldots.$$

- La solución para el potencial finito

$$U(x) = \begin{cases} \infty & \text{para } x < 0 \\ 0 & \text{para } 0 \le x \le a \\ U_1 & \text{para } x > a \end{cases} \quad \text{para} \quad E > U_1$$

es

$$\psi(x) = \begin{cases} 0 & \text{para } x < 0 \\ D\operatorname{sen}(\kappa x) & \text{para } 0 \le x \le a, \\ F\cos(\kappa' x) + G\operatorname{sen}(\kappa' x) & \text{para } x > a \end{cases}$$

$$\text{con } \kappa' = \sqrt{\kappa^2 - \frac{2mU_1}{\hbar^2}}.$$

- La solución para el mismo potencial finito para $E < U_1$ es

$$\psi(x) = \begin{cases} 0 & \text{para } x < 0 \\ D\operatorname{sen}(\kappa x) & \text{para } 0 \le x \le a, \\ Fe^{-\gamma x} & \text{para } x > a \end{cases}$$

$$\text{con } \gamma^2 = \frac{2m(U_1 - E)}{\hbar^2} = \frac{2mU_1}{\hbar^2} - \kappa^2.$$

- Para un potencial de pasos de la forma

$$U(x) = \begin{cases} \infty & \text{para } x < 0 \\ 0 & \text{para } 0 \le x \le a \\ U_1 & \text{para } a < x < b \\ 0 & \text{para } x \ge b \end{cases}$$

la función de onda es

$$\psi(x) = \begin{cases} 0 & \text{para } x < 0 \\ D\operatorname{sen}(\kappa x) & \text{para } 0 \le x \le a \\ Fe^{-\gamma x} & \text{para } a < x < b \\ G\operatorname{sen}(\kappa x + \varphi) & \text{para } x \ge b. \end{cases}$$

La probabilidad para una partícula con una energía menor que la altura de la barrera para abrir un túnel a través de la barrera es

$$\Pi_t = \frac{|\psi(b)|^2}{|\psi(a)|^2} = \frac{\left|Fe^{-\gamma b}\right|^2}{\left|Fe^{-\gamma a}\right|^2} = \left|e^{-\gamma(b-a)}\right|^2 = e^{-2\gamma(b-a)}$$

y, por lo tanto, depende exponencialmente del ancho de la barrera.

- Las soluciones de funciones de onda para el potencial del oscilador armónico $U(x) = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}m\omega_0^2x^2$ son las funciones

$$\psi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{\sigma}\pi^{1/4}}\frac{1}{\sqrt{n!\ 2^n}}H_n(x/\sigma)e^{-x^2/2\sigma^2},$$

donde H_n es un polinomio de Hermite y

$$\sigma = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega_0}}.$$

Los valores propios de energía correspondientes están igualmente espaciados,

$$E_n = \left(n + \tfrac{1}{2}\right)\hbar\omega_0, \quad n = 0,1,2,\ldots.$$

- Podemos encontrar el valor esperado en mecánica cuántica de una cantidad mediante la integración a través del espacio entero ψ^* multiplicado por el resultado obtenido cuando el operador correspondiente actúa sobre ψ. El valor esperado de posición es

$$\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x) x \psi(x) dx,$$

y el valor esperado de la cantidad de movimiento es

$$\langle p \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x)\mathbf{p}\psi(x)dx = -i\hbar\int_{-\infty}^{\infty}\psi^*(x)\frac{d}{dx}\psi(x)dx.$$

- La función de onda del oscilador en el estado base o fundamental ($n = 0$) tiene el producto mínimo de la cantidad de movimiento y la incertidumbre de la coordenada permitido por el principio de incertidumbre.
- El principio de correspondencia establece que si la diferencia de energía ΔE entre estados de energía

cuánticos adyacentes se vuelve pequeña en relación con la energía total E, $\Delta E \ll E$, la solución cuántica se acerca a su límite clásico.

- La ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo es

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Psi(x,t)+U(x)\Psi(x,t)=i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi(x,t)$$

con la solución $\Psi(x,t) = \psi(x)e^{-i\omega t}$.

- El operador hamiltoniano es

$$\mathbf{H}=-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}+U(x)=\mathbf{K}+U(x).$$

El operador es lineal, así que una combinación lineal de dos soluciones de la ecuación de Schrödinger es también una solución.

- La función de onda de dos partículas para bosones (que no interactúan) es el producto simétrico de funciones de onda de una partícula,

$$\Psi^B(x_1,x_2)=\frac{1}{\sqrt{2}}\Big(\psi_a(x_1)\cdot\psi_b(x_2)+\psi_a(x_2)\cdot\psi_b(x_1)\Big).$$

- La función de onda de dos partículas para fermiones (que no interactúan) es el producto asimétrico de funciones de onda de una partícula,

$$\Psi^F(x_1,x_2)=\frac{1}{\sqrt{2}}\Big(\psi_a(x_1)\cdot\psi_b(x_2)-\psi_a(x_2)\cdot\psi_b(x_1)\Big).$$

- La computación cuántica define un qbit como

$$|\psi\rangle = c_1|1\rangle + c_0|0\rangle.$$

El entramado de muchos qbits da al cómputo cuántico la aptitud (¡sólo teórica aún!) de evaluar muchos cálculos en forma simultánea y promete una gran ventaja sobre la computación digital convencional.

- La ecuación de Dirac

$$\left(\gamma_0 mc^2+\sum_{i=1}^{3}\gamma_i p_i c\right)\Psi(\vec{r},t)=i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi(\vec{r},t)$$

es la generalización de la ecuación de Schrödinger para la relación relativistamente correcta entre energía y cantidad de movimiento. Esto conduce a estados de energía negativa y antipartículas.

TÉRMINOS CLAVE

función de onda, p. 1208
operador, p. 1210
ecuación de Schrödinger, p. 1211
pozo de potencial infinito, p. 1211
número cuántico principal, p. 1213
diagrama de nivel de energía, p. 1214
estados ligados, p. 1214
separable, p. 1216
pozo de potencial finito, p. 1217
efecto túnel, p. 1223
coeficiente de transmisión, p. 1224
microscopio de escaneo de efecto túnel (STM), p. 1225
valores esperados, p. 1229
principio de correspondencia, p. 1232
estado estacionario, p. 1234
operador hamiltoniano, p. 1234
función propia, p. 1234
valor propio, p. 1234
determinante de Slater, p. 1237
qbit, p. 1237
ecuación de Dirac, p. 1239
mar de Dirac, p. 1240
positrón, p. 1241
antipartícula, p. 1241
antimateria, p. 1241
aniquilación, p. 1241

NUEVOS SÍMBOLOS Y ECUACIONES

$\mathbf{p}\psi(x)=-i\hbar\frac{d}{dx}\psi(x)$, operador de cantidad de movimiento

$\mathbf{K}\psi(x)=\frac{1}{2m}\mathbf{p}^2\psi(x)=\frac{1}{2m}\left(-i\hbar\frac{d}{dx}\right)^2\psi(x)=-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}\psi(x)$, operador de energía cinética

$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi(x)}{dx^2}+U(x)\psi(x)=E\psi(x)$, ecuación de Schrödinger

$E_n=\frac{\hbar^2\pi^2}{2ma^2}n^2$, $\quad n=1,2,3,...$, valores propios de energía, pozo de potencial infinito

$E_n=\left(n+\frac{1}{2}\right)\hbar\omega_0$, $\quad n=0,1,2,...$, valores propios de energía, oscilador armónico

$\langle x\rangle=\int_{-\infty}^{\infty}\psi^*(x)x\psi(x)dx$, valor esperado de posición

$\mathbf{H}=-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}+U(x)=\mathbf{K}+U(x)$, operador hamiltoniano

RESPUESTAS A LAS OPORTUNIDADES DE AUTOEVALUACIÓN

37.1 Use: $e^{\pm i\theta} = \cos\theta \pm i \operatorname{sen}\theta$ (Euler)

$$\begin{aligned}\psi(x) &= Ae^{i\kappa x} + Be^{-i\kappa x}\\ &= A\big(\cos(\kappa x) + i\operatorname{sen}(\kappa x)\big) + B\big(\cos(\kappa x) - i\operatorname{sen}(\kappa x)\big)\\ &= (A+B)\cos(\kappa x) + i(A-B)\operatorname{sen}(\kappa x)\\ &= C\cos(\kappa x) + D\operatorname{sen}(\kappa x), \text{ donde}\\ C &= A+B \text{ y } D = i(A-B).\end{aligned}$$

37.2 El hecho de sumar una energía constante, c, en todas partes del espacio deja las soluciones de funciones de onda sin cambio. Sin embargo, todas las energías se mueven hacia arriba debido a esta constante c.

37.3 La función de onda es el producto de tres funciones de ondas unidimensionales, $\psi(x, y, z) = \psi_1(x)\cdot\psi_2(y)\cdot\psi_3(z)$

$$\psi_1(x) = \begin{cases} 0 & \text{para } x < 0\\ \sqrt{2/a}\operatorname{sen}(n_x\pi x/a) \text{ con } n_x = 1,2,3,\ldots & \text{para } 0 \le x \le a\\ 0 & \text{para } x > a\end{cases}$$

$$\psi_2(y) = \begin{cases} 0 & \text{para } y < 0\\ \sqrt{2/b}\operatorname{sen}(n_y\pi y/b) \text{ con } n_y = 1,2,3,\ldots & \text{para } 0 \le y \le b\\ 0 & \text{para } y > b\end{cases}$$

$$\psi_3(z) = \begin{cases} 0 & \text{para } z < 0\\ \sqrt{2/c}\operatorname{sen}(n_z\pi z/c) \text{ con } n_z = 1,2,3,\ldots & \text{para } 0 \le z \le c\\ 0 & \text{para } z > c\end{cases}$$

$$E_{n_x,n_y,n_z} = \frac{\hbar^2\pi^2}{2ma^2}n_x^2 + \frac{\hbar^2\pi^2}{2mb^2}n_y^2 + \frac{\hbar^2\pi^2}{2mc^2}n_z^2.$$

37.4 Una función de onda continua en el punto b requiere que

$$Fe^{-\gamma b} = G\operatorname{sen}(\kappa b + \phi), \qquad \text{(i)}$$

y una derivada continua de la función de onda en el mismo punto requiere que

$$-\gamma Fe^{-\gamma b} = \kappa G\cos(\kappa b + \phi). \qquad \text{(ii)}$$

Divide la ecuación (i) entre la ecuación (ii) para obtener $\tan(\kappa b + \phi) = \dfrac{\kappa}{-\gamma}$. Resuelve esto para el cambio de fase, ϕ, para encontrar el cambio de fase $\phi = \tan^{-1}\left(\dfrac{\kappa}{-\gamma}\right) - \kappa b$.

Para obtener la amplitud G lo más fácil es dividir la ecuación (ii) entre κ, luego elevar ambos lados de la ecuación (i) y la ecuación (ii) al cuadrado. Esto resulta en

$$F^2e^{-2\gamma b} = G^2\operatorname{sen}^2(\kappa b + \phi)$$

$$(\gamma/\kappa)^2F^2e^{-2\gamma b} = G^2\cos^2(\kappa b + \phi).$$

Ahora sume estas dos ecuaciones, lo que da

$$(1 + (\gamma/\kappa)^2)F^2e^{-2\gamma b} = G^2.$$

Al tomar la raíz cuadrada obtenemos el valor para G,

$$G = \sqrt{1 + (\gamma/\kappa)^2}\,Fe^{-\gamma b}.$$

37.5 Empiece con la definición e inserte la función de onda:

$$\langle p\rangle = \int_{-\infty}^{\infty}\psi^*(x)\mathbf{p}\psi(x)dx = -i\hbar\int_{-\infty}^{\infty}\psi^*(x)\frac{d}{dx}\psi(x)dx$$

$$\psi_0(x) = Ae^{-x^2/2\sigma^2}$$

$$\frac{d}{dx}\psi_0(x) = \frac{Ax}{\sigma^2}e^{-x^2/2\sigma^2}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\left(Ae^{-x^2/2\sigma^2}\right)\left(\frac{Ax}{\sigma^2}e^{-x^2/2\sigma^2}\right)dx = \frac{A}{\sigma^2}\int_{-\infty}^{\infty}xe^{-x^2/\sigma^2}dx = 0.$$

37.6 Para el oscilador armónico encontramos

$$E_n = \left(n + \tfrac{1}{2}\right)\hbar\omega_0, \quad n = 0,1,2,\ldots$$

$$\langle K_0\rangle = E_0/2 = \frac{\hbar\omega_0}{4}$$

$$\langle K_1\rangle = E_1/2 = \frac{3\hbar\omega_0}{4}$$

$$\langle K_2\rangle = E_2/2 = \frac{5\hbar\omega_0}{4}$$

$$\langle K_3\rangle = E_3/2 = \frac{7\hbar\omega_0}{4}.$$

PRÁCTICA PARA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Lineamientos para resolución de problemas

1. La mecánica cuántica domina toda la física moderna, y se han investigado y se siguen investigando muchos sistemas diferentes. Sin embargo, la mayoría de estos sistemas no tienen soluciones analíticas sencillas y requieren el uso de computadoras. Al nivel introductorio, la mayoría de los problemas se puede representar mediante pozos de potencial (in)finitos o potenciales de oscilador armónico.

2. Las funciones de onda son frecuentemente determinadas mediante condiciones de frontera y simetrías. Asegúrese de explotarlas en sus intentos de solución.

3. La mecánica cuántica y la mecánica clásica no son totalmente diferentes una de la otra. La mecánica clásica es el límite de la mecánica cuántica cuando podemos ignorar que $\hbar$ no es cero. Asegúrese de que sus soluciones cuánticas no violen la mecánica clásica en este límite.

4. Normalmente usted encontrará energías discretas para sus soluciones cuánticas. Diferencias de energía fija entre estados adyacentes señalan potenciales de osciladores, en tanto que diferencias de energía de incremento lineal señalan pozos de potencial infinito.

PROBLEMA RESUELTO 37.1 Medio oscilador

PROBLEMA

Suponga que usted sabe que un electrón está restringido a un potencial de la forma

$$U(x)=\begin{cases} a^2x^2 & \text{para } \begin{cases} x>0 \\ x\le 0 \end{cases} \\ \infty \end{cases}$$

con a = constante. ¿Cuál es la energía del primer estado excitado, si la energía del estado fundamental o base del electrón en este potencial tiene un valor de 3.5 eV?

SOLUCIÓN

PIENSE

El potencial aquí es una mezcla entre el pozo de potencial infinito, donde $U(x) = \infty$ fuera de ciertas regiones en el espacio, y el potencial del oscilador armónico, $U(x) = \frac{1}{2}m\omega_0^2x^2$, con la constante $a=\sqrt{\frac{1}{2}m\omega_0^2}$. La clave para resolver este problema es que la única restricción que un pozo de potencial infinito impone sobre una función de onda es que tiene que ser cero en la interfase entre la parte infinita y finita de la función de potencial. En el caso presente, este requerimiento se puede escribir como $\psi(x = 0) = 0$.

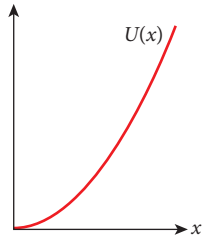


FIGURA 37.31 Potencial de semioscilador.

ESBOCE

La figura 37.31 esboza la forma de la función de potencial dada en el problema.

PLANTEE

Ya hemos establecido que las funciones de onda del lado izquierdo ($x \le 0$) tienen que ser 0. En el lado derecho, las funciones de onda necesitan ser funciones de onda del oscilador armónico del tipo dado en la ecuación 37.26, donde las funciones de onda de más baja energía en el potencial del oscilador armónico son

$$\psi_0(x)=\frac{1}{\sqrt{\sigma}\pi^{1/4}}e^{-x^2/2\sigma^2}$$

$$\psi_1(x)=\frac{1}{\sqrt{\sigma}\pi^{1/4}}\frac{1}{\sqrt{2}}\left(2\frac{x}{\sigma}\right)e^{-x^2/2\sigma^2}$$

$$\psi_2(x)=\frac{1}{\sqrt{\sigma}\pi^{1/4}}\frac{1}{\sqrt{8}}\left(4\frac{x^2}{\sigma^2}-2\right)e^{-x^2/2\sigma^2}$$

$$\psi_3(x)=\frac{1}{\sqrt{\sigma}\pi^{1/4}}\frac{1}{\sqrt{48}}\left(8\frac{x^3}{\sigma^3}-12\frac{x}{\sigma}\right)e^{-x^2/2\sigma^2}$$

$$\psi_4(x)=\frac{1}{\sqrt{\sigma}\pi^{1/4}}\frac{1}{\sqrt{384}}\left(16\frac{x^4}{\sigma^4}-48\frac{x^2}{\sigma^2}+12\right)e^{-x^2/2\sigma^2}$$

con la constante σ definida como $\sigma=\sqrt{\hbar/m\omega_0}$, y las energías correspondientes a estas funciones de onda son

$$E_n=\left(n+\tfrac{1}{2}\right)\hbar\omega_0, \quad n=0,1,2,\ldots.$$

SIMPLIFIQUE

Queda claro que las funciones $\psi_0(x)$, $\psi_2(x)$, $\psi_4(x)$ y todas las demás funciones de onda con n par tienen valores de no cero para $x = 0$ y, por lo tanto, no califican como soluciones para este problema del medio oscilador. Éstas son las funciones de onda de paridad par con la propiedad $\psi(-x) = \psi(x)$. Sin embargo, las funciones de onda de paridad impar $\psi_1(x)$, $\psi_3(x)$, y todas las demás funciones de onda con n impar, tienen la propiedad requerida $\psi(x=0) = 0$. En general, las funciones de ondas de paridad impar tienen la propiedad $\psi(-x) = -\psi(x)$ y, por lo tanto, tienen que desaparecer en el origen para ser continuas.

Esto significa que el estado fundamental o base para nuestro sistema presente debe tener la función de onda

$$\psi_{gs}(x)=\frac{1}{\sqrt{\sigma}\pi^{1/4}}\frac{1}{\sqrt{2}}\left(2\frac{x}{\sigma}\right)e^{-x^2/2\sigma^2}$$

(*continúa*)

(*continuación*)

con energía

$$E_{gs} = (1+\tfrac{1}{2})\hbar\omega_0 = \tfrac{3}{2}\hbar\omega_0,$$

y el primer estado excitado debe tener la función de onda

$$\psi_{ex}(x) = \frac{1}{\sqrt{\sigma}\pi^{1/4}}\frac{1}{\sqrt{48}}\left(8\frac{x^3}{\sigma^3} - 12\frac{x}{\sigma}\right)e^{-x^2/2\sigma^2}$$

con energía

$$E_{ex} = (3+\tfrac{1}{2})\hbar\omega_0 = \tfrac{7}{2}\hbar\omega_0.$$

De esto se deduce fácilmente que la proporción de la energía del primer estado excitado a la del estado fundamental o base es

$$\frac{E_{ex}}{E_{gs}} = \frac{\frac{7}{2}\hbar\omega_0}{\frac{3}{2}\hbar\omega_0} = \frac{7}{3}.$$

CALCULE

La energía del estado fundamental fue proporcionada en el problema como 3.5 eV, así que encontramos que

$$E_{ex} = \tfrac{7}{3}E_{gs} = \tfrac{7}{3}\cdot 3.5 \text{ eV} = 8.1666666 \text{ eV}.$$

REDONDEE

Redondeamos los dos dígitos significativos para los cuales se dio la energía del estado fundamental en el problema y establecemos nuestra respuesta final como

$$E_{ex} = 8.2 \text{ eV}.$$

VUELVA A REVISAR

Para funciones de onda de osciladores es característico que la diferencia de energía entre estados de energía adyacentes sea constante. Esto también es pertinente para el caso presente, en el que solamente las funciones de ondas de osciladores de paridad impar son soluciones válidas. Si se tuviera que calcular la energía del segundo estado excitado, entonces se encontraría un valor de $\frac{11}{3}E_{gs}$ = 12.8 eV.

PREGUNTAS DE OPCIÓN MÚLTIPLE

37.1 La longitud de onda de un electrón en un potencial infinito es $\alpha/2$, donde α es el ancho del pozo de potencial infinito. ¿En qué estado se encuentra el electrón?

a) $n = 3$ *c*) $n = 4$
b) $n = 6$ *d*) $n = 2$

37.2 En un pozo cuadrado infinito, ¿para cuál de los siguientes estados nunca se encontrará la partícula en el centro exacto del pozo?

a) El estado fundamental. *d*) Cualquiera de los mencionados.
b) El primer estado excitado. *e*) ninguno de los anteriores
c) El segundo estado excitado.

37.3 La probabilidad de encontrar un electrón en un átomo de hidrógeno es directamente proporcional a

a) su energía,
b) su cantidad de movimiento,
c) su función de onda,
d) el cuadrado de su función de onda,
e) el producto de la coordenada de posición y el cuadrado de la función de onda,
f) ninguno de éstos.

37.4 ¿Es la superposición de dos funciones de onda, que son soluciones de la ecuación de Schrödinger para la misma energía potencial, también una solución para la ecuación de Schrödinger?

a) No.
b) Sí.
c) Depende de la energía potencial.
d) Sólo si $\dfrac{d^2\psi(x)}{dx^2} = 0$

37.5 Suponga que κ es la magnitud del número de ondas de una partícula moviéndose en una dirección con la velocidad v. Si la velocidad de la partícula se duplica a $2v$, entonces el número de ondas es:

a) κ *c*) $\kappa/2$
b) 2κ *d*) ninguno de éstos.

37.6 Un electrón está en un pozo cuadrado infinito de ancho a: ($U(x) = \infty$ para $x < 0$ y $x > a$). Si el electrón está en el primer estado excitado, $\Psi(x) = A \operatorname{sen}(2\pi x/a)$, ¿en qué posición es la función de probabilidad máxima?

a) 0 *c*) $a/2$ *e*) en ambas $a/4$ y $3a/4$
b) $a/4$ *d*) $3a/4$

37.7 Decida si cada una de las siguientes declaraciones es verídica o falsa.

a) La energía de electrones siempre es discreta.

b) La energía de un electrón ligado es continua.

c) La energía de un electrón libre es discreta.

d) La energía de un electrón es discreta cuando está ligado a un ion.

37.8 Decida si cada una de las siguientes declaraciones es verídica o falsa.

a) En un oscilador armónico cuántico unidimensional, los niveles de energía están igualmente espaciados.

b) En un pozo de potencial infinito unidimensional, los niveles de energía están igualmente espaciados.

c) La mínima energía total posible para un oscilador armónico clásico es cero.

d) El principio de correspondencia declara que puesto que la mínima energía total posible para el oscilador armónico simple clásico es cero, el valor esperado para el estado fundamental ($n = 0$) del oscilador armónico cuántico unidimensional también deberá ser cero.

e) El estado $n = 0$ del oscilador armónico cuántico unidimensional es el estado con la mínima incertidumbre posible $\Delta x \Delta p$.

37.9 La oscilación armónica simple ocurre cuando la función de energía potencial es igual a $(1/2)kx^2$, donde k es una constante. ¿Qué pasa con el nivel de energía del estado fundamental o base si k es incrementado?

a) Incrementa.

b) Permanece igual.

c) Disminuye.

37.10 Una partícula de energía $E = 5$ eV se acerca a una barrera de una altura de $U = 8$ eV. Desde el punto de vista de la mecánica cuántica hay una posibilidad finita de que la partícula se abra un túnel a través de la barrera. Si la altura de la barrera se reduce lentamente, la probabilidad de que la partícula se refleje desde la barrera

a) se reduce, *b*) incrementa, *c*) no cambia.

PREGUNTAS

37.11 Verdadero o falso: entre más grande es la amplitud de una función de onda de Schrödinger, más grande es la energía cinética. Explique su respuesta.

37.12 Para una partícula atrapada en un pozo de potencial infinito de longitud L, ¿qué pasa con la probabilidad de que la partícula se encuentre entre 0 y $L/2$ conforme se incrementa la energía de la partícula?

37.13 Piense sobre lo que pasa a las funciones de onda de un pozo cuadrado infinito conforme el número cuántico n se acerca al infinito. ¿Obedece la distribución de probabilidad en ese límite el principio de correspondencia? Explique.

37.14 Demuestre mediante argumentos de simetría que el valor esperado de la cantidad de movimiento para un estado de n par del oscilador armónico unidimensional es cero.

37.15 ¿Es posible que el valor esperado de la posición de un electrón ocurra en una posición en la que la función de probabilidad del electrón, $\Pi(x)$, es cero? Si es posible, dé un ejemplo específico.

37.16 Esboce las dos funciones de ondas de energía más baja para un electrón en un pozo de potencial infinito con un ancho de 20 nm y un pozo de potencial finito con una profundidad de 1 eV y también con un ancho de 20 nm. Utilizando sus esbozos, ¿puede usted determinar si los niveles de energía en el pozo de potencial finito serán más bajos, iguales o más altos que en el pozo de potencial infinito?

37.17 En los núcleos de estrellas enanas blancas se piensa que núcleos de carbono están encerrados en mallas muy ordenadas porque la temperatura es bastante baja: $\sim 10^4$ K. Considere el caso de una malla unidimensional de átomos de carbono separados por 20 fm (1 fm = $1 \cdot 10^{-15}$ m). Considere el átomo central de una hilera de tres átomos con este espacio. Aproxime los potenciales de Coulomb de los dos átomos exteriores para que sigan una relación cuadrada, suponiendo pequeñas vibraciones; ¿en qué estado de energía estaría el átomo central a esta temperatura? (Utilice $E = 3/2k_B T$.)

37.18 Para un pozo cuadrado finito, usted ha visto soluciones para energías de partículas mayores y menores que la profundidad del pozo. Demuestre que estas soluciones son iguales fuera del pozo si la energía de la partícula es igual a la profundidad del pozo. Explique su respuesta y la posible dificultad inherente.

37.19 Considere las energías permitidas para estados ligados de un medio oscilador armónico, a decir, un potencial que es

$$U(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}m\omega_0^2 x^2 \\ \infty \end{cases} \text{ para } \begin{cases} x > 0 \\ x \leq 0 \end{cases}.$$

Usando simples argumentos basados en las características de buenas funciones de onda, ¿cuáles son las energías permitidas para estados ligados en este potencial?

37.20 Suponga que $\psi(x)$ es una función de onda correctamente normalizada que describe el estado de un electrón. Considere una segunda función de onda, $\psi_{\text{nueva}}(x) = e^{i\phi}\psi(x)$, para algún número real ϕ. ¿Cómo se compara la densidad de probabilidad asociada con ψ_{nueva} con ψ?

37.21 La energía del estado base de una partícula de masa m con la energía potencial $U(x) = U_0 \cosh(x/a)$, donde U_0 y a son constantes. Demuestre que el estado base de la partícula se puede *estimar* como:

$$E_0 \cong U_0 + \frac{1}{2}\hbar\left(\frac{U_0}{ma^2}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

37.22 La ecuación de Schrödinger para una partícula libre no relativista de masa m se obtiene de la relación de energía $E = p^2/(2m)$ mediante la sustitución de E y p por apropiados operadores de derivada, como lo sugieren las relaciones de De Broglie. Usando este procedimiento, deduzca una ecuación de onda cuántica para una partícula *relativista* de masa m, cuya relación de energía es $E^2 - p^2c^2 = m^2c^4$, *sin* tomar ninguna raíz cuadrada de esta relación.

PROBLEMAS

Una • y dos •• indican un nivel mayor de dificultad del problema.

Sección 37.1

37.23 Un neutrón tiene una energía cinética de 10.0 MeV. ¿Qué tamaño de objeto es necesario para observar efectos de difracción del neutrón? ¿Existe algo en la naturaleza de este tamaño que podría servir como objetivo para demostrar la naturaleza ondulatoria del neutrón de 10.0 MeV?

37.24 Dada la función compleja $f(x) = (8 + 3i) + (7 - 2i)$ de la variable real x, ¿qué es $|f(x)|^2$?

Sección 37.3

37.25 Determine las dos energías más bajas de la función de onda de un electrón en una caja con un ancho de $2.0 \cdot 10^{-9}$ m.

37.26 Determine las tres energías más bajas de la función de onda de un electrón en una caja con un ancho de $1.0 \cdot 10^{-10}$ m.

37.27 ¿Cuál es la proporción de la diferencia de energía entre el estado base y el primer estado excitado para un pozo cuadrado infinito de una longitud L con el de uno de longitud $2L$? Es decir, busque $(E_2 - E_1)_L/(E_2 - E_1)_{2L}$.

•**37.28** Un electrón está confinado en un pozo de potencial infinito unidimensional de 1.0 nm. Calcule la diferencia de energía entre

a) el segundo estado excitado y el estado base y

b) la longitud de onda de la luz emitida por esta transición radiactiva.

•**37.29** Busque la función de onda para una partícula en un pozo cuadrado infinito centrado en el origen. Las paredes están en $\pm a/2$ en lugar de 0 y a.

•**37.30** El ejemplo 37.1 calcula la energía de la función de onda con el número cuántico más bajo para un electrón confinado a una caja de ancho 2.00 Å en el caso unidimensional. Sin embargo, los átomos son entidades *tridimensionales* con un diámetro típico de 1.00 Å = 10^{-10} m. Parecería entonces que la siguiente y mejor aproximación sería la de un electrón atrapado en un pozo de potencial infinito tridimensional (un cubo de potencial con lados de 1.00 Å).

a) Deduzca una expresión para la función de onda del electrón y las energías correspondientes para una partícula en un pozo de potencial rectangular tridimensional.

b) Calcule la energía más baja permitida para el electrón en este caso.

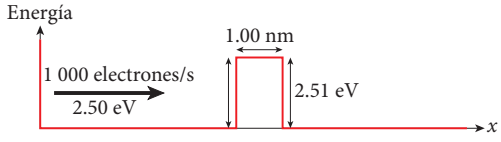
Sección 37.4

37.31 Un electrón está confinado en un pozo de potencial con la forma que muestra la figura 37.10. El ancho del pozo es $1.0 \cdot 10^{-9}$ m y $U_1 = 2.0$ eV. ¿Está el estado de $n = 3$ ligado en el pozo?

37.32 Si un protón de energía cinética 18.0 MeV encuentra una barrera de energía potencial rectangular de una altura de 29.8 MeV y un ancho de $1.00 \cdot 10^{-15}$ m, ¿cuál es la probabilidad de que el protón abrirá un túnel a través de la barrera?

•**37.33** Suponga que la energía cinética del neutrón que se describe en el ejemplo 37.4 es incrementada en 15%. ¿Por qué factor aumenta la probabilidad de que el neutrón se abra un túnel a través de la barrera?

•**37.34** Un haz de electrones moviéndose en la dirección x positiva encuentra una barrera de potencial con una altura de 2.51 eV y un ancho de 1.00 nm. Cada electrón tiene una energía cinética de 2.50 eV, y los electrones llegan a la barrera a una razón de 1 000. electrones/s (1 000. electrones cada segundo). ¿Cuál es, en promedio, la razón I_T en electrones/s con la que los electrones pasan a través de la barrera? ¿Cuál es, en promedio, la razón I_R en electrones/s con la que electrones rebotan de la barrera? Determine y compare las longitudes de onda de los electrones antes y después de que pasan a través de la barrera.



•**37.35** Considere un electrón que se acerca a una barrera de potencial de 2.00 nm de ancho y 7.00 eV de altura. ¿Cuál es la energía del electrón si tiene un 10.0% de probabilidad de abrir un túnel a través de esta barrera?

•**37.36** Considere un electrón en una caja tridimensional —con paredes de potencial infinitas— de dimensiones 1.00 nm × 2.00 nm × 3.00 nm. Encuentre los números cuánticos n_x, n_y, n_z y las energías en eV de los seis niveles de energía más bajos. ¿Alguno de estos niveles está degenerado?, es decir, ¿algunos estados cuánticos distintos tienen energías idénticas?

•**37.37** En un microscopio de escáner de efecto túnel, la probabilidad de que un electrón de la sonda abrirá un túnel a través de un hueco de 0.100 nm es 0.1%. Calcule la función de trabajo de la sonda del microscopio de escáner de efecto túnel.

••**37.38** Considere un potencial atractivo de pozo cuadrado, $U(x) = 0$ para $x < -\alpha$, $U(x) = -U_0$ para $-\alpha \le x \le \alpha$ donde U_0 es una constante positiva, y $U(x) = 0$ para $x > \alpha$. Para $E > 0$, la solución de la ecuación de Schrödinger en las 3 regiones será la siguiente:

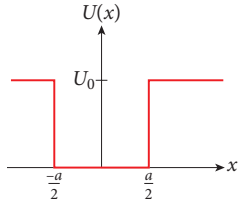
Para $x < -\alpha$, $\psi(x) = e^{i\kappa x} + Re^{-i\kappa x}$ donde $\kappa^2 = 2mE/\hbar^2$ y R es la amplitud de una onda reflejada.

Para $-\alpha \le x \le \alpha$, $\psi(x) = Ae^{i\kappa' x} + Be^{-i\kappa' x}$ y $(\kappa')^2 = 2m(E + U_0)/\hbar^2$.

Para $x > \alpha$, $\psi(x) = Te^{i\kappa x}$ donde T es la amplitud de la onda transmitida.

Iguale $\psi(x)$ y $d\psi(x)/dx$ en $-\alpha$ y α y encuentre una expresión para R. ¿Cuál es la condición para la que $R = 0$ (es decir, no hay onda reflejada)?

••**37.39** *a*) Determine la función de onda y los niveles de energía para los estados ligados de un electrón en el pozo de potencial simétrico y unidimensional de profundidad finita que se presenta en la figura.



b) Si la distancia de penetración η en la región clásicamente prohibida es definida como la distancia a la que la función de onda se reduce a $1/e$ de este valor en el borde del pozo, determine una expresión para esta distancia de penetración.

c) Los electrones en un diodo láser GaAs-GaAlAs de un pozo cuántico están confinados a un pozo cuántico unidimensional como el de la figura, con un ancho de 1 nm y una profundidad de 0.300 eV. Soluciones numéricas de la ecuación de Schrödinger demuestran que sólo hay un estado ligado posible para los electrones en este caso, con una energía de 0.125 eV. Calcule la profundidad de penetración en este caso.

Sección 37.5

37.40 Una molécula de oxígeno tiene un modo de vibración que se comporta aproximadamente como un oscilador armónico sencillo con una frecuencia de $2.99 \cdot 10^{14}$ rad/s. Calcule la energía del estado base y los primeros dos estados excitados.

37.41 Un electrón en un pozo de potencial armónico emite un fotón con una longitud de onda de 360 nm mientras sufre un salto cuántico de $3 \rightarrow 1$. ¿Qué fotón de longitud de onda se emite en un salto cuántico de $3 \rightarrow 2$? (*Sugerencia*: La energía del fotón es igual a la diferencia de energía entre el estado inicial y final del electrón.)

37.42 Una medición experimental de los niveles de energía de una molécula de hidrógeno, H_2, muestra que los niveles de energía están igualmente espaciados y separados por aproximadamente $9 \cdot 10^{-20}$ J. Un modelo razonable de uno de los átomos de hidrógeno pareciera entonces ser el de un átomo de hidrógeno en un simple potencial de un oscilador armónico. Suponiendo que el átomo de hidrógeno está sujetado a la molécula mediante un resorte con una constante elástica k, ¿qué es la constante elástica k?

•**37.43** Calcule la energía del estado base para un electrón restringido en un cubo con lados iguales al radio de Bohr ($R = 0.0529$ nm). Determine la constante elástica que daría esta misma energía del estado base para un oscilador armónico.

•**37.44** Una partícula en el potencial del oscilador armónico tiene la función de onda inicial $\Psi(x,0) = A\,[\Psi_0(x) + \Psi_1(x)]$. Normalice $\Psi(x,0)$.

•**37.45** La función de onda del estado base para un oscilador armónico es dada por $\Psi_0(x) = A_2 e^{-x^2/2b^2}$.

a) Determine la constante de normalización A_2.

b) Determine la probabilidad de que un oscilador armónico cuántico en el estado $n = 0$ se encuentre en la región clásicamente prohibida.

Sección 37.6

37.46 Una partícula se encuentra en un pozo cuadrado infinito de ancho L y está en el estado $n = 3$. ¿Cuál es la probabilidad de que, cuando se observa, la partícula se encuentre a 10.0% de la extrema derecha del pozo?

37.47 Un electrón está confinado entre $x = 0$ y $x = L$. La función de onda del electrón es $\psi(x) = A\text{sen}(2\pi x/L)$. La función es cero para las regiones $x < 0$ y $x > L$.

a) Determine la constante de normalización A.

b) ¿Cuál es la probabilidad de encontrar el electrón en la región $0 \le x \le L/3$?

37.48 Encuentre la probabilidad de encontrar un electrón atrapado en un pozo unidimensional infinito de ancho 2.00 nm en el estado $n = 2$ entre 0.800 y 0.900 nm (suponga que el borde izquierdo del pozo está en $x = 0$ y el borde derecho en $x = 2$ nm).

•**37.49** Un electrón está atrapado en un pozo de potencial infinito y unidimensional de ancho L = 300. pm. ¿Cuál es la probabilidad de que se pueda detectar el electrón en el primer estado excitado en un intervalo entre $x = 0.500\,L$ y $x = 0.750\,L$?

Sección 37.8

•**37.50** Busque la incertidumbre de x para una función de onda $\Psi(x,t) = Ae^{-\lambda x^2} e^{-i\omega t}$.

•**37.51** Escriba una función de onda plana $\psi(\vec{r},t)$ para una partícula libre no relativista de masa m, moviéndose en tres dimensiones con una cantidad de movimiento **p**, incluyendo la correcta dependencia del tiempo como lo requiere la ecuación de Schrödinger. ¿Cuál es la densidad de probabilidad asociada con esta onda?

•**37.52** Suponga que una partícula cuántica se encuentra en un estado estacionario (estado propio de energía) con una función de onda $\psi(x,t)$. El cálculo de $\langle x \rangle$, el valor esperado de la posición de la partícula, se muestra en el texto. Calcule $d\langle x \rangle/dt$ (**no** $\langle dx/dt \rangle$).

••**37.53** Aunque los sistemas cuánticos se caracterizan frecuentemente por sus estados estacionarios o estados propios de energía, no se requiere que una partícula cuántica se encuentre en uno de estos estados, a menos que su energía se haya medido. El estado real de la partícula es determinado por sus condiciones iniciales. Suponga que una partícula de masa m, en un pozo de potencial unidimensional con paredes infinitas (una "caja") de ancho a, realmente se encuentra en un estado con la función de onda

$$\Psi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2}}[\Psi_1(x,t) + \Psi_2(x,t)],$$

donde Ψ_1 denota el estado estacionario con el número cuántico $n = 1$ y Ψ_2 denota el estado con $n = 2$. Calcule la distribución de densidad de probabilidad para la posición x de la partícula en este estado.

Sección 37.10

37.54 En el capítulo 40 veremos que una reacción de fusión nuclear entre dos protones (creando un deuterón, un antielectrón y un neutrino) libera 0.42 MeV de energía. La fusión nuclear es lo que causa que brillen las estrellas, y sabemos que si podemos emplearla podemos resolver los problemas de energía del mundo por completo. Compare la cantidad de energía con la que se liberaría mediante la aniquilación de un protón y un antiprotón.

37.55 Pares de partícula-antipartícula se crean ocasionalmente desde el espacio vacío. Si se considera la incertidumbre de energía-tiempo, ¿cuál sería el valor esperado de existencia de estas partículas si son:

a) un par electrón/positrón?

b) un par protón/antiprotón?

37.56 Un positrón y un electrón se aniquilan, produciendo dos rayos gamma de 2.0 MeV que se mueven en direcciones

opuestas. Calcule la energía cinética del electrón cuando la energía cinética del positrón es el doble de la del electrón.

Problemas adicionales

37.57 ¿Cuánta energía se requiere para promover el electrón que se describe en el ejemplo 37.1 a su primer estado excitado?

37.58 Electrones de un microscopio de escáner de efecto túnel encuentran una barrera de potencial que tiene una altura de $U = 4.0$ eV arriba de su energía total. ¿Por qué factor cambia la corriente del efecto túnel si la punta se aleja una distancia neta de 0.10 nm de la superficie?

37.59 Un electrón está confinado en un espacio cúbico tridimensional de L^3 con potenciales infinitos.

a) Escriba la solución normalizada de la función de onda en el estado fundamental.

b) ¿Cuántos estados de energía están disponibles hasta el segundo estado excitado desde el estado fundamental? (Tome en cuenta el espín del electrón.)

37.60 Un oscilador armónico de masa y resorte que se utiliza para demostraciones de salón de clase tiene la frecuencia angular $\omega_0 = 4.45\ s^{-1}$. Si este oscilador está oscilando con la energía total (cinética más potencial) $E = 1.00$ J, ¿cuál es el correspondiente número cuántico de excitación n?

37.61 Calcule la energía del primer estado excitado de un protón en un pozo de potencial infinito y unidimensional de ancho $\alpha = 1.00$ nm.

37.62 Una partícula alfa de 5.6 MeV dentro de un núcleo pesado encuentra una barrera de una altura media de 17 MeV y un ancho de 38 fm ($1\ fm = 1 \cdot 10^{-15}$ m). ¿Cuál es la probabilidad de que esta partícula alfa abrirá un túnel a través de la barrera?

37.63 Los neutrones en un haz paralelo, cada uno con la energía cinética de 1/40 eV (que corresponde aproximadamente a la "temperatura ambiental"), se dirigen a través de dos ranuras que están separadas en 0.50 mm. ¿A qué distancia estarán los picos de interferencia en una pantalla a 1.5 m?

37.64 Busque la energía del estado base (en unidades de eV) de un electrón en una caja cuántica unidimensional, si la caja tiene una longitud $L = 0.100$ nm.

37.65 Un pozo cuántico aproximado unidimensional puede formarse al rodear una capa de GaAs con capas de $Al_xGa_{1-x}As$. Las capas de GaAs pueden ser fabricadas en espesores que son múltiplos enteros del espesor de una sola capa de 0.28 nm. Algunos electrones en la capa de GaAs se comportan como si estuvieran atrapados en una caja. Por motivos de simplificación, trate la caja como un pozo infinito unidimensional e ignore las interacciones entre los electrones y los átomos Ga y As (estas interacciones se explican a menudo reemplazando la masa real de electrones con una masa de electrones efectiva). Calcule la energía del estado base en este pozo para los siguientes casos:

a) 2 capas de GaAs,

b) 5 capas de GaAs.

37.66 Considere una molécula de vapor de agua en una habitación de 4.00 m × 10.0 m × 10.0 m.

a) ¿Cuál es la energía del estado base de esta molécula si se trata como una simple partícula en una caja?

b) Compare esta energía con la energía térmica media de este tipo de molécula, suponiendo que la temperatura es 300. K.

c) ¿Qué puede usted concluir de los dos números que acaba de calcular?

37.67 Un neutrón se mueve entre paredes rígidas que se encuentran 8.4 fm separadas. ¿Cuál es la energía de este estado fundamental?

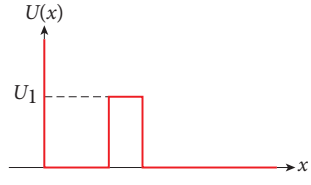
•**37.68** Una superficie es examinada mediante un microscopio de escáner de efecto túnel (STM). Para el rango del espacio de trabajo, L, entre la punta y la superficie de muestra, suponga que la función de onda del electrón para los átomos bajo investigación disminuye exponencialmente como $|\Psi| = e^{-(10.0\ nm^{-1})a}$. La corriente de efecto túnel a través de la punta del STM es proporcional a la probabilidad del efecto túnel. En esta situación, ¿cuál es la proporción de la corriente cuando la punta del STM es 0.400 nm arriba de una superficie característica, a la corriente cuando la punta está 0.420 nm arriba de la superficie?

•**37.69** Un electrón está atrapado en un pozo infinito unidimensional con un ancho de 2.00 nm. Comienza en el estado $n = 4$ y luego pasa al estado $n = 2$, emitiendo radiación con una energía correspondiente a la diferencia de energía en los dos estados. ¿Cuál es la longitud de onda de la radiación?

•**37.70** Dos alambres largos y rectos que se encuentran a lo largo de la misma línea tienen una separación en sus puntas de 2.00 nm. La energía potencial de un electrón en el hueco es aproximadamente 1.00 eV más alta que en la banda de conducción de los dos alambres. Electrones de bandas de conducción tienen suficiente energía para contribuir a la corriente que fluye en el alambre. ¿Cuál es la probabilidad de que un electrón de conducción en un alambre se encuentre en el otro después de llegar al hueco?

•**37.71** Considere un electrón que está restringido en un pozo de potencial infinito y unidimensional de ancho $a = 0.10$ nm, y otro electrón que está restringido en un pozo de potencial infinito a un cubo tridimensional con lados de longitud $a = 0.10$ nm. Suponga que el electrón restringido al cubo está en su estado base. Determine la diferencia de energía y el estado de excitación del electrón unidimensional que minimiza la diferencia de energía con el electrón tridimensional.

•**37.72** Un electrón con una energía de 129 KeV está atrapado en un pozo de potencial definido por un potencial infinito en $x < 0$ y una barrera de potencial de altura finita U_1 que se extiende desde $x = 529.2$ fm hasta $x = 2\ 116.8$ fm ($1\ fm = 1 \cdot 10^{-15}$ m) tal como se muestra en la figura. Se descubre que el electrón se puede detectar fuera del potencial, bastante más allá de la barrera, con una probabilidad de 10%. Calcule la altura de la barrera de potencial.



•**37.73** Considere un electrón que está confinado en el plano xy por medio de un pozo de potencial infinito rectangular y bidimensional. El ancho del pozo es w en la dirección x y $2w$ en la dirección y. ¿Cuál es la energía más baja que es compartida por más de un estado distinto; es decir, donde dos estados diferentes tienen la misma energía?

38 Física atómica

FIGURA 38.1 Un láser de sodio (la línea amarilla casi vertical) es disparado al cielo nocturno para proporcionar una estrella guía láser para la óptica adaptativa de los telescopios del Keck Observatory en Mauna Kea, Hawai. La exposición larga de la fotografía hace que las estrellas aparezcan como líneas (muy levemente) curvadas.

LO QUE APRENDEREMOS 1252

38.1 Líneas espectrales 1252
Ejemplo 38.1 Líneas espectrales 1254
38.2 El modelo del átomo de Bohr 1255
Cuantización de la cantidad de movimiento angular orbital 1256
Líneas espectrales en el modelo de Bohr 1257
38.3 Función de onda del electrón de hidrógeno 1258
Soluciones esféricamente simétricas 1259
Ejemplo 38.2 Normalización de la función de onda del hidrógeno 1260
Cantidad de movimiento angular 1261
Solución completa 1262
38.4 Otros átomos 1270
Ejemplo 38.3 Energía de ionización del átomo de helio 1274
Producción de rayos X 1275
38.5 Láseres 1276
Emisión estimulada e inversión de población 1277
Ejemplo 38.4 Número de fotones de un láser de rubí pulsante 1278
Investigación con láseres 1279

LO QUE HEMOS APRENDIDO/ GUÍA DE ESTUDIO PARA EXAMEN 1280

Práctica para resolución de problemas 1281
Problema resuelto 38.1 "Serie de Paschen" para litio doblemente ionizado 1281
Preguntas de opción múltiple 1283
Preguntas 1283
Problemas 1284

LO QUE APRENDEREMOS

- Las líneas delgadas que se observan en los espectros de algunos átomos resultan de las transiciones de electrones de un estado a otro.
- El modelo de Bohr del átomo, que está basado en una condición de cuantización para la cantidad de movimiento angular, fue un éxito temprano en la explicación de los espectros de líneas en el hidrógeno. Los radios orbitales tanto para los electrones como para los niveles de energía obtenidos en el modelo de Bohr son físicamente correctos. Sin embargo, el modelo de Bohr no obtiene los valores correctos de los números cuánticos y es, por lo tanto, intrínsecamente defectuoso.
- Para ir más allá del modelo de Bohr y resolver las funciones de onda del electrón correctas del átomo de hidrógeno, se tiene que resolver la ecuación de Schrödinger para los electrones en el potencial de Coulomb del núcleo.
- La solución completa de la ecuación de Schrödinger para el átomo de hidrógeno es el producto de la parte angular y la parte radial. Los números cuánticos de estas soluciones son: el número cuántico radial $n = 1,2,3, ...$; el número cuántico de la cantidad de movimiento angular orbital $\ell = 0,1, ..., n - 1$; y el número cuántico magnético $m = -\ell, ..., \ell$.
- Las funciones de ondas en otros átomos se pueden entender en una forma similar a las funciones de ondas del hidrógeno. El principio de exclusión de Pauli requiere que cada posible estado esté ocupado por un máximo de dos electrones, uno con espín abajo y uno con espín arriba.
- Los láseres funcionan sobre la base de la inversión de población, en la que electrones se elevan a un estado metaestable y se estimulan posteriormente para emitir fotones cuando los electrones hacen transiciones entre el estado metaestable y el estado base.

Los láseres fueron desarrollados hace menos de 50 años, pero se han vuelto comunes en muchas áreas de la vida cotidiana. Se ven en reproductores de blu-ray, DVD y CD, en lectores de códigos de barra en tiendas, incluso en espectáculos de luz en conciertos de rock y otros eventos. También tienen aplicaciones importantes en las ciencias, como en la astronomía. Observatorios disparan rayos láser al cielo (figura 38.1) y ven cómo la luz es distorsionada por perturbaciones atmosféricas. Luego, las computadoras pueden retroalimentar estas informaciones a espejos adaptativos que tienen secciones móviles que compensan el movimiento atmosférico, produciendo imágenes estables y nítidas.

Los láseres funcionan mediante la producción de fotones de luz conforme se mueven electrones entre niveles de energía en átomos, tema que estudiaremos en este capítulo. El concepto de niveles de energía atómica fue parte del modelo de Bohr del átomo, que fue uno de los intentos más tempranos de aplicar ideas cuánticas a la estructura atómica. Sin embargo, a pesar de su éxito extraordinario, el modelo de Bohr no explicó por completo cómo partículas funcionan juntas dentro de átomos; esta explicación requiere la aplicación de la mecánica cuántica del capítulo 37. Presentaremos un resumen general de esta aplicación, dejando a un lado gran parte de los detalles matemáticos, y luego mostraremos cómo los resultados subyacen bajo la operación de láseres y otros dispositivos modernos.

Los capítulos 36 y 37 estudiaron los fenómenos que se pueden explicar por la hipótesis de cuantificación, y hemos resuelto algunos sistemas sencillos siguiendo las leyes impuestas por la mecánica cuántica. Ahora que hemos adquirido por lo menos un entendimiento introductorio de la mecánica cuántica, tenemos las herramientas que nos permiten entender los átomos.

38.1 Líneas espectrales

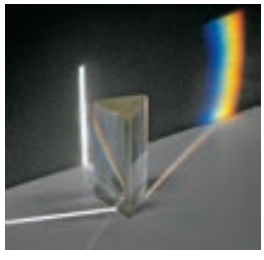


FIGURA 38.2 Un prisma descompone luz blanca en diferentes colores (longitudes de onda).

El capítulo 32 mostró que el índice de refracción de la luz en un prisma depende de la longitud de onda. La figura 38.2 muestra cómo luz blanca (entrando por el lado izquierdo) es dividida en sus diferentes longitudes de onda componentes por medio de un prisma, debido a la dependencia del índice de refracción sobre la longitud de onda.

Usando un prisma, se puede construir un **espectrómetro**. Este instrumento visualiza los componentes espectrales de la luz emitida por todo tipo de objetos. La figura 38.3 muestra un tipo de espectrómetro que a menudo se utiliza en laboratorios de física introductoria. Un brazo del espectrómetro apunta hacia una fuente de luz y proporciona un delgado rayo de luz estrechamente enfocado, que da al prisma central y luego es descompuesto en forma espectral. El otro brazo del espectrómetro contiene las lentes oculares y se usa para observaciones. Éste gira alrededor de un eje de pivote central ubicado debajo del centro del prisma. La idea principal para el uso del espectrómetro es que podamos medir el ángulo entre los dos brazos y determinar de

este modo el ángulo de deflexión de cada color. Al conocer el índice de refracción del prisma y usar la ley de Snell, un espectrómetro permite una determinación muy precisa de las longitudes de onda de la luz.

A finales del siglo XIX se utilizaban espectrómetros en muchos laboratorios para estudiar gases. La retención de gases en tubos de descarga eléctrica permitía a los investigadores enviar una corriente a través del tubo, causando que el gas emita luz. (La caja negra en la parte derecha de la figura 38.3 contiene el tubo de descarga eléctrica que brilla en color púrpura con su fuente de alimentación.) Por cierto, esta manera de generar luz es la base para la luz de neón.

Un espectrómetro apuntando hacia el Sol descompondrá la luz en forma espectral en un espectro como el que aparece en la figura 38.2, es decir, una matriz de diferentes colores. La medición de la intensidad o emisividad espectral de los diferentes colores de la luz del Sol hace posible medir la temperatura de su superficie, bajo la suposición de que emite un espectro de cuerpo opaco. No se necesita un espectrómetro caro para ver que el Sol emite un espectro amplio de todos los colores, un prisma de juguete infantil puede hacer esto.

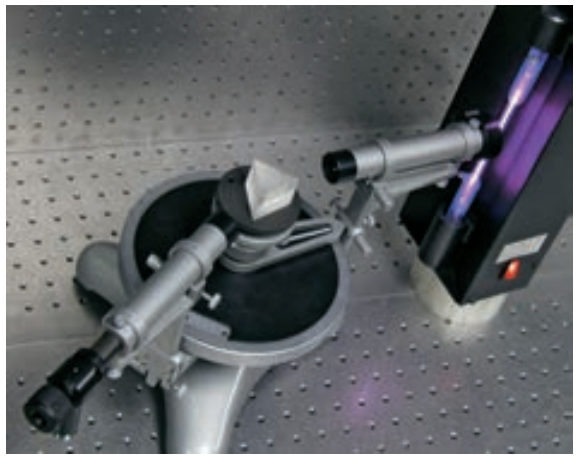


FIGURA 38.3 Espectrómetro con prisma.

Sin embargo, si usted apunta el espectrómetro a un tubo de descarga lleno de hidrógeno puro y mira el espectro emitido por este gas, le espera una enorme sorpresa. En lugar de un amplio espectro continuo, usted encontrará unas cuantas líneas delgadas de colores particulares. Cuando mucho se pueden ver cuatro líneas: rojo (longitud de onda 656 nm, lo que históricamente también se llama H-alfa), verde azulado (longitud de onda 486 nm, H-beta), azul oscuro (434 nm, H-gamma) y finalmente violeta (410 nm, H-delta). Otras líneas discretas aparecen en el espectro del hidrógeno, pero se encuentran fuera del rango de longitudes de onda accesibles por el ojo humano no asistido. Aun así es posible determinar las longitudes de onda de estas otras líneas espectrales, y esto se hizo con bastante buena precisión en el siglo XIX. La parte inferior de la figura 38.4 ilustra dónde se ubican las líneas de hidrógeno como función de su longitud de onda λ. Se muestran las cuatro líneas visibles en sus propios colores. Además, las líneas invisibles están indicadas por líneas blancas delgadas. Estas líneas caen en distintos grupos, llamados por sus descubridores: las series Lyman, Balmer, Paschen y Brackett. (Otras series que no se muestran fueron descubiertas en longitudes de onda arriba de 2 000 nm.)

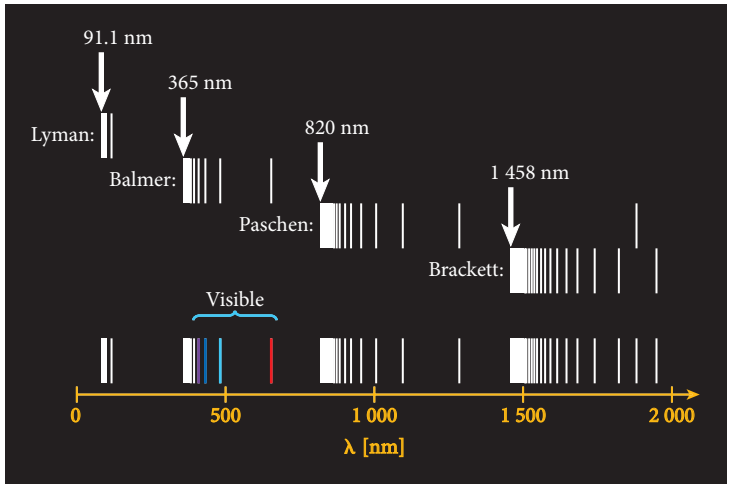


FIGURA 38.4 Líneas espectrales simuladas de hidrógeno en el espectrógrafo.

Basado puramente en el estudio de los patrones en los números para las longitudes de onda, el matemático y físico por afición Johann Balmer (1825-1898) encontró, en 1885, una fórmula empírica que pronosticaba las longitudes de onda en el grupo Balmer del espectro de hidrógeno:

$$\lambda = (364.56\ \text{nm})\frac{n^2}{n^2-4},\ n = 3,4,5,\ldots. \tag{38.1}$$

Tres años más tarde, el físico sueco Johannes Rydberg (1854-1919) fue capaz de generalizar la fórmula de Balmer de tal forma que también incluyó todas las demás series (Lyman, Paschen, Brackett, etc.) en el espectro del hidrógeno. La **fórmula de Rydberg** para la longitud de onda en el espectro de hidrógeno es

$$\frac{1}{\lambda} = R_H\left[\frac{1}{n_1^2}-\frac{1}{n_2^2}\right] \quad \text{con } n_1 < n_2. \tag{38.2}$$

Los números n_1 y n_2 son simples números enteros; R_H es la **constante de Rydberg** para hidrógeno y tiene la dimensión de la inversa de una longitud. El valor de R_H es

$$R_H = 1.097373\cdot 10^7\ \text{m}^{-1}.$$

Para $n_1 = 1$, $n_2 = 2,3,4, \ldots, \infty$ obtenemos las longitudes de onda de la serie de Lyman; para $n_1 = 2$, $n_2 = 3,4,5, \ldots, \infty$ obtenemos la serie de Balmer, y así sucesivamente.

EJEMPLO 38.1 Líneas espectrales

PROBLEMA

La figura 38.4 muestra las longitudes de onda de la línea a la extrema izquierda en cada una de las primeras cuatro series en el espectro de hidrógeno. ¿Cuáles son los valores correspondientes para las líneas de la extrema derecha en cada serie?

SOLUCIÓN

Las longitudes de onda de las líneas en el espectro de hidrógeno se describen mediante la fórmula de Rydberg (ecuación 38.2),

$$\frac{1}{\lambda} = R_H\left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2}\right).$$

Puesto que $n_1 < n_2$, el término $1/n_1^2$ siempre es mayor que $1/n_2^2$. Para un valor fijo dado de n_1, un valor creciente de n_2 significa la resta de un número más pequeño $1/n_2^2$ de $1/n_1^2$ y, por lo tanto, un incremento de $1/\lambda$. Por ende, la longitud de onda aumenta en forma monotónica con n_2 incrementando.

Ahora que entendemos esta dependencia, podemos ver que la longitud de onda de la extrema izquierda y, por ende, más pequeña en cada serie debe corresponder al valor más grande de n_2, que es $n_2 \sim \infty$. Ésta es también la razón por la que las líneas se vuelven tan densamente espaciadas en este extremo de la serie. Hay un número infinito de valores de n_2 con casi exactamente la misma longitud de onda.

Por el contrario, el valor de la extrema derecha y, por ende, más grande de la longitud de onda en cada serie debe corresponder al valor más pequeño posible de n_2 en cada serie. Puesto que tenemos la condición $n_1 < n_2$, este valor más pequeño posible es $n_{2,\text{mín}} = n_1 + 1$. Si insertamos esta condición, encontramos para la longitud de onda máxima en cada serie:

Serie de Lyman: $n_1 = 1,\ n_{2,\text{mín}} = 1+1 = 2 \Rightarrow \dfrac{1}{\lambda_{\text{máx}}} = R_H\left(1 - \dfrac{1}{4}\right) \Rightarrow \lambda_{\text{máx}} = 121.5 \text{ nm}$

Serie de Balmer: $n_1 = 2,\ n_{2,\text{mín}} = 2+1 = 3 \Rightarrow \dfrac{1}{\lambda_{\text{máx}}} = R_H\left(\dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{9}\right) \Rightarrow \lambda_{\text{máx}} = 656 \text{ nm}$

Serie de Paschen: $n_1 = 3,\ n_{2,\text{mín}} = 3+1 = 4 \Rightarrow \dfrac{1}{\lambda_{\text{máx}}} = R_H\left(\dfrac{1}{9} - \dfrac{1}{16}\right) \Rightarrow \lambda_{\text{máx}} = 1\,875 \text{ nm}$

Serie de Brackett: $n_1 = 4,\ n_{2,\text{mín}} = 4+1 = 5 \Rightarrow \dfrac{1}{\lambda_{\text{máx}}} = R_H\left(\dfrac{1}{16} - \dfrac{1}{25}\right) \Rightarrow \lambda_{\text{máx}} = 4\,050 \text{ nm}$

DISCUSIÓN

La longitud de onda máxima en la serie de Balmer corresponde a la línea roja H-alfa en el espectro visible y es, por lo tanto, probablemente la línea más prominente en todo el espectro del hidrógeno. Usted puede ver que los valores más altos de las longitudes de onda en cada una de las primeras dos series son más bajos que el valor más bajo en la siguiente serie más alta. Sin embargo, esto cambia en la serie de Paschen. Su línea de longitud de onda más larga tiene una longitud de onda de 1 875 nm, que es más grande que todas, excepto unas cuantas longitudes de onda en la serie de Brackett, que tiene su longitud de onda mínima en un valor de 1 458 nm. Las líneas con las longitudes de onda más altas en las series de Lyman, Balmer y Paschen se muestran en la figura 38.4, mientras que la longitud de onda más alta de la serie de Brackett se encuentra, por mucho, fuera del rango de longitudes de onda que se visualiza.

38.1 Oportunidad de autoevaluación

Obtenga los valores para las longitudes de onda mínimas en cada serie de líneas dadas en la figura 38.4.

38.1 Ejercicio en clase

El número de líneas en la serie de Brackett, con una longitud de onda mayor que la longitud de onda máxima en la serie de Paschen, es

a) 1. *d*) 8.

b) 2. *e*) ∞.

c) 4.

38.2 Oportunidad de autoevaluación

Deduzca la fórmula originalmente dada por Balmer para las longitudes de onda de la serie de Balmer (ecuación 38.1) a partir de la fórmula más general dada por Rydberg (ecuación 38.2).

Antes de continuar, vamos a hacer hincapié en el punto principal: el gas hidrógeno puede emitir luz cuando se excita, pero la luz no puede tener simplemente cualquier longitud de onda y sólo aparece en longitudes de onda bien definidas descritas por la fórmula de Rydberg. Los capítulos 36 y 37, en los que se discutió toda clase de fenómenos cuantizados, nos hizo buscar una explicación para la discretización del espectro de hidrógeno dentro de la mecánica cuántica. En la siguiente sección, analizamos la descripción cuántica de Bohr, que es valiosa por su profundidad, su significado histórico y su éxito limitado. Más adelante en este capítulo se presentará el análisis riguroso de mecánica cuántica del átomo de hidrógeno.

Otros elementos en su estado gaseoso también muestran **espectros de línea** similares con líneas discretas. En particular, algunos elementos (como litio o sodio) tienen espectros parecidos al hidrógeno en su estado gaseoso. No obstante, en general los espectros de línea de otros átomos son más complicados y el átomo de hidrógeno tiene el espectro más sencillo. Los espectros de línea característicos sirven como "huellas digitales" atómicas para detectar la presencia de elementos químicos específicos. Por ejemplo, los astrónomos usan esta técnica estándar cuando quieren determinar la composición elemental de estrellas.

38.2 El modelo del átomo de Bohr

Los átomos consisten en núcleos, que a su vez consisten en protones de carga positiva y neutrones sin carga, rodeados por electrones de carga negativa girando alrededor del núcleo y ligados a él mediante la interacción de Coulomb. En un átomo eléctricamente neutro, el número de protones es igual al número de electrones. La ionización de un átomo —es decir, la eliminación de uno o más electrones— causa que el ion restante se cargue positivamente. El tamaño normal de un átomo es del orden de $d \approx 10^{-10}$ m, y el tamaño normal del núcleo atómico es de un factor de 10 000 más chico. El hidrógeno —el elemento más abundante del universo— es también el átomo más simple en el universo que consiste únicamente en un protón en el núcleo central con un electrón que gira a su alrededor.

Hoy día es normal que los niños aprendan la mayoría de estos hechos sobre átomos en la escuela primaria. Sin embargo, a principios del siglo xx, el átomo fue territorio desconocido y no era para nada claro cuál era su estructura básica. Por ejemplo, un modelo posible de un átomo era el modelo del "pudín de ciruela". En este modelo, el átomo entero estuvo lleno de carga positiva, y los electrones estuvieron uniformemente distribuidos a través del volumen completo del átomo como las pasas en un pudín de ciruela. Sin embargo, los experimentos de dispersión de 1909 de Ernest Rutherford, Hans Geiger y Ernest Marsden fueron más claros y condujeron al modelo actualmente aceptado. La física del núcleo atómico se discutirá en los capítulos 39 y 40.

Después de los experimentos de Rutherford, los físicos creyeron que los electrones giran alrededor del núcleo, parecido a la forma en la que la Tierra y otros planetas giran alrededor del Sol. Analicemos lo que esto significa para el átomo más sencillo: hidrógeno. El capítulo 9 mostró que el movimiento en una órbita circular requiere una aceleración centrípeta constante. Debido a que la fuerza gravitacional que actúa sobre el electrón debido al núcleo es tan débil, la fuerza centrípeta es proporcionada por la fuerza de Coulomb (vea el capítulo 21). Esto nos lleva a

$$k\frac{e^2}{r^2} = \mu\frac{v^2}{r} \tag{38.3}$$

donde $k = 8.98755 \cdot 10^9$ N m^2/C^2 es la constante de Coulomb. Esta ecuación simplemente replantea la segunda ley de Newton, con la fuerza proporcionada por la fuerza de Coulomb y la aceleración como aceleración centrípeta.

Hace falta un comentario sobre la notación de μ para la masa. Hasta ahora hemos utilizado la letra m para la masa del electrón. Sin embargo, el electrón en un átomo de hidrógeno no se está moviendo alrededor del protón; en su lugar, ambos se mueven alrededor de un centro común de masa. Podemos incorporar este efecto mediante la introducción de la **masa reducida** μ como

$$\mu = \frac{mM}{m+M} \tag{38.4}$$

donde $m = 9.10938215(45) \cdot 10^{-31}$ kg es la masa del electrón y $M = 1.672621637(83) \cdot 10^{-27}$ kg es la masa del protón. Esta masa reducida tiene el valor numérico $\mu = 9.10442 \cdot 10^{-31}$ kg. Debido a que la masa del protón es 1 836 veces más grande que la masa del electrón, el término $M/(M + m)$ es muy cercano de 1 y, por lo tanto, $\mu \approx m$ a 1 parte en 2 000. En consecuencia, podríamos seguir usando la notación m para la masa en este caso, y esto sería suficiente para la mayoría de los propósitos. Sin embargo, a partir de ahora utilizaremos la masa reducida μ. Una ventaja de usar este μ correcto en nuestra formulación es que históricamente la gente ha introducido un número cuántico m en la solución para el problema de hidrógeno, y nosotros queremos evitar la confusión. Por ello, a partir de ahora μ significa la masa (reducida) del electrón y vamos a guardar la letra m para un uso posterior.

El cuadro clásico de un minisistema planetario de electrones en órbita alrededor de un núcleo central, que juega el papel del Sol en nuestro sistema solar, tiene un enorme atractivo y da pie a una

simetría entre el macrocosmos y el microcosmos que simplemente suena verosímil. Sin embargo, inmediatamente se encuentra un defecto conceptual fatal: una carga acelerada radia la energía hacia fuera. Un electrón que se mueve en una órbita circular clásica y experimenta una aceleración centrípeta constante pierde energía rápidamente y entra en el núcleo en forma de espiral, destruyendo de esta manera el átomo. Niels Bohr se dirigió a esta falla en 1913.

Cuantización de la cantidad de movimiento angular orbital

En 1913, el físico danés Niels Bohr (1885-1962) hizo una suposición *ad hoc* de que la cantidad de movimiento angular del electrón en su órbita alrededor del núcleo sólo puede asumir valores discretos. El capítulo 10 introdujo el vector de cantidad de movimiento angular de una partícula puntual como $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$. La idea de Bohr era la de requerir que las únicas órbitas del electrón estables posibles fueran aquellas con una cantidad de movimiento angular en múltiplos enteros de $\hbar$ (la constante de Planck dividida entre 2π):

$$L = |\vec{r} \times \vec{p}| = r\mu v = n\hbar, \text{ con } n = 1, 2, 3, ... \tag{38.5}$$

¿Por qué demandar esta condición? Dimensionalmente esto funciona porque tanto la cantidad de movimiento angular como la constante de Planck tienen unidades de kg m^2 s^{-1} = J s. Sin embargo, este factor solo no es suficiente. En la siguiente discusión, mostramos que la cuantización de la cantidad de movimiento angular también lleva a la cuantización de la energía. Además, si se cuantiza la energía del electrón, entonces el electrón no puede radiar arbitrariamente pequeñas cantidades de energía y entrar en espiral en el núcleo.

Primero resolveremos las consecuencias y predicciones del postulado de Bohr y luego regresaremos a la discusión sobre el significado del postulado y la validez del modelo. Para iniciar el cálculo para el **modelo del átomo de hidrógeno de Bohr**, empiece con la ecuación 38.3 para la fuerza centrípeta y multiplique ambos lados por un factor μr^3. Esto lleva a:

$$k\frac{e^2}{r^2} = \mu\frac{v^2}{r} \Rightarrow r\mu k e^2 = \mu^2 v^2 r^2.$$

Del lado derecho podemos ver ahora que $\mu^2 v^2 r^2$ es el cuadrado de la cantidad de movimiento angular. Al usar la condición de cuantización de Bohr (ecuación 38.5), esto es igual a $n^2\hbar^2$. Por lo tanto,

$$r\mu k e^2 = \mu^2 v^2 r^2 = n^2\hbar^2.$$

Resolver esto para el radio orbital r resulta en

$$r = \frac{\hbar^2}{\mu k e^2} n^2 \equiv a_0 n^2. \tag{38.6}$$

Esta ecuación nos da los radios permitidos en el modelo de Bohr para el átomo de hidrógeno. Ellos son proporcionales al cuadrado del número cuántico n, y la constante proporcional a_0 se llama **radio de Bohr**,

$$a_0 = \frac{\hbar^2}{\mu k e^2} = \frac{\left(1.05457 \cdot 10^{-34}\ \text{J s}\right)^2}{\left(9.10442 \cdot 10^{-31}\ \text{kg}\right)\left(8.98755 \cdot 10^{9}\ \text{N m}^2/\text{C}^2\right)\left(1.60218 \cdot 10^{-19}\ \text{C}\right)^2}$$

$$a_0 = 5.295 \cdot 10^{-11}\ \text{m} = 0.05295\ \text{nm} = 0.5295\ \text{Å}.$$

Aquí escribimos el radio de Bohr en unidades de nm así como la unidad Å, con 1 Å = 10^{-10} m = 0.1 nm. Si insertamos este resultado para el radio de Bohr nuevamente en la ecuación 38.3, encontramos para la velocidad v,

$$v = \sqrt{\frac{ke^2}{\mu a_0 n^2}} = \frac{1}{n}\sqrt{\frac{\left(8.988 \cdot 10^{9}\ \text{N m}^2/\text{C}^2\right)\left(1.602 \cdot 10^{-19}\ \text{C}\right)^2}{\left(9.104 \cdot 10^{-31}\ \text{kg}\right)\left(5.295 \cdot 10^{-11}\ \text{m}\right)}} = \frac{1}{n} 2.188 \cdot 10^{6}\ \text{m/s} = \frac{1}{n} 0.007297c.$$

Esta velocidad es 0.73% de la velocidad de la luz para n = 1 y decae monotónicamente para las órbitas más altas. Así, la aproximación no relativista que estamos usando es justificada. La energía total del electrón en órbita es la suma de su energía potencial y cinética,

$$E = \frac{1}{2}\mu v^2 - k\frac{e^2}{r} = -\frac{1}{2}k\frac{e^2}{r} = -\frac{1}{2}k\frac{e^2}{a_0 n^2} = -E_0\frac{1}{n^2}. \tag{38.7}$$

El segundo paso de esta ecuación utiliza el resultado general para el movimiento satelital (vea el capítulo 12) de que la energía cinética es exactamente la mitad de la magnitud de la energía potencial, así que la energía total es la mitad de la energía potencial. (A esta relación se le llama frecuentemente teorema del virial.) La constante E_0 puede calcularse mediante la inserción de los valores de las constantes

$$E_0 = \frac{ke^2}{2a_0} = \frac{\left(8.988\cdot10^9\ \text{N m}^2/\text{C}^2\right)\left(1.602\cdot10^{-19}\ \text{C}\right)^2}{2\left(5.295\cdot10^{-11}\ \text{m}\right)} = 2.18\cdot10^{-18}\,\text{J} = 13.6\ \text{eV}.$$

Por lo tanto, las energías permitidas para electrones en órbita alrededor del núcleo del átomo de hidrógeno son $E(n = 1) = -13.6$ eV, $E(n = 2) = -3.40$ eV, $E(n = 3) = -1.51$ eV, y así sucesivamente, acercándose a la energía cero desde abajo cuando $n \to \infty$. La combinación de las ecuaciones 38.6 y 38.7 da $E = -E_0a_0/r$. La figura 38.5 muestra E graficada *versus* r. En esta figura indicamos que sólo se permiten ciertos valores de E y r correspondientes a n, siendo un entero en las ecuaciones 38.6 y 38.7.

En muchos libros de texto se define el radio de Bohr en términos de la masa del electrón, m_e, en vez de la masa reducida μ, del electrón en el átomo de hidrógeno:

$$a_{0,m_e} = \frac{\hbar^2}{m_e ke^2}.$$

El radio de Bohr tiene el valor $a_{0,m_e} = 5.292\cdot10^{-11}$ m cuando se usa esta definición.

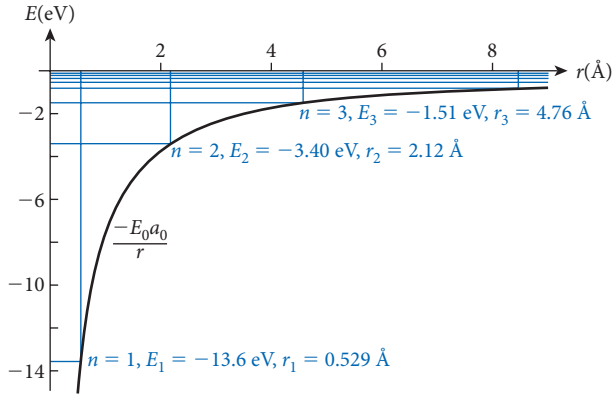


FIGURA 38.5 Energías y radios para órbitas de electrones permitidas en el modelo de hidrógeno de Bohr.

Líneas espectrales en el modelo de Bohr

En el modelo de Bohr, un electrón no puede radiar pequeñas cantidades de energía y así entrar en espiral en el núcleo debido a la condición para la cuantización de la cantidad de movimiento angular. Sin embargo, todavía se permiten transiciones entre estados. Bohr postulaba que un electrón en un estado de energía superior con el número cuántico n_2 podía "saltar" a un estado de energía inferior con el número cuántico n_1 y emitiría un fotón con una energía igual a la diferencia de las energías entre los dos estados. La energía del fotón se relaciona con su frecuencia vía la relación de Planck $E = hf$: $E_{n_2} = E_{n_1} + hf$. Para la luz, la frecuencia está relacionada a la longitud de onda vía $f = c/\lambda$, donde c es la velocidad de la luz, lo que da

$$E_{n_2} = E_{n_1} + \frac{hc}{\lambda}. \tag{38.8}$$

La fórmula para las energías (ecuación 38.7) nos da entonces

$$-\frac{ke^2}{2a_0}\frac{1}{n_2^2} = -\frac{ke^2}{2a_0}\frac{1}{n_1^2} + \frac{hc}{\lambda} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{ke^2}{2hca_0}\left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2}\right).$$

Esta ecuación es estructuralmente idéntica a la ecuación 38.2. Es más, el producto de las constantes en esta ecuación se evalúa a

$$\frac{ke^2}{2hca_0} = \frac{\left(8.988\cdot10^9\ \text{N m}^2/\text{C}^2\right)\left(1.602\cdot10^{-19}\ \text{C}\right)^2}{2\left(6.626\cdot10^{-34}\ \text{J s}\right)\left(2.998\cdot10^8\ \text{m/s}\right)\left(5.295\cdot10^{-11}\ \text{m}\right)} = 1.097\cdot10^7\ \text{m}^{-1}.$$

Esto concuerda con el valor de la constante de Rydberg que fue determinada, a partir de datos experimentales, a cuatro cifras significativas. Esto quiere decir que podemos identificar

$$R_\text{H} = \frac{ke^2}{2hca_0}.$$

Dado $a_0 = \hbar^2/\mu k e^2$, la constante de Rydberg también se puede escribir

$$R_H = \frac{ke^2}{2hc(\hbar^2/\mu k e^2)} = \frac{\mu k^2 e^4}{4\pi c \hbar^3}.$$

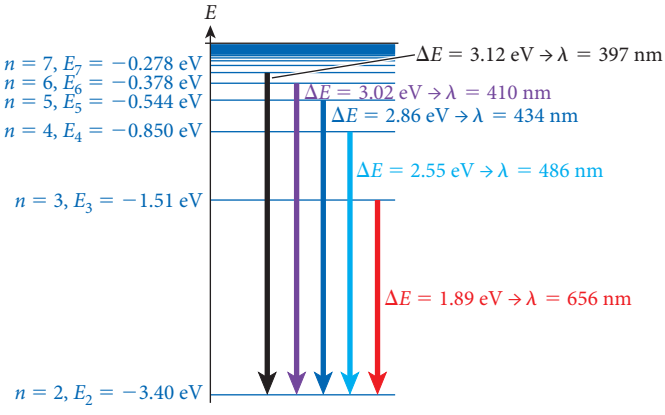


FIGURA 38.6 Las primeras pocas transiciones de electrones correspondientes a la serie de Balmer en hidrógeno.

En otras palabras, el modelo de Bohr es capaz de explicar la estructura del espectro de línea de hidrógeno y se puede usar para deducir el valor de la constante de Rydberg, experimentalmente encontrado, a partir de las constantes fundamentales de la masa del electrón m (contenida en la masa reducida μ), el cuanto de carga e, la constante de Planck h (igual a $2\pi\hbar$), la velocidad de la luz c y la constante de Coulomb k. Esto fue apropiadamente celebrado como un gran éxito y dio considerable crédito a la supuesta suposición *ad hoc* de una cantidad de movimiento angular cuantizada del electrón en su órbita alrededor del núcleo central. Las transiciones entre niveles de energía se pueden indicar en un **diagrama de niveles de energía**, tal como se presenta en la figura 38.6 para la serie de Balmer.

Sin embargo, en su centro, el modelo de Bohr supone que el electrón es una partícula puntual clásica. El modelo fue refinado en varias ocasiones, pero después de que Louis de Broglie postulara el comportamiento ondulatorio de la materia en 1923 (vea el capítulo 36) y Schrödinger publicara su ecuación de onda en 1926 (vea el capítulo 37), se hizo claro que el modelo de Bohr tenía que ser reemplazado por una teoría apropiada de mecánica cuántica del átomo de hidrógeno. Además de los problemas conceptuales de una partícula puntual clásica, el modelo de Bohr también era defectuoso porque postulaba una cantidad de movimiento angular de órbita de 1 $\hbar$ para el estado de energía más bajo —el estado base— del hidrógeno, en contradicción a la evidencia experimental que apunta a una cantidad de movimiento angular orbital de cero para este estado. No obstante, el modelo de Bohr es un primer intento muy instructivo para resolver el problema del hidrógeno, y su éxito impresionante en explicar espectros de línea insinúa que la verdadera solución para el átomo de hidrógeno debe de alguna manera estar cerca de lo que postula el modelo de Bohr.

38.3 Función de onda del electrón de hidrógeno

Si queremos mejorar el modelo de Bohr del átomo de hidrógeno, tenemos que regresar a lo que hemos aprendido en el capítulo 37 sobre la mecánica cuántica y resolver la ecuación de Schrödinger para el electrón en un potencial de Coulomb. Para encontrar los estados ligados del electrón, tenemos que resolver la ecuación independiente del tiempo de Schrödinger y encontrar los valores propios de energía E_n. Esperamos que nuestra solución se parezca a la ecuación 38.7, $E_n = -13.6/n^2$ eV, porque esta predicción del modelo de Bohr coincidía con los datos experimentales.

Una advertencia antes de que empecemos esta tarea: una parte de las matemáticas que está involucrada en la resolución de este problema es tediosa y quizá tan avanzada como cualquiera que presentamos. Éstas son las malas noticias. Las buenas noticias son que este problema es muy instructivo y nos permite tener un atisbo de muchas características profundas de la mecánica cuántica y de las maneras de iluminarlas. La matemática no será resuelta en todos sus detalles, y a veces simplemente se declarará el resultado de un cálculo. No se desaliente mientras estudiamos este sistema cuántico esencial. No sólo nos ayudará a entender el átomo de hidrógeno, sino que nos dará una comprensión completa de la tabla periódica de los elementos.

El potencial en la ecuación de Schrödinger es el potencial de Coulomb, $U(\vec{r}) = -ke^2/r$. Observe que este potencial depende solamente de la distancia radial al origen (donde se ubica el núcleo) y no de la dirección angular del electrón con relación al núcleo. El átomo de hidrógeno es un objeto en el mundo real y, por lo tanto, existe en el espacio tridimensional. Conforme al capítulo 37, la ecuación de Schrödinger en el espacio tridimensional se debe escribir como

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} - \frac{\hbar^2}{2\mu}\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} - \frac{\hbar^2}{2\mu}\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} + U\psi = -\frac{\hbar^2}{2\mu}\nabla^2\psi + U\psi = E\psi.$$

El operador laplaciano ∇^2 en coordenadas cartesianas es $\nabla^2 = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial z^2$. Este operador apareció en el capítulo 37 en la sección sobre pozos infinitos multidimensionales. Se trata

de una generalización al parecer sencilla de la segunda derivada d^2/dx^2, que aparece en la ecuación unidimensional de Schrödinger.

Ahora se tiene que elegir el sistema de coordenadas. El término de energía potencial U depende solamente de la coordenada radial r, así que es ventajoso usar las coordenadas esféricas r, θ, ϕ, como muestra la figura 38.7. Entonces la ecuación de Schrödinger se ve como

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu}\nabla^2\psi(r,\theta,\phi)-k\frac{e^2}{r}\psi(r,\theta,\phi)=E\psi(r,\theta,\phi), \tag{38.9}$$

donde el potencial de Coulomb se usa para el potencial U.

Sin embargo, en coordenadas esféricas se tiene que pagar un precio: el operador laplaciano se ve mucho más complicado:

$$\nabla^2\psi=\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\psi)+\frac{1}{r^2\,\mathrm{sen}\,\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\mathrm{sen}\,\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\psi\right]+\frac{1}{r^2\,\mathrm{sen}^2\,\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\psi. \tag{38.10}$$

¿Vale la pena esto? La respuesta ciertamente sería sí, si la función de onda no depende de las coordenadas angulares, sino sólo de la coordenada radial. Por lo tanto, intentamos primero este método y buscamos soluciones esféricamente simétricas.

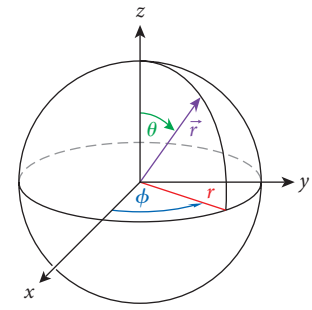


FIGURA 38.7 Definición de la coordenada esférica.

Soluciones esféricamente simétricas

Motivados por el éxito del modelo de Bohr, investigamos primero si existen soluciones esféricamente simétricas. Si éstas existen, sólo pueden ser una función de la coordenada radial r. Así que trabajemos con esta suposición por ahora para ver hacia dónde nos lleva. El operador laplaciano se simplifica entonces de manera importante porque las derivadas con respecto a θ y ϕ desaparecen, dejándonos

$$\nabla^2\psi(r)=\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}\big(r\psi(r)\big)=\frac{1}{r}\frac{d^2}{dr^2}\big(r\psi(r)\big).$$

Observe que reemplazamos la derivada parcial con una derivada convencional porque la función de onda en este caso depende de una sola variable r. Por ende, para la ecuación de Schrödinger,

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu}\frac{1}{r}\frac{d^2}{dr^2}\big(r\psi(r)\big)-k\frac{e^2}{r}\psi(r)=E\psi(r). \tag{38.11}$$

La solución de esta ecuación diferencial es tediosa, pero el resultado es muy interesante. Encontramos que, semejante a una partícula en una caja o el oscilador armónico, la energía puede asumir solamente ciertos valores de E_n dados por

$$E_n=-\frac{\mu k^2e^4}{2\hbar^2}\frac{1}{n^2}\ \text{con}\ n=1,2,3,\ldots.$$

Esto es exactamente la forma de los valores propios de energía que obtenemos en el proceso de cuantización de Bohr (ecuación 38.7) con $E_0=\mu k^2e^4/2\hbar^2=13.6$ eV, una unidad de energía que a veces también se llama 1 Rydberg.

Las funciones de onda que corresponden a los valores más bajos del número cuántico n son

$$\begin{aligned}\psi_1(r)&=A_1e^{-r/a_0}\\ \psi_2(r)&=A_2\left(1-\frac{r}{2a_0}\right)e^{-r/2a_0}\\ \psi_3(r)&=A_3\left(1-\frac{2r}{3a_0}+\frac{2r^2}{27a_0^2}\right)e^{-r/3a_0},\end{aligned} \tag{38.12}$$

donde el subíndice en ψ representa el valor correspondiente de n. Aquí A_1, A_2, A_3 son constantes de normalización que pueden determinarse a partir de la condición de que la integral del cuadrado del valor absoluto de la función de onda es 1,

$$\int|\psi_n(r)|^2\,d^3r=\int_0^\infty 4\pi r^2|\psi_n(r)|^2\,dr=1.$$

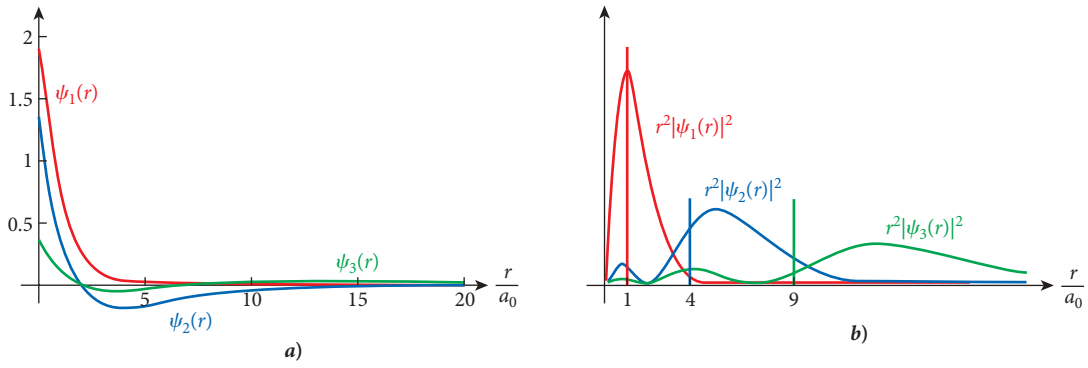


FIGURA 38.8 Soluciones esféricamente simétricas para la ecuación de Schrödinger del hidrógeno para los tres valores más bajos del número cuántico radial. *a*) Función de onda; *b*) densidades de probabilidad ponderadas. Las líneas verticales en *b*) representan las predicciones del modelo de Bohr.

La figura 38.8*a*) muestra estas soluciones y la figura 38.8*b*) ilustra sus densidades de probabilidad, ponderadas con el factor r^2 para explicar el efecto de que el elemento de volumen aumenta con un radio creciente. Las soluciones para los tres valores más bajos del número cuántico radial n se muestran como función de la coordenada radial dividida entre el radio de Bohr a_0. Las líneas verticales indican las ubicaciones de las órbitas semiclásicas de Bohr que corresponden a estos valores de n. Para $n = 1$, el máximo de la densidad de probabilidad para la función de onda corresponde a la órbita de Bohr, mientras que esto no es el caso para $n > 1$.

EJEMPLO 38.2 Normalización de la función de onda del hidrógeno

PROBLEMA

La función de onda del electrón de hidrógeno correspondiente a $n = 1$ tiene la forma dada en la ecuación 38.12, $\psi_1(r) = A_1 e^{-r/a_0}$. Al usar la condición de que la integral del cuadrado del valor absoluto de la función de onda es 1, determine A_1.

SOLUCIÓN

La condición de que la integral del cuadrado del valor absoluto de la función de onda es 1 nos da

$$\int |\psi_n(r)|^2 \, d^3r = \int_0^\infty 4\pi r^2 |\psi_n(r)|^2 \, dr = 1.$$

Al insertar nuestra propia función de onda nos lleva a

$$\int_0^\infty 4\pi r^2 \left|A_1 e^{-r/a_0}\right|^2 dr = 4\pi A_1^2 \int_0^\infty r^2 e^{-2r/a_0} dr.$$

La integral definida se puede expresar como $\int_0^\infty x^2 e^{-cx} dx = 2/c^3$. Tomando $c = 2/a_0$, obtenemos

$$4\pi A_1^2 \int_0^\infty r^2 e^{-2r/a_0} dr = 4\pi A_1^2 \left[2\left(\frac{a_0}{2}\right)^3\right] = \pi a_0^3 A_1^2 = 1.$$

Podemos resolver esta ecuación para A_1:

$$A_1 = \frac{1}{\sqrt{\pi a_0^3}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}\, a_0^{3/2}}.$$

Por lo tanto, la función de onda del electrón de hidrógeno correspondiente a $n = 1$ es

$$\psi_1(r) = \frac{1}{\sqrt{\pi}\, a_0^{3/2}} e^{-r/a_0}.$$

Cantidad de movimiento angular

El capítulo 37 introdujo operadores cuánticos para la cantidad de movimiento y la energía cinética, donde el valor clásico de la cantidad de movimiento es reemplazado por una constante multiplicada por la derivada en el espacio coordenado, $-i\hbar d/dx$. En el espacio tridimensional, el operador de la cantidad de movimiento es un vector, para el cual cada componente individual es una derivada parcial en la dirección respectiva. En coordenadas cartesianas, esto se escribe como

$$\mathbf{p}\psi(x,y,z) = -i\hbar\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right)\psi(x,y,z) \equiv -i\hbar\vec{\nabla}\psi(x,y,z).$$

El operador de derivada es llamado *gradiente*, en el que usamos la notación común breve $\vec{\nabla}$. En las coordenadas esféricas, el gradiente es dado por

$$\vec{\nabla}\,\psi(r,\theta,\phi) = \left[\frac{\partial}{\partial r},\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta},\frac{1}{r\,\text{sen}\,\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\right]\psi(r,\theta,\phi).$$

Donde la ecuación para el operador de cantidad de movimiento se vuelve

$$\mathbf{p}\,\psi(x,y,z) = -i\hbar\vec{\nabla}\,\psi(r,\theta,\phi) = -i\hbar\left[\frac{\partial}{\partial r},\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta},\frac{1}{r\,\text{sen}\,\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\right]\psi(r,\theta,\phi).$$

Ahora, el operador de la cantidad de movimiento angular se puede escribir si se reemplaza simplemente el vector de la cantidad de movimiento por el operador gradiente que introdujimos:

$$\mathbf{L}\psi = -i\hbar\vec{r}\times\vec{\nabla}\psi. \tag{38.13}$$

(Recuerde, en la forma clásica, la cantidad de movimiento angular es $\vec{L} = \vec{r}\times\vec{p}$.) Conforme a nuestras reglas para mediciones cuánticas, ahora podemos calcular el valor esperado del operador de cantidad de movimiento angular,

$$\langle L\rangle = \int\psi^*\mathbf{L}\psi d^3r = -i\hbar\int\psi^*\vec{r}\times\vec{\nabla}\psi d^3r. \tag{38.14}$$

Es particularmente interesante contemplar el resultado de esta medición de la cantidad de movimiento angular para el caso de funciones de onda esféricamente simétricas, es decir, funciones de onda que dependen sólo de la coordenada radial r y no de cualquier coordenada θ o ϕ. Entonces, obtenemos

$$\langle L\rangle = \int\psi^*(r)\mathbf{L}\psi(r)d^3r = -i\hbar\int\psi^*(r)\vec{r}\times\vec{\nabla}\psi(r)d^3r = 0. \tag{38.15}$$

DEDUCCIÓN 38.1 Valor esperado de la cantidad de movimiento angular

Para demostrar que la ecuación 38.15 es verdadera, usamos el operador gradiente en coordenadas esféricas. Si lo aplicamos a nuestra función de onda esféricamente simétrica, resulta en

$$\vec{\nabla}\,\psi(r) = \left[\frac{\partial}{\partial r},\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta},\frac{1}{r\,\text{sen}\,\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\right]\psi(r) = \hat{r}\frac{\partial}{\partial r}\psi(r),$$

porque ambas derivadas parciales en las direcciones θ y ϕ son cero cuando la función de onda no depende de ninguna de estas variables angulares. Nuevamente hemos usado la notación del vector unitario en la dirección radial como $\hat{r}$. En términos del mismo vector unitario podemos escribir el vector $\vec{r}$ como $\vec{r} = r\hat{r}$. Ahora nuestro producto vectorial es la integral (ecuación 38.15) y se simplifica a

$$-i\hbar\int\psi^*(r)\vec{r}\times\vec{\nabla}\psi(r)d^3r = -i\hbar\int\psi^*(r)r\hat{r}\times\hat{r}\frac{\partial}{\partial r}\psi(r)d^3r.$$

Para cualquier vector, el producto vectorial consigo mismo tiene el valor cero. Por ende, $\hat{r}\times\hat{r} = 0$ y la integral tienen el valor cero.

Esto es un resultado muy general que es cierto para cualquier función de onda esféricamente simétrica: una función de onda que no depende de las coordenadas angulares θ o ϕ debe tener un valor esperado de cero para la cantidad de movimiento angular.

Nuestras soluciones esféricamente simétricas $\psi_n(r)$ para el átomo de hidrógeno, obtenido en la sección anterior, dependen solamente del radio, así que todas tienen cantidad de movimiento angular cero. No es permisible interpretar el número cuántico n como uno de cantidad de movimiento angular, como lo hicimos en el modelo Bohr, a pesar de que los valores propios de energía de nuestras soluciones esféricamente simétricas de mecánica cuántica reproduzcan exactamente los valores de energía discretos del modelo de Bohr. Este hecho implica que *el modelo de Bohr está fatalmente defectuoso*. No podemos empezar con una partícula clásica en órbita alrededor de un núcleo central, exigir la cuantización de la cantidad de movimiento angular y luego obtener resultados consistentes. Pese a su éxito asombroso en la explicación de los espectros de línea de hidrógeno con gran detalle y precisión, el modelo de Bohr está equivocado y su éxito es accidental.

Solución completa

¿Tiene la ecuación de Schrödinger soluciones para el hidrógeno que no sean esféricamente simétricas y que tengan una cantidad de movimiento angular diferente de cero? La respuesta es sí. Aquí sólo vamos a esbozar cómo llegar a estas soluciones. Normalmente la matemática necesaria para llegar a estos resultados es lenta y complicada. Sin embargo, también es instructiva y algo que esperar con ansias en un curso más avanzado, en el que este tema se trate con más detalle. En la siguiente discusión introduciremos muchas diferentes funciones. Recuerde que no es el objetivo memorizarlas. La meta aquí es que usted entienda las características generales de las soluciones, más no su forma exacta. Incluso los profesionales más experimentados en el campo no conocen todas las funciones exactas de memoria y las buscan en tablas cuando las necesitan.

Separación de variables

Empezamos con una suposición que hemos empleado exitosamente en la búsqueda de soluciones para la ecuación dependiente del tiempo de Schrödinger en una dimensión espacial, a decir, la de la separación de variables. Para lograr esto, suponemos que la función de onda completa se puede escribir como un producto de tres funciones, cada una de las cuales es una función de una sola variable:

$$\psi(r,\theta,\phi) = f(r)g(\theta)h(\phi). \tag{38.16}$$

Insertamos esta solución de prueba en la ecuación de Schrödinger 38.9 y encontramos

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu}\nabla^2\big(f(r)g(\theta)h(\phi)\big) - k\frac{e^2}{r}\big(f(r)g(\theta)h(\phi)\big) = E\big(f(r)g(\theta)h(\phi)\big).$$

Ahora la acción del operador laplaciano (en coordenadas esféricas, ecuación 38.10) sobre este producto de funciones se tiene que evaluar:

$$\begin{aligned}
\nabla^2\big(f(r)g(\theta)h(\phi)\big) &= \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}\big(r\big(f(r)g(\theta)h(\phi)\big)\big) \\
&\quad + \frac{1}{r^2\,\mathrm{sen}\,\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\mathrm{sen}\,\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\big(f(r)g(\theta)h(\phi)\big)\right] \\
&\quad + \frac{1}{r^2\,\mathrm{sen}^2\,\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\big(f(r)g(\theta)h(\phi)\big) \\
&= g(\theta)h(\phi)\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}\big(rf(r)\big) \\
&\quad + \frac{f(r)h(\phi)}{r^2\,\mathrm{sen}\,\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\mathrm{sen}\,\theta\frac{\partial}{\partial\theta}g(\theta)\right] \\
&\quad + \frac{f(r)g(\theta)}{r^2\,\mathrm{sen}^2\,\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}h(\phi).
\end{aligned}$$

Si insertamos este resultado en la ecuación de Schrödinger y multiplicamos ambos lados de la ecuación por $-2\mu r^2/\hbar^2 f(r)g(\theta)h(\phi)$, llegamos a

$$\frac{r}{f(r)}\frac{\partial^2}{\partial r^2}\big(rf(r)\big)+\frac{1}{g(\theta)\,\mathrm{sen}\,\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\mathrm{sen}\,\theta\frac{\partial}{\partial\theta}g(\theta)\right)$$
$$+\frac{1}{h(\phi)\,\mathrm{sen}^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}h(\phi)+\frac{2\mu r^2}{\hbar^2}\left(E+k\frac{e^2}{r}\right)=0.$$

Ahora podemos ver que algunos términos dependen únicamente de la variable radial r, y no de las variables angulares θ, ϕ, mientras que otros términos dependen de θ, ϕ, pero no de r. Reordenamos la ecuación previa para obtener todos los términos dependientes de r en el lado izquierdo y todos los demás en el lado derecho:

$$\frac{r}{f(r)}\frac{\partial^2}{\partial r^2}\big(rf(r)\big)+\frac{2\mu r^2}{\hbar^2}\left(E+k\frac{e^2}{r}\right)=$$
$$-\frac{1}{g(\theta)\,\mathrm{sen}\,\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\mathrm{sen}\,\theta\frac{\partial}{\partial\theta}g(\theta)\right)-\frac{1}{h(\phi)\,\mathrm{sen}^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}h(\phi). \tag{38.17}$$

Esta ecuación sólo puede ser verídica si cada lado es igual a la misma constante. Hacemos una elección que al principio podrá parecer extraña, pero llamamos a esta constante $\ell(\ell+1)$.

Parte radial

La elección de la constante de integración $\ell(\ell+1)$ resulta en la ecuación radial (lado izquierdo de la ecuación 38.7):

$$\frac{r}{f(r)}\frac{d^2}{dr^2}\big(rf(r)\big)+\frac{2\mu r^2}{\hbar^2}\left(E+k\frac{e^2}{r}\right)=\ell(\ell+1).$$

(Nuevamente reemplazamos las derivadas parciales por convencionales porque la función f depende únicamente de una variable.) Si multiplicamos esta ecuación por $-f(r)\hbar^2/2\mu r^2$, la ecuación tiene la forma

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu}\frac{1}{r}\frac{d^2}{dr^2}\big(rf(r)\big)-k\frac{e^2}{r}f(r)+\frac{\ell(\ell+1)\hbar^2}{2\mu r^2}f(r)=Ef(r). \tag{38.18}$$

Compare esta ecuación con la ecuación de Schrödinger para la solución esféricamente simétrica (ecuación 38.11) y verá que la única diferencia es el término $\ell(\ell+1)\hbar^2/2\mu r^2$ que juega el papel de un potencial adicional, además del potencial de Coulomb. (Para $\ell=0$ recuperamos la solución esféricamente simétrica.) ¿Qué es este término adicional de potencial efectivo?

Nos podrá ayudar un argumento del movimiento orbital de una partícula clásica en un potencial central. Para llegar a nuestro argumento clásico, empecemos con la conservación de la energía, $\frac{1}{2}\mu v^2+U(r)=E$. (Recuerde que esto es el equivalente clásico de la ecuación de Schrödinger.) Ahora podemos partir la velocidad en partes radiales y tangenciales y obtener $\frac{1}{2}\mu v^2=\frac{1}{2}\mu v_r^2+\frac{1}{2}\mu v_t^2=\frac{1}{2}\mu v_r^2+\frac{1}{2}\mu(\omega r)^2$. Observe además que la cantidad de movimiento angular para el caso de una partícula puntual en movimiento circular es $L=\mu r v_t=\mu r^2\omega$. Esta definición también es válida para todo movimiento en un potencial central, no sólo movimiento circular, y la cantidad de movimiento angular es una cantidad conservada. Por lo tanto, podemos escribir $\frac{1}{2}\mu(\omega r)^2=\frac{1}{2}L^2/\mu r^2$. En consecuencia, nuestra ecuación clásica para la conservación de la energía en este caso es $\frac{1}{2}\mu v_r^2+U(r)+L^2/2\mu r^2=E$.

El término $\ell(\ell+1)\hbar^2/2\mu r^2$ ahora parece plausible como un término originado de la conservación de la cantidad de movimiento angular, si se nos permite sustituir $\ell(\ell+1)\hbar^2$ de la mecánica cuántica por el L^2 clásico. Más adelante veremos que estas funciones de solución también son las funciones propias para el operador de mecánica cuántica correspondiente a L^2 con el valor propio $\ell(\ell+1)\hbar^2$; así, esta sustitución realmente funciona como se suponía. Ahora usted puede empezar a entender por qué se hizo la elección aparentemente arbitraria para la constante de integración $\ell(\ell+1)$. El término $\ell(\ell+1)\hbar^2/2\mu r^2$ representa la barrera de la cantidad de movimiento angular de mecánica cuántica en el sistema de rotación, y pronto veremos que ℓ es un número entero. Decimos "barrera" porque este término es positivo y aumenta mientras que r se reduce, igual que una barrera de energía potencial. La figura 38.9 muestra el término de potencial efectivo de la ecuación 38.18 para varios valores de ℓ.

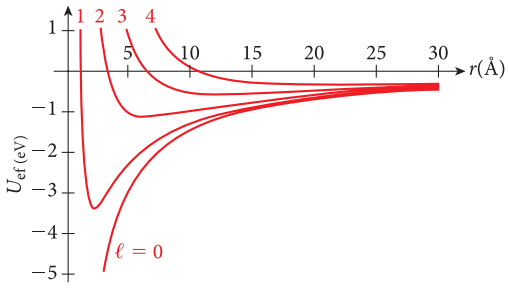


FIGURA 38.9 Potencial efectivo para (de abajo hacia arriba) los números cuánticos de la cantidad de movimiento angular ℓ = 0, 1, 2, 3 y 4.

¿Cuáles son las soluciones para la ecuación diferencial para la función radial de la ecuación 38.18? En general, son productos de funciones exponenciales y polinomios. Para r muy grande, la función exponencial domina el comportamiento asintótico de las soluciones. Las soluciones dependen de dos números cuánticos. El primero es el número cuántico n, que estuvo presente en las soluciones esféricamente simétricas que hemos estudiado anteriormente. El segundo es el número cuántico ℓ que acabamos de introducir en la separación de variables y se considera como el número cuántico de la cantidad de movimiento angular. (La siguiente sección dará más evidencia para esta asignación.) Con el fin de abarcar todo, escribimos las soluciones para las funciones radiales, pero no se espera que usted las memorice.

$$f_{n\ell}(r)=\sqrt{\frac{4(n-\ell-1)!}{a_0^3 n^4 (n+1)!}}e^{-r/na_0}\left(\frac{2r}{na_0}\right)^{\ell} L_{n-\ell-1}^{2\ell+1}\left(\frac{2r}{na_0}\right). \qquad (38.19)$$

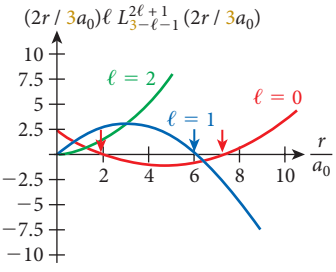


FIGURA 38.10 Términos de polinomios en la función de onda radial para n = 3.

Estas soluciones existen solamente para los enteros $n > \ell$ y $\ell \geq 0$. Por ende, para un valor dado de n, el número cuántico ℓ puede tener los valores

$$0 \leq \ell \leq n-1.$$

El término $L_{n-\ell-1}^{2\ell+1}(2r/na_0)$ en la ecuación 38.19 es un polinomio asociado de Laguerre. Estos polinomios han sido tabulados en libros de referencia y usted los puede consultar. Su forma exacta no es tan importante para nosotros, excepto para las siguientes consideraciones generales. El producto $(2r/na_0)^{\ell} L_{n-\ell-1}^{2\ell+1}(2r/na_0)$ es un polinomio de rango $n - 1$ para cualquier valor de ℓ. Este polinomio tiene $n - \ell - 1$ raíces positivas y ℓ raíces en $r = 0$. Un ejemplo para $n = 3$ se muestra en la figura 38.10, con las raíces positivas de los tres polinomios posibles indicados por las flechas de colores.

En lugar de examinar la ecuación 38.19 más en términos abstractos, quizá sea más instructivo escribir las soluciones radiales para los valores más bajos de n y ℓ:

$$f_{10}(r)=2a_0^{-3/2}e^{-r/a_0}$$

$$f_{20}(r)=\frac{1}{\sqrt{2}}a_0^{-3/2}\left(1-\frac{r}{2a_0}\right)e^{-r/2a_0}$$

$$f_{21}(r)=\frac{1}{2\sqrt{6}}a_0^{-3/2}\left(\frac{r}{a_0}\right)e^{-r/2a_0}$$

$$f_{30}(r)=\frac{2}{3\sqrt{3}}a_0^{-3/2}\left(1-\frac{2r}{3a_0}+\frac{2r^2}{27a_0^2}\right)e^{-r/3a_0}$$

$$f_{31}(r)=\frac{8}{27\sqrt{6}}a_0^{-3/2}\left(\frac{r}{a_0}-\frac{r^2}{6a_0^2}\right)e^{-r/3a_0}$$

$$f_{32}(r)=\frac{4}{81\sqrt{30}}a_0^{-3/2}\left(\frac{r^2}{a_0^2}\right)e^{-r/3a_0}.$$

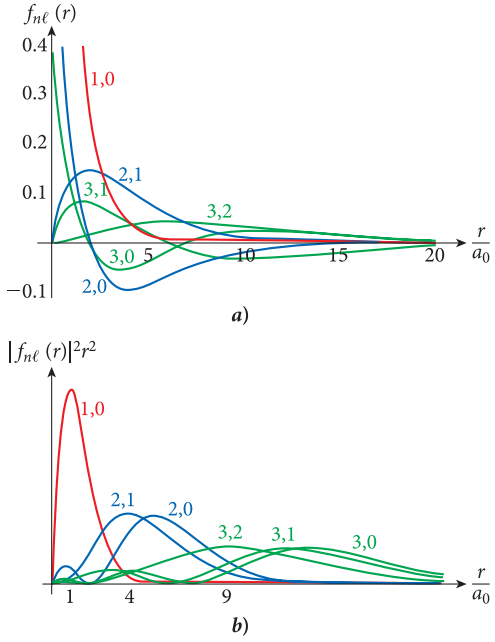


FIGURA 38.11 *a*) Funciones de onda radiales para los valores más bajos de los números cuánticos n y ℓ; *b*) las correspondientes densidades de probabilidad ponderadas.

Si comparamos estas soluciones con las del problema esféricamente simétrico (ecuación 38.12), se muestra que para cada valor de n las soluciones con $\ell = 0$ corresponden a las soluciones esféricamente simétricas.

Puesto que los valores más bajos de n corresponden a los valores más bajos de la energía, las funciones radiales mencionadas aquí son, de manera abrumadora, las más importantes para el átomo de hidrógeno.

Si graficamos las funciones radiales para los valores más bajos permitidos de los números cuánticos n y ℓ, surge un cuadro interesante. La figura 38.11*a*) muestra las seis funciones de onda mencionadas arriba. Es importante observar que las soluciones para un número cuántico radial n son polinomios del rango $n - 1$, multiplicados por un término que cae exponencialmente y que asegura que las funciones de onda se acercan a 0 para valores muy grandes del radio r. Todas las funciones de onda con $\ell > 0$ tienen un valor de 0 en $r = 0$; sólo aquellas con $\ell = 0$

asumen un valor finito diferente a cero en $r = 0$. (En la figura podrá parecer que las soluciones $\ell = 0$ discrepan conforme se acercan a $r = 0$, pero esto es engañoso. Si se expandiera la escala, las veríamos dando la vuelta porque la función exponencial tiene un valor de 1 en $r = 0$.)

La figura 38.11*b*) muestra la probabilidad de encontrar un electrón en un estado con números cuánticos n y ℓ a una distancia r del núcleo del átomo de hidrógeno. La función de onda f_{10} —la única función de onda para $n = 1$— aparece en rojo, y las dos funciones de onda posibles para $n = 2$ (f_{20} y f_{21}) son azules. Las tres funciones de onda posibles para $n = 3$, que son f_{30}, f_{31} y f_{32}, se presentan en color verde. Para el grupo de funciones de onda con un valor dado de n, todas las densidades de probabilidad ponderadas en la parte *b*) alcanzan el punto máximo a una distancia similar del origen. Ellas forman una **capa**. Esta aparición de capas es un fenómeno universal en la física atómica y nuclear y es un efecto cuántico único. Regresaremos al concepto de capas en repetidas ocasiones a lo largo de nuestro análisis sobre estos temas.

Aquí una interesante nota secundaria: todas las funciones de onda radiales $f_{n,n-1}$ alcanzan su máximo valor de r, lo que corresponde a los radios pronosticados por el modelo de Bohr para el correspondiente número cuántico n.

Parte angular

Regresemos a la ecuación de Schrödinger en coordenadas esféricas (ecuación 38.17): si el lado izquierdo es igual a $\ell(\ell + 1)$, así será para el lado derecho.

$$\ell(\ell+1) = -\frac{1}{g(\theta)\,\text{sen}\,\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\text{sen}\,\theta\frac{\partial}{\partial\theta}g(\theta)\right) - \frac{1}{h(\phi)\,\text{sen}^2\,\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}h(\phi). \tag{38.20}$$

Esta ecuación es todavía una función de las dos variables θ y ϕ. Podemos reordenar los términos y obtener una ecuación para la que todos los términos dependientes de θ estén en el lado izquierdo y todos los términos dependientes de ϕ estén en el lado derecho. Esto se logra mediante la multiplicación de ambos lados de la ecuación 38.20 por $\text{sen}^2\,\theta$ y luego moviendo el primer término del lado derecho a la izquierda:

$$\ell(\ell+1)\,\text{sen}^2\theta + \frac{\text{sen}\,\theta}{g(\theta)}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\text{sen}\,\theta\frac{\partial}{\partial\theta}g(\theta)\right) = -\frac{1}{h(\phi)}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}h(\phi).$$

Nuevamente hemos separado las variables, y para que esta ecuación pueda ser verdadera, ambos lados necesitan ser iguales a la misma constante. Llamemos esta constante m^2. (Recuerde que usamos μ para la masa en este capítulo, no m.)

Las dos ecuaciones diferenciales ordinarias resultantes para la variable angular son:

$$\frac{d^2}{d\phi^2}h(\phi) = -m^2h(\phi) \tag{38.21}$$

$$\ell(\ell+1)\,\text{sen}^2\,\theta + \frac{\text{sen}\,\theta}{g(\theta)}\frac{d}{d\,\theta}\left(\text{sen}\,\theta\frac{d}{d\,\theta}g(\theta)\right) = m^2. \tag{38.22}$$

Observe que la forma de la ecuación diferencial 38.21 es exactamente la misma que la de un simple oscilador armónico que hemos estudiado extensamente en el capítulo 14. Tal vez ahora podrá adivinar la solución para la ecuación 38.21 en seguida: es una combinación lineal de sen($m\phi$) y cos($m\phi$). De manera alterna, siguiendo la convención de notación compleja que se usa comúnmente, es

$$h(\phi) = Ae^{im\phi}. \tag{38.23}$$

Aquí A es una constante de normalización que podemos tratar más adelante, cuando abordemos la normalización global de la función de onda. Lo que es importante, sin embargo, es que la misma función de onda debe obtenerse cuando se suma 2π al ángulo ϕ, porque esto corresponde a una rotación completa de 360° en el plano xy. Esto implica que

$$e^{im\phi} = e^{im(\phi+2\pi)} \Rightarrow e^{2\pi im} = 1 \Rightarrow m = 0, \pm1, \pm2, \ldots.$$

De este modo hemos encontrado que nuestra constante de integración m debe ser un entero.

La solución para la ecuación 38.22 para θ no es tan fácil, y aquí declaramos simplemente:

$$g(\theta) = BP_\ell^m(\cos\theta) = B(-1)^{|m|}\,\text{sen}^{|m|/2}\theta\left[\frac{d}{d(\cos\theta)}\right]^{|m|}P_\ell(\cos\theta). \tag{38.24}$$

Aquí B es otra constante de normalización. Igual que para la constante A arriba, la ignoramos por ahora. Las funciones P_ℓ^m se llaman funciones asociadas de Legendre, y las funciones P_ℓ son polinomios de Legendre,

$$P_\ell(x) \equiv \frac{1}{2^\ell \ell!}\left(\frac{d}{dx}\right)^\ell (x^2-1)^\ell \text{ y } P_\ell^m(x) = (-1)^m\left(1-x^2\right)^{m/2}\left(\frac{d}{dx}\right)^m P_\ell(x)$$

para valores enteros no negativos de ℓ. Los primeros polinomios de Legendre son

$$P_0(x) = 1$$
$$P_1(x) = \tfrac{1}{2}\frac{d}{dx}\left(x^2-1\right) = x$$
$$P_2(x) = \tfrac{1}{8}\frac{d^2}{dx^2}\left(x^2-1\right)^2 = \tfrac{1}{2}\left(3x^2-1\right)$$
$$P_3(x) = \tfrac{1}{48}\frac{d^3}{dx^3}\left(x^2-1\right)^3 = \tfrac{1}{2}\left(5x^3-3x\right)$$
$$P_4(x) = \tfrac{1}{384}\frac{d^4}{dx^4}\left(x^2-1\right)^4 = \tfrac{1}{8}\left(35x^4-30x^2+3\right)$$
$$P_5(x) = \tfrac{1}{3\,840}\frac{d^5}{dx^5}\left(x^2-1\right)^5 = \tfrac{1}{8}\left(63x^5-70x^3+15x\right).$$

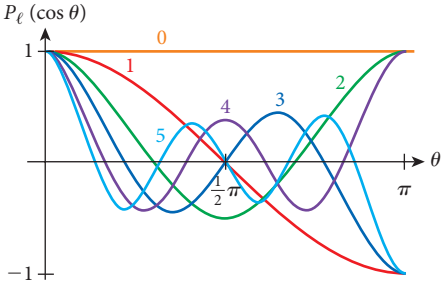


FIGURA 38.12 Polinomios de Legendre para ℓ = 1, 2, 3, 4 y 5.

y se muestran en la figura 38.12.

Puede ver que un polinomio de Legendre P_ℓ es un polinomio del rango ℓ. Si toma la n-ésima derivada de un polinomio del rango ℓ, con $n > \ell$, entonces obtendrá cero. Esto significa que existe un límite superior para el entero $|m|$:

$$|m| \le \ell \Rightarrow -\ell \le m \le \ell.$$

Por lo tanto, para cualquier valor de ℓ existen $2\ell + 1$ posibles valores de m. Las funciones asociadas de Legendre $P_\ell^m(\cos\theta)$ con los valores más bajos de ℓ son

	$m=0$	$m=1$	$m=2$	$m=3$
$\ell=0$	1			
$\ell=1$	$\cos\theta$	$-\operatorname{sen}\theta$		
$\ell=2$	$\frac{1}{2}\left(3\cos^2\theta-1\right)$	$-3\cos\theta\operatorname{sen}\theta$	$3\operatorname{sen}^2\theta$	
$\ell=3$	$\frac{1}{2}\left(5\cos^3\theta-3\cos\theta\right)$	$-\frac{3}{2}\operatorname{sen}\theta\left(5\cos^2\theta-1\right)$	$15\cos\theta\operatorname{sen}^2\theta$	$-15\operatorname{sen}^3\theta.$

Las expresiones para valores negativos de m no se tienen que escribir por separado porque sólo el valor absoluto del número cuántico m aparece en la ecuación 38.24.

Los productos de las funciones $g(\theta)h(\phi)$, correctamente normalizadas, se llaman **armónicos esféricos** Y_ℓ^m,

$$Y_\ell^m(\theta,\phi) = \sqrt{\frac{(\ell-|m|)!}{(\ell+|m|)!}\frac{(2\ell+1)}{4\pi}}P_\ell^m(\cos\theta)e^{im\phi}. \tag{38.25}$$

Los armónicos esféricos describen la dependencia angular de las funciones de onda del electrón para el átomo de hidrógeno. Tienen un factor de fase complejo $e^{im\phi}$, pero aparte de eso son de valor real. En la figura 38.13 graficamos los valores absolutos de los armónicos esféricos. Los valores absolutos de estos armónicos esféricos son simétricos bajo rotación alrededor del eje z, pero en general, para $m \neq 0$ éste no es el caso para la parte real ni para la parte imaginaria.

¿Qué más es especial en cuanto a los armónicos esféricos? Se puede demostrar (esto no lo vamos a hacer aquí) que también son funciones propias del operador del cuadrado de la cantidad

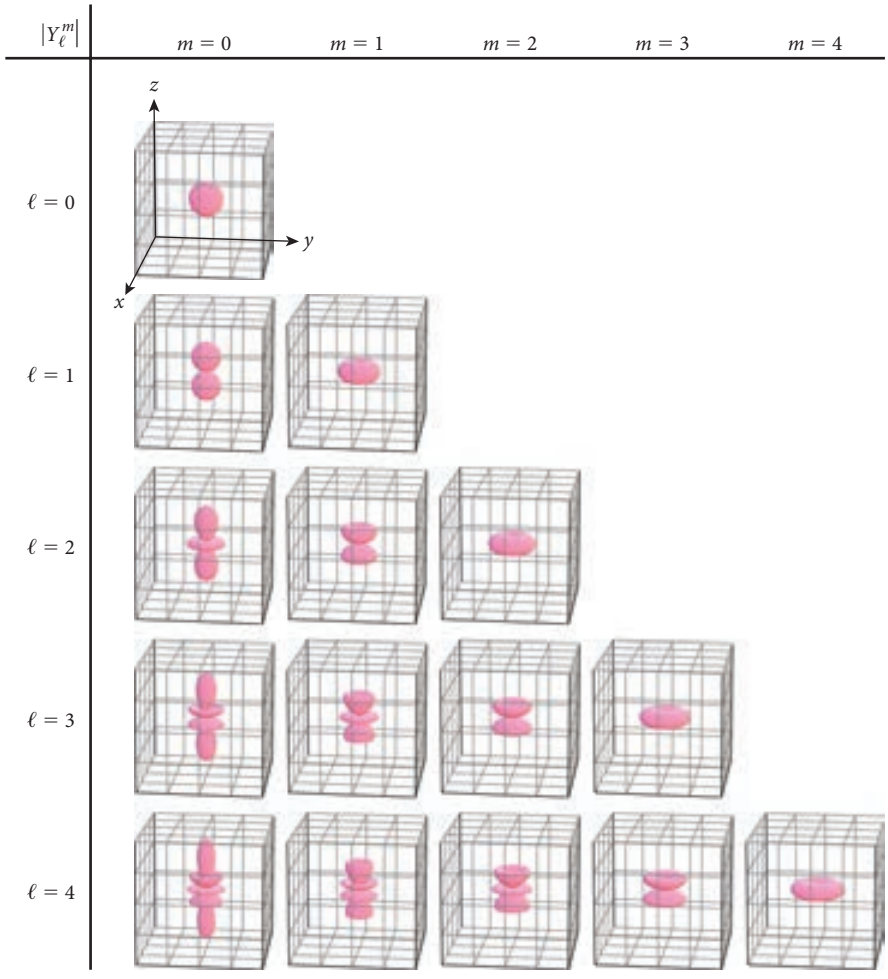


FIGURA 38.13 Valor absoluto de los armónicos esféricos para los valores más bajos de los números cuánticos de la cantidad de movimiento angular. Cada casilla mostrada se extiende de −1 a 1 en cada dirección cartesiana.

de movimiento angular $\mathbf{L}^2$, con valores propios $\ell(\ell + 1)\hbar^2$ y del operador de la proyección de la cantidad de movimiento angular sobre eje x, $\mathbf{L}_z$, con el valor propio $m\hbar$:

$$\mathbf{L}^2 Y_\ell^m(\theta,\phi) = \ell(\ell+1)\hbar^2 Y_\ell^m(\theta,\phi) \tag{38.26}$$

$$\mathbf{L}_z Y_\ell^m(\theta,\phi) = m\hbar Y_\ell^m(\theta,\phi). \tag{38.27}$$

Por lo tanto, el número cuántico ℓ es una medida del valor absoluto de la cantidad de movimiento angular orbital total —es decir, la longitud del vector de la cantidad de movimiento angular— y el número cuántico m mide la longitud de la proyección del vector de la cantidad de movimiento angular a lo largo del eje z.

Ahora podrá ser capaz de adivinar cómo se ven los operadores $\mathbf{L}^2$ y $\mathbf{L}_z$ en coordenadas esféricas. Ellos son

$$\mathbf{L}^2 = -\hbar^2 \frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\operatorname{sen}\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) - \hbar^2 \frac{1}{\operatorname{sen}^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}$$

$$\mathbf{L}_z = -i\hbar\frac{\partial}{\partial\phi}.$$

La comparación de estas dos expresiones con las ecuaciones 38.20 y 38.21 muestra por qué las ecuaciones 38.26 y 38.27 deben ser verídicas. La construcción de los armónicos esféricos como soluciones para la parte angular de una ecuación de Schrödinger rotacionalmente invariante significa que deben ser funciones propias para los operadores del cuadrado de la cantidad de movimiento angular y de la proyección de la cantidad de movimiento angular sobre el eje de simetría.

Solución completa

Recabemos las diferentes partes de nuestra solución completa. Hemos separado las variables y hemos construido las soluciones como productos de la parte radial de la función de onda (ecuación 38.19) y la parte angular (ecuación 38.25):

$$\psi_{n\ell m}(r,\theta,\phi) = f_{n\ell}(r)Y_{\ell m}(\theta,\phi). \tag{38.28}$$

Los números cuánticos de estas soluciones son: el **número cuántico radial** n = 1,2,3,..., el **número cuántico de la cantidad de movimiento angular orbital** ℓ = 0,1, ...,n − 1, y el llamado **número cuántico magnético** $m = -\ell,...,\ell$. El valor propio de energía correspondiente a una función propia particular de solución depende sólo del número cuántico radial,

$$E_n = -\frac{1}{n^2}E_0 = -\frac{1}{n^2}\frac{\mu k^2 e^4}{2\hbar^2}. \tag{38.29}$$

Todas las soluciones para un valor dado del número cuántico radial n llegan a su máximo valor a una distancia similar del centro, dada aproximadamente por el radio de la correspondiente órbita semiclásica de Bohr $r_n = n^2 a_0 = n^2\hbar^2/\mu k e^2$. (Para las funciones de onda con el número cuántico de cantidad de movimiento angular máximo posible $\ell = n - 1$, ésta es una declaración exacta.) Por lo tanto, las funciones de onda para un número cuántico radial dado n forma una capa. Las capas son a veces (especialmente en química) etiquetadas con letras mayúsculas conforme a su número cuántico radial:

letra:	K	L	M	N	O	P	Q	...
n =	1	2	3	4	5	6	7	....

Por ende, la capa de energía más baja es la capa K, y las capas con números cuánticos sucesivamente más altos n siguen en forma alfabética.

Dentro de una capa dada, todas las funciones de onda tienen la misma energía. Tradicionalmente se etiquetan con letras de acuerdo con su número cuántico de cantidad de movimiento angular orbital:

letra:	s	p	d	e	f	g	h	...
ℓ =	0	1	2	3	4	5	6	....

Aquí los primeros dos estados de cantidad de movimiento angular reciben las letras s (monopolar) y p (dipolar) y de $\ell = 2$ (cuadripolar) los estados de cantidad de movimiento angular siguen el alfabeto sucesivamente, empezando con la letra d. (¿Por qué este orden? No hay ninguna razón real, excepto la manera histórica en la que la nomenclatura fue desarrollada.) Por lo tanto, un estado $4d$ implica que el número cuántico radial es 4 y el número cuántico de cantidad de movimiento angular orbital es 2. Las asignaciones de energías y niveles se muestran en la figura 38.14.

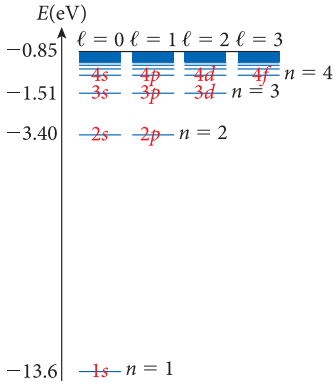


FIGURA 38.14 Números cuánticos de funciones de onda, energía y asignación de etiquetas.

También podemos graficar las funciones de onda de la solución. Tenemos la posibilidad de visualizar las funciones de onda, su parte real o su parte imaginaria, o su valor absoluto. Todas las funciones de onda con $m = 0$ son reales, y para ellas podemos graficar fácilmente la función de onda; por ejemplo, en rebanadas a través del espacio. La figura 38.15 muestra las funciones de onda $\psi_{n\ell m}$ para los valores más bajos de los números cuánticos n y ℓ con $m = 0$ en una rebanada a través del espacio coordenado, en el plano xz con $y = 0$. Los colores azules implican valores positivos de la función de onda, y los colores rojos indican valores negativos. El color amarillo representa valores cerca de cero; una escala se da al lado derecho. En cada caso, una región entre ±30 a_0 se muestra en cada dirección, x y z. Como puede ver, todos los estados s (estados de $\ell = 0$) aparecen como círculos concéntricos en esta gráfica de contornos porque todos son esféricamente simétricos. Los estados con cantidad de movimiento angular no cero muestran patrones hermosos de regiones alternantes de valores positivos y negativos.

Podemos ver regularidades si contemplamos los patrones que surgen. Conforme aumenta n, se está poblando una capa exterior, mientras que la estructura de la función de onda de la capa interior con la misma cantidad de movimiento angular se conserva y comprime con un nodo esférico (anillos amarillos) que lo separan de las capas adyacentes. Todas las ondas p muestran simetrías dobles, como se espera de formas dipolares. De la misma manera, las ondas d exhiben una estructura cuatro veces cuádruple, y las ondas f muestran una simetría séxtupla característica.

Finalmente enumeramos las funciones de onda para las capas más interiores, es decir, las que tienen los valores más bajos para los números cuánticos radiales y, por ende, las energías más bajas. En la capa $n = 1$, sólo hay una función de onda posible, y se trata de un estado s:

$$\psi_{100}(r,\theta,\phi) = \frac{1}{\sqrt{\pi}a_0^{3/2}}e^{-r/a_0}. \tag{38.30}$$

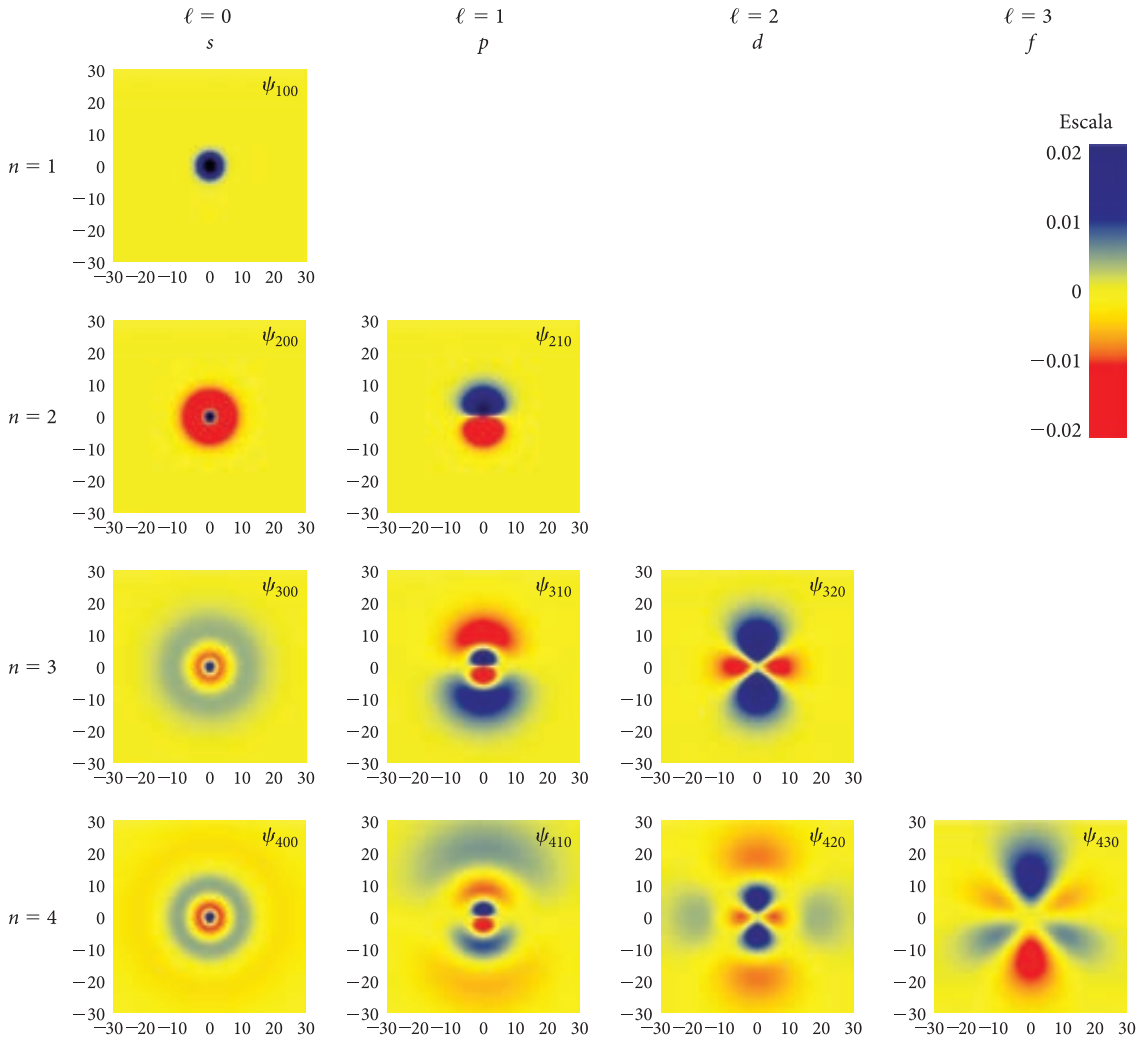


FIGURA 38.15 Funciones de onda del electrón del átomo de hidrógeno en el plano *xz* para $y = 0$, $\psi_{n\ell m}(x,0,z)$. Las coordenadas en el plano *xz* se visualizan en múltiplos del clásico radio de Bohr a_0. La escala a la derecha indica cómo los colores en las gráficas representan el valor de $\psi_{n\ell m}$.

Observe que el valor del valor propio de energía que corresponde a esta función de onda es el más bajo posible, $E_1 = -13.6$ eV. Un electrón que reside en este estado no puede sacar radiando a un fotón para irse a un estado de energía más bajo. Por lo tanto, el estado con esta energía es el estado base del electrón en el átomo de hidrógeno, y la ecuación 38.30 es la función de onda del estado base. Usted puede comparar la ecuación 38.30 con los resultados del ejemplo 38.2.

En la capa $n = 2$ es posible una función de onda en el estado *s*, más tres ondas *p*, para un total de cuatro funciones de onda, todas correspondientes a un valor propio de energía de $E_2 = -3.40$ eV:

$$\psi_{200}(r,\theta,\phi) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}a_0^{3/2}} e^{-r/2a_0}\left(1-\frac{r}{2a_0}\right)$$

$$\psi_{210}(r,\theta,\phi) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}a_0^{3/2}} e^{-r/2a_0}\left(\frac{r}{2a_0}\right)\cos\theta$$

$$\psi_{21\pm1}(r,\theta,\phi) = \mp\frac{1}{4\sqrt{\pi}a_0^{3/2}} e^{-r/2a_0}\left(\frac{r}{2a_0}\right)\operatorname{sen}\theta e^{\pm i\phi}.$$

En la capa $n = 3$ hay una función de onda en la subcapa u orbital *s*, tres funciones de onda en la subcapa *p* y cinco en la subcapa *d*, para un total de $1 + 3 + 5 = 9$ funciones de onda, todas con la energía $E_3 = -1.51$ eV:

$$\psi_{300}(r,\theta,\phi) = \frac{1}{3\sqrt{3\pi}a_0^{3/2}} e^{-r/3a_0}\left(1-\frac{2r}{3a_0}+\frac{2r^2}{27a_0^2}\right)$$

(*continúa*)

38.3 Oportunidad de autoevaluación

Ahora que hemos apuntado la forma explícita de las soluciones, esboce el resultado de graficar $\psi_{2,1,1}(r,\theta,\phi)$ o bien, $\psi_{2,1,-1}(r,\theta,\phi)$ de la misma manera que en la figura 38.15.

38.2 Ejercicio en clase

¿Cuántas funciones de onda son posibles en la capa $n = 5$?

a) 9 *d*) 21

b) 14 *e*) 25

c) 16

38.4 Oportunidad de autoevaluación

Verifique que la ecuación 38.30 es de hecho una solución para el problema del hidrógeno mediante su inserción en la ecuación de Schrödinger. Para aumentar el grado de dificultad, intente el mismo ejercicio para una de las funciones con $n = 2$.

(*continuación*)

$$\psi_{310}(r,\theta,\phi)=\frac{2\sqrt{2}}{27\sqrt{\pi}a_0^{3/2}}e^{-r/3a_0}\left(\frac{r}{a_0}-\frac{r^2}{6a_0^2}\right)\cos\theta$$

$$\psi_{31\pm1}(r,\theta,\phi)=\mp\frac{2}{27\sqrt{\pi}a_0^{3/2}}e^{-r/3a_0}\left(\frac{r}{a_0}-\frac{r^2}{6a_0^2}\right)\operatorname{sen}\theta e^{\pm i\phi}$$

$$\psi_{320}(r,\theta,\phi)=\frac{1}{81\sqrt{6\pi}a_0^{3/2}}e^{-r/3a_0}\left(\frac{r^2}{a_0^2}\right)\left(3\cos^2\theta-1\right)$$

$$\psi_{32\pm1}(r,\theta,\phi)=\mp\frac{1}{81\sqrt{\pi}a_0^{3/2}}e^{-r/3a_0}\left(\frac{r^2}{a_0^2}\right)\cos\theta\operatorname{sen}\theta e^{\pm i\phi}$$

$$\psi_{32\pm2}(r,\theta,\phi)=\frac{1}{162\sqrt{\pi}a_0^{3/2}}e^{-r/3a_0}\left(\frac{r^2}{a_0^2}\right)\operatorname{sen}^2\theta e^{\pm 2i\phi}.$$

En general podemos tener $2\ell+1$ funciones de onda con m diferente para la cantidad de movimiento angular orbital ℓ. Además, puesto que podemos tener $n-1$ diferentes estados de cantidad de movimiento angular orbital para un dado número cuántico n, el número total de $N(n)$ de posibles funciones de onda en una capa dada con el número cuántico radial n es

$$N(n)=\sum_{\ell=0}^{n-1}\left(2\ell+1\right)=n^2. \tag{38.31}$$

¿Asegura nuestro procedimiento de separación de variables que hemos encontrado *todas* las soluciones? No comprobaremos esto, pero la respuesta es sí, porque el conjunto de soluciones que hemos encontrado forman una base completa para todas las funciones en este espacio. No detallaremos esta declaración; esto se reserva a un curso avanzado sobre física cuántica.

Añadimos aquí una posdata al análisis del átomo de hidrógeno. Este sistema es ciertamente el sistema más estudiado en toda la física cuántica, y es uno de los pocos para los que una solución exacta es posible. Las ecuaciones diferenciales que resultan, así como sus soluciones, muestran una increíble cantidad de estructura. Es tal vez sorprendente que este sistema cuántico real, probablemente el más sencillo, muestre tanta riqueza, y quizás es aún más sorprendente que podamos construir una descripción matemática que captura esta complejidad, que es visible, por ejemplo, en las gráficas de la figura 38.15. El hecho de que el mundo natural se ordene de esta manera, y luego se deje capturar por nuestras construcciones matemáticas, parece absolutamente maravilloso. Esperamos que las derivaciones matemáticas algo tediosas no hayan oscurecido la belleza subyacente de este sistema físico y la teoría que lo describe.

38.4 Otros átomos

Ahora que hemos reentendido bien las funciones de onda, las energías y las posibles transiciones entre niveles para el átomo de hidrógeno, podemos preguntar si también es posible explicar otros átomos. ¿Qué necesitamos cambiar en nuestro formalismo para explicar otros átomos? Primero que nada cambia la carga Z del núcleo. Para hidrógeno, tenemos $Z = 1$, pero para valores más altos de Z nuestro potencial tiene que cambiar a

$$U(r)=k\frac{Ze^2}{r}.$$

Para ser eléctricamente neutro, un átomo con Z protones también necesita tener Z electrones. Estos electrones residirán en el estado de energía más bajo disponible para ellos. Es fácil ver en qué estado se puede poner el primer electrón: se trata del estado 1*s*. Podemos generalizar la ecuación 38.29 del tratamiento del átomo de hidrógeno para ver que la energía del primer electrón es

$$E_1=-\frac{\mu k^2Z^2e^4}{2\hbar^2}. \tag{38.32}$$

Llegamos a este resultado simplemente por reemplazar e^2 por Ze^2 en la ecuación de Schrödinger. Es un ejercicio útil para examinar la matemática para el átomo de hidrógeno y convencernos de

que la ecuación 38.32 es realmente válida. (En la ecuación 38.32, el valor de μ es la masa reducida, calculada mediante la ecuación 38.4, con M ahora como la masa del núcleo.)

¿Dónde colocamos el segundo electrón? Ahora la respuesta no es tan sencilla, ya que cualquier electrón dado también interactuará con todos los demás electrones del mismo átomo, lo que parcialmente sirve para proteger la carga Z del núcleo. Este problema no se puede resolver mediante los métodos analíticos exactos desarrollados anteriormente. Se requieren métodos de aproximación que están más allá del alcance de este libro. Sin embargo, aún así podemos adquirir un grado de comprensión cualitativa con las herramientas a nuestro alcance.

La idea general de las capas y subcapas u orbitales radiales con números cuánticos de cantidad de movimiento angular fijos, que desarrollamos para el átomo de hidrógeno, permanece válida para otros átomos. La exploración parcial del potencial de Coulomb del núcleo actúa de manera diferente en niveles distintos. Los estados con $\ell = 0$ tienen distribuciones de probabilidad con su máximo alcance en el origen. Para estos estados tenemos una baja probabilidad de que otro electrón yazca más cerca del origen, parcialmente protegiendo el potencial central. No obstante, para estados con valores más altos del número cuántico de cantidad de movimiento angular, la protección juega un papel más importante. Esto lleva a la distribución de niveles de energía ilustrada en la figura 38.16. A primera vista, esta figura parece ser similar a la figura 38.14, que mostró la gráfica para el átomo de hidrógeno. Ahora, sin embargo, la escala de energía es diferente por un factor de Z^2. Las ubicaciones de los niveles de energía en la ausencia de protecciones están indicadas por las líneas interrumpidas azules, mientras que las ubicaciones propias de los niveles están señaladas por las líneas sólidas de color azul oscuro. Para unos cuantos niveles hemos incluido también pequeñas flechas negras que muestran los desfasamientos. ¿Cuál es la diferencia principal entre las figuras 38.16 y 38.14? En la 38.16, diferentes números cuánticos de cantidad de movimiento angular ℓ para los mismos valores del número cuántico principal n resultan en diferentes valores de energía, mientras que todos tienen el mismo valor para el átomo de hidrógeno. Esto se debe a los otros electrones que parcialmente protegen la carga nuclear en átomos con más de un electrón. Si clasificamos los niveles por incremento de energía, empezando con el más bajo, encontramos la progresión 1*s*, 2*s*, 2*p*, 3*s*, 3*p*, 4*s*, 3*d*, 4*p*, 5*s*, 4*d*, 5*p*, 6*s*, 5*d*, 4*f*, 6*p*, 7*s*, 6*d* y 5*f*.

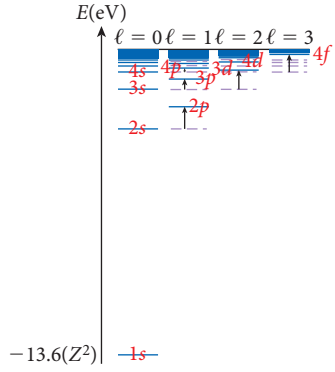


FIGURA 38.16 Esquema de niveles de energía en átomos con varios electrones.

Electrones tienen un número cuántico espín de $\frac{1}{2}$. Por lo tanto, $2(\frac{1}{2}) + 1 = 2$ electrones pueden ocupar cada función de onda con su conjunto de números cuánticos fijos; es decir, un electrón con espín arriba y el otro con espín abajo. Este hecho se debe al principio de exclusión de Pauli. Con el principio de exclusión de Pauli y la figura 38.16 en mano, podemos determinar en qué orden están distribuidos los electrones a través de los niveles de energía, así como llenar cada nivel en la figura 38.16 con dos electrones sucesivamente.

El apéndice D contiene las configuraciones de electrones de estado base para todos los elementos. Utilizamos la notación convencional breve al escribir el número de electrones en un nivel dado como subíndice directamente después de la notación para el nivel. Por ejemplo, flúor ($Z = 9$) aparece con la configuración del estado base de $1s^2 2s^2 2p^5$. Esto significa que los dos electrones ocupan cada uno de los niveles 1*s* y 2*s*, y que los 5 electrones restantes están en el estado 2*p*. La configuración de electrones de aluminio ($Z = 13$) aparece como [Ne]$3s^2 3p$. Esto significa que la ocupación de los niveles 1*s*, 2*s* y 2*p* en aluminio es la misma que en neón (es decir, completamente ocupada) y que aluminio tiene dos electrones adicionales en el estado 3*s*, más un electrón adicional en el estado 3*p*.

Cuando todos los electrones para un átomo dado están en los estados de energía más bajos posibles que están disponibles para ellos, el átomo está en el estado base. Observe que conforme incrementa Z, los electrones suelen llenar un estado *s* en una capa *n* más alta, en lugar de un estado con *n* más baja y una cantidad de movimiento angular más alto. (Por ejemplo, vea $Z = 19$, 37 y 55.) Esto ocurre porque la barrera de la cantidad de movimiento angular ha hecho que el estado *n* más bajo corresponda a una energía del electrón más alta.

Igual que en el átomo de hidrógeno, los electrones en otros átomos pueden excitarse en estados de energía más altos por fotones. Sin embargo, los espectros de línea resultantes son por lo general mucho más complicados que los del átomo de hidrógeno. Es considerablemente más fácil contestar a la pregunta de cuánta energía se necesita para remover el electrón menos ligado de un átomo. El proceso de remover un electrón de un átomo se llama **ionización**, así que queremos saber la **energía de ionización** de un simple electrón. Para llevar el electrón menos ligado de su estado con una energía más baja que cero a una apenas arriba de cero, la energía de ionización es la misma que la magnitud de la energía del nivel ocupado menos ligado en un átomo. La figura 38.17 presenta esta información para cada átomo conocido (excepto el átomo de astato, $Z = 85$, para el

38.3 Ejercicio en clase

El elemento 111 fue descubierto en 1994 y denominado roentgenio en 2004. Sólo existe durante unos cuantos segundos antes de que se descomponga. La configuración de electrones del roentgenio aún no ha sido determinada. ¿Cuál sería su predicción para él?

a) [Xe] $4f^{14}5d^{10}6s^2 6p^6$

b) [Rn] $4f^{14}5d^{10}6s^2 6p^6$

c) [Rn] $5f^{14}6d^9 7s^2$

d) [Xe] $5f^{14}6d^9 7s^2$

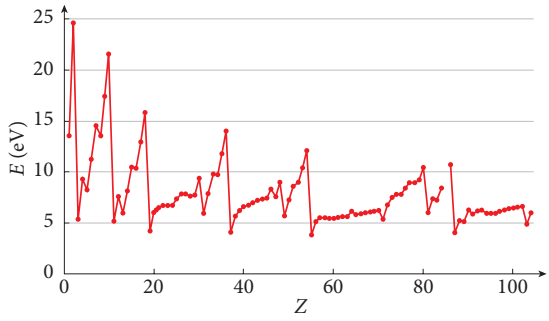


FIGURA 38.17 Energías de ionización de un simple electrón para todos los elementos.

cual aún no se ha medido la energía de ionización). Ahora la pregunta es: ¿podemos explicar las regularidades de las energías de ionización en esta figura?

Vamos a empezar con hidrógeno. El simple electrón *s* de hidrógeno reside en el estado 1*s* en el estado base del hidrógeno. Su energía es −13.6 eV, así que se necesita +13.6 eV para liberar este simple electrón.

Helio: tiene dos electrones y ambos se pueden acomodar en el estado 1*s*. Con $Z = 2$, el potencial nuclear de Coulomb es dos veces más fuerte que el del átomo de hidrógeno. La presencia del otro electrón protege parcialmente este potencial, pero el segundo electrón en el átomo de helio aún está ligado más profundamente que el simple electrón en hidrógeno. En forma experimental, encontramos un valor muy grande de 24.6 eV para la energía de ionización de helio, el valor más grande para cualquier elemento. ¿Qué significa esto para las propiedades químicas de helio? Es muy difícil remover un electrón de helio y sumarlo a algún otro elemento para formar algún tipo de enlace químico. De lo contrario, tampoco es posible sumar otro electrón a la capa $n = 1$ en helio, porque ya está completamente llena con dos electrones. Un electrón adicional se tendría que agregar a la capa $n = 2$ y sería por ende mucho más débilmente ligado al helio. Por lo tanto, el helio es químicamente inerte y se llama un **gas noble**.

Litio: puesto que $Z = 3$, los átomos de litio también tienen tres electrones. Los primeros dos residen en el estado 1*s* y llenan completamente el nivel $n = 1$, igual que en el helio. El tercer electrón necesita irse al siguiente estado más alto, el estado 2*s*. Según la figura 38.11*b*) vemos que la función de onda radial del estado 2*s* se ubica más lejos del centro del átomo. Entonces esperamos que sea un enlace mucho más débil y, en realidad, encontramos una energía de ionización de solamente 5.39 eV para el litio. Por consiguiente, el litio actúa como un excelente donante en reacciones químicas.

Berilio: este elemento tiene cuatro protones y cuatro electrones. El cuarto electrón también cabe en el estado 2*s*, llenando por completo esta subcapa de cantidad de movimiento angular. Sin embargo, recuerde que para $n = 2$, tenemos los números cuánticos de cantidad de movimiento angular de 0 y 1. Por lo tanto, berilio no es un átomo de capa cerrada como el helio. La energía de ionización del berilio es 9.32 eV, mucho más alta que la del litio, pero también mucho más baja que la del helio.

Boro hasta neón: ahora poblamos la subcapa 2*p* que puede contener $2(2\ell+1) = 2(2 \cdot 1+1) = 6$ electrones. Cuando agregamos el primer electrón en la subcapa 2*p*, se encuentra solo en esta subcapa. Nuevamente consultamos la figura 38.11*b*) para orientarnos, vemos que los estados 2*s* y 2*p* tienen una distancia media similar a las funciones de onda radiales desde el centro. Por lo tanto, la energía de ionización en el boro ($Z = 5$) es levemente más baja que en el berilio, pero ni con mucho tan baja como en el litio. Si agregamos más electrones a la subcapa 2*p*, incrementa la energía de ionización de manera sucesiva. Por ende, es cada vez más difícil remover un electrón de los elementos carbono, nitrógeno, oxígeno y flúor, así que no son buenos donantes de electrones en reacciones químicas. Sin embargo, se vuelven mejores receptores de electrones cuando agregamos más electrones a la subcapa 2*p*. En particular, el flúor, con sólo un electrón faltante de una por demás cerrada capa $n = 2$, es químicamente muy agresivo. El neón ($Z = 10$) completa la subcapa 2*p*, así como la capa $n = 2$. Por lo tanto, el neón tiene propiedades químicas muy parecidas a las del helio; también es químicamente inerte y es llamado gas noble. Puesto que las funciones de onda radiales en la capa $n = 2$ están en promedio separadas más del centro que aquellas en la capa $n = 1$, se espera que los electrones en esta capa experimenten menos atracción al núcleo central y, por ello, tienen energías de ionización más bajas. Si comparamos los valores para el helio (24.6 eV) y el neón (21.6 eV), se corrobora esta expectativa.

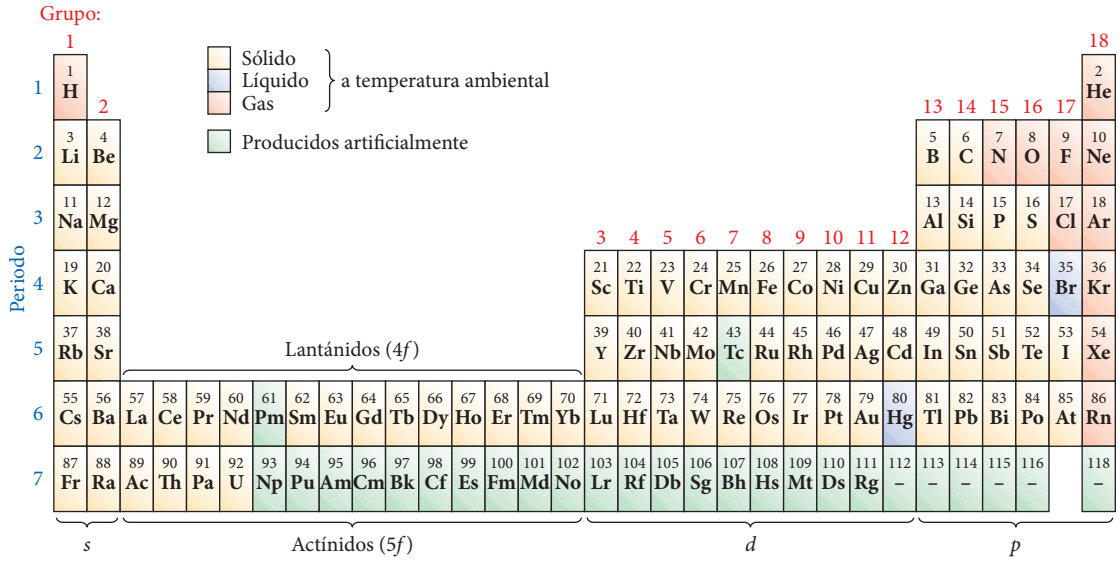


FIGURA 38.18 Tabla periódica de los elementos.

Se hacen evidentes algunas tendencias sistemáticas en la progresión de las energías de ionización. Lo que se vio como una curva en zigzag salvaje e irregular en la figura 38.17 empieza a mostrar estructura. Es precisamente esta estructura la que forma la base de la **tabla periódica de los elementos químicos** (figura 38.18). En la tabla periódica, los elementos que llenan la capa $n = 1$ están en la primera hilera y los que llenan la capa $n = 2$ están en la segunda hilera. Cuando se agrega un electrón a una nueva capa, éste corresponde a una nueva hilera en la tabla periódica. En cada hilera se agregan los electrones uno por uno, de izquierda a derecha. Los elementos con subcapas completamente llenas, de tal modo que un electrón adicional tendría que ser colocado en la siguiente capa principal más alta, termina en la columna de la extrema derecha, mientras que los que inician una nueva capa están en la columna de la extrema izquierda.

Las primeras dos hileras de la tabla periódica son idénticas a las primeras dos capas principales, pero en general una hilera dada en la tabla periódica no es idéntica a una capa principal. Ya en la tercera hilera faltan los electrones 3*d*. Puesto que sus niveles de energía son más altos que los de los electrones 4*s*, los electrones 4*s* se agregan antes de los 3*d*. Puesto que los electrones 4*s* empiezan una nueva hilera, los átomos de escandio hasta zinc, en los que electrones llenan la subcapa 3*d*, son miembros de la cuarta hilera de la tabla periódica, no de la tercera.

Los elementos en una columna dada tienen una configuración de electrones similar en su capa más exterior. Las capas interiores completamente llenas tienen muy poca influencia sobre las interacciones del átomo con otros átomos o fotones. Los electrones en las capas más exteriores de los átomos, llamados **electrones de valencia**, determinan principalmente el comportamiento químico del átomo. Por lo tanto, elementos en una columna dada son químicamente similares de muchas maneras.

Observe que la hilera inferior en la figura 38.18 consiste principalmente en átomos artificialmente producidos. Átomos con un número atómico mayor que 92 (uranio) no son estables y, por lo tanto, no se encuentran en la naturaleza. Se pueden crear en el laboratorio y existen durante algún tiempo antes de descomponerse. Como regla general se puede decir que entre más alto sea el número atómico, más corta será la existencia de un átomo artificialmente producido antes de su descomposición. Los elementos 113, 115, 116 y 118 apenas se descubrieron en la primera década del siglo XXI y cada uno de ellos sólo existe durante unos cuantos milisegundos antes de decaer. (El capítulo 40 investiga las razones para estas vidas cortas de átomos con números atómicos altos.)

Mediante el orden de los elementos en la tabla periódica podemos visualizar las energías de ionización para todos los elementos hasta $Z = 104$ en una representación tridimensional (figura 38.19). En general, la energía de ionización se reduce conforme nos vamos a números n más altos en las capas radiales. Esta figura también muestra que la energía de ionización crece cuando vamos de izquierda a derecha en la tabla periódica, agregando

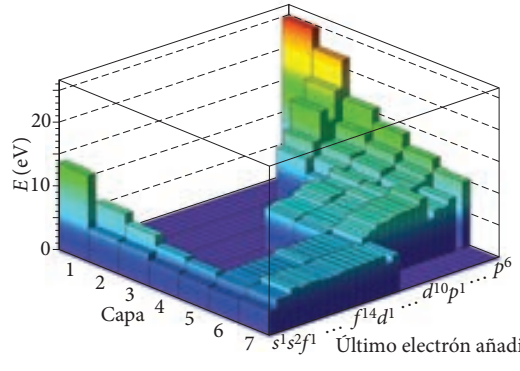


FIGURA 38.19 Energías de ionización para los elementos hasta $Z = 104$ (rutherfordio) en la tabla periódica.

38.4 Ejercicio en clase

El elemento 118 apenas fue descubierto en 2006 y existe sólo por aproximadamente 1 milisegundo antes de decaer. Menos de 10 átomos de este elemento se han producido. La energía de ionización para 118 aún no se ha medido. ¿Cuál sería su predicción del valor de esta energía de ionización?

a) aproximadamente 0 eV (el átomo es inestable)

b) aproximadamente 2 eV

c) aproximadamente 5 eV

d) aproximadamente 10 eV

e) aproximadamente 20 eV

más electrones a una subcapa de cantidad de movimiento angular dada. Esta tendencia indica cómo podemos entender muy bien la química a partir de la comprensión de las funciones de onda de mecánica cuántica de electrones en un potencial central de Coulomb. Parece milagroso que esta comprensión general de átomos con muchos electrones pueda obtenerse a partir de la solución del comparativamente simple átomo de hidrógeno con sólo un electrón. No obstante, a juzgar a partir de los datos experimentales sobre las energías de ionización, el principio general sí funciona.

EJEMPLO 38.3 Energía de ionización del átomo de helio

Como hemos analizado en esta sección, la energía de ionización de helio vale 24.6 eV. Suponga que tenemos un átomo de helio ($Z = 2$) con dos electrones en la capa $n = 1$. Estos dos electrones están en el estado base, pero interactúan entre sí.

PROBLEMA

Estime la energía de ionización de helio.

SOLUCIÓN

La energía del estado estacionario de electrones, si no interactúan entre sí, está dada por la ecuación 38.32:

$$E_1 = -\frac{\mu k^2 Z^2 e^4}{2\hbar^2}.$$

La masa reducida está ahora más cerca de la masa del electrón porque la masa del núcleo de helio es aproximadamente cuatro veces más que la masa de un protón. La energía del estado base para uno de los electrones en el átomo de helio es

$$E_1 = -\frac{\mu k^2 Z^2 e^4}{2\hbar^2} = -Z^2\frac{\mu k^2 e^4}{2\hbar^2} = -Z^2\left(13.6\text{ eV}\right)$$
$$E_1 = -4\left(13.6\text{ eV}\right) = -54.4\text{ eV}.$$

Podemos estimar la energía de la interacción entre los dos electrones si imaginamos que los dos electrones se repelen entre sí porque ambos tienen una carga negativa. Por lo tanto, los electrones tratarán de estar lo más lejos entre sí que sea posible. El modelo de Bohr supone que los electrones están en una órbita con un radio fijo, así que los dos electrones estarán en lados opuestos de esta órbita, lo que significa que están separados por el diámetro de la órbita. El radio de la órbita está dado por la ecuación 38.6 con e^2 reemplazado por Ze^2:

$$r = \frac{\hbar^2}{\mu k Z e^2} = \frac{a_0}{Z} = a_0/2.$$

La energía potencial eléctrica de los dos electrones separados por una distancia d está dada en el capítulo 23 como $U = ke^2/d$. Esta energía es positiva, lo que significa que reduce la energía requerida para ionizar el átomo de helio. La energía potencial eléctrica es

$$U = \frac{ke^2}{d} = \frac{ke^2}{2\left(a_0/2\right)} = \frac{\left(8.99\cdot10^9\text{ N m}^2/\text{C}^2\right)\left(1.602\cdot10^{-19}\right)^2}{\left(5.295\cdot10^{-11}\text{ m}\right)} = 4.36\cdot10^{-18}\text{ J} = 27.2\text{ eV}.$$

La diferencia entre la energía del estado base y la energía potencial eléctrica entre los dos electrones es 27.2 eV, lo que es cerca de la energía de ionización medida de 24.6 eV.

DISCUSIÓN

Este análisis es una simplificación excesiva. La interacción real entre los dos electrones es más complicada. Sin embargo, aquí obtenemos una idea de la magnitud de las energías involucradas.

Producción de rayos X

En varias ocasiones se han analizado los rayos X en este libro. Es probable que el descubrimiento de los rayos X por Wilhelm Conrad Röntgen (1845-1923) en 1895 fuera uno de los eventos que diera inicio a la era moderna de la física. Los rayos X son radiación que penetra y que consiste en fotones de alta energía. Las energías de fotones normales que se emplean para rayos X de diagnóstico médico están entre 25 keV y 140 keV, con mamografías que usan normalmente una energía máxima de 25 keV y rayos X dentales cuya energía máxima normal es de 60 keV. Los rayos X para el escaneo de equipaje en aeropuertos tienen energías de hasta 160 keV. Todos estos rayos X pueden ser producidos por tubos de rayos X (figura 38.20).

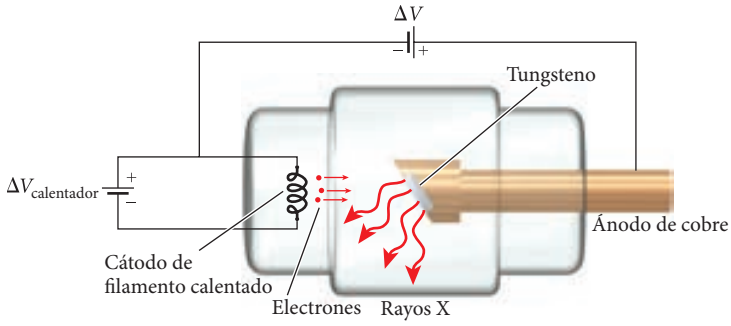


FIGURA 38.20 Diagrama esquemático de un tubo de rayos X.

¿Cómo funciona un tubo de rayos X? El principio físico es sencillo: un filamento metálico es calentado y emite electrones desde su superficie. Estos electrones luego son acelerados a través de una diferencia de potencial electrostático ΔV. Estos electrones impactan sobre la superficie del ánodo que normalmente está hecho de metal, convencionalmente de tungsteno. Cuando los electrones impactan en la superficie del metal, pueden producir rayos X de dos diferentes maneras. Una es *bremsstrahlung* (palabra alemana para "radiación de frenado"). Cuando los electrones penetran la superficie del metal, experimentan una fuerte desaceleración, que a su vez causa la emisión de fotones. Este proceso genera una distribución continua de fotones que es indicada por la línea interrumpida en la figura 38.21. Observe que esta distribución continua termina en una energía máxima que es dada por la energía cinética total ganada por el electrón del proceso de aceleración mediante el potencial electrostático, $E_{máx} = e\Delta V$ convertido en un solo fotón de energía $hf_{máx} = \dfrac{hc}{\lambda_{mín}}$. Los rayos X de baja energía no pueden penetrar a través de las paredes del tubo de rayos X. Por lo tanto, se corta el continuo de rayos X con energías bajas también, como se indica en la figura.

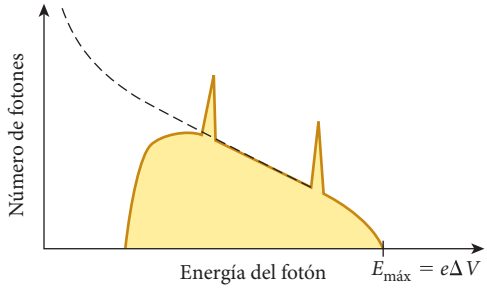


FIGURA 38.21 Esbozo de un espectro de rayos X con un continuo de *bremsstrahlung* más líneas agudas de transiciones de electrones entre capas atómicas.

El otro proceso de producir rayos X se debe a los electrones acelerados colisionando con electrones en los átomos del ánodo y removiéndolos de sus capas atómicas. Cuando se elimina un electrón profundamente ligado de las capas interiores, entonces un electrón de las capas exteriores puede hacer una transición a estas capas interiores y emitir un fotón de una energía fija. Este proceso es exactamente el mismo que aquel que lleva a las líneas espectrales de hidrógeno que se discutió en detalle en la sección 38.2. Sin embargo, la diferencia más importante es que átomos con $Z > 1$ tienen electrones que están ligados más fuertemente, y de modo correspondiente las energías de los fotones son mucho más grandes que en el espectro de líneas de hidrógeno. Las resultantes líneas discretas aparecen sobrepuestas como picos arriba del continuo de *bremsstrahlung*, como se ilustra para dos transiciones en la figura 38.21. Puesto que la energía de los fotones es dada como la diferencia entre las energías de los estados iniciales y finales del electrón, estos picos discretos son característicos del material del ánodo que se utiliza.

Estas líneas se llaman de acuerdo con la capa (capa K para $n = 1$, capa L para $n = 2$, ...) en la que transita el electrón, y un subíndice (α, β, ...) correspondiente a la capa superior, desde la cual transita el electrón. Un rayo K_α corresponde a la transición de la capa $n = 2$ a la capa $n = 1$.

Incluso podemos hacer predicciones para las energías de los rayos X a partir de estas transiciones de los electrones entre las capas atómicas. En la ecuación 38.32 hemos declarado que la energía del electrón más interior es $E_1 = -\mu k^2 Z^2 e^4/2\hbar^2 = -(13.6\text{ eV})Z^2$. Nuestras energías de transición deben ser un factor de Z^2 más grande que aquellas en el átomo de hidrógeno. También podemos tomar en cuenta que para las capas exteriores, los electrones interiores parcialmente protegen esta carga nuclear, lo que debe resultar en un factor de mejora $(Z - Z_{pantalla})^2$ sobre el caso de hidrógeno. La carga de protección $Z_{pantalla}$ depende sólo de la capa del electrón bajo consideración, pero no de la carga del núcleo, Z. Por lo tanto, podemos predecir, a partir de nuestra simple consideración, que la energía de los rayos X correspondiente a una determinada transición en el átomo tiene que depender del cuadrado de la carga nuclear. Esto significa que una gráfica de la raíz cuadrada de la energía de rayos X resultante de una determinada transición debe mostrar una dependencia lineal de la carga nuclear. Este tipo de gráfica fue producido primero por Henry Moseley (1887-1915) en 1913 y contribuyó inmensamente para convencer a la comunidad científica de la validez de los modelos atómicos.

38.5 Ejercicio en clase

Cuando observa el espectro de rayos X en la figura 38.21, se le dice que una de las líneas corresponde a una transición de la capa K y la otra a una transición de la capa L. ¿Cuál de las siguientes declaraciones es verídica?

a) La línea con la mayor energía de fotones corresponde a la transición de la capa K.

b) La línea con la mayor energía de fotones corresponde a la transición de la capa L.

c) Cualquiera de las líneas podrá corresponder a cualquiera de las transiciones, dependiendo de la diferencia del potencial electrostático aplicada al tubo de rayos X.

d) Esta pregunta no se puede decidir, a menos que sepamos qué material fue utilizado para el ánodo.

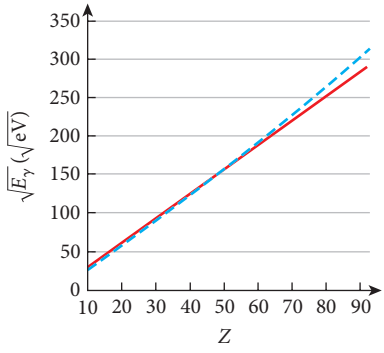


FIGURA 38.22 Gráfica del tipo Moseley de la raíz cuadrada de la energía de rayos X *versus* la carga nuclear. La línea interrumpida azul representa los datos experimentales y la línea sólida roja indica la predicción teórica.

La figura 38.22 muestra una gráfica del tipo introducido por Moseley para la raíz cuadrada de la energía de rayos X de la transición K_α para todos los átomos de neón hasta uranio. La línea interrumpida azul representa los datos experimentales que fueron recopilados por el National Institute of Standards and Technology. La línea roja está basada en la teoría de que la dependencia de la energía de los rayos X de la carga es dada por $(Z-Z_{\text{pantalla}})^2$, con Z_{pantalla} independiente del núcleo en cuestión. (Para esta gráfica, $Z_{\text{pantalla}} = 1$ porque el otro electrón aún en la capa K parcialmente protegerá la carga nuclear así que parece 1 menos que su valor original.) Se puede ver que nuestra teoría es una buena aproximación a los datos experimentales, con pequeñas desviaciones visibles sólo para los átomos más pesados.

38.5 Láseres

Originalmente la palabra **láser** fue un acrónimo para *L*ight *A*mplification by *S*timulated *E*mission of *R*adiation (amplificación de luz por emisión estimulada). Actualmente, la palabra *láser* es tan común que no se escribe con puras mayúsculas como en el caso de los acrónimos. Los láseres, inventados en 1960, se utilizan hoy día en todo tipo de aplicaciones prácticas, como reproductores y grabadoras de Blu-ray, DVD y CD, cirugía láser, apuntadores láser, así como en sistemas de guía, de medida de precisión y de peritaje topográfico. Los láseres existen en una gran variedad de tamaños, potencia de salida, colores de rayo y materiales. Sin embargo, unas cuantas características son comunes en prácticamente todos los láseres. Primero que nada, todos deben tener un medio (un gas, líquido o sólido) en el cual se pueden excitar átomos a un mayor estado de energía. Luego debe ser posible crear una inversión de población, en la que más átomos están en el estado excitado que en el estado base. En segundo lugar, un láser debe tener una cavidad resonante, por lo regular usando simplemente un par de espejos paralelos. En tercer lugar, un láser debe tener un medio para bombear energía en el medio del láser.

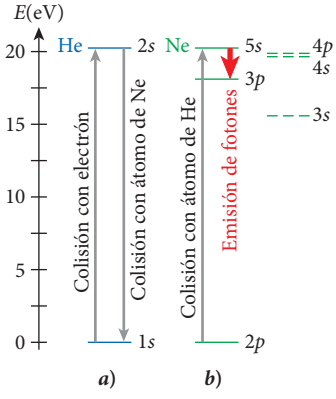


FIGURA 38.23 Niveles de energía en relación con sus respectivos estados base para *a*) átomos de helio y *b*) átomos de neón.

Explicaremos la física básica involucrada mediante el uso del ejemplo del láser de gas helio/neón (He-Ne). Los niveles de energía más bajos de helio y neón se muestran en la figura 38.23. Los dos electrones de valencia del helio residen en la capa más baja posible, la capa 1*s*, como se analizó en la sección previa. Los diez electrones de neón llenan las subcapas 1*s*, 2*s* y 2*p*. Los electrones de valencia del neón en su estado base residen en la capa 2*p*.

La figura 38.23 muestra los estados base de los dos átomos (azul para helio, verde para neón) como líneas horizontales con cero energía. El más bajo estado excitado posible para un solo electrón en helio es el estado 2*s*, que tiene una energía de 20.61 eV arriba del estado base. Fotones conducen cantidad de movimiento angular $\ell = 1\hbar$, y tanto los estados 1*s* como 2*s* tienen cantidad de movimiento angular cero, así que no es posible que un fotón cause una transición del estado 1*s* al estado 2*s* ni del estado 2*s* al estado 1*s*.

La figura 38.23*b*) muestra los niveles de energía más bajos de un solo electrón en el átomo de neón. (Los otros nueve electrones permanecen en sus respectivas capas: dos en cada estado de cantidad de movimiento angular 1*s* y 2*s*, y cinco en el estado de cantidad de movimiento angular 2*p*.) Hemos separado visualmente en dos columnas los estados de interés más alto para el presente propósito (2*p*, 3*p* y 5*s*, líneas sólidas verdes) de los que son de menor interés para el presente proceso (3*s*, 4*s* y 4*p*, líneas punteadas verdes). La diferencia de energía entre el estado base 2*p* y el estado excitado 5*s* del neón es 20.66 eV, muy cerca de los 20.61 eV por el cual el estado 2*s* está arriba del estado 1*s* del helio. La diferencia entre estas dos energías es sólo 0.05 eV, lo que es muy cercano a la energía cinética media de las moléculas del gas a temperatura ambiental (vea el ejemplo 19.4). La energía del estado 3*p* del neón es 18.70 eV arriba del estado base. Una transición entre el estado 3*p* (cantidad de movimiento angular $\ell = 1\hbar$) al estado 5*s* (cantidad de movimiento angular 0) es posible, por ende, por la absorción de un fotón de longitud de onda (vea la ecuación 38.8):

$$E_{5s} = E_{3p} + \frac{hc}{\lambda} \Rightarrow$$

$$\lambda = \frac{hc}{E_{5s} - E_{3p}} = \frac{1\,240\ \text{eV nm}}{(20.66 - 18.70)\ \text{eV}} = \frac{1\,240\ \text{eV nm}}{1.96\ \text{eV}} = 633\ \text{nm}.$$

Por el contrario, la transición del estado 5*s* a 3*p* procede vía la emisión de un fotón de longitud de onda 633 nm. Este proceso causa la emisión de luz roja, lo que es característico para este tipo de láser.

Se podrá preguntar por qué el estado 5*s* no puede emitir un fotón y tener una transición al estado 4*p*. De hecho, esta transición también se observa en la práctica y corresponde a una longitud de onda del fotón de 3 390 nm. Otra posible transición es entre los estados 4*s* y 3*p*, que causa la emisión de un fotón con una longitud de onda de 1 150 nm. En total, más de 10 transiciones de láser se conocen en este sistema, pero por cuestiones prácticas la más útil es la transición de 5*s* a 3*p* porque se encuentra en la región visible.

Emisión estimulada e inversión de población

La figura 38.24 ilustra los posibles procesos de interacción de fotones con átomos. El análisis de las líneas espectrales en las primeras dos secciones de este capítulo examinaba la conexión entre los estados de transición de diferentes energías en átomos y la emisión y absorción de fotones.

En la figura 38.24*a*) ilustramos la emisión de un fotón desde un estado excitado de un átomo y la absorción de un fotón con la energía apropiada que lleva a la formación del estado excitado en el átomo. La figura 38.24*b*) muestra lo que pasa si un gran número de átomos está presente en un sistema, de los que unos cuantos están en el estado excitado. Los átomos excitados decaen por emisión de un fotón de energía fija, pero la dirección de emisión es azarosa. Finalmente, la figura 38.24*c*) muestra las condiciones para la **emisión estimulada**: un número de fotones coherentes, todos con la misma energía y moviéndose en la misma dirección espacial, se envían dentro de un sistema de átomos, para el cual la población de átomos en el estado con mayor energía es más grande que la población con menos energía. Los fotones son bosones, así que prefieren ocupar estados cuánticos que ya están ocupados por otros fotones. Por lo tanto, la presencia del gran número de fotones coherentes causa la emisión preferentemente de fotones al mismo estado cuántico (misma energía y misma dirección de movimiento) ya ocupado por los fotones existentes.

Para que ocurra una emisión estimulada, los fotones coherentes enviados al sistema deben tener la misma energía que los fotones emitidos, que es la diferencia de energía entre los dos estados en el átomo. Entonces, cada fotón de luz coherente enviado al sistema de átomos también puede ser absorbido por un átomo en el estado de energía más bajo, levantándolo al estado de energía más alto. Si se encuentran más átomos en el estado de energía más bajo que en el estado de energía más alto, el efecto neto es una reducción global del número de fotones. Por ello, la "amplificación de luz por medio de la emisión estimulada" sólo puede ser exitosa si la población de átomos en estados de energía más altos es mayor que la población con energía más baja.

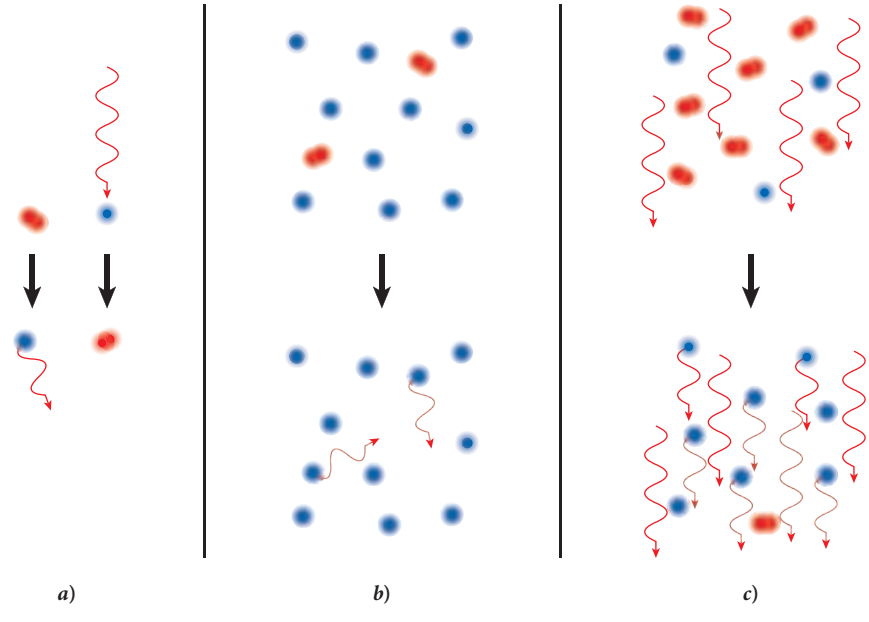


FIGURA 38.24 Interacción de fotones (ondas sinusoidales rojas) con átomos (puntos azules para el estado base, puntos rojos para el estado excitado). *a*) Procesos de emisión y absorción para un átomo aislado. *b*) Decaimiento de átomos excitados en una mezcla de átomos en el estado base y el estado excitado. *c*) Emisión estimulada de fotones de una mezcla de población invertida de átomos en los estados excitado y base.

38.6 Ejercicio en clase

¿Cuál es la proporción de población del estado 5*s* con relación al estado 3*p* a una temperatura de 5 000 K?

a) $1.2 \cdot 10^{-33}$ *d*) 0.51

b) $4.3 \cdot 10^{-23}$ *e*) 2.4

c) 0.011

El capítulo 19 mostró que la probabilidad de que átomos (o moléculas) en un gas tengan una energía E a una temperatura dada T es proporcional al factor exponencial $e^{-E/k_B T}$. Por lo tanto, la proporción de la población del estado de la energía más alta a la población del estado de energía más bajo es

$$\frac{n_{\text{más alto}}}{n_{\text{más bajo}}} = e^{-\Delta E/k_B T},$$

donde ΔE es la diferencia de energía entre los estados de energía más altos y más bajos. Insertemos algunos números típicos. Previamente hemos encontrado que la diferencia de energía entre los estados 5*s* y 3*p* en neón es $\Delta E = 1.96$ eV. A temperatura ambiental ($T = 300$ K), esto significa que para cada átomo encontrado en el estado 3*p* existen solamente $e^{-1.96/(300 \cdot 8.617 \cdot 10^{-5})} = 1.2 \cdot 10^{-33}$ átomos en el estado 5*s*. (Aquí utilizamos la expresión de la constante de Boltzmann en la unidad convencional de $k_B = 8.617 \cdot 10^{-5}$ eV/K.)

Puesto que una diferencia de energía positiva ΔE siempre implica que $e^{-\Delta E/k_B T} < 1$, la población del estado con energía más alta siempre es menos que con energía más baja si un sistema de átomos está en equilibrio térmico.

Lograr la inversión de población requerida para la amplificación de luz a través de emisión estimulada requiere sistemas para los cuales existen **estados metaestables**; es decir, estados que tienen largas vidas porque un simple decaimiento está prohibido. El esquema de niveles de helio y neón en la figura 38.23 muestra que el estado 2*s* en helio es justamente uno de estos estados metaestables, porque no puede decaer vía la emisión de un solo fotón. Este estado puede ser poblado por medio de colisiones de los átomos de helio con electrones, "bombeando" de este modo al estado excitado. Esta parte del láser funciona de manera parecida a un simple anuncio de neón, en el que se excitan átomos de gas por medio de una descarga de electrones. Los átomos de helio luego pueden transferir esta energía a los átomos de neón en el estado 5*s*, que tiene aproximadamente la misma energía con relación a su estado estacionario, por medio de colisiones entre átomos de helio excitados con átomos de neón en el estado base. Si se bombea energía suficiente al sistema, se puede lograr la inversión de población entre los estados 5*s* y 3*p*, poblando el estado 5*s* más rápidamente antes de que pueda decaer al estado 3*p*. La utilización de un estado metaestable para lograr la inversión de población es un tema muy común en todos los sistemas de láser.

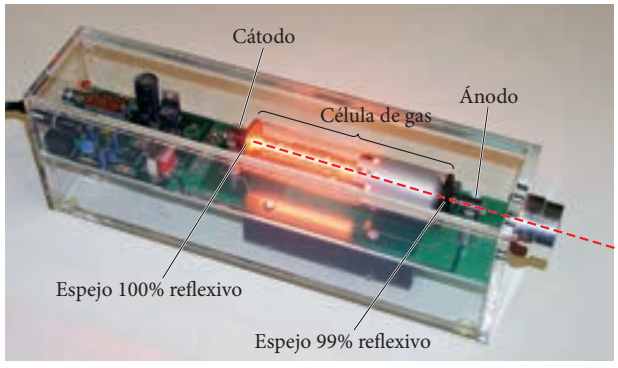


FIGURA 38.25 Modelo de demostración de un láser. El medio de la acción láser, una mezcla de gas de helio y neón, es encerrada entre dos espejos paralelos. El rayo láser propio no está visible, pero está indicado por la línea interrumpida roja.

La figura 38.25 muestra un modelo de demostración de un láser de helio/neón. La descarga para bombear el medio de la acción láser toma lugar en la célula de gas. Es encerrado entre un par de espejos paralelos que rebotan a los fotones coherentes de un lado a otro muchas veces para maximizar la emisión estimulada. El espejo del lado derecho no es perfectamente reflexivo, únicamente al 99%; esto permite que los rayos láser salgan de la célula.

EJEMPLO 38.4 Número de fotones de un láser de rubí pulsante

Un láser de rubí consiste principalmente en alúmina (Al_2O_3) y una cantidad pequeña de cromo, que es responsable del color rojo del rubí. Este láser emite un pulso de luz ($\lambda = 685$ nm) con una potencia de 3.00 kW a través de un periodo de 10.0 ns.

PROBLEMA

¿Cuántos átomos de cromo experimentan emisión estimulada para producir este pulso?

SOLUCIÓN

Cada átomo de cromo que experimenta emisión estimulada emite un fotón. La energía total del pulso es igual al número de fotones, que es igual al número de átomos de cromo excitados, multiplicado por la energía de cada fotón. La energía total de la luz contenida en el pulso E_{total} es igual a la potencia P del pulso multiplicada por la duración t del pulso

$$E_{\text{total}} = Pt = (3.00 \text{ kW})(10.0 \text{ ns}) = 3.0 \cdot 10^{-5} \text{ J}.$$

La energía de cada fotón es

$$E = hf = h\frac{c}{\lambda} = \left(6.626 \cdot 10^{-34}\ \text{J s}\right)\frac{3.00 \cdot 10^{8}\ \text{m/s}}{685 \cdot 10^{-9}\ \text{m}} = 2.90 \cdot 10^{-19}\ \text{J}.$$

Por lo tanto, el número de átomos de cromo N que experimenta emisión estimulada durante el pulso es

$$N = \frac{E_{\text{total}}}{E} = \frac{3.00 \cdot 10^{-5}\ \text{J}}{2.90 \cdot 10^{-19}\ \text{J}} = 1.03 \cdot 10^{14}.$$

El número de átomos de cromo se puede comparar con el número total de átomos en el rubí de aproximadamente 10^{23}.

Investigación con láseres

Los láseres vienen en una inmensa variedad. Los típicos apuntadores láser emiten luz con una potencia de hasta 5 mW y normalmente utilizan dispositivos semiconductores llamados diodos. Láseres de dióxido de carbono, otro tipo de láser de gas, emiten rayos láser con longitudes de onda de 9.6 y 10.6 μm con una potencia de hasta 100 kW. Estos láseres se utilizan en aplicaciones industriales para cortes y soldadura. Otros dispositivos incluyen láseres químicos, láseres de colorante y láseres de estado sólido.

La investigación actual sobre láseres avanzados se enfoca en la generación de pulsos láser extremadamente cortos, con una duración de menos de un picosegundo (10^{-12} s). Con esta resolución de tiempo comienza a ser posible obtener informaciones sobre el establecimiento de enlaces químicos en tiempo real.

Otro campo de interés en la investigación actual es el de láseres de electrones libres, en el que el medio de la acción láser es un haz relativista de electrones. El haz de electrones pasa a través de un campo magnético que está alternando periódicamente y causa "meneos" transversales en el movimiento del electrón y genera una radiación electromagnética coherente. Un rayo láser generado de esta manera es ajustable a través de un amplio rango de longitudes de onda, desde milímetros hasta el rango visible.

Mediante el uso de iones, en lugar de átomos, es posible producir láseres de rayos X, que son láseres con un haz de energía mucho más alto porque cada fotón tiene una energía más alta que en el caso de láseres ópticos. Ésta también es un área de investigación muy activa, en particular por su aplicación potencial médica y militar.

El láser más grande del mundo fue completado en 2009 y se encuentra en la National Ignition Facility (NIF, vea las figuras 38.26 y 38.27) en el Lawrence Livermore National Laboratory

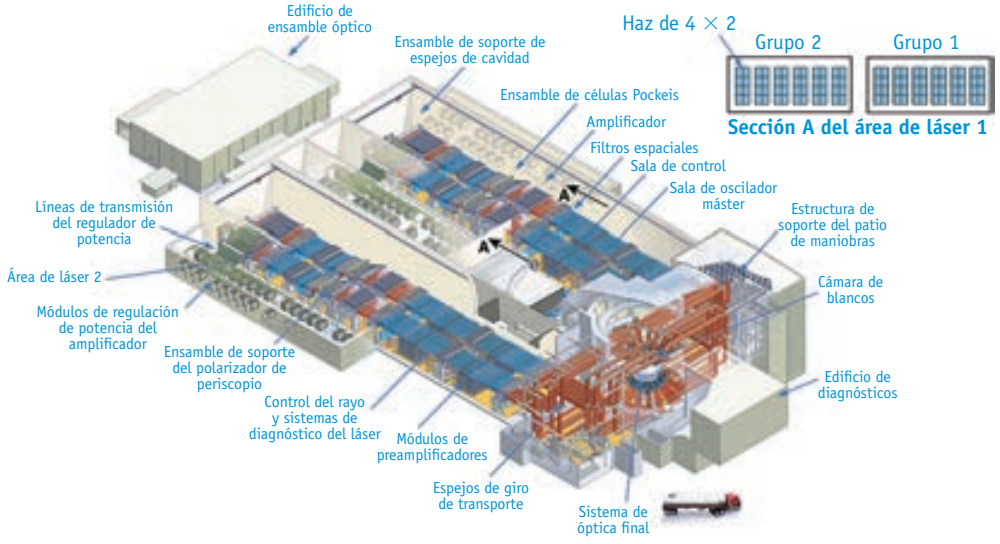


FIGURA 38.26 Plano de vista transversal del sistema de láser de la National Ignition Facility (NIF). Los láseres están enfocados en los gránulos de fusión en la cámara de blancos.

FIGURA 38.27 La trayectoria del rayo del grupo 3 en el área de láser 2 del NIF, que contiene 6 haces de 8 rayos para un total de 48 líneas de rayos. Fue completado en octubre de 2006, y en diciembre de 2006 se pusieron en marcha, en forma operacional, los 6 haces. Los rayos láser viajan más de 1 000 pies antes de alcanzar la cámara de blancos.

en California. Se trata de un láser pulsado que consiste en 192 haces separados y produce pulsos láser de corta vida de una energía total de 1.8 MJ y una duración de 4 ns. Por lo tanto, la potencia pico de este láser es

$$P_{\text{máx}} = E/\Delta t = (1.8\cdot 10^{6}\ \text{J})/(4\cdot 10^{-9}\ \text{s}) = 5\cdot 10^{14}\ \text{W} = 500\ \text{TW}.$$

Este láser en el NIF se utiliza para estudiar la fusión nuclear.

LO QUE HEMOS APRENDIDO | GUÍA DE ESTUDIO PARA EXAMEN

- Las líneas delgadas observadas en los espectros de los átomos se deben a las transiciones de electrones de un estado a otro.
- Las longitudes de onda de los fotones emitidas por un átomo de hidrógeno excitado están dadas por

$$\frac{1}{\lambda} = R_{\text{H}}\left[\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2}\right] \quad \text{con } n_1 < n_2,$$

  donde $R_{\text{H}} = 1.097373\cdot 10^{7}\ \text{m}^{-1}$ es la constante de Rydberg.
- El modelo de Bohr del átomo fue un éxito temprano en la explicación de los espectros de líneas observados. Se basa sobre la condición de cuantización para la cantidad de movimiento angular

$$L = |\vec{r}\times\vec{p}| = r\mu v = n\hbar, \quad \text{con } n = 1,2,3,....$$

- Los radios orbitales en el modelo de Bohr son dados por

$$r = \frac{\hbar^2}{\mu k e^2} n^2 = a_0 n^2.$$

  El radio de Bohr es $a_0 = 5.295\cdot 10^{-11}$ m = 0.05295 nm = 0.5295 Å.
- Para ir más allá del modelo de Bohr y resolver la función de onda del electrón del átomo de hidrógeno, necesitamos resolver la ecuación de Schrödinger para el electrón en el potencial de Coulomb del núcleo,

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu}\nabla^2\psi(r,\theta,\phi) - k\frac{e^2}{r}\psi(r,\theta,\phi) = E\psi(r,\theta,\phi).$$

- La solución completa de la ecuación de Schrödinger para este problema se puede obtener mediante la separación de variables, $\psi(r, \theta, \phi) = f(r)g(\theta)h(\phi)$.
- Las partes angulares de la solución son armónicos esféricos, que simultáneamente son funciones propias del operador de la cantidad de movimiento angular al cuadrado, $\mathbf{L}^2 Y_\ell^m(\theta,\phi) = \ell(\ell+1)\hbar^2 Y_\ell^m(\theta,\phi)$, y del operador de la proyección z del vector de cantidad de movimiento angular, $\mathbf{L}_z Y_\ell^m(\theta,\phi) = m\hbar Y_\ell^m(\theta,\phi)$.
- La solución completa para la función propia de hidrógeno es el producto de la parte angular y la parte radial, $\psi_{n\ell m}(r, \theta, \phi) = f_{n\ell}(r)Y_{\ell m}(\theta, \phi)$.
- Los números cuánticos de estas soluciones son los números cuánticos radiales n = 1,2,3,...; el número cuántico de la cantidad de movimiento angular orbital ℓ = 0,1,...,n − 1, y el número cuántico magnético m = −ℓ, ..., ℓ. El valor propio de energía correspondiente a una solución particular de la función propia depende sólo del número cuántico radial y es el mismo que para el modelo de Bohr,

$$E_n = -\frac{1}{n^2}E_0 = -\frac{1}{n^2}\frac{\mu k^2 e^4}{2\hbar^2}.$$

- La función de onda del estado base del hidrógeno es

$$\psi_{100}(r,\theta,\phi) = \frac{1}{\sqrt{\pi}a_0^{3/2}}e^{-r/a_0}.$$

- El número total $N(n)$ de posibles funciones de onda en una capa dada con número cuántico radial n es

$$N(n) = \sum_{\ell=0}^{n-1}(2\ell+1) = n^2.$$

- Las funciones de onda en otros átomos se pueden entender de una manera parecida a las funciones de onda del hidrógeno. El principio de exclusión de Pauli declara que cada estado posible está ocupado por un máximo de dos electrones, uno con espín abajo, y uno con espín arriba.
- El orden en el cual se llenan los diferentes estados de cantidad de movimiento angular sigue sus energías y es 1*s*, 2*s*, 2*p*, 3*s*, 3*p*, 4*s*, 3*d*, 4*p*, 5*s*, 4*d*, 5*p*, 6*s*, 5*d*, 4*f*, 6*p*, 7*s*, 6*d* y 5*f*.
- Los láseres funcionan sobre la base de la inversión de población. Los electrones son elevados a un estado metaestable y experimentan la emisión estimulada de fotones con una energía correspondiente a transiciones entre el estado metaestable y el estado base.

TÉRMINOS CLAVE

espectrómetro, p. 1252
fórmula de Rydberg, p. 1253
constante de Rydberg, p. 1253
espectros de línea, p. 1255
masa reducida, p. 1255
modelo del átomo de hidrógeno de Bohr, p. 1256
radio de Bohr, p. 1256
diagrama de niveles de energía, p. 1258
capa, p. 1265
armónicos esféricos, p. 1266
número cuántico radial, p. 1268
número cuántico de la cantidad de movimiento angular orbital, p. 1268

número cuántico magnético, p. 1268
ionización, p. 1271
energía de ionización, p. 1271
gas noble, p. 1272
tabla periódica de elementos químicos, p. 1273
electrones de valencia, p. 1273
láser, p. 1276
emisión estimulada, p. 1277
estados metaestables, p. 1278

NUEVOS SÍMBOLOS Y ECUACIONES

$R_H = 1.097373 \cdot 10^7\ m^{-1}$, constante de Rydberg

$a_0 = 5.295 \cdot 10^{-11}$ m = 0.05295 nm = 0.5295 Å, radio de Bohr

$Y_{\ell m}(\theta,\phi)$, armónicos esféricos

$\psi_{n\ell m}(r,\theta,\phi) = f_{n\ell}(r)Y_{\ell m}(\theta,\phi)$, función de onda completa para un electrón en el átomo de hidrógeno

RESPUESTAS A OPORTUNIDADES DE AUTOEVALUACIÓN

38.1 Necesitamos tomar el límite de $n_2 \to \infty$ y encontramos $\frac{1}{\lambda} = R_H\left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2}\right) \xrightarrow[n_2\to\infty]{} \frac{R_H}{n_1^2}$. Con $R_H = 1.097373 \cdot 10^7\ m^{-1}$ encontramos para las series de Lyman ($n_1 = 1$), Palmer (2), Paschen (3) y Brackett (4): λ_{min} = 91.1 nm, 365 nm, 820 nm, 1 458 nm.

38.2 Balmer $n_1 = 2$, $n_2 = n$: $\frac{1}{\lambda} = R_H\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{n^2}\right) = R_H\left(\frac{n^2-4}{4n^2}\right)$.

Por lo tanto, las longitudes de onda en esta serie son:

$$\lambda = \frac{4}{R_H}\frac{n^2}{n^2-4} = (364.5\ \text{nm})\frac{n^2}{n^2-4}.$$

38.3 $\psi_{211}(x,0,z)$ tiene una forma como $\psi_{210}(x,0,z)$, pero rotado 90° en sentido opuesto al de las manecillas del reloj en el plano xz.

38.4 Inserte la función de onda $\psi_{100}(r,\theta,\phi) = \frac{1}{\sqrt{\pi}a_0^{3/2}}e^{-r/a_0}$ en la ecuación de Schrödinger $-\frac{\hbar^2}{2\mu}\frac{1}{r}\frac{d^2}{dr^2}(r\psi(r)) - k\frac{e^2}{r}\psi(r) = E\psi(r)$. Primero, tome la derivada: $\frac{d}{dr}\left(r\frac{1}{\sqrt{\pi}a_0^{3/2}}e^{-r/a_0}\right) = \frac{1}{\sqrt{\pi}a_0^{3/2}}e^{-r/a_0}\left(1-\frac{r}{a_0}\right)$; luego tome la segunda derivada: $\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{\sqrt{\pi}a_0^{3/2}}e^{-r/a_0}\left(1-\frac{r}{a_0}\right)\right) = -\frac{e^{-r/a_0}}{a_0\sqrt{\pi}a_0^{3/2}}\left(2-\frac{r}{a_0}\right)$. Inserte de regreso:

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2\mu}\frac{1}{r}\right)\left[-\frac{e^{-r/a_0}}{a_0\sqrt{\pi}a_0^{3/2}}\left(2-\frac{r}{a_0}\right)\right] - k\frac{e^2}{r}\left(\frac{1}{\sqrt{\pi}a_0^{3/2}}e^{-r/a_0}\right) =$$

$$E\left(\frac{1}{\sqrt{\pi}a_0^{3/2}}e^{-r/a_0}\right).$$

Ahora cancele factores comunes y encuentre $E = -\frac{\mu k^2 e^4}{2\hbar^2}$, lo que significa que nuestra función $\psi_{100}(r,\theta,\phi)$ es realmente una solución para la ecuación de Schrödinger con el valor correcto para la energía.

PRÁCTICA PARA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

PROBLEMA RESUELTO 38.1 "Serie de Paschen" para litio doblemente ionizado

Hemos aprendido que las series de Lyman, Balmer, Paschen, Brackett… en el espectro de hidrógeno corresponden a transiciones en el átomo de hidrógeno, en el que el (único) electrón del átomo de hidrógeno "salta" entre dos estados de energía discretos. También podemos observar los espectros de líneas equivalentes en iones de otros átomos con tan sólo un electrón. El litio doblemente ionizado es uno de estos iones.

PROBLEMA

¿Cuál es la longitud de onda de la segunda línea de la serie de Paschen de litio doblemente ionizado?

SOLUCIÓN

PIENSE

El litio tiene el número atómico de $Z = 3$. Iones de litio doblemente ionizado han perdido dos electrones del átomo neutro. Esto deja un electrón en un potencial de Coulomb y obtenemos funciones de onda parecidas al hidrógeno. La única diferencia en nuestro tratamiento del átomo

(*continúa*)

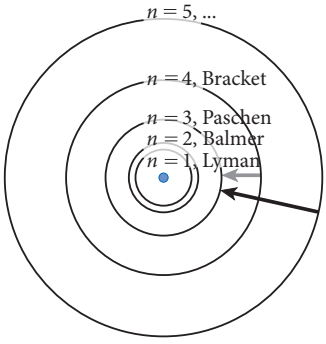


FIGURA 38.28 Segunda línea de la serie de Paschen (en negro).

(*continuación*)

de hidrógeno es que tenemos $-kZe^2/r = -3ke^2/r$ para el potencial de Coulomb en este caso. De este modo, aún es válida nuestra sistemática para los espectros de líneas obtenida para el átomo de hidrógeno, pero tenemos que encontrar la constante de Rydberg apropiada para el presente caso.

ESBOCE

Aunque el modelo del átomo de hidrógeno de Bohr tiene defectos fatales, sigue siendo útil para esbozar un modelo (figura 38.28) y obtener claridad sobre qué transición estamos tratando de calcular.

INVESTIGUE

Las longitudes de onda para espectros parecidos al hidrógeno se dan en la ecuación 38.2:

$$\frac{1}{\lambda} = R_H\left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2}\right) \quad \text{con } n_1 < n_2.$$

Para la constante de Rydberg R_H habíamos correctamente obtenido del modelo de Bohr

$$R_H = \frac{\mu k^2 e^4}{4\pi c\hbar^3},$$

donde μ es la masa reducida del electrón (que para este problema es incluso más cercana a la masa exacta del electrón que en el átomo de hidrógeno, en el que sólo se desviaba por 1 parte en 2 000 del valor real).

Como ya se analizó, en este caso tenemos que reemplazar ke^2 por $3ke^2$ para obtener una constante de Rydberg para el ion de litio doblemente ionizado. Es 9 veces más alto ($(3ke^2)^2 = 9(ke^2)^2 = 9k^2e^4$) que el valor $R_H = 1.097373 \cdot 10^7\ \text{m}^{-1}$ para el átomo de hidrógeno.

Por último, podemos ver del esbozo que $n_1 = 3$ para la serie de Paschen, y que la segunda línea en la serie de Paschen debe tener $n_2 = 5$.

SIMPLIFIQUE

Si insertamos $9R_H$ en lugar de R_H y $n_1 = 3$, $n_2 = 5$ en nuestra fórmula para las longitudes de onda del fotón de transición, obtenemos

$$\frac{1}{\lambda} = 9R_H\left(\frac{1}{9} - \frac{1}{25}\right)$$

o bien

$$\lambda = \left(9R_H\left(\frac{1}{9} - \frac{1}{25}\right)\right)^{-1}.$$

CALCULE

Ya es hora de insertar los números:

$$\lambda = \left(9(1.097373 \cdot 10^7\ \text{m}^{-1})\left(\frac{1}{9} - \frac{1}{25}\right)\right)^{-1} = 1.423855 \cdot 10^{-7}\ \text{m}.$$

REDONDEE

Dentro de las suposiciones declaradas, nuestro resultado es exacto en el sentido de que usamos sólo el valor medido de la constante de Rydberg y valores enteros para los números de transición. Sin embargo, la masa reducida del electrón no es exactamente la misma para el presente problema como para el átomo de hidrógeno, así que tenemos una desviación en el orden de 1 parte en 2 000, y es prudente redondear nuestro resultado a 3 o cuando mucho a 4 dígitos. Nuestra respuesta final es, por lo tanto,

$$\lambda = 1.424 \cdot 10^{-7}\ \text{m} = 142.4\ \text{nm}.$$

VUELVA A REVISAR

La figura 38.4 muestra que las líneas de Paschen en el hidrógeno empiezan en 820 nm. La segunda línea en el espectro de hidrógeno de Paschen por ende debe tener una longitud de onda mayor que 820 nm. Después de nuestra discusión anterior queda claro que nuestro resultado deberá ser un factor de 9 más pequeño en longitud de onda que este valor, lo que es el caso. De este modo tenemos seguridad adicional de que nuestro resultado es confiable.

PREGUNTAS DE OPCIÓN MÚLTIPLE

38.1 La longitud de onda de la cuarta línea en la serie de Lyman es

a) 80.0 nm. *b*) 85.0 nm. *c*) 90.2 nm. *d*) 94.9 nm.

38.2 En un átomo de hidrógeno, el electrón está en el estado $n = 5$. ¿Cuál de los siguientes conjuntos podría corresponder a los estados ℓ, m del electrón?

a) 5, –3 *b*) 4, –5 *c*) 3, –2 *d*) 4, –6

38.3 El muon tiene la misma carga que un electrón, pero una masa que es 207 veces más grande. El muon de carga negativa puede unirse a un protón para formar un nuevo tipo de átomo de hidrógeno. ¿Cómo se compara la energía de enlace $E_{B\mu}$ del muon en el estado base de un átomo de hidrógeno muónico con la energía de enlace E_{Be} de un electrón en el estado base de un átomo de hidrógeno convencional?

a) $|E_{B\mu}| \approx |E_{Be}|$
b) $|E_{B\mu}| \approx 100\,|E_{Be}|$
c) $|E_{B\mu}| \approx |E_{Be}|/100$
d) $|E_{B\mu}| \approx 200\,|E_{Be}|$
e) $|E_{B\mu}| \approx |E_{Be}|/200$

38.4 ¿Cuál de los siguientes se puede usar para explicar por qué no se puede caminar a través de paredes?

a) La repulsión de Coulomb.
b) La fuerte fuerza nuclear.
c) La gravedad.
d) El principio de exclusión de Pauli.
e) Nada de esto.

38.5 ¿Cuántos antinodos existen en un sistema con un número cuántico $n = 6$?

a) 12 *b*) 6 *c*) 3 *d*) 5

38.6 Metales de transición se pueden definir como elementos en los que la capa *d* va de vacío a lleno. ¿Cuántos metales de transición se encuentran en cada periodo?

a) 2 *b*) 6 *c*) 10 *d*) 14

38.7 ¿Cuál es el fotón de longitud de onda más corta que pueda ser emitido por helio ionizado (He^+)?

a) 0.00 nm
b) 22.8 nm
c) 46.0 nm
d) 91.0 nm
e) 365 nm

38.8 Un electrón hizo una transición entre estados permitidos emitiendo un fotón. ¿Cuáles son las constantes físicas que se necesitan para calcular la energía del fotón a partir de la longitud de onda medida? (Seleccione todo lo que aplica.)

a) La constante de Planck, h
b) La carga eléctrica básica, e
c) La velocidad de la luz en el vacío, c
d) La constante de Stefan Boltzmann, σ

PREGUNTAS

38.9 La representación común de un átomo, con electrones trazando órbitas elípticas centradas en el núcleo, es un ícono de la edad atómica. Dado lo que usted sabe de la física de átomos, ¿cuál es el defecto de esta representación?

38.10 Dado que el átomo de hidrógeno tiene un número infinito de niveles de energía, ¿por qué un átomo de hidrógeno en el estado base no puede absorber todas las posibles longitudes de onda de la luz?

38.11 Compare la diferencia de niveles de energía para n creciendo para un pozo infinito cuadrado, un oscilador quantum armónico y el átomo de hidrógeno.

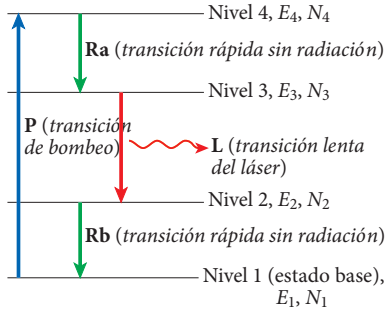
38.12 ¿Qué pasaría a los niveles de energía de un átomo de hidrógeno si la fuerza de Coulomb se duplicara? ¿Qué pasaría con el tamaño de los átomos?

38.13 ¿Qué modelo del átomo de hidrógeno —el modelo de Bohr o el modelo de mecánica cuántica— pronostica que el electrón pasa más tiempo cerca del núcleo?

38.14 Para $\ell < 4$, ¿qué valores de ℓ y m corresponden a las funciones de onda que tienen su máxima probabilidad en el plano xy?

38.15 La regla de Hund, un componente del *Aufbauprinzip* (principio de construcción), declara que conforme se mueve a través de la tabla periódica, con número atómico creciente, las subcapas de electrones disponibles se llenan sucesivamente con un electrón en cada orbital, sus espines todos paralelos; sólo cuando todos los orbitales en una subcapa contienen un electrón, se colocan en los orbitales los segundos electrones con espines opuestos a los primeros. Explique por qué la configuración de electrones del estado base de elementos sucesivos sigue este patrón.

38.16 La figura presenta el diagrama de energía de un láser de cuatro niveles, junto con los índices de tiempo de las varias transiciones involcradas en la operación de un láser de este tipo. Explique por qué las transiciones no radiativas tienen que ser rápidas (mayor índice de transiciones por segundo) en comparación con la transición más lenta del láser.



38.17 La función de onda del átomo de hidrógeno ψ_{200} es cero cuando $r = 2a_0$. ¿Esto significa que el electrón en este estado nunca puede ser observado a una distancia de $2a_0$ del núcleo, o que el electrón nunca puede ser observado pasando a través de la superficie esférica definida por $r = 2a_0$? ¿Existe una diferencia entre estas dos descripciones?

38.18 Un electrón de 10 eV colisiona con (pero no es capturado por) un átomo de hidrógeno en su estado base. Calcule las longitudes de onda de todos los fotones, si es que existen, que se podrían emitir.

PROBLEMAS

Una • y dos •• indican un nivel creciente de dificultad.

Sección 38.1

38.19 ¿Cuál es la longitud de onda más corta de la luz que un átomo de hidrógeno emitirá?

38.20 Determine la longitud de onda de la segunda línea en la serie de Paschen.

38.21 La serie de Pfund resulta de la emisión/absorción de fotones debido a la transición de electrones en un átomo de hidrógeno hacia/desde el nivel de energía $n = 5$ desde/hacia niveles de energía más altos. ¿Cuáles son los fotones de longitud de onda más cortos y más largos emitidos en la serie de Pfund? ¿Están algunos de estos fotones visibles?

38.22 Un electrón en el segundo estado excitado de un átomo de hidrógeno salta al estado base. ¿Cuáles son los posibles colores y longitudes de onda del fotón emitido por los electrones cuando realizan el salto?

Sección 38.2

38.23 Calcule la energía del quinto estado excitado de un átomo de hidrógeno.

38.24 Átomos de hidrógeno son bombardeados con electrones de 13.1 eV. Determine la línea de longitud de onda más corta que el átomo emitirá.

38.25 La constante de Rydberg con una masa finita del núcleo es dada en forma modificada por $R_{\text{modificada}} = R_H/(1+m/M)$, donde m y M son masas de un electrón y un núcleo, respectivamente. Calcule el valor modificado de la constante de Rydberg para

a) un átomo de hidrógeno, y

b) un positronio (en un positronio, el "núcleo" es un positrón que tiene la misma masa que un electrón).

38.26 Un muon es una partícula muy parecida a un electrón. Tiene la misma carga, pero su masa es $1.88 \cdot 10^{-28}$ kg.

a) Calcule la masa reducida para un átomo muónico parecido al hidrógeno que consiste en un solo protón y un muon.

b) Calcule la energía de ionización para un átomo de este tipo, suponiendo que el muon se libere del estado base.

•**38.27** Un átomo de hidrógeno excitado emite un fotón con una energía de 1.133 eV. ¿Cuáles fueron los estados inicial y final del átomo de hidrógeno antes y después de emitir el fotón?

•**38.28** Un fotón de 8.00 eV es absorbido por un electrón en el estado $n = 2$ de un átomo de hidrógeno. Calcule la velocidad final del electrón.

•**38.29** Suponga que los niveles de energía cuantizada de Bohr se aplican a órbitas planetarias. Deduzca una ecuación similar a la ecuación 38.6 para encontrar el radio permitido de las órbitas y estime el número cuántico principal para la órbita de la Tierra.

•**38.30** Demuestre que el periodo de rotación de un electrón en la órbita n-ésima de Bohr está dado por: $T = n^3/(2cR_H)$, con $n = 1,2,3,\ldots$.

Sección 38.3

38.31 ¿Cuáles son los valores más grandes y más pequeños para la cantidad de movimiento angular L de un electrón en la capa $n = 5$?

38.32 Se dice que electrones con el mismo valor del número cuántico n ocupan la misma capa de electrones *K, L, M, N*, etc. Calcule el número máximo permitido de electrones para

a) la capa *K*, *b*) la capa *L*, y *c*) la capa *M*

•**38.33** ¿Cuál es el ángulo entre el vector de cantidad de movimiento angular total y el eje z para un átomo de hidrógeno en el estado base (3,2,1)?

•**38.34** Un átomo de hidrógeno está en el quinto estado excitado, con el número cuántico principal $n = 6$. El átomo emite un fotón con una longitud de onda de 410 nm. Determine la máxima cantidad de movimiento angular orbital posible del electrón después de la emisión.

•**38.35** La función de onda radial para el hidrógeno en el estado 1*s* es dada por $R_{1s} = A_1 e^{-r/a_0}$.

a) Calcule la constante de normalización A_1.

b) Calcule la densidad de probabilidad en $r = a_0/2$.

c) La función de onda 1*s* tiene un máximo en $r = 0$ pero la densidad radial 1*s* tiene su pico en $r = a_0$. Explique esta diferencia.

•**38.36** Para la función de onda $\psi_{100}(r)$ que se muestra en la ecuación 38.30, encuentre el valor de r para el cual la función $P(r) = 4\pi r^2|\psi_{100}(r)|^2$ es un máximo.

••**38.37** Un electrón en un átomo de hidrógeno está en el estado 2*s*. Calcule la probabilidad de encontrar el electrón dentro de un radio de Bohr ($a_0 = 0.05295$ nm) del protón. La función de onda del estado base para el hidrógeno es

$$\psi_{2s}(r) = \frac{1}{4\sqrt{2\pi a_0^3}}\left(2 - \frac{r}{a_0}\right)e^{-r/2a_0}.$$

La integral es un poco tediosa, así que podrá querer considerar el uso de programas matemáticos como Mathcad, Mathematica, etc., o realizar el integral online en http://integrals.wolfram.com/index.jsp.

Sección 38.4

38.38 Calcule la energía necesaria para cambiar un átomo de helio simplemente ionizado a un átomo de helio doblemente ionizado (es decir, cambiarlo de He^+ a He^{2+}). Compárelo con la energía necesaria para ionizar el átomo de hidrógeno. Suponga que ambos átomos estén en su estado fundamental.

38.39 Un ion He^+ consiste en un núcleo (que contiene dos protones y dos neutrones) y un solo electrón. Obtenga el radio de Bohr para este sistema.

•**38.40** Obtenga la longitud de onda de las tres líneas de energía más bajas en el espectro de la serie de Paschen del ion He^+.

•**38.41** La energía de enlace de un electrón extra cuando átomos de As están dopados en un cristal de Si se podría calcular aproximadamente mediante la consideración del modelo de Bohr de un átomo de hidrógeno.

a) Muestre la energía del estado base de átomos parecidos al hidrógeno en términos de la constante dieléctrica y la energía del estado base de un átomo de hidrógeno.

b) Calcule la energía de enlace del electrón extra en un cristal Si. (La constante dieléctrica del Si es aproximadamente 10.0,

y la masa efectiva de electrones extra en un cristal de Si es aproximadamente 20.0% de la de los electrones libres.)

•**38.42** ¿Cuál es la longitud de onda de la primera línea visible en el espectro de litio doblemente ionizado? Empiece apuntando la fórmula para los niveles de energía del electrón en litio doblemente ionizado, y luego considere diferencias de nivel de energía que dan energías en el rango apropiado (visible). Exprese la respuesta en términos de "la transición del estado n al estado n' es la primera visible, con la longitud de onda X".

•**38.43** Siguiendo los pasos resumidos en nuestro tratamiento del átomo de hidrógeno, aplique el modelo de Bohr del átomo para derivar una expresión para

a) el radio de la n-ésima órbita;

b) la velocidad del electrón en la n-ésima órbita, y

c) los niveles de energía en un átomo ionizado parecido al hidrógeno de número de carga Z que ha perdido todos sus electrones excepto uno. Compare los resultados con los correspondientes para el átomo de hidrógeno.

•**38.44** Aplique los resultados del problema anterior para determinar las longitudes de onda máxima y mínima de las líneas espectrales en las series de Lyman, Balmer y Paschen para un átomo ionizado de helio solo (He^{1+}).

Sección 38.5

38.45 Considere un electrón en el átomo de hidrógeno. Si usted es capaz de excitar su electrón de la capa $n = 1$ a la capa $n = 2$ con un láser dado, ¿qué tipo de láser (esto es, comparando longitudes de onda) necesitará para excitar este electrón nuevamente de la capa $n = 2$ a la capa $n = 1$? Explique.

38.46 Un láser de baja potencia tiene una potencia de 0.50 mW y un diámetro de rayo de 3.0 mm.

a) Calcule la intensidad de luz promedio del rayo láser.

b) Compárelo con la intensidad de un foco de 100 W que produce luz que se ve desde 2.0 m de distancia.

38.47 Un láser de rubí consiste principalmente en alúmina (Al_2O_3) y una pequeña cantidad de iones de cromo, responsables de su color rojo. Un láser de este tipo con una potencia de 3.00 kW emite pulsos de luz de una duración de 10.0 ns y una longitud de onda de 685 nm.

a) ¿Cuál es la energía de los fotones en el pulso?

b) Determine el número de átomos de cromo que experimentan emisión estimulada para producir este pulso.

38.48 Usted sostiene en la mano tanto un láser verde de 543 nm y 5.00 mW como un láser rojo de 633 nm y 4.00 mW. ¿Cuál de ellos producirá más fotones por segundo y por qué?

Problemas adicionales

38.49 ¿Cuál es la longitud de onda más corta posible de la serie de Lyman en hidrógeno?

38.50 ¿Cuánta energía se requiere para ionizar el hidrógeno cuando el electrón está en el nivel n-ésimo?

38.51 ¿Por qué porcentaje cambia la masa del electrón si se usa la masa reducida para el átomo de hidrógeno? ¿Cuál sería la masa reducida si el protón tuviera la misma masa que el electrón?

38.52 Demuestre que el número de diferentes estados del electrón posibles para un valor dado de n es $2n^2$.

38.53 La sección 38.2 estableció que se esperaría que un electrón, si se observa en el estado base de hidrógeno, tuviera una velocidad observada de $0.0073c$. ¿Para qué carga atómica Z tendría un electrón del extremo interior una velocidad de aproximadamente $0.500c$ si se considera en forma clásica?

38.54 Se ha colocado una colección de átomos de hidrógeno en el estado excitado $n = 4$. ¿Qué longitudes de onda de fotones serán emitidas por los átomos de hidrógeno cuando transiten de regreso al estado base?

38.55 Considere un átomo de hidrógeno muónico en el que se reemplaza un electrón por un muon con una masa de $105.66\ \text{MeV}/c^2$ que orbita un protón. ¿Cuáles son los primeros tres niveles de energía del muon en este tipo de átomo?

38.56 ¿Cuál es la energía de ionización de un átomo de hidrógeno excitado al estado $n = 2$?

38.57 He^+ es un átomo de helio en el que falta un electrón. Si se trata como un átomo de hidrógeno, ¿cuáles son los tres primeros niveles de energía de este átomo?

38.58 ¿Cuál es la energía de una transición capaz de producir luz de una longitud de onda 10.6 μm? (Ésta es la longitud de onda de luz asociada con un láser infrarrojo comúnmente disponible.)

38.59 ¿Cuál es la energía del electrón en órbita en un átomo de hidrógeno con un número cuántico de 45?

•**38.60** Un haz de electrones incide sobre un gas de átomos de hidrógeno. ¿Cuál es la velocidad mínima que los electrones deben tener para causar la emisión de luz de la transición $n = 3$ a la transición $n = 2$ del hidrógeno?

•**38.61** Encuentre las diferencias de energía entre el estado base del hidrógeno y del deuterio (hidrógeno con un neutrón extra en el núcleo).

•**38.62** Encuentre la proporción de átomos de hidrógeno en el estado $n = 2$ al número de átomos de hidrógeno en el estado $n = 3$ a temperatura ambiental.

•**38.63** Un átomo de hidrógeno excitado, cuyo electrón está en un estado $n = 4$, está inmóvil. Cuando el electrón cae al estado base, ¿podrá el átomo estar en movimiento? De ser así, ¿con qué velocidad?

•**38.64** El radio de la órbita $n = 1$ en el átomo de hidrógeno es $a_0 = 0.053$ nm.

a) Compare el radio de la órbita $n = 6$. ¿Cuántas veces es más grande éste en comparación con el radio $n = 1$?

b) Si un electrón $n = 6$ se relaciona con una órbita $n = 1$ (estado base), ¿cuál es la frecuencia y longitud de onda de la radiación emitida? ¿Qué tipo de radiación fue emitida (visible, infrarroja, etcétera)?

c) ¿Cómo cambiaría su respuesta en *a*) si el átomo fuese en su lugar un átomo de helio simplemente ionizado (He^+)?

•**38.65** Un electrón en un átomo de hidrógeno está en el estado base ($1s$). Calcule la probabilidad de encontrar el electrón dentro de un radio de Bohr ($a_0 = 0.05295$) del protón. La función de onda del estado base para el hidrógeno es: $\psi_{1s}(r) = A_{1s}e^{-r/a_0} = e^{-r/a_0}/\sqrt{\pi a_0^3}$.

39 Física de partículas elementales

LO QUE APRENDEREMOS 1287

39.1 Reduccionismo 1287
Complejidad 1289
39.2 Sondeo de la subestructura 1290
Dispersión clásica 1290
Dispersión de Rutherford 1292
Ejemplo 39.1 Retrodispersión de partículas alfa 1293
Limitaciones cuánticas 1294
Dispersión de ondas cuánticas 1295
39.3 Partículas elementales 1297
Fermiones elementales 1297
Bosones fundamentales e interacciones 1300
Diagramas de Feynman 1303
39.4 Extensiones del modelo estándar 1305
Ejemplo 39.2 Unidades de Planck 1306
Supersimetría y teoría de cuerdas 1308
39.5 Partículas compuestas 1309
Mesones 1309
Bariones 1312
Red QCD, confinamiento y libertad asintótica 1313
Ejemplo 39.3 Diagramas de Feynman del decaimiento de piones positivos y muones positivos 1314
39.6 Cosmología del Big Bang 1315
Inflación 1316
Plasma de quarks-gluones 1318
Nucleosíntesis 1318

LO QUE HEMOS APRENDIDO/ GUÍA DE ESTUDIO PARA EXAMEN 1319

Preguntas de opción múltiple 1321
Preguntas 1321
Problemas 1322

FIGURA 39.1 Dos galaxias en colisión, fotografiadas por el Telescopio Espacial Hubble.

LO QUE APRENDEREMOS

- La búsqueda de reducir sistemas a sus componentes es un tema central en las ciencias y tiene su culminación en la física de partículas. Aunque es igualmente válido entender la complejidad y estructura emergente, el presente capítulo se enfoca en el reduccionismo de la física de partículas.
- Se sondea la subestructura usando experimentos de dispersión. Este capítulo define el concepto de una sección eficaz de dispersión.
- Los fermiones elementales tienen espín $\frac{1}{2}\hbar$ y consisten en los seis quarks (up, down, strange, charm, bottom, top), los leptones electrón, muon y tauón, y los neutrinos del electrón, del muon y del tauón. Cada uno de estos 12 fermiones tiene una antipartícula. Los quarks tienen cargas no enteras de $-\frac{1}{3}e$ o $+\frac{2}{3}e$ y no se pueden observar aislados.
- Los bosones elementales son los mediadores de las interacciones entre los fermiones. Estos bosones incluyen el fotón (electromagnético), los bosones W y Z (electrodébiles), el gluón (fuerte) y el gravitón (gravitacional). El gravitón aún tiene que observarse experimentalmente. Los gluones también pueden interactuar con otros gluones.
- Los diagramas de Feynman pueden representar la interacción de partículas fundamentales con imágenes, y los cálculos se pueden basar en una expansión en diagramas de Feynman.
- El modelo de interacciones de partículas, ampliamente aceptado en la actualidad, se llama modelo estándar. Extensiones del modelo estándar, el cual está incompleto, incluyen teorías de gran unificación, teorías de supersimetría y teorías de cuerdas.
- Es posible combinar quarks y antiquarks elementales para formar partículas que pueden observarse aisladas. Un quark y un antiquark pueden formar un mesón (pión, kaón, etcétera). Tres quarks pueden formar un barión (protón, neutrón, delta, lambda, etcétera).
- La física de partículas y la astrofísica se cruzan en el estudio de la cosmología del Big Bang, su fase inflacionaria y sus transiciones de fases electrodébil y quark-gluón-plasma, todo lo cual sucedió en los primeros tres minutos de la existencia del universo. También discutiremos el origen de la radiación de microondas cósmica de fondo.

La cosmología es el estudio de las cosas más grandes de las que tenemos conocimiento: el universo y su evolución en el tiempo. La cosmología es principalmente una parte de la astronomía y busca pistas sobre el universo temprano a partir del estudio de galaxias y grupos de galaxias sumamente distantes. Por ejemplo, la colisión de dos galaxias (figura 39.1) indica cómo podrían haber crecido y evolucionado las galaxias hace miles de millones de años. Aunque parezca extraño, algunas de las otras contribuciones mayores a la cosmología vienen del estudio de las cosas más pequeñas de las que tenemos conocimiento: las partículas elementales y sus interacciones. Comprender cómo interactúan materia y energía en el nivel más básico nos da alguna idea de lo que deben haber sido los momentos más tempranos del universo.

Este capítulo examinará los componentes más básicos de la materia, las partículas elementales que forman los átomos e incluso las partículas dentro de átomos. Lo que se sabe acerca de estas unidades básicas se fundamenta en la mecánica cuántica, pero nos saltaremos la mayoría de las matemáticas involucradas y en su lugar haremos hincapié en los conceptos básicos. Es difícil encontrar pruebas experimentales para respaldar estas ideas, y usualmente se requiere del análisis de residuos formados por colisiones de partículas a velocidades muy aproximadas a la velocidad de la luz en enormes aceleradores de partículas. La combinación de teoría y experimento ha conducido a un aumento continuo de la energía que se necesita para continuar la investigación en este campo. Los colisionadores de partículas de hoy en día están entre los instrumentos más grandes y poderosos jamás antes construidos.

Sin embargo, el estudio de las partículas más pequeñas y las energías más grandes involucra algunas de las áreas más especulativas de la física. Los físicos de partículas han desarrollado un modelo de las partículas más básicas y sus interacciones, a lo que usualmente se refieren como el "modelo estándar". Pero incluso este modelo no explica todo, y parecen surgir nuevas ideas todos los días sobre cómo extender o mejorar el modelo. Este capítulo contemplará algunas de estas teorías que podrán ser el modelo estándar del futuro.

39.1 Reduccionismo

Al menos desde los tiempos de los filósofos griegos de la Antigüedad, un tema central ha orientado nuestros intentos de adquirir un entendimiento científico cuantitativo del mundo que nos rodea. Este tema central es el **reduccionismo**, que supone que un sistema se pueda entender en términos de sus subsistemas. La figura 39.2 ilustra el reduccionismo en la física de partículas.

En la astronomía entendemos que el universo contiene cientos de miles de millones de galaxias, cada una de ellas compuesta por cientos de miles de millones de sistemas estelares. Estos sistemas estelares pueden consistir en una estrella central (y a veces en dos o más estrellas), que es orbitada por planetas que a su vez son orbitados por sus lunas.

Los biólogos tratan de entender todo el ecosistema como compuesto por poblaciones de especies. Organismos individuales de estas especies contienen órganos y células especializadas, las cuales tienen núcleos que contienen cromosomas que consisten en ADN. Se entiende que el ADN que contiene el código genético que rige todos los rasgos transmitidos de una generación a la siguiente está segmentado en miles de genes. Éstos están hechos de un contenido útil y legible, llamado exones, intercalados con "basura" llamada intrones. Los exones están hechos de "palabras" —los llamados codones—, cada uno de los cuales contiene tres pares de base de aminoácidos: ya sea el par de adenina (A) y timina (T), o el par de citosina (C) y guanina (G).

Es probable que los físicos hayan liderado la carga hacia el reduccionismo. Los físicos saben ahora que la materia está compuesta por moléculas, que a su vez están hechas de átomos. La palabra *átomo* proviene de la palabra griega *átomos* (ατομος: individual, indivisible). En particular, el filósofo griego Demócrito fue el primer partidario prominente de la teoría atomista de la materia. Los cuatro elementos de la teoría atomista fueron Tierra, Aire, Fuego y Agua, que fueron ordenados en una matriz de dos por dos de opuestos caliente/frío y mojado/seco (vea la figura 39.3), y que fueron considerados inmutables. Aristóteles agregó a estos cuatro elementos un quinto elemento, la quintaesencia de lo que él pensó que estaban hechos los cielos.

La teoría atomista de los griegos había caído en el olvido hasta el Renacimiento. Luego, filósofos, físicos y químicos crearon una nueva visión atomista del mundo, que resultó ser increíblemente exitosa y productiva. Para el año 1869 habían sido identificados muchos tipos diferentes de átomos como bloques constitutivos de los elementos químicos. El químico ruso Dimitri Mendeleev (1834-1907) dio un gigantesco paso al frente en ese año, ordenando los átomos de los elementos en la tabla periódica. El conteo actual de los diferentes elementos conocidos es 117: los 111 elementos desde hidrógeno hasta roentgenio, más los elementos aún sin nombre 112, 113, 114, 115, 116 y 118. (El elemento con el número 117 no se ha descubierto hasta la fecha y tal vez ni existe.)

La idea de simplicidad está íntimamente conectada con el reduccionismo. De acuerdo con la idea que se conoce como la navaja de Occam, cuando una observación se puede explicar mediante varias teorías alternativas, la explicación más sencilla es usualmente preferible. Además, las teorías físicas a menudo están orientadas por la búsqueda de la simetría y la belleza abstracta, así como las demandas más prácticas de consistencia y reproducibilidad. Si bien la física es *la* ciencia básica y es usualmente determinada sólo por hechos medibles, en el nivel que aquí se discute también está siendo influida por conceptos de la filosofía e incluso de las artes.

El hecho de que existan tantos tipos de átomos llevó a mucha gente a especular a finales del siglo XIX que los átomos no eran realmente los bloques constitutivos fundamentales más básicos de la materia y que debía haber una estructura subyacente y realmente fundamental. Esta estructura resultó ser una jerarquía de varias capas. El resto de este capítulo se dedica a pelar estas capas una por una.

La física nuclear y la física de partículas elementales se dedican a esta investigación y a la explicación de los fenómenos que encontramos en las respectivas escalas de tamaño. La búsqueda reduccionista para descubrir el nivel más fundamental está lejos de ser completa. Por ejemplo,

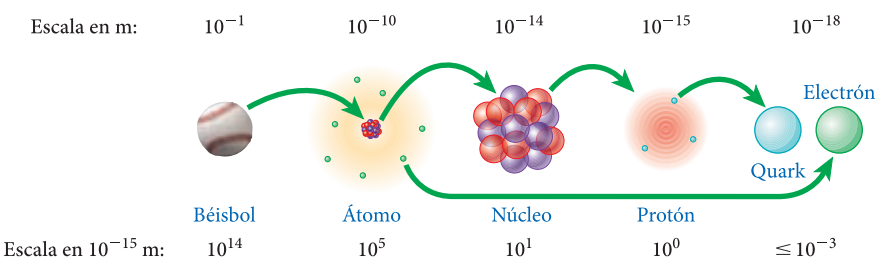


FIGURA 39.2 Reduccionismo en la física de partículas.

FIGURA 39.3 Los cuatro elementos básicos de la filosofía griega antigua, cada uno con su poliedro regular, tal como los asignó Platón.

físicos nucleares y de partículas están usando ahora el Gran Colisionador de Hadrones (LHC, del inglés Large Hadron Collider) (figura 39.4) en CERN (la frontera entre Suiza y Francia, cerca de Ginebra), que entró en operaciones en 2008.

Cuevas del tamaño de catedrales, ubicadas aproximadamente 100 m bajo tierra, albergan los detectores de partículas más grandes jamás construidos. La figura 39.5 muestra una foto de la construcción del detector Atlas parcialmente terminado en CERN. La figura 39.6 presenta un dibujo de construcción de corte interno del detector Alice en el mismo complejo LHC de CERN. En el LHC, los físicos esperan descubrir pistas sobre el próximo nivel más fundamental en la jerarquía (¡si es que existe!) y realizar investigaciones acerca de la estructura más fundamental que se conoce en la actualidad.

Complejidad

El resto de este capítulo se enfocará en los núcleos atómicos, partículas elementales y los elementos más pequeños, pero el reduccionismo es sólo una parte de la investigación científica. La meta complementaria de la investigación es de igual importancia: descubrir cómo elementos pequeños en un nivel de la jerarquía de tamaños colaboran para crear la estructura observada en el nivel próximo más grande. Ésta es la ciencia de la **complejidad**: la formación de patrones, organización propia de sistemas y el surgimiento del orden a partir del caos. Esta parte de la ciencia es mucho menos madura que el hilo reduccionista que ha seguido la ciencia durante los últimos siglos. Fre-

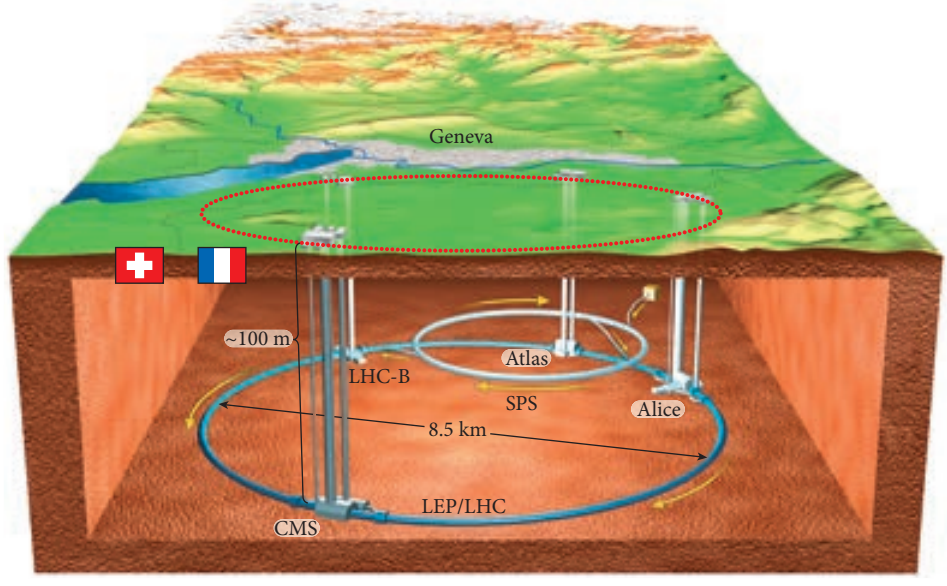


FIGURA 39.4 Trazado esquemático del complejo del acelerador y detectores del LHC en CERN.

FIGURA 39.5 Construcción parcialmente terminada del detector Atlas en CERN-LHC.

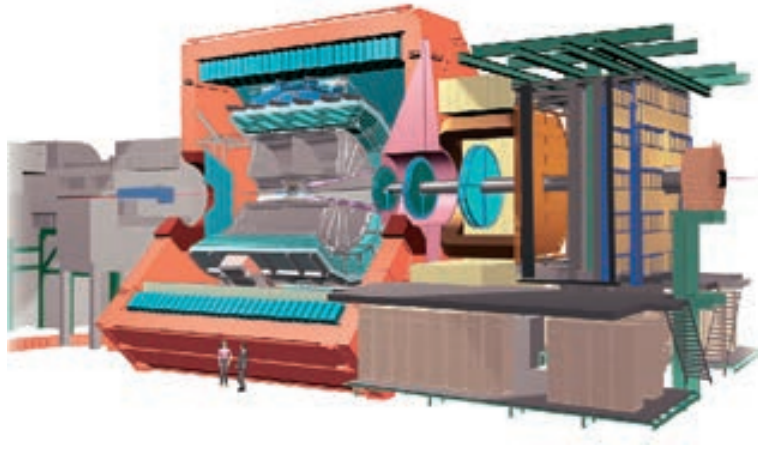


FIGURA 39.6 Dibujo de la construcción del detector Alice.

cuentemente confía en la modelación por computadora y, por lo tanto, no es usual que se incluya en los textos introductorios. No obstante, en la actualidad se están realizando investigaciones impresionantes de sistemas complejos.

Ejemplos de complejidad en la escala atómica incluyen intentos de entender la formación de patrones en materiales complejos y el autoensamble de nanoestructuras. Físicos, bioquímicos y microbiólogos están formando colaboraciones interdisciplinarias para tratar de entender el mecanismo del plegado proteínico para formar una estructura tridimensional a partir de la codificación de nuestra secuencia genética en ADN; la interacción de células en grandes organismos multicelulares; el mecanismo preciso de evolución y propagación de mutaciones genéticas, y los orígenes de vida y de inteligencia (tanto biológica como artificial). En biología, la determinación del orden en poblaciones de animales (por ejemplo hormigueros y formaciones de vuelo de pájaros) está bajo un intenso estudio. Las complejidades en la propagación de epidemias se tienen que entender. Casi todo en la naturaleza muestra patrones complejos, y los científicos tratan de entender cuáles son los principios universales que gobiernan su formación. En meteorología, la meta es acercarse más a la capacidad de describir y pronosticar la complejidad de patrones del clima. La interacción humana tiene muchas dimensiones complejas que pueden modelarse, tales como el flujo del tránsito en ciudades, el ascenso y la caída de tendencias de modas sociales, y el movimiento de indicadores de mercado en las economías. Incluso el universo como un todo muestra patrones fractales en la distribución de sus grupos de galaxias y supercúmulos.

Para muchos o quizá para la mayoría de estos campos de investigación, la capacitación en sólo una disciplina de la ciencia no es suficiente. En vez de esto, equipos interdisciplinarios compuestos de científicos físicos, matemáticos, ingenieros, biólogos, informáticos, sociólogos y otros, tendrán que colaborar para obtener un entendimiento más profundo de estas áreas. En particular, dado que nuestra capacidad de manipular la naturaleza crece rápidamente, el riesgo de consecuencias no deseadas por la intervención en sistemas mal entendidos aumenta y demanda una exploración más profunda.

Pero, ¡primero lo primero! Desmontemos las cosas antes de volver a armarlas. ¿Qué es una partícula elemental?

39.2 Sondeo de la subestructura

Para que una partícula sea considerada elemental, no puede tener una subestructura formada por otras partículas. ¿Cómo se descubre la subestructura? Una inspección visual puede revelar una subestructura para sistemas que son lo suficientemente grandes, pero, como se mostró en el capítulo 38, los radios atómicos son sólo del orden de 10^{-10} m y esto es demasiado pequeño para verlo. El único medio disponible para explorar dimensiones que son más pequeñas que esta escala es disparar pequeñas partículas a blancos atómicos y observar cómo son desviadas y dispersadas.

Dispersión clásica

Antes de proceder al uso de la mecánica cuántica, extendamos la teoría clásica de cantidad de movimiento y colisiones que estudiamos en los capítulos 7 y 8. En el capítulo 7 contemplamos la dispersión elástica de dos cuerpos en dos o tres dimensiones espaciales y encontramos que la conservación de energía y cantidad de movimiento total no proporcionan restricciones suficientes para pronosticar los momentos finales a partir de los iniciales.

Aquí queremos examinar un caso muy sencillo de dispersión de una partícula pequeña, de masa muy pequeña, por un blanco esférico grande y masivo. En el límite en el que el blanco es mucho más masivo que el proyectil, podemos considerar que el blanco permanece estacionario. Además, consideremos sólo el movimiento a lo largo de trayectorias en línea recta, lo que implica la ausencia de una fuerza además de la fuerza de contacto en el instante cuando las partículas colisionan.

Definimos el parámetro de impacto b como la distancia perpendicular desde la trayectoria entrante hasta la trayectoria que resultaría en una colisión frontal. ¿Cuál es el ángulo de dispersión θ de la nueva trayectoria después de la colisión con respecto a la trayectoria antes de la colisión? La figura 39.7*a*) muestra una vista lateral. En esta figura dibujamos en negro el ángulo agudo ϕ, que es el ángulo entre la dirección original de movimiento y la normal a la superficie en el punto de contacto. Está dado por trigonometría [vea el triángulo azul a la derecha de la figura 39.7*a*)] que $\operatorname{sen}\phi = b/R$. También vemos en la figura 39.7*a*) que el ángulo de dispersión θ está dado por

$$\theta = \pi - 2\phi = \pi - 2\operatorname{sen}^{-1}(b/R).$$

Por lo tanto, dado el parámetro de impacto y el radio del blanco, se puede calcular el ángulo de dispersión. En forma alternativa, dado el parámetro de impacto y el ángulo de dispersión, se puede calcular el radio del blanco.

En la práctica, los físicos construyen blancos de dispersión macroscópicos de películas de material muy delgadas. Puesto que los núcleos son tan pequeños, cada partícula choca a lo mucho con un núcleo en una película delgada. No se puede pronosticar o medir el parámetro de impacto. Sin embargo, usted puede observar los ángulos en los que las partículas se dispersan de la película y puede sacar conclusiones basadas en cuántas partículas se dispersan en un ángulo particular. Esta situación se esboza en la figura 39.7*b*). Puesto que un núcleo minúsculo no recibirá múltiples golpes, la situación más realista se muestra en la figura 39.7*c*), en la que se ve una película delgada compuesta por muchos blancos muy pequeños de dispersión, muchos de los cuales no son golpeados y otros muchos sí lo son (pero muy probablemente sólo una vez). La distribución angular de estos eventos es la misma que la que se muestra en la figura 39.7*b*).

Además de una vista lateral de estos centros de dispersión dentro de la película, también podemos imaginar una vista frontal de la película como la verían las partículas-proyectil entrantes. Esta situación se vería como algo similar a la figura 39.8, que muestra una unidad de área A de la película (cuadrado gris) con los centros de dispersión indicados por los pequeños círculos azules. Suponga que las partículas-proyectil inciden en forma perpendicular a la página. Cada centro de dispersión tiene un área efectiva perpendicular a la corriente de partículas-proyectil asociada con él. Esta área efectiva se llama **sección transversal** y se denota con la letra σ. Tiene dimensiones de área, o sea $[\sigma] = \text{m}^2$. Sin embargo, en la física nuclear y de partículas, la unidad m^2 no es muy práctica porque las secciones transversales relevantes son fracciones muy pequeñas, de un metro cuadrado. En su lugar fueron introducidas las unidades (irónicamente nombradas) **barn** (b) y milibarn (mb) como

$$1\ \text{b} = 10^{-28}\ \text{m}^2$$

$$1\ \text{mb} = 10^{-31}\ \text{m}^2.$$

Suponga que la sección transversal para cada centro de dispersión en el blanco es la misma y que es lo suficientemente pequeña como para que no tengamos que preocuparnos de traslapes de las secciones transversales de diferentes centros de dispersión. Así, la probabilidad Π de que cualquier partícula-proyectil tenga un evento de dispersión se puede declarar como la suma de las áreas de todos los centros de dispersión dividida entre el área A sobre la cual están dispersos. Puesto que cada centro de dispersión tiene la misma área σ, la suma de las áreas es entonces $n_t\sigma$, donde n_t es el número de centros de dispersión contenidos en el área de blanco A. Por lo tanto,

$$\Pi = \frac{n_t\sigma}{A}.$$

Si un número grande n_p de partículas-proyectil cae sobre esta área A, entonces el número total de reacciones N_{pt} es el producto de la probabilidad de que una partícula-proyectil tenga un evento de dispersión multiplicado por el número n_p:

$$N_{pt} = n_p\Pi = \frac{n_p n_t \sigma}{A}.$$

Esta ecuación puede resolverse para la sección transversal σ:

$$\sigma = \frac{N_{pt}A}{n_p n_t}.$$

La misma relación básica es también útil para problemas de mecánica cuántica. En general, una sección transversal se define como el número de reacciones de algún tipo particular por segundo dividido entre el número de partículas-proyectil cayendo sobre el blanco por segundo y unidad de área:

$$\sigma = \frac{\text{Número de reacciones por centro/s de dispersión}}{\text{Número de partículas incidentes /s/m}^2}.$$

Se puede definir una sección transversal diferencial $d\sigma/d\Omega$ como el número de reacciones que llevan a la dispersión de una partícula en algún ángulo sólido $d\Omega$ por segundo, dividida entre el mismo denominador como en la definición de σ anterior:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\text{Número de dispersiones en un ángulo sólido } d\Omega \text{ por centro/s de dispersión}}{\text{Número de partículas incidentes /s/m}^2}. \qquad (39.1)$$

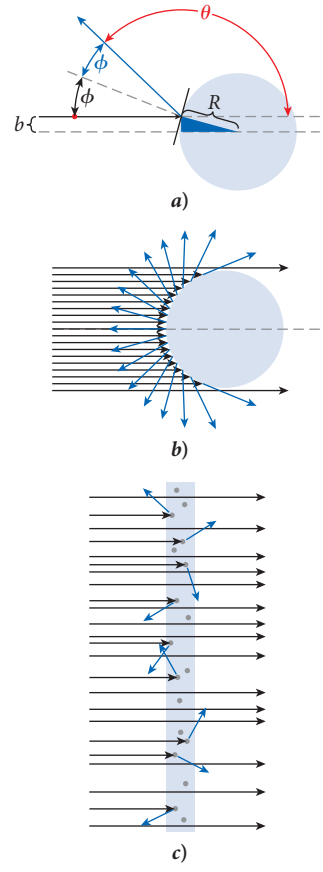


FIGURA 39.7 Dispersión clásica de una partícula pequeña de masa muy pequeña (punto rojo) de una partícula grande de masa alta (círculo azul). *a*) Dispersión en algún parámetro de impacto fijo particular; *b*) superposición de muchos eventos de dispersión con diferentes parámetros de impacto; *c*) superposición de muchos eventos de dispersión de partículas-proyectil de blancos pequeños dentro de una película delgada.

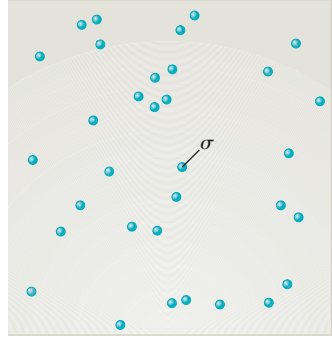
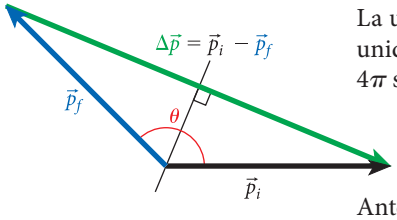
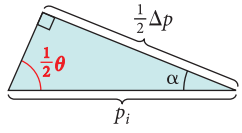


FIGURA 39.8 Vista frontal de una película de blancos compuesta por muchos centros de dispersión individuales, pequeños y distribuidos al azar, como lo verían las partículas-proyectil incidentes.



a)



b)

FIGURA 39.9 *a*) Transferencia de cantidad de movimiento para el mismo ángulo de dispersión como en la figura 39.7*a*). *b*) Triángulo rectángulo formado por la cantidad de movimiento inicial y la mitad de la cantidad de movimiento transferida.

La unidad de la sección transversal diferencial es $[d\sigma/d\Omega]$ = mb/sr. La abreviación *sr* significa la unidad de ángulo sólido, estereorradián. Recuerde que una esfera subtiende un ángulo sólido de 4π sr. Si integramos $d\sigma/d\Omega$ sobre la esfera unidad, nos da la sección transversal total

$$\sigma = \int_{4\pi} \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right) d\Omega.$$

Antes de dejar atrás las consideraciones clásicas, examinemos el impulso (transferencia de cantidad de movimiento) que el blanco recibe de parte del proyectil. Puesto que la colisión es elástica y se supone que el blanco es mucho más pesado que el proyectil, las longitudes de los vectores de la cantidad de movimiento inicial y final son las mismas, $|\vec{p}_i| = |\vec{p}_f|$, y por lo tanto forman un triángulo isósceles.

La figura 39.9 muestra los vectores de la cantidad de movimiento inicial y final para el evento de dispersión plasmado en la figura 39.7*a*), junto con la transferencia de cantidad de movimiento (flecha de vector verde). Si el ángulo de dispersión es bisecado, la línea cruza la flecha de transferencia de cantidad de movimiento con un ángulo recto. Esto forma un ángulo recto con los ángulos $\frac{1}{2}\theta$, $\frac{1}{2}\pi$, α. Como la suma de los ángulos en un triángulo es siempre π, entonces $\frac{1}{2}\theta + \frac{1}{2}\pi + \alpha = \pi$, y por ende $\alpha = \frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}\theta$. El valor absoluto de la transferencia de cantidad de movimiento $\Delta p = |\Delta\vec{p}| \equiv |\vec{p}_i - \vec{p}_f|$ puede entonces expresarse como función del ángulo de dispersión θ como

$$\Delta p = 2p_i \cos(\alpha) = 2p_i \cos(\tfrac{1}{2}\pi - \tfrac{1}{2}\theta) = 2p_i \operatorname{sen}(\tfrac{1}{2}\theta). \qquad \textbf{(39.2)}$$

Para la retrodispersión ($\theta = \pi$), la transferencia de cantidad de movimiento es máxima con el valor $2p_i$, y para la dispersión hacia delante ($\theta = 0$, sin colisiones) la transferencia de cantidad de movimiento es cero. Recuerde que hemos supuesto que el blanco es mucho más pesado que el proyectil. Si éste no es el caso, entonces las consideraciones que anteceden aún son ciertas si, en vez de usar el marco del laboratorio como lo hicimos aquí, se utiliza el marco del centro de masas para calcular el ángulo de dispersión y la transferencia de cantidad de movimiento. En particular, si el proyectil tiene igual o mayor peso que el blanco, entonces no se puede observar ninguna retrodispersión en el marco de laboratorio. (Esta observación se hizo en el capítulo 7 para colisiones unidimensionales de dos carros con masas diferentes en una pista sin fricción.)

Dispersión de Rutherford

Como se mencionó en el capítulo 38, los experimentos de Hans Geiger y Ernest Marsden, así como su interpretación por Ernest Rutherford, dieron la prueba definitiva de que el átomo consiste en una capa exterior de electrones que rodean un núcleo. ¿Qué es lo que Geiger y Marsden (quien fuera todavía un estudiante) realmente hicieron?

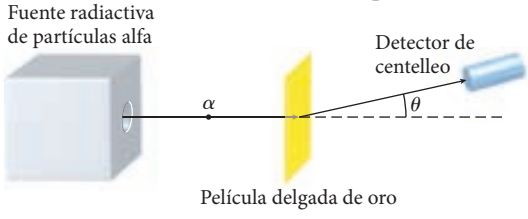


FIGURA 39.10 Montaje básico del experimento de Geiger-Marsden para dispersar partículas alfa contra películas de oro.

La figura 39.10 muestra el montaje básico del experimento de Geiger-Marsden. Ellos usaron una fuente de polonio radiactivo para emitir partículas alfa. (La emisión alfa como un posible mecanismo de descomposición radiactiva se discutirá en el capítulo 40.) Por ahora, todo lo que necesitamos saber es que la partícula alfa es el núcleo de un átomo de helio y tiene una carga de $+2e$. La energía cinética de la partícula alfa es normalmente del orden de 5 MeV. Geiger y Marsden dispersaron estas partículas alfa contra películas delgadas de oro y observaron la distribución angular resultante. ¿Qué podemos esperar de la dispersión en este arreglo?

Calculemos primero la longitud de onda de De Broglie de una partícula alfa de 5 MeV. La partícula alfa tiene una masa de 3.73 GeV/c^2, así que una energía cinética de 5 MeV corresponde a un momento de 193 MeV/c. (Puesto que la masa es muy grande en comparación con la energía cinética en este caso, podemos usar la aproximación no relativista $p = \sqrt{2Em}$.) Por ende, la longitud de onda de De Broglie de un alfa de 5 MeV es

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{4.136 \cdot 10^{-15}\ \text{eV s}}{193\ \text{MeV}/c} = 6.4 \cdot 10^{-15}\ \text{m}.$$

La discusión de la dispersión por difracción de ondas en el capítulo 34 muestra que el ángulo de la máxima de difracción es aproximadamente $\theta_d \sim \lambda/R$, donde R es el radio del objeto contra el cual las ondas difractan; en este caso el átomo. En aquel tiempo, el modelo más aceptado del átomo fue el modelo "pudín de pasas", en el cual se pensaba que electrones de carga negativa se distribuían en forma arbitraria sobre el volumen del átomo, parecido a pasas en un pudín de pasas.

La "masa" del pudín de pasas debía ser la distribución de carga positiva. Geiger y Marsden esperaban ver dispersión por difracción con los ángulos

$$\theta_d \sim 6\cdot 10^{-15}\,\text{m} / 10^{-10}\,\text{m} = 6\cdot 10^{-5}\,\text{rad} = 0.003°.$$

En otras palabras, ellos esperaban distribuciones angulares con máximos extremos hacia delante. (Las limitaciones impuestas por la mecánica cuántica se discuten con mayor detalle en la siguiente subsección.)

Sin embargo, para su sorpresa, Geiger y Marsden observaron una cantidad significativa de dispersión con ángulos grandes, e incluso algo de dispersión en ángulos hacia atrás. Cuando Ernest Rutherford vio los datos, comparó las partículas alfa con cartuchos de artillería reflejados hacia atrás por papel de seda. Esta observación lo llevó a formular el modelo del átomo de Rutherford, con un núcleo muy pequeño de carga positiva en el centro.

Rutherford contemplaba el problema de dispersión para una partícula cargada con carga (positiva) $Z_p e$ contra un núcleo de blanco con carga (también positiva) $Z_t e$. La interacción entre estas dos partículas toma lugar vía el potencial de Coulomb (vea el capítulo 23) y la energía potencial es

$$U = k\frac{Z_p Z_t e^2}{r}$$

(donde k es la constante de Coulomb). Él descubrió que la sección transversal de dispersión diferencial se puede escribir como

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{kZ_p Z_t e^2}{4K}\right)^2 \frac{1}{\text{sen}^4\left(\frac{1}{2}\theta\right)}, \qquad (39.3)$$

donde K es la energía cinética del proyectil.

Observe que la fórmula de Rutherford (ecuación 39.3) supone que tanto el proyectil como el blanco son cargas puntuales. Como lo muestra la figura 39.11, esta fórmula explica de manera excelente el número de cuentas de centelleo por minuto (que son proporcionales a la sección transversal diferencial) como función del ángulo de dispersión.

La relación entre el ángulo de dispersión y la transferencia de cantidad de movimiento que fue derivada anteriormente (ecuación 39.2) da entonces

$$\frac{d}{d\Omega} = \left(2kZ_p Z_t e^2 m_p\right)^2 \frac{1}{(\Delta p)^4}, \qquad (39.4)$$

donde hemos usado la aproximación no relativista $K = p^2/2m_p$, y donde m_p es la masa del proyectil. [Si descartamos la suposición de un blanco infinitamente pesado, entonces tenemos que usar la masa reducida $\mu = m_p m_t/(m_p + m_t)$ en lugar de m_p.]

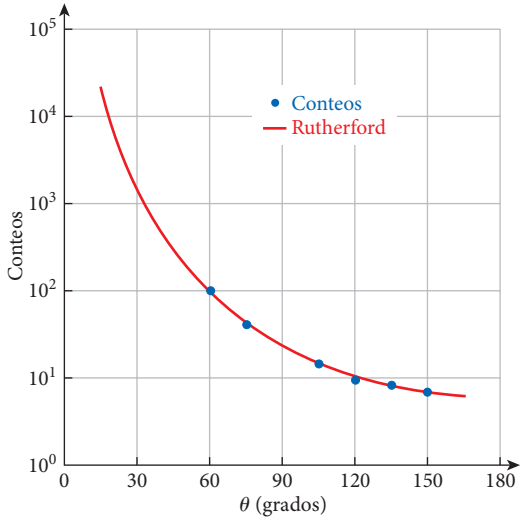


FIGURA 39.11 Comparación de la fórmula de dispersión de Rutherford (línea roja) con la dependencia angular de los conteos de centelleo por minuto (puntos azules), como lo reportaron Geiger y Marsden en *Phil. Mag.* 25 (1913), p. 604.

EJEMPLO 39.1 Retrodispersión de partículas alfa

Podemos obtener un límite superior útil para el tamaño del núcleo atómico si observamos que partículas alfa de 5.00 MeV pueden dispersarse en dirección inversa.

PROBLEMA

¿Qué tanto se puede acercar una partícula alfa de 5.00 MeV a un núcleo de oro si la única interacción entre ellos es la fuerza de Coulomb?

SOLUCIÓN

Podemos usar una aplicación sencilla de conservación de energía mecánica total. Lejos del núcleo, la partícula alfa tiene la energía cinética de 5.00 MeV y cero energía potencial. Conforme se acerca al núcleo de oro, cada vez más energía se convierte en energía potencial. En el punto del máximo acercamiento, la partícula alfa tiene cero energía cinética, y toda la energía cinética

(*continúa*)

(*continuación*)

fue convertida en energía potencial. La partícula alfa tiene una carga de $+2e$ y el núcleo de oro tiene una carga de $+79e$, así que la energía potencial electrostática entre ellos es

$$U(r) = k\frac{(2e)(79e)}{r} = ke^2\frac{2(79)}{r}.$$

Esto nos da la ecuación

$$ke^2\frac{2(79)}{r_{\text{mín}}} = 5.00 \text{ MeV},$$

la cual tenemos que resolver para la distancia mínima $r_{\text{mín}}$. El producto ke^2 tiene la dimensión de energía multiplicada por la longitud. Esto lo podemos evaluar como

$$\begin{aligned} ke^2 &= (8.9876\cdot 10^9 \text{ J m/C}^2)(1.602\cdot 10^{-19}\text{ C})^2 \\ &= 2.307\cdot 10^{-28}\text{ J m} \\ &= 1.440\cdot 10^{-9}\text{ eV m} \\ ke^2 &= 1.44 \text{ MeV fm}. \end{aligned}$$

De este modo, encontramos para la distancia mínima:

$$r_{\text{mín}} = \frac{(1.44 \text{ MeV fm})\cdot 2\cdot 79}{5.00 \text{ MeV}} = 45.5 \text{ fm}.$$

El límite superior para el radio del núcleo de oro que obtenemos de la retrodispersión de una partícula alfa de 5 MeV es $4.55\cdot 10^{-14}$ m, que es aproximadamente un factor de 3 000 más pequeño que el radio de un átomo de oro, que es $1.4\cdot 10^{-10}$ m.

DISCUSIÓN

Más adelante en este capítulo aprenderemos que el radio de un núcleo de oro es aproximadamente 7 fm. Nuestro límite superior es un factor de 7 más grande que el radio real del núcleo de oro, pero es sorprendente que un experimento y cálculo tan sencillos puedan ofrecer un resultado para el radio del núcleo atómico del orden de magnitud correcto.

¿Por qué hemos usado una partícula alfa de 5 MeV y no una de 10 MeV de energía cinética en este ejemplo? Una razón es que Geiger y Marsden usaban partículas alfa de aproximadamente 5 MeV de energía cinética. Pero lo que es más importante, si usamos una energía cinética de una partícula alfa que es muy alta, la aproximación de dispersión de Rutherford no funciona, como veremos a continuación.

La fórmula de dispersión de Rutherford (ecuación 39.3) pronostica una dependencia de $1/K^2$ de la sección transversal diferencial con la energía cinética. Sin embargo, conforme se incrementa la energía cinética, la partícula alfa se acerca más al núcleo. En algún punto los dos núcleos "se tocan" y la fórmula de Rutherford deja de ser válida. Este resultado se muestra de manera contundente en la figura 39.12, en la que la sección transversal diferencial para partículas alfa deflectadas contra plomo, con un ángulo de dispersión de $\theta = 60°$ se muestra como función de la energía cinética del proyectil de partícula alfa. Queda claro que pequeñas energías cinéticas muestran concordancia con la fórmula de Rutherford, pero arriba de 28 MeV ocurre una clara desviación.

Limitaciones cuánticas

Usemos ahora lo que hemos aprendido hasta aquí sobre la mecánica cuántica para estimar el orden de magnitud involucrado de las diferentes cantidades que participan en la dispersión de partículas. Para resolver una estructura del tamaño Δx se necesitan partículas-proyectil que tengan una cantidad de movimiento mayor que la incertidumbre de cantidad de movimiento Δp_x asociado con una incertidumbre del espacio coordenado Δx. El principio de incertidumbre de Heisenberg requiere $\Delta x\cdot\Delta p_x \geq \frac{1}{2}\hbar$ (vea el capítulo 36), así que la cantidad de movimiento mínimo necesario de una partícula para sondear un tamaño de espacio de Δx es del orden de

$$p_{\text{mín}} \sim \frac{\hbar}{\Delta x}.$$

La energía mínima de partícula es entonces

$$E_{\text{mín}} = \sqrt{p_{\text{mín}}^2 c^2 + m^2 c^4} = \sqrt{\frac{\hbar^2 c^2}{\Delta x^2} + m^2 c^4}\,.$$

El producto de las constantes $\hbar$ y c aparece con suficiente frecuencia y es útil aprenderlo de memoria:

$$\hbar c = (6.58212 \cdot 10^{-16}\ \text{eV s})(2.99792 \cdot 10^{8}\ \text{m/s}) = 197.327\ \text{MeV fm}.$$

En el ejemplo 39.1 calculamos la combinación de la constante de Coulomb k multiplicada por el cuadrado del cuanto de carga elemental e y encontramos que este producto también tiene la unidad MeV · fm. Podemos tomar la proporción de estos dos productos con las mismas unidades para encontrar un número sin dimensión denominado la **constante de estructura fina** α, nombrado así porque apareció en una teoría de Arnold Sommerfield para explicar la estructura fina en líneas espectrales. Su teoría fue incorrecta, pero la constante es significativa, como veremos más adelante, como la constante de acoplamiento para interacciones electromagnéticas:

$$\alpha = \frac{ke^2}{\hbar c} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar c} = \frac{1}{137.036}.$$

Este número α es conocido con precisión mucho mayor de lo que aquí se declara, hasta aproximadamente una parte en mil millones. Sin embargo, para la mayoría de los propósitos es suficiente recordar que α =1/137.

Sondear dimensiones menores significa el uso de partículas-proyectil con cantidad de movimiento y energías más altos. La figura 39.13 muestra las energías cinéticas mínimas, $K = E - mc^2$, para electrones (masa 511 keV/c^2, curva roja), fotones (masa 0, línea azul) y partículas alfa (masa 3.73 GeV/c^2, línea verde) que se necesitan para sondear una estructura de tamaño Δx. Observe que la curva para la energía cinética de electrones se une con la de los fotones para energías que son lo suficientemente grandes para que la masa de los electrones se vuelva insignificante en comparación con su energía cinética. (Lo mismo pasaría con la partícula alfa una vez que la energía cinética excediera su masa residual de 3.73 GeV/c^2, pero como veremos más adelante, la partícula alfa es por sí misma una partícula compuesta, así que no tiene caso usarla para experimentos de dispersión con estas energías altas, si uno quiere sondear la subestructura de algún otro objeto.) El capítulo 38 estableció que el tamaño atómico es del orden de 10^{-10} m. Por lo tanto, la figura 39.13 muestra que el sondeo de estructuras en la escala atómica requiere fotones con por lo menos unos cuantos keV de energía o electrones con por lo menos unas decenas de eV de energía cinética.

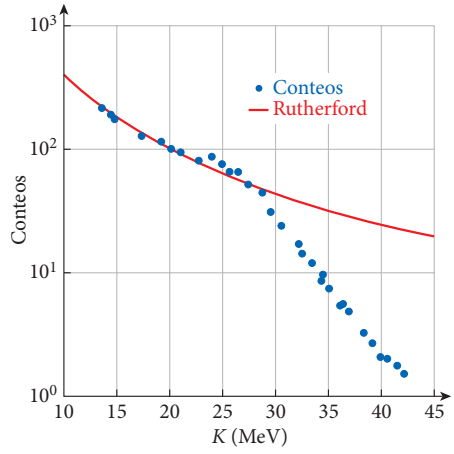


FIGURA 39.12 Dependencia de la sección transversal diferencial a 60° de la energía cinética de la partícula alfa en dispersión contra un núcleo de plomo (círculos azules), como lo reportaron Eisberg y Porter, *Rev. Mod. Phys*. 33 (1961), p. 190. Líneas rojas: expectativa de la fórmula de Rutherford.

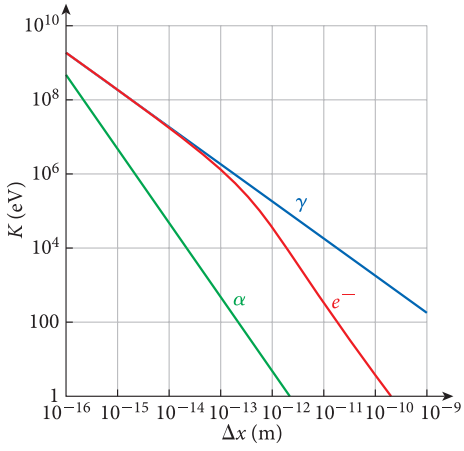


FIGURA 39.13 Energía cinética mínima requerida para sondear una escala de distancia dada para electrones (rojo), fotones (azul) y partículas alfa (verde).

Alternativamente, el mismo resultado de orden de magnitud se puede obtener usando el postulado de que la longitud de onda de De Broglie, $\lambda = h/p$, del de la partícula prueba tiene que ser más pequeña que la resolución espacial a explorarse. Dentro de un factor de π, las dos respuestas son iguales. (A nosotros sólo nos interesa el orden de magnitud, así que un factor de 2 o π no es relevante.)

Dispersión de ondas cuánticas

La fórmula de dispersión de Rutherford (ecuación 39.3) fue derivada mediante las consideraciones clásicas empleadas arriba, pero resulta ser correcta también en el caso de la mecánica cuántica. Para la dispersión de ondas cuánticas, considere una onda plana $e^{i\kappa z}$ incidente en un blanco. El blanco luego emite una onda esférica que depende del ángulo polar θ, tal como se ilustra en la figura 39.14. (Igual que para el proceso clásico de dispersión, suponga que no hay dependencia del ángulo acimutal, implicando simetría con respecto a la rotación alrededor del eje z.) Luego la función de onda para la solución estacionaria (independiente del tiempo) del problema de dispersión puede escribirse como la

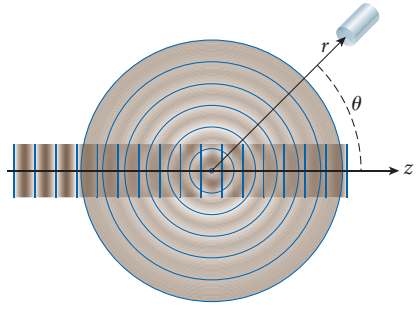


FIGURA 39.14 Dispersión de una onda plana moviéndose de izquierda a derecha a lo largo de la dirección z, con un blanco emitiendo una onda esférica.

suma de la onda del plano incidente más la onda esférica saliente, la que supuestamente es emitida desde una distribución puntual sin tamaño espacial mesurable,

$$\psi_{total}(\vec{r}) = \psi_i(\vec{r}) + \psi_f(\vec{r}) = N\left(e^{i\kappa z} + f(\theta)\frac{e^{i\kappa r}}{r}\right). \tag{39.5}$$

Aquí N es una constante de normalización y $f(\theta)$ es la amplitud de dispersión. El significado físico de la amplitud de dispersión se puede extraer de la siguiente manera. El número de partículas proyectiles incidentes por unidad de área por unidad de tiempo usado para la definición de la sección transversal diferencial (ecuación 39.1) es la densidad de partículas de la onda incidente, $|\psi_i(\vec{r})|^2 = |Ne^{i\kappa z}|^2 = |N|^2$. El número de partículas por unidad de tiempo dispersadas en el área $dA = r^2 d\Omega$ es

$$\begin{aligned} |\psi_f(\vec{r})|^2 dA &= \left|N\left(f(\theta)\frac{e^{i\kappa r}}{r}\right)\right|^2 dA \\ &= |N|^2 |f(\theta)|^2 \frac{1}{r^2} dA \\ &= |N|^2 |f(\theta)|^2 \frac{1}{r^2} r^2 d\Omega \\ &= |N|^2 |f(\theta)|^2 d\Omega. \end{aligned}$$

Por lo tanto, a partir de nuestra definición de la sección transversal diferencial (ecuación 39.1) encontramos que

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{|\psi_f(\vec{r})|^2 dA}{|\psi_i(\vec{r})|^2 d\Omega} = \frac{|N|^2 |f(\theta)|^2 d\Omega}{|N|^2 d\Omega} = |f(\theta)|^2. \tag{39.6}$$

Esto significa que la sección transversal diferencial es el cuadrado absoluto de la amplitud de dispersión.

Si ahora relajamos la condición de que la emisión de la onda esférica saliente resulte desde un solo punto, entonces podremos preguntar cómo se deberá modificar la sección transversal de dispersión de Rutherford. El **factor de forma** $F^2(\Delta p)$ es el cuadrado de la transformada de Fourier de la distribución de carga $\rho(\vec{r})$ del blanco de dispersor,

$$F^2(\Delta p) = \left|\frac{1}{e}\int \rho(\vec{r}) e^{i\Delta\vec{p}\cdot\vec{r}/\hbar} dV\right|^2, \tag{39.7}$$

donde el volumen de integración se extiende a través de todo el espacio coordenado tridimensional. Una transformada de Fourier es una técnica que nos permite expresar una función de una variable, tal como $\vec{r}$, como una función de otra variable relacionada; por ejemplo Δp.

El factor de forma determina cómo la distribución de carga (o masa) real influye en la sección transversal. En otras palabras, el factor de forma mide la desviación a partir de la fórmula de dispersión puntual de Rutherford (ecuación 39.4) mediante la dependencia Δp^{-4} de la transferencia de cantidad de movimiento,

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{puntual}} \cdot F^2(\Delta p). \tag{39.8}$$

En términos generales, la dispersión de una partícula puntual muestra la disminución menos empinada como función del ángulo creciente o la transferencia de cantidad de movimiento. Cualquier fuente extendida resulta en una disminución más empinada de la sección transversal diferencial, debido al factor de forma. Si se pudiera medir el factor de forma en todos los valores de la transferencia de cantidad de movimiento, entonces la transformada de Fourier (ecuación 39.7) se podría invertir en forma directa. Sin embargo, esto no es factible usualmente con la precisión necesaria. En su lugar, el procedimiento común es usar una distribución de densidad de carga con parámetros ajustables —por ejemplo, el radio medio— y configurar estos parámetros para proporcionar el mejor ajuste con los datos de dispersión experimental. Se describe un ejemplo de este procedimiento en la figura 39.15.

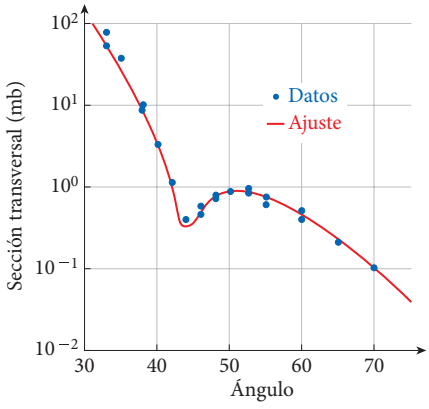


FIGURA 39.15 Dispersión de electrones de 420 MeV contra oxígeno. Datos: círculos azules; ajuste con factor de forma: línea roja, como lo reporta R. Hofstadter en *Annual Reviews of Nuclear Science* 7 (1957), p. 231.

39.3 Partículas elementales

Poco tiempo después del descubrimiento de Rutherford de que el núcleo de un átomo es más pequeño que el radio de un átomo por un factor de 10 000, quedó claro que el núcleo atómico consiste en protones de carga positiva y neutrones sin carga. [Los neutrones fueron descubiertos en 1932 por el físico británico James Chadwick (1891-1974).]

Durante un periodo breve en la década de 1930, los reduccionistas estuvieron muy contentos con el entorno que se les presentaba. Sólo se conocían tres partículas fermiónicas indivisibles fundamentales: el protón de carga positiva, el neutrón sin carga y el electrón de carga negativa. Además, sólo había un bosón conocido: el fotón. En 1930, el físico alemán Wolfgang Pauli (1900-1958) postuló otro fermión, el neutrino, para explicar la energía faltante en las llamadas desintegraciones beta. (Las desintegraciones beta se explican más adelante en este capítulo.) Además, en 1935, el físico japonés Hideki Yukawa (1907-1981) postuló incluso un bosón más, el pión, como la partícula responsable de la llamada interacción fuerte (que también se abordará más adelante en este capítulo). Dirac había pronosticado antipartículas en 1928, y Anderson había encontrado el positrón como la antipartícula del electrón en 1932 (vea la sección 37.10), así que fue generalmente aceptado que cada una de las partículas elementales también tiene su antipartícula. Parecía que los físicos estaban muy cerca de lograr una visión satisfactoria, sencilla y elegante, de la capa de partículas elementales verdaderamente indivisibles, parecida al ideal griego de sólo cuatro o cinco elementos.

Sin embargo, empezaron a aparecer pequeños problemas en esta visión. En 1936, Anderson hizo otro descubrimiento de una partícula elemental, el muón, examinando rayos cósmicos. Al principio se pensaba que este muón iba a ser el pión postulado por Yukawa, porque tenía una masa de aproximadamente 100 MeV/c^2, tal como lo exigía la teoría de Yukawa. El verdadero pión fue descubierto apenas 11 años después por Cecil Powell y sus colaboradores. En 1947, George Rochester y Clifford Butler descubrieron el kaón, también en rayos cósmicos. Las partículas elementales fueron ahora agrupadas en bariones (neutrón, protón y otros), mesones (pión, kaón y otros) y leptones (electrón, neutrino, muon y otros). Los bariones y mesones juntos son clasificados como hadrones, que son partículas que experimentan la fuerza fuerte.

En 1934, Ernest Lawrence (1901-1958) inventó el ciclotrón, una manera poderosa de acelerar partículas a energías más altas, y así empezó la era de la física basada en aceleradores. Aceleradores cada vez más grandes que alcanzaban energías cada vez más altas llevaron a más descubrimientos de un zoológico cada vez más grande de partículas "elementales". Finalmente, los científicos llegaron a creer que este gran número de partículas significaba que existía otro nivel de subestructura debajo de la capa de lo que previamente se había considerado elemental. En los años de 1953 a 1957, Robert Hofstadter (1915-1990) y sus colaboradores utilizaban el recién inventado acelerador lineal para realizar una variación básica de dispersión de Rutherford con electrones y protones de alta energía. Su trabajo reveló las distribuciones de cargas de núcleos (vea, por ejemplo, la figura 39.15); pero también mostró que el protón tiene una subestructura. Esto significa que el protón está compuesto por partículas aún más pequeñas y más fundamentales. En 1964, Murray Gell-Mann dio a este grupo de partículas, que constituyen el protón y otros hadrones, el nombre de **quarks** (llamado así según la frase "Three quarks for Muster Mark", de la novela *Finnegan's Wake* de James Joyce).

En el análisis siguiente, resumiremos los ingredientes del llamado **modelo estándar** de la física de partículas elementales. Se ha establecido en su forma básica durante tres décadas y ha pasado un gran número de pruebas experimentales. Primero, vamos a nombrar los elementos básicos, el conjunto de partículas que actualmente se consideran fundamentales/elementales/indivisibles. Las partículas elementales son de un tamaño de menos que 10^{-16} m, que es el límite experimental aproximado que podemos alcanzar, y probablemente son puntuales; es decir, de un tamaño mucho más pequeño que los 10^{-16} m que podemos resolver. Luego, discutiremos cómo interactúan estas partículas. Después de completar estos pasos, podremos investigar cómo las partículas fundamentales se combinan para formar el próximo nivel más alto en la jerarquía de la materia.

Fermiones elementales

Los fermiones elementales son partículas de espín $\frac{1}{2}\hbar$, o simplemente "espín $\frac{1}{2}$". (Cuando decimos que una partícula tiene un espín que es un número, como el número $\frac{1}{2}$, se asume que este número debe multiplicarse por $\hbar$.) El capítulo 36 mostró que el espín de una partícula es el máximo valor

mesurable para el componente del momento angular de espín de la partícula en cualquier dirección. Los fermiones incluyen seis quarks que tienen nombres (o *sabores*): *up*, *down*, *strange*, *charm*, *bottom* y *top*. Todos estos quarks tienen cargas de no enteros de $-\frac{1}{3}e$ o $+\frac{2}{3}e$. Los otros fermiones son los leptones: electrón, muon y tauón, y los neutrinos del electrón, del muon y del tauón. Cada uno de estos 12 fermiones tiene una antipartícula.

Los sabores originales de quarks de *up*, *down* y *strange* fueron introducidos por Gell-Mann, y los otros tres sabores fueron descubiertos posteriormente. El sabor charm fue pronosticado en forma teórica en 1970 por Sheldon Glashow, John Iliopoulos y Luciano Maiani, y fue descubierto experimentalmente en la forma de la partícula J/ψ (un mesón compuesto por el quark charm y su antiquark) en 1974 por grupos del Stanford Linear Accelerator Center, dirigido por Burton Richter, y del Brookhaven National Laboratory, dirigido por Samuel Ting. El sabor bottom fue descubierto en 1977 en Fermilab gracias a una colaboración dirigida por Leon Lederman. Finalmente, el quark top fue descubierto simultáneamente por dos grandes colaboraciones, DØ y CDF, en Fermilab en 1995.

Generación:	1	2	3
Carga −1/3 quark:	d	s	b
Carga +2/3 quark:	u	c	t
Leptón:	e^-	μ^-	τ^-
Neutrino:	ν_e	ν_μ	ν_τ

FIGURA 39.16 Fermiones elementales de las tres generaciones.

Los quarks se agrupan en tres diferentes generaciones, junto con los leptones y neutrinos correspondientes, como se muestra en la figura 39.16. (En la figura 39.16, los quarks están indicados por la primera letra de su nombre.) Cada partícula tiene una antipartícula con la misma masa y carga opuesta. La tabla 39.1 presenta una lista de las cargas, masas y antipartículas para todos los fermiones elementales. La notación para la antipartícula es la misma que para la partícula, con una barra horizontal que se agrega arriba del símbolo. La única excepción son las antipartículas de los leptones electrón, muon y tauón. Para todos ellos, su carga se indica por medio de un signo menos en el exponente, y sus antipartículas de carga positiva son identificadas por su carga a través de un signo más en el exponente.

Se pueden declarar dos leyes de conservación fundamentales en este momento: las leyes de conservación para el número de leptones totales y para el número de quarks totales. Estas leyes son ciertas para cualquier reacción o proceso de desintegración. El **número total de leptones** ℓ_{neto} es simplemente el número de leptones menos el número de antileptones y es constante en el tiempo:

$$\ell_{\text{neto}} = n_\ell - n_{\bar{\ell}} = \text{constante}. \tag{39.9}$$

Un ejemplo de la conservación del número total de leptones ocurre en la desintegración del neutrón. Un neutrón se desintegra en un protón, un electrón y un antineutrino del electrón

$$n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e. \tag{39.10}$$

Tabla 39.1 Fermiones elementales

Partícula				Antipartícula*	
Nombre	**Símbolo**	**Carga [e]**	**Masa [MeV/c^2]**	**Nombre**	**Símbolo**
quark down	d	−1/3	5±2	Antidown	$\bar{d}$
quark up	u	+2/3	2.2±0.8	Antiup	$\bar{u}$
Electrón	e^-	−1	0.510999	Positrón	e^+
Neutrino del electrón	ν_e	0	< 0.0000005	Neutrino antielectrón	$\bar{\nu}_e$
quark Strange	s	−1/3	100±30	Antistrange	$\bar{s}$
quark Charm	c	+2/3	1 250±100	Anticharm	$\bar{c}$
Muon	μ^-	−1	105.66	Muon	μ^+
Neutrino del muon	ν_μ	0	< 0.19	Neutrino antimuón	$\bar{\nu}_\mu$
quark Bottom	b	−1/3	4 200±100	Antibottom	$\bar{b}$
quark Top	t	+2/3	$(1.74\pm0.03)\cdot10^5$	Antitop	$\bar{t}$
Leptón tauón	τ^-	−1	1 776.99	Leptón tau	τ^+
Neutrino del tauón	ν_τ	0	< 18.2	Neutrino antitauón	$\bar{\nu}_\tau$

* La antipartícula de una partícula dada tiene la misma masa, pero carga opuesta.

El número total de leptones antes de la desintegración del neutrón es cero. El número total de leptones después de la desintegración es $\ell_{\text{neto}} = 1$ leptón $(e^-) - 1$ antileptón $\overline{\nu}_e = 0$, así que el número total de leptones antes de la desintegración del neutrón es igual al número total de leptones después de la desintegración. El proceso (ecuación 39.10) es el proceso de desintegración prototípico de decaimiento beta, que vamos a estudiar en el capítulo 40.

Hasta hace poco, los físicos pensaban no sólo que ℓ_{neto} se conserva, sino que el número de leptones se conserva por separado para cada generación. Esto significaría que el número neto de leptones electrones (número de electrones más número de neutrinos del electrón menos el número de positrones menos número de neutrinos del antielectrón) se conserva, y por separado se conserva el número neto de leptones muon, y por separado se conserva el número neto de leptones tauón. En efecto, estas leyes de conservación por separado son válidas si el modelo estándar de física de partículas elementales es válido. Sin embargo, el proceso de oscilaciones de neutrinos, que se analizará más adelante en esta sección, invalida el modelo estándar y las estrictas leyes de conservación para cada especie individual de leptones, y sólo sobrevive la ley de conservación de ℓ_{neto} en la forma de la ecuación 39.9.

De la misma manera se puede definir el **número neto de quarks** Q_{neto} como la diferencia entre el número total de quarks y el número total de antiquarks. También es constante en tiempo,

$$Q_{\text{neto}} = n_q - n_{\bar{q}} = \text{constante}. \tag{39.11}$$

Todos los procesos físicos tienen que obedecer a las leyes fundamentales de conservación del número de leptones (ecuación 39.9) y número de quarks (ecuación 39.11), además de todas las leyes de conservación de carga previamente introducidas (capítulo 21), de energía (capítulo 5), de cantidad de movimiento (capítulo 7) y de cantidad de movimiento angular (capítulo 10). La ley de conservación del número neto de quarks se expresa con mayor frecuencia como la ley del **número bariónico**. La ley de conservación del número bariónico establece que la diferencia entre el número de bariones y el número de antibariones es constante en el tiempo. Esta ley de conservación se encontró antes del descubrimiento de los quarks. Puesto que bariones están compuestos por quarks, la ley de conservación del número bariónico es equivalente a la ley de conservación del número de quarks que se estableció en la ecuación 39.11.

Las partículas elementales tienen un rango inmenso de masas, como muestra la figura 39.17. Según la observación de oscilaciones de neutrinos sabemos que por lo menos una especie de neutrino debe tener una masa no nula, pero en la actualidad sólo podemos hacer constar límites superiores para las masas de neutrinos, siendo la masa del neutrino del electrón más pequeña que 0.5 eV. Las masas ligeras de quarks (u y d) y la masa del leptón (e^-) de primera generación todas son del orden de 1 MeV. Las masas de los quarks de segunda generación (s y c) y los leptones (μ^-) están dos o tres órdenes de magnitud más arriba, en el rango de 100 MeV a GeV. Las masas de los quarks (b y t) y los leptones (τ^-) de tercera generación están en el rango de múltiples GeV a 100 GeV. Por qué estas partículas tienen las masas que tienen aún no se sabe y esto es un tema abierto a la investigación. Se piensa que una partícula que se llama el bosón de Higgs (que se discutirá en la siguiente sección) es responsable de la generación de la masa de las partículas elementales, y un creciente cuerpo de pruebas sugiere que este bosón de Higgs se descubrirá en el Large Hadron Collider en CERN. Un colisionador lineal de la próxima generación en proceso, con el nombre provisional

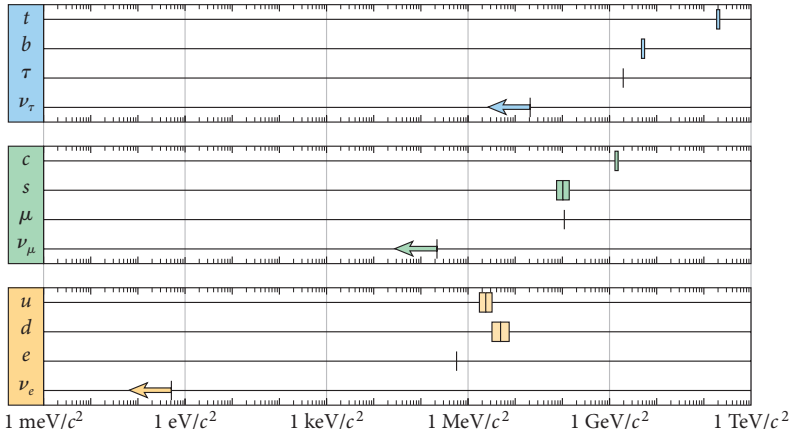


FIGURA 39.17 Los mejores valores actuales para las masas de los fermiones elementales. Los anchos de los rectángulos indican la incertidumbre de la medición. Las flechas indican que las masas de los neutrinos son límites superiores.

de International Linear Collider, podría permitir que los físicos estudien la partícula de Higgs en detalle (¡si es que acaso existe!). De esta manera, ellos esperan obtener un entendimiento más profundo de lo que establecen las escalas para las diferentes masas de las partículas elementales.

¿Es posible que existan más de estas tres generaciones de fermiones elementales? Sí, es posible. Sin embargo, tenemos pruebas experimentales fuertes a partir de la desintegración de bosones W y Z de que en realidad existen exactamente sólo tres generaciones.

Antes de dejar atrás el tema de los fermiones elementales, es importante señalar varias observaciones adicionales que son mal entendidas o señalan problemas en el modelo estándar, posiblemente haciendo alusión a la necesidad de un marco más fundamental.

Primero, tenemos que entender por qué nunca se han observado quarks aislados, pese a una larga historia de búsquedas de alta precisión. Regresaremos a la razón de esto cuando discutamos la interacción entre quarks. Si bien podemos entender las razones por las que es imposible aislar un solo quark, aún es legítimo preguntar si es filosóficamente consistente hablar de una partícula fundamental indivisible, si no podemos aislarla.

En segundo lugar, es un enigma por qué la carga eléctrica combinada de dos quarks up y un quark down (más adelante veremos que se combinan para hacer un protón) es exactamente la misma que la carga del positrón (= lo contrario de la carga de un electrón). Los físicos han probado esta igualdad hasta una precisión increíble, mejor que una parte en un billón, pero nunca han encontrado ninguna violación de esta igualdad.

Por último, ahora queda asegurado mediante observaciones experimentales que las tres especies de neutrinos ν_e, ν_μ, ν_τ pueden cambiar de una especie a otra y nuevamente de regreso. Este fenómeno del cambio de especies de neutrinos, u **oscilaciones de neutrinos**, no se puede explicar en el modelo estándar de la física de partículas.

Bosones fundamentales e interacciones

¿Y qué hay de las interacciones entre los fermiones fundamentales? ¿Cómo ejercen fuerzas uno sobre otros? La respuesta es que, en el nivel fundamental, todas las fuerzas son mediadas por medio del intercambio de bosones elementales. La comprensión completa de este concepto requiere el entendimiento de la teoría cuántica de campo que va más allá del alcance de este libro. Algunos consideran que es útil pensar en este intercambio de partículas como algo semejante a dos personas paradas sobre patinetas, lanzándose una pelota pesada entre sí, y de esta manera ejerciendo fuerzas sobre uno y otro debido al intercambio de cantidad de movimiento debido a la transferencia de la pelota. Sin embargo, esta idea sólo puede ser considerada como una ilustración burda, porque ignora el carácter de onda de los bosones que se intercambian. También sólo puede explicar la repulsión, mas no interacciones atractivas.

En la mecánica clásica o la mecánica relativista (vea el capítulo 35), una partícula libre no puede emitir otra partícula y conservar energía y cantidad de movimiento en el proceso. Sin embargo, la relación de incertidumbre de Heisenberg (vea el capítulo 36) permite una violación de conservación de energía del orden ΔE a través de un tiempo $\Delta t < \hbar/\Delta E$. Puesto que esta energía "prestada" tiene que incluir la energía de masa $m_b c^2$ del bosón de intercambio, encontramos $\Delta t < \hbar/\Delta E < \hbar/m_b c^2$. Puesto que el bosón intercambiado puede viajar a lo mucho a la velocidad de la luz, entonces encontramos para el rango $\Delta x \leq c\Delta t$ y, por lo tanto,

$$\Delta x < \frac{\hbar c}{m_b c^2}.$$

Así, un bosón de intercambio de masa m_b puede mediar una interacción sólo sobre un rango que es inversamente proporcional a esta masa. Las fuerzas de rango infinito, como la fuerza de Coulomb, requieren, entonces, un bosón de intercambio que no tenga masa. La tabla 39.2 enumera los bosones elementales del modelo estándar de la física de las partículas, con sus espines (todos enteros, dado que son bosones), sus masas y sus cargas. Usted puede ver que el bosón W^- tiene una masa de más de 80 GeV/c^2. Esto implica una fuerza de rango extremadamente corta de

$$\Delta x(W^-) < \frac{\hbar c}{m_{W^-} c^2} = \frac{197.33 \text{ MeV fm}}{80\ 403 \text{ MeV}} = 2.5 \cdot 10^{-3} \text{ fm}.$$

El fotón

El fotón es el bosón de intercambio sin masa de espín-1 de la interacción electromagnética. Tiene carga eléctrica 0. Los capítulos 21 a 38 examinaron aspectos de la interacción mediada por fotones. Puesto que el espín del fotón es 1, se llama *bosón vectorial*, a diferencia de un *bosón escalar* con espín 0.

Tabla 39.2 Bosones elementales

Nombre	Símbolo	Espín [$\hbar$]	Masa [GeV/c^2]	Carga [e]	Interacción*
Fotón	γ	1	0	0	Electromagnética
Bosón W	W^+	1	80.403±0.029	+1	Débil
Bosón W	W^-	1	80.403±0.029	−1	Débil
Bosón Z	Z	1	91.1876±0.0021	0	Débil
Gluón	g	1	0	0	Fuerte
Bosón de Higgs (?)	H^0	0	>150	0	(Masa)
Gravitón (?)	G	2	0	0	Gravitación

* Interacción mediada por esta partícula.

Bosón W

Quarks y leptones también pueden interactuar mediante la llamada **interacción débil**. Esta interacción puede cambiar un sabor de quark en otro mediante la emisión de un leptón y un neutrino. La interacción débil es la única interacción que puede cambiar el sabor de un quark. Un ejemplo de una reacción de este tipo es

$$d \rightarrow u + e^- + \overline{\nu}_e. \tag{39.12}$$

La desintegración del quark down es parecida a la desintegración de un neutrón (ecuación 39.10), como se analizó previamente en este capítulo, pero que ocurre en el nivel fundamental. El quark down tiene una carga de $-\frac{1}{3}e$ y, por lo tanto, tiene que emitir una partícula con la carga $-e$ para convertirse en un quark up con la carga $+\frac{2}{3}e$. Esto se logra mediante la emisión de un bosón W^- que a su vez se desintegra en un neutrino del electrón y un neutrino del antielectrón. Usted se puede convencer fácilmente de que ambos lados de la ecuación 39.12 tienen la misma carga neta, número quarks (ecuación 39.11) y número total de leptones (ecuación 39.9).

También es importante darse cuenta de que la suma de las masas de las partículas en el lado derecho de la ecuación 39.12 debe ser menor que la masa del lado izquierdo. Esto se requiere por la conservación de la energía total. La tabla 39.1 muestra que la masa del quark down es 5 MeV/c^2. Esto es más que la masa del quark up a 2.2 MeV/c^2 más la masa del electrón de 0.511 MeV/c^2 y la masa insignificante del neutrino del antielectrón. En la fase intermedia, el proceso de desintegración beta de la ecuación 39.12 podrá requerir la emisión de un bosón W^- con una masa de más de 80 GeV/c^2, pero para pasar del estado inicial de esta reacción hasta el estado final aún se tiene que conservar energía. Se dice que la creación intermedia y la subsiguiente desintegración del bosón W^- es "off-shell" (en el sentido de "off the energy shell", es decir, una energía no constante) y, por ende, el bosón W^- intermedio se llama **partícula virtual**.

La figura 39.18 muestra una vista ligeramente diferente de las masas de los quarks de lo que se presenta en la figura 39.17, en la que ahora los quarks se clasifican no por generaciones, sino por carga. Esto nos permite generar una imagen de todos los posibles decaimientos beta. Puesto que todos los decaimientos beta tienen que conservar energía, y ya que la masa de quarks aumenta de izquierda a derecha, sólo es posible porque esas reacciones tienen una flecha que apunta hacia el lado izquierdo, es decir, desde un quark de masa mayor hacia un quark de masa menor. Además, el decaimiento beta involucra la emisión de un leptón cargado, así que sólo son permitidas flechas entre quarks de diferentes cargas, es decir, ninguna flecha horizontal es posible en la figura. La flecha verde muestra todos los posibles decaimientos β^-. Uno de ellos ya se había escrito en la ecuación 39.12. La flecha roja muestra todos los posibles decaimientos β^+, éstos son decaimientos que involucran la creación de un bosón W^+. Los decaimientos beta dentro de la misma generación de quarks son los más comunes (las líneas sólidas en la figura 39.18). Los decaimientos beta que involucran el salto a una generación vecina de quarks son mucho menos frecuentes (líneas interrumpidas), y decaimientos beta que involucran una conversión de generación 3 a generación 1 (líneas punteadas) son extremadamente raros.

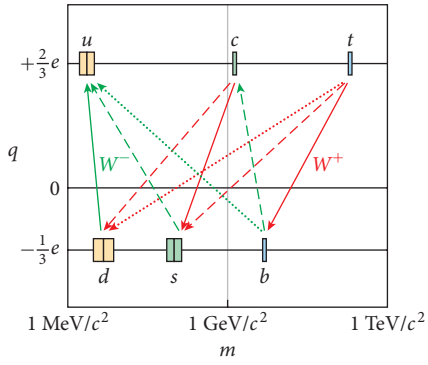


FIGURA 39.18 Todos los posibles decaimientos beta de quarks. Las flechas rojas representan decaimientos beta+, y las flechas verdes decaimientos beta−. La conservación de energía requiere que todas las flechas apunten sólo hacia la izquierda, nunca hacia la derecha.

39.1 Oportunidad de autoevaluación

Utilice la figura 39.18 para escribir ecuaciones parecidas a la ecuación 39.12 para los demás procesos de decaimiento beta más comunes, es decir, los que están representados por las flechas sólidas en la figura.

El bosón *Z*

Hasta ahora hemos hablado sólo de leptones cargados y quarks y sus interacciones débiles y electromagnéticas. ¿Y las partículas no cargadas? Los capítulos sobre electromagnetismo mostraban que partículas no cargadas no participan en la interacción electromagnética. (El neutrón tiene momento magnético, pero esto se debe al hecho de que se trata de una partícula compuesta.) Partículas elementales no cargadas pueden, sin embargo, participar en la interacción débil. El mediador de esta interacción, entonces, necesariamente tiene que ser un bosón de carga 0, el bosón *Z*. El intercambio de un bosón *Z* intermedio es el mecanismo subyacente de la dispersión de un neutrino contra un electrón.

Los bosones *W* y *Z* fueron postulados en 1968 por una teoría desarrollada por los estadounidenses Sheldon Glashow y Steven Weinberg y el paquistaní Abdus Salam. Su formulación proporcionaba una descripción unificada de la interacción electromagnética y la interacción débil, que ahora se llama interacción electrodébil. La dispersión de neutrinos a partir de electrones fue descubierta por la colaboración de Gargamelle en 1973 en CERN, que proporcionaba pruebas indirectas de la existencia del bosón *Z* y convenció a la comunidad física de la teoría electrodébil. Los bosones *W* y *Z* se descubrieron en 1983, justo después de haberse completado el acelerador CERN SPS (que ahora se utiliza como el anillo inyector más pequeño para el LHC; vea la figura 39.4), por las colaboraciones de los detectores UA1 y UA2. Glashow, Weinberg y Salam recibieron en 1979 el premio Nobel en Física por su trabajo teórico, y en 1984 el premio Nobel en Física fue otorgado al italiano Carlo Rubbia, el líder de la colaboración de UA1, y el físico de aceleradores holandés Simon van der Meer, cuyo trabajo en el enfriamiento estocástico de rayos hizo posible la operación del SPS y el descubrimiento de los bosones *W* y *Z*.

La tabla 39.2 muestra que la masa del bosón *Z* es 91.2 GeV/c^2, la cual es parecida a la masa de un átomo de niobio. El bosón *Z* se puede desintegrar en un electrón y un positrón, que proporciona una clara firma experimental del bosón *Z*, permitiendo que se detecte y estudie en forma directa.

El gluón

Éste es el mediador de la interacción fuerte entre quarks. Antes de hablar de los gluones, tenemos que añadir un detalle más sobre los quarks. Hasta ahora hemos dicho que los quarks vienen en seis sabores. Sin embargo, también tienen otra propiedad, la cual, de manera caprichosa, se llama color. Los colores de los quarks vienen en tres variedades: rojo (r), azul (b) y verde (g). Antiquarks tienen anticolores: antirrojo ($\bar{r}$), antiazul ($\bar{b}$) y antiverde ($\bar{g}$).

Un gluón lleva una combinación de un anticolor y un color. Tan sólo a partir de esta información se podría concluir que hay un total de nueve diferentes colores. Sin embargo, un gluón que es totalmente de color neutro y que consiste en iguales ingredientes de $r\bar{r}, b\bar{b}, g\bar{g}$ no es posible, así que hay ocho posibles gluones. Por ejemplo, un quark azul puede interactuar con un quark rojo mediante el intercambio de un gluón $b\bar{r}$ convirtiendo el quark azul en un quark rojo, y viceversa. Puesto que los gluones llevan la carga de color, se pueden acoplar uno a otro. Por lo tanto, los gluones pueden radiar otros gluones, lo que ningún otro bosón de intercambio puede hacer.

El bosón de Higgs

En 1964 el teórico británico Peter Higgs postuló un bosón que se acopla a todas las demás partículas elementales, incluso a sí mismo, de tal manera que les da masa. Este bosón ahora se llama simplemente bosón de Higgs. Aún no se ha encontrado. Esto significa que se pueden establecer límites inferiores de su masa. Actualmente este límite inferior está en el orden de 150 GeV/c^2, principalmente debido a los resultados experimentales de búsquedas de partículas de Higgs en el acelerador Tevatron de Fermilab.

En el capítulo 4 se analizó el bosón de Higgs debido a la relación entre fuerza y masa. La búsqueda del bosón de Higgs ahora entra en una nueva fase con la operación del LHC. La energía del LHC debería ser lo suficientemente alta para crear el bosón de Higgs; por lo tanto, los próximos años prometen ser increíblemente emocionantes para la física de partículas.

El gravitón

Todavía no hemos hablado sobre la gravedad en el contexto de la mecánica cuántica y las partículas elementales. Al igual que en el caso de la fuerza electromagnética, la fuerza gravitacional tiene un rango infinito. Por ende, el bosón de intercambio debe tener masa cero. Además, debido a la estruc-

tura de la interacción gravitacional como la describe la relatividad general, el espín de esta partícula de intercambio debe ser 2. Sin embargo, el modelo estándar de la física de partículas no aborda la gravedad para nada, por dos razones: una experimental y otra teórica. Experimentalmente, la gravedad es tan débil que no ha sido posible observar un gravitón en forma directa. No obstante, un detector llamado LIGO podría detectar gravitones de origen cósmico, como gravitones emitidos por galaxias en colisión (vea la sección 15.9). LIGO actualmente tiene instalaciones en Luisiana y en el estado de Washington. Otros detectores similares están en construcción o ya están en operación en otras partes del mundo. Sin embargo, es mucho más importante notar que, en su formulación presente, el modelo estándar (especialmente la mecánica cuántica) y la gravedad (como la describe la relatividad general) no son teorías compatibles. Este conflicto ha dado pie a un conjunto totalmente nuevo de teorías, incluidas las teorías de cuerdas, que abordaremos en la sección 39.4.

Diagramas de Feynman

Si las partículas virtuales se pueden crear y destruir como pasos intermedios en las reacciones, posiblemente en múltiples ocasiones, calcular cualquier cosa que pueda conectar las consecuencias observables experimentalmente, puede volverse muy complicado. Posiblemente, los cálculos tendrían que tomar en cuenta una cantidad infinita de procesos. Incluso la cuestión de cómo distinguir entre procesos que contribuyen mucho y los que contribuyen poco al resultado final, puede ser un desafío insuperable.

El físico estadounidense Richard Feynman (1918-1988) encontró una manera ingeniosa de resolver este problema mediante la división de interacciones complejas en unos cuantos pedazos elementales, cada uno de los cuales puede ser representado por un **diagrama de Feynman**, que es un simple dibujo. Luego formuló las reglas por las cuales los diagramas pueden computarse. De esta manera, desarrolló la electrodinámica cuántica, por lo que compartió el premio Nobel en Física de 1965 con Sin-Itiro Tomonaga de Japón y el estadounidense Julian Schwinger, quienes hicieron contribuciones independientes a la electrodinámica cuántica. Aunque la electrodinámica cuántica describe solamente la interacción de fotones y partículas cargadas, las técnicas del diagrama de Feynman han probado ser increíblemente útiles para todas las interacciones de todas las partículas.

No podemos pretender darle a usted un conocimiento funcional de cómo usar diagramas de Feynman, pero ellos proporcionan una excelente representación gráfica de la física subyacente de las interacciones de partículas. Los introducimos aquí con esta meta en mente. Empiece con partículas en libre movimiento propagándose a través del vacío. Ellas simplemente están representadas por una línea con una flecha en el extremo, indicando la dirección del recorrido. Esta línea se llama *propagador*. Convencionalmente, el tiempo se mueve de izquierda a derecha y la dimensión vertical del diagrama es una coordenada espacial (figura 39.19). (Usualmente sólo se supone que tiempo y espacio sean las coordenadas estándares, así que los diagramas de Feynman no muestran los ejes de coordenadas en forma explícita. Después de mostrar la coordenada espacial en esta figura, la descartamos por las figuras siguientes.) Un leptón o un quark es entonces representado simplemente por una flecha de izquierda a derecha, un fotón, el bosón W o Z por una línea ondulada, y un gluón por una línea enrollada. (No hay un significado más profundo para los diferentes estilos de líneas, sólo la convención histórica.)

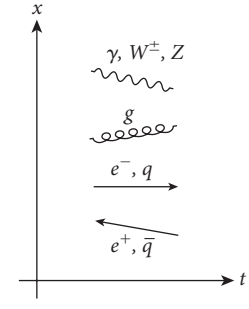


FIGURA 39.19 Representaciones de Feynman de un fotón, gluón, electrón, positrón, quark, antiquark, bosón W y bosón Z de propagación libre.

Las antipartículas se mueven de derecha a izquierda, es decir, hacia atrás en el tiempo. Esta declaración no es simplemente un atajo computacional; representa la simetría subyacente en la física que gobierna la relación de partículas y antipartículas: el constructo teórico fundamental de la física es invariante bajo la inversión simultánea de CPT (carga, paridad, tiempo). La paridad de una partícula es una propiedad intrínseca, caracterizada por el comportamiento de la función de onda de la partícula bajo reflexión mediante el origen de coordenadas, cuando las coordenadas x, y y z son reemplazadas por $-x$, $-y$ y $-z$. Si la función de onda reflejada es idéntica a la función de onda original, la paridad es positiva. Si la función de onda reflejada es el negativo de la función de onda original, la paridad es negativa.

Invertir la carga y la paridad de un electrón resulta en un positrón. A fin de obtener, entonces, un proceso físicamente válido, también se tiene que invertir el tiempo. Las líneas del propagador usualmente no son horizontales porque la coordenada espacial se representa en la dirección vertical en un diagrama de Feynman. Sin embargo, el ángulo respecto de la horizontal no es una medida de la cantidad de movimiento o la velocidad, porque la idea de una gráfica de Feynman no es la de una gráfica de la que se pueda extraer alguna velocidad mediante argumentos de tipo $\Delta x/\Delta t$. Las longitudes de las líneas que representan las diferentes partículas tampoco tienen significado físico y son arbitrarias.

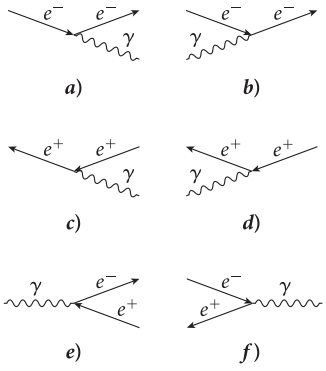


FIGURA 39.20 Vértices elementales de Feynman para seis diferentes procesos: *a*) emisión de un fotón por un electrón; *b*) absorción de un fotón en un electrón; *c*) emisión de un fotón por un positrón; *d*) absorción de un fotón en un positrón; *e*) creación de un par de electrón-positrón a partir de fotón; *f*) aniquilación de un electrón-positrón en un fotón.

Ahora queremos un diagrama que describa la interacción de diferentes partículas. *Cualquier interacción física dada debe tener por lo menos dos vértices*. Un *vértice* se define como la intersección de tres líneas de propagadores. La figura 39.20 muestra vértices elementales para seis diferentes procesos. Es importante notar que ninguno de estos vértices muestra un proceso físico que pueda suceder en aislamiento. Para cada uno de estos procesos es imposible conservar energía y cantidad de movimiento, siempre que todas las líneas representen partículas reales. Por ejemplo, veamos la emisión de fotones por un electrón, proceso *a*) en la figura 39.20. En el marco en reposo del electrón antes de la emisión, toda la energía en el sistema es la masa en reposo del electrón multiplicada por c^2, porque el electrón no tiene energía cinética en este marco. Después de la emisión, el fotón recibe alguna energía, y el electrón experimenta el retroceso, adquiriendo así también energía cinética. Ahora la energía total del sistema en el marco en reposo es la energía de masa del electrón más su energía cinética más la energía del fotón. Por lo tanto, este proceso viola la conservación de energía. De esta observación se desprende un entendimiento importante: cada vértice debe tener, por lo menos, una partícula virtual que está fuera del *límite* de energía, así que $E^2 \neq p^2c^2 + m^2c^4$. Por ende, se tienen que combinar por lo menos dos vértices para crear un diagrama de Feynman que pueda representar un proceso físicamente posible.

Ahora estamos en condiciones para formular las reglas que rigen la construcción de diagramas de Feynman que representan procesos reales:

- Todas las líneas que entran o salen de un diagrama de Feynman deben representar una partícula real para la cual sea válida la relación de energía-cantidad de movimiento $E^2 = p^2c^2 + m^2c^4$.
- Todas las líneas que representan una partícula real para la que $E^2 = p^2c^2 + m^2c^4$ no son válidas, deben empezar y terminar dentro del diagrama; es decir, deben tener ambos extremos conectados a un vértice. Esto garantiza que estas partículas virtuales no puedan ser vistas en experimentos.
- En cada vértice se deben conservar estrictamente energía, cantidad de movimiento, carga, número de quarks y los tres números de leptones.

Después de estas consideraciones preliminares podemos empezar a armar verdaderos diagramas de Feynman. El primer proceso físico que abordaremos es la dispersión de un electrón por un positrón (o viceversa).

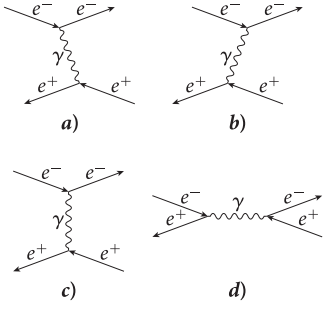


FIGURA 39.21 Cuatro diagramas de Feynman más sencillos para la dispersión de electrones-positrones.

La figura 39.21 muestra cuatro diagramas de Feynman en los que todos tienen en común que un electrón y un positrón entran y un electrón y un positrón salen. En los cuatro casos se intercambia un fotón virtual. Por lo tanto, los cuatro diagramas representan versiones del mismo proceso físico (llamadas *amplitudes*) y se tienen que sumar. La sección transversal para la dispersión de electrones-positrones se puede entonces calcular tomando el cuadrado absoluto de esta suma de amplitudes. Observe que el diagrama *a*) y el diagrama *b*) en la figura 39.21 sólo se distinguen por el orden temporal de la emisión del fotón. En *a*), el fotón es emitido primero por el electrón y luego absorbido por el positrón, y en *b*) la situación es al revés. De este modo vemos que todos los diagramas que se distinguen sólo en el orden temporal interno pertenecen al mismo proceso físico, porque no hay manera de conocer el orden temporal interno del proceso. Por lo tanto, ambos procesos, *a*) y *b*), se pueden escribir simplemente como *c*), donde se implica el intercambio instantáneo del fotón. El proceso *d*) puede interpretarse como una aniquilación de electrón-positrón a un fotón virtual, seguido por un evento de creación de pares.

Por desgracia, el proceso no termina aquí. El electrón y el positrón también pueden intercambiar dos fotones, tal como se muestra en la figura 39.22 para uno de muchos diagramas posibles, o pueden intercambiar incluso más fotones. Para cualquier diagrama que involucra bucles cerrados del tipo que se muestra en esta figura, cantidad de movimiento y energía pueden viajar alrededor de este bucle sin restricciones. Como resultado, tenemos que integrar a través de todos los valores posibles. Queda claro que esta suma de diagramas con bucles se puede volver arbitrariamente complicada muy rápidamente.

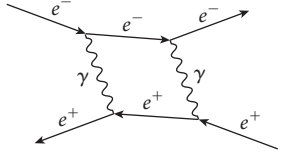


FIGURA 39.22 Un posible diagrama de intercambio de dos fotones para dispersión de electrones-positrones.

He aquí lo que nos salva: para cada fotón virtual que se intercambia, la amplitud para el diagrama adquiere un factor multiplicativo de $\alpha = ke^2/\hbar c = 1/137$. De este modo las contribuciones de diagramas de multifotones a la suma global de amplitudes se hacen rápidamente más pequeñas, y la serie converge.

Lo que hemos dicho hasta ahora no representa un cálculo real, pero por lo menos nos lleva a entender lo que está involucrado en la ejecución de esta tarea. Además nos permite darnos una

idea rápida de las contribuciones de primer orden a un proceso físico. Por ejemplo, podemos dibujar un diagrama de Feynman para el decaimiento beta (ecuación 39.12) del quark down (ecuación 39.23). Con la ayuda de esta gráfica es sencillo revisar que las leyes de conservación de carga, así como los números de quarks y leptones, se cumplen en este proceso; es decir, el diagrama de Feynman representa un proceso que realmente puede suceder físicamente.

Las interacciones débiles y electromagnéticas se pueden tratar de manera hermosa mediante diagramas de Feynman, porque la serie de amplitudes representadas por diferentes gráficas converge rápidamente. También podemos construir diagramas de Feynman similares para la interacción fuerte. Un ejemplo se muestra en la figura 39.24, donde un quark up rojo intercambia un gluón azul/antirrojo con un quark down azul. (En la sección 39.5 se hablará más sobre colores.)

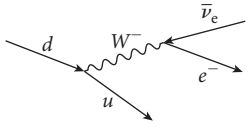


FIGURA 39.23 Diagrama de Feynman para el decaimiento beta del quark down.

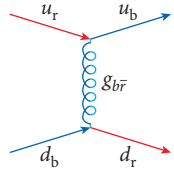
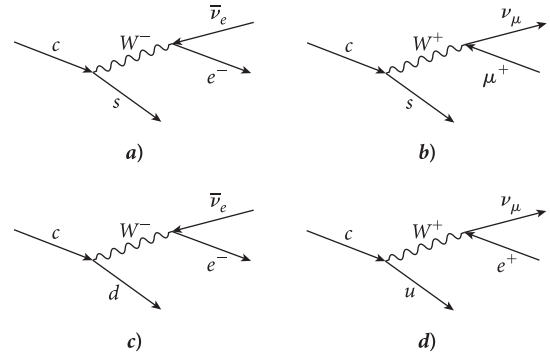


FIGURA 39.24 Gráfica más sencilla de Feynman para un intercambio de un gluón en la interacción fuerte.

39.1 Ejercicio en clase

¿Cuál de los siguientes dibujos es un diagrama de Feynman válido para el decaimiento beta del quark charm?



Sin embargo, la situación es mucho más complicada para la interacción fuerte, porque la constante de acoplamiento no es α (que es pequeña en comparación con 1 en el caso electromagnético), sino que es del orden de la unidad. Por lo tanto, en general, las expansiones de serie en términos de los diagramas de Feynman no convergen. Estas técnicas sólo se pueden aplicar para la dispersión con alta cantidad de movimiento, puesto que la expansión del proceso físico en términos de los diagramas de Feynman converge con suficiente rapidez para ser de utilidad práctica. Se necesitan otros métodos para realizar cálculos para la interacción fuerte.

39.4 Extensiones del modelo estándar

Nuestro entendimiento actual de las interacciones en el mundo que nos rodea incluye tres diferentes fuerzas: la fuerza fuerte, la fuerza electrodébil y la gravedad. Un principio general de orientación en nuestra búsqueda reduccionista es que se puede mostrar que diferentes fuerzas son simplemente diferentes aspectos de la misma fuerza en el nivel próximo más fundamental de la jerarquía reduccionista. Este planteamiento ha funcionado en repetidas ocasiones con gran satisfacción. La figura 39.25 muestra un orden cronológico de la unificación de fuerzas, una figura que ya se mostró en el capítulo 21.

Los capítulos sobre electricidad y magnetismo describieron estas dos fuerzas como simplemente dos aspectos de la fuerza electromagnética, tal como se describe en el conjunto de cuatro ecuaciones de Maxwell. En la sección 39.3 aprendimos que la fuerza débil también se puede unificar con el electromagnetismo para formar la fuerza electrodébil. Por consiguiente hubo y sigue habiendo nuevos intentos de crear teorías que proporcionan la unificación ulterior de todas las interacciones conocidas para formar una sola.

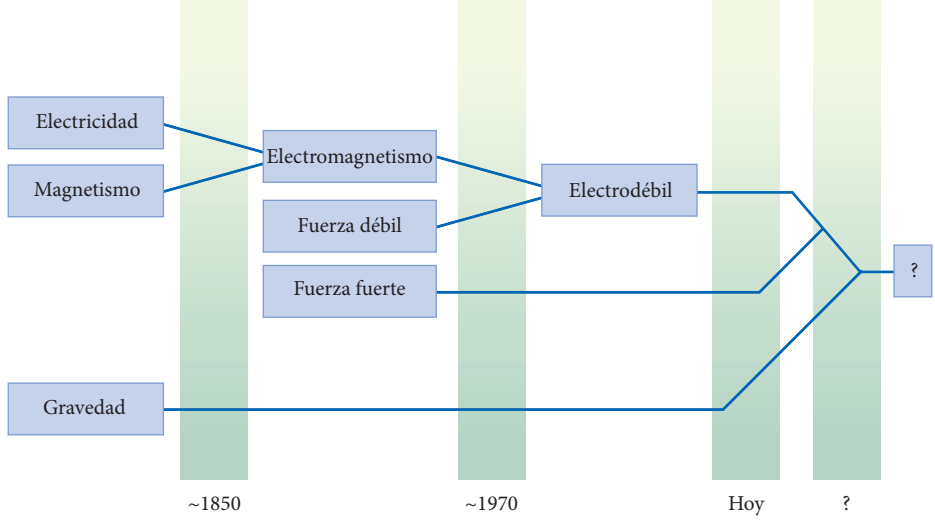


FIGURA 39.25 Orden cronológico de la unificación de fuerzas básicas.

Además, aunque el modelo estándar de las interacciones de partículas ha sido muy exitoso, muchos científicos se molestan por los valores aparentemente arbitrarios de los parámetros en el modelo estándar, como las masas de quarks y leptones y las constantes de acoplamiento. Se han propuesto varios candidatos para una teoría unificada libre de parámetros arbitrarios. En su mayoría, estas teorías están basadas en argumentos de una rama de las matemáticas llamada teoría de grupos. Sin embargo, vale la pena el análisis de dos características esenciales: una es la escala de energía de la unificación, y la otra es el decaimiento del protón.

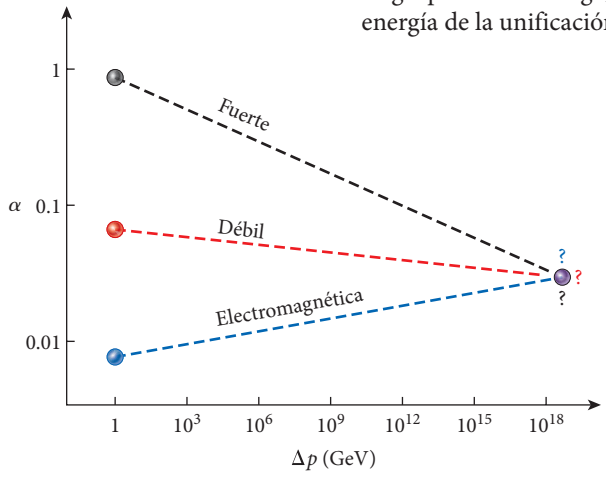


FIGURA 39.26 El cambio propuesto de las constantes de acoplamiento de interacciones fundamentales como función de la transferencia de cantidad de movimiento en una teoría de gran unificación.

Escala de energía de la unificación

La constante de acoplamiento de la interacción electromagnética es la constante de estructura fina α, que tiene el valor de 1/137. La constante de acoplamiento de la interacción débil tiene un valor de ~1/30, y la interacción fuerte tiene una constante de acoplamiento cerca de 1. La teoría de Glashow-Weinberg-Salam muestra que, a altas energías, las constantes de acoplamiento para la fuerza electromagnética y la débil se fusionan. Con base en esta idea se han propuesto **teorías de gran unificación** que fusionan las tres interacciones fundamentales a muy altas energías. De este modo, si fuésemos capaces de dispersar partículas con una transferencia de momento Δp, muy alta, entonces seríamos capaces de ver fusionarse todas las constantes de acoplamiento (figura 39.26). Por desgracia, el tipo de transferencia de cantidad de movimiento que se requiere es mucho mayor de lo que se puede lograr con los aceleradores actuales. Sin embargo, es posible que haya pistas de teorías de gran unificación escondidas en el espectro de rayos cósmicos, que alcanza energías arriba de 10^{20}eV.

Decaimiento del protón

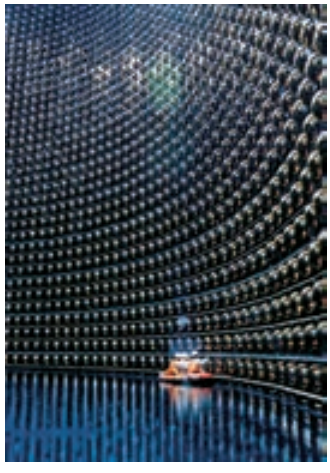


FIGURA 39.27 Dentro del detector Super-Kamiokande. Normalmente el detector está lleno de agua pura, pero aquí el trabajo del equipo de mantenimiento nos deja apreciar la escala del detector.

En la sección anterior sobre partículas elementales hemos introducido leyes absolutas de conservación por separado para el número total de quarks y para el número total de leptones. Sin embargo, la mayoría de las teorías de gran unificación pronostican que, a energías más altas, quarks y leptones se fusionan para ser simplemente aspectos diferentes de la misma partícula fundamental, y que la separación entre quarks y leptones que observamos es solamente una consecuencia de la manifestación del límite de energía baja de estas partículas unificadas. Si esto es cierto, entonces un quark también será capaz de descomponerse en un leptón, y el protón (compuesto por dos quarks up y un quark down; vea la siguiente sección) no será una partícula absolutamente estable; en su lugar se descompondrá en forma exponencial con una vida media muy larga (pero *no* infinita) del orden de 10^{30} años.

Puesto que la edad del universo es sólo del orden de 10^{10} años, se tiene que observar un gran número de protones para tener la oportunidad de observar tan sólo un evento de decaimiento de un protón. Éste es uno de los propósitos básicos para la construcción del detector Super-Kamiokande (Super-K) en Japón (figura 39.27). Super-K está situado a 1 000 m bajo tierra y consiste en 50 000 toneladas de agua purificada contenida en un tanque cilíndrico de acero de 40 m de diámetro y 40 m de altura. Super-K tiene 11 200 detectores de fotones dentro de las paredes del tanque. Puede detectar la luz de Cherenkov (vea el capítulo 16) emitida por el movimiento de partículas de alta energía a través del agua. En 1998, la colaboración de Super-K fue la primera en observar oscilaciones de neutrinos, a las que se aludió previamente, lo que implica que por lo menos una de las especies de neutrinos tiene una masa distinta de cero. Sin embargo, después de varios años de operar el detector y buscar posibles señales, ningún evento de descomposición de protones se ha reportado, y por lo tanto se establecieron severas restricciones para clases enteras de teorías de gran unificación. El presente límite inferior de la vida del protón se ha establecido en forma experimental como $>1.6 \cdot 10^{25}$ años, aproximadamente 100 billones de veces más que la edad actual del universo.

EJEMPLO 39.2 Unidades de Planck

Max Planck propuso un conjunto de unidades naturales que no dependen de las alternativas antropocéntricas que se hicieron en la determinación de las unidades SI que vemos en la actualidad (vea el capítulo 1). Él buscaba combinaciones de las constantes básicas de física universal de la naturaleza que tienen las dimensiones de longitud, tiempo, masa, etcétera.

PROBLEMA

Utilizando las constantes universales de la velocidad de la luz en el vacío, c, la constante de Planck dividida entre 2π, $\hbar$, la constante de Coulomb $k = 1/4\pi\epsilon_0$, la constante gravitacional universal G y la constante de Boltzmann k_B, ¿cuáles son los valores de la longitud, tiempo, temperatura, masa y carga de Planck en unidades SI?

SOLUCIÓN

La unidad SI de la velocidad de la luz es $[c]$ = m/s, de la constante de Planck es $[\hbar]$ = kg m^2/s, de la constante de Coulomb es $[k]$ = kg m^3/C^2/s^2, y la constante de Boltzmann es $[k_B]$ = kg m^2/s^2/K, y las unidades de la constante gravitacional es $[G] = \text{kg}^{-1}\,\text{m}^3/\text{s}^2$.

Nuestra primera observación es que el amperio, A, aparece únicamente en la constante de Coulomb, y que el kelvin, K, aparece únicamente en la constante de Boltzmann. Por lo tanto, las cantidades relacionadas con la cinemática de longitud, tiempo, masa y energía no pueden contener ninguna de estas dos constantes porque están definidas en términos de las unidades básicas MKS. Si multiplicamos $\hbar$ G, el kg se anula en la unidad y obtenemos potencias sólo de las unidades m y s. La multiplicación por la potencia apropiada de la velocidad de la luz nos permite anular cualquiera de éstas. Por lo tanto, obtenemos para la longitud de Planck y el tiempo de Planck:

$$x_p = \sqrt{\frac{\hbar G}{c^3}}$$

$$t_p = \frac{x_p}{c} = \sqrt{\frac{\hbar G}{c^5}}.$$

Para la masa de Planck tenemos que encontrar una combinación de $\hbar$ y G que tiene el kg en alguna potencia dentro de sí, multiplicada por m/s a alguna potencia, lo que podemos anular mediante la potencia adecuada de la velocidad de la luz. Esto se puede hacer tomando la proporción $\hbar/G$, que tiene las unidades $[\hbar/G] = \text{kg}^2 \cdot \text{s/m}$. Luego obtenemos la masa de Planck, tomando

$$m_p = \sqrt{\frac{\hbar c}{G}}.$$

La temperatura de Planck debe tener la constante de Boltzmann en el denominador porque ésta es la única manera de obtener un K como unidad. Las potencias apropiadas de longitud, tiempo y masa de Planck se pueden utilizar entonces para anular las partes sin K de la unidad de la constante de Boltzmann. Esto resulta en

$$T_p = \frac{1}{k_B}\sqrt{\frac{\hbar c^5}{G}}.$$

Un procedimiento similar finalmente lleva a la carga de Planck de

$$q_p = \sqrt{\frac{\hbar c}{k}}.$$

En forma numérica, estas unidades de Planck tienen los siguientes valores:

$$x_p = 1.61 \cdot 10^{-35}\ \text{m}$$

$$t_p = 5.39 \cdot 10^{-44}\ \text{s}$$

$$m_p = 2.18 \cdot 10^{-8}\ \text{kg}$$

$$T_p = 1.42 \cdot 10^{32}\ \text{K}$$

$$q_p = 1.88 \cdot 10^{-18}\ \text{C}.$$

Las escalas de Planck para temperatura, longitud y tiempo están muy lejos de nuestras experiencias usuales, y son ya sea astronómicamente altas (temperatura) o inimaginablemente pequeñas (longitud y tiempo). La carga de Planck, sin embargo, es relativamente parecida al cuanto elemental de carga e y se distingue solamente por un factor de $1/\sqrt{\alpha} = \sqrt{137} = 11.7$.

39.2 Ejercicio en clase

La masa de Planck es aproximadamente la misma que la masa de:

a) un bosón *Z*;

b) un átomo de oro;

c) la pata de una mosca de la fruta;

d) una pelota de béisbol;

e) un portaaviones.

39.2 Oportunidad de autoevaluación

¿Cuál es el valor de la energía de Planck en unidades SI?

Supersimetría y teoría de cuerdas

El increíble éxito de la teoría de Dirac motivaba la extensión ulterior del modelo estándar de la física de partículas. Basándose simplemente en simetrías, Dirac predijo que la materia visible tiene parejas sin descubrir con estados de energía negativa. Esto condujo al descubrimiento de la antimateria y a darse cuenta de que cada partícula tiene una pareja en el mundo de las antipartículas, con la misma masa, pero con carga opuesta.

Las teorías supersimétricas (abreviadas como SUSY) proponen hacer lo mismo para fermiones y bosones. La **supersimetría** postula para cada fermión una pareja bosónica supersimétrica, y para cada bosón una pareja fermiónica supersimétrica. Esta idea se propuso originalmente en 1973 por el italoestadounidense Bruno Zumino y por el austroalemán Julius Wess.

Una severa restricción para las teorías SUSY es que aún no se han encontrado las pruebas experimentales para estas parejas supersimétricas. Este hecho excluye todas las versiones de teoría SUSY que pronostican masas debajo de 100 GeV/c^2, la región de energía-masa que hemos explorado exhaustivamente con los aceleradores de partículas existentes, para cualquiera de las nuevas partículas postuladas. Sin embargo, algunas extensiones de SUSY del modelo estándar predicen masas de partículas apenas arriba de este límite. Por lo tanto, existe la esperanza de que el régimen de energías restantes entre 100 GeV y 1 TeV, que es accesible por el colisionador LHC en CERN, revelará descubrimientos de una magnitud comparable con el descubrimiento del positrón.

Además, muchas teorías SUSY pronostican la existencia de neutralinos muy pesados. Se piensa que los neutralinos son mezclas de zinos (pareja SUSY del bosón Z), fotinos (pareja SUSY del fotón) e higgsinos (pareja SUSY del bosón de Higgs). La variante más ligera del neutralino es absolutamente estable en estas teorías y es un candidato líder para la posible composición de materia oscura fría. Se llama WIMP (*weakly interacting massive particle*, partícula masiva de interacción débil). El capítulo 12 introdujo el concepto de materia oscura fría como se necesitaba para explicar efectos como la estratificación lenticular gravitacional y el hecho de que las velocidades orbitales de estrellas alrededor de sus galaxias son por lo general demasiado grandes en relación con la cantidad de materia visible.

La rama de la teoría de la física de partículas que indiscutiblemente ha atraído más atención que cualquier otra durante las últimas dos décadas es la **teoría de cuerdas**. En su nivel más básico, la teoría de cuerdas reemplaza la partícula puntual elemental (de dimensión cero) como el elemento de materia más básico con cuerdas unidimensionales de muy cortas longitudes, posiblemente en la escala de Planck. Las partículas elementales que observamos en experimentos son entonces simplemente cuerdas vibrando con frecuencias de resonancia particulares. Las cuerdas pueden fusionarse y partirse, lo que da pie a las interacciones de partículas del modelo estándar de la física de partículas, analizado en la sección anterior (figura 39.28).

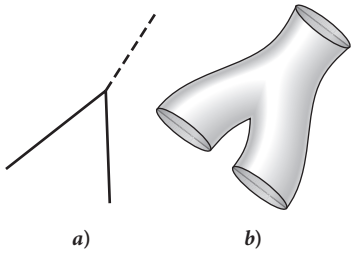


FIGURA 39.28 *a*) Diagrama convencional de Feynman de la interacción de partículas puntuales; *b*) representación del mismo proceso como fusión de cuerdas en la teoría de cuerdas.

Mientras que la teoría de cuerdas ha estado desde finales de la década de 1960, realmente se volvió dominante después de que el físico británico Michael Green y el estadounidense John Schwartz elaboraron una versión de la teoría en 1984 que inició la teoría de supercuerdas como una ruta para unificar todas las fuerzas conocidas, incluida la gravedad. En la prensa popular, la teoría de cuerdas fue llamada "La teoría de todo". A mediados de los años noventa, por medio del trabajo de Edward Witten y muchos otros, se descubrió que la teoría de cuerdas puede pensarse como un cierto límite de una teoría tal vez más profunda que se llama teoría M.

Las teorías de cuerdas predicen dimensiones espaciales adicionales. Las versiones más populares postulan un espacio-tiempo de 10 u 11 dimensiones. ¿Por qué, entonces, podemos observar sólo 3+1 dimensiones? La respuesta que dan los teóricos de cuerdas es que las dimensiones adicionales se compactan a un tamaño tan pequeño que no las podemos observar. Esto puede suceder en la escala de Planck, pero no se puede excluir que la escala de longitud compactada pueda ser tan grande como unos cuantos micrómetros. Si esto es correcto, entonces podremos esperar a encontrar distorsión de gravedad y desviación de la ley de fuerza r^{-2} en esta escala. A pesar de casi dos décadas de búsquedas de alta precisión, aún no se han encontrado pruebas experimentales positivas. Las teorías de cuerdas son estructuras matemáticas muy atractivas a los ojos de los teóricos de partículas, pero todavía no ha sido posible establecer una conexión irrefutable para los observables experimentales. En 1997, sin embargo, Juan Maldacena de Argentina y Estados Unidos demostró que la teoría de cuerdas definida en un cierto espacio es equivalente a una teoría de campo cuántico sin gravedad en el límite de dimensiones bajas de este espacio. Al final de cuentas, esto podrá resultar ser la mejor conexión con el modelo estándar de la física de partículas y, por ende, conectar la teoría de cuerdas con consecuencias observables.

39.5 Partículas compuestas

Dado que ya tenemos una comprensión razonable de los bloques de construcción fermiónicos más básicos de la materia y sus interacciones mediante el intercambio de bosones fundamentales, podemos empezar a tratar de entender cómo ellos forman partículas compuestas. Todas las partículas compuestas formadas por quarks se llaman **hadrones**. O son pares de quark-antiquark, llamados **mesones**, o son un grupo de tres quarks llamados **bariones**. Cada quark tiene otra característica que puede ser uno de tres valores. Como ya se aludió en la sección 39.3, este rasgo se llama, de manera arbitraria, un **color**, a pesar de que no tiene nada que ver con el uso común de la palabra *color* como una propiedad visual. Finalmente, todas las partículas compuestas son "singuletes" de color.

¿Qué es un singulete de color? Como se comentó anteriormente, los quarks llevan algo llamado carga de color, que viene en tres variedades: rojo (r), verde (g) y azul (b). Los antiquarks llevan anticolores que se indican mediante barras horizontales encima de la letra. Por supuesto, no se puede realmente imaginar que los quarks tengan un color físico, porque lo que vemos como color es solamente luz de un rango muy limitado de energía de fotones, energías que son millones de veces más pequeñas que las escalas características del mundo de la física de partículas. Sin embargo, el álgebra de síntesis aditiva funciona como una perfecta analogía para el álgebra de la combinación de quarks en hadrones.

La figura 39.29 muestra selectores de color RGB de un programa típico de gráficas informáticas, donde se puede seleccionar cualquier color como una mezcla de rojo, verde y azul mediante la elección de números entre 0 y 255 para cada uno de los tres componentes de color. Por ejemplo, la selección de un valor de 255 para rojo, 0 para verde y 0 para azul produce un rojo puro (esquina superior izquierda). La inversión de las tres barras —0 para rojo, 255 para verde y 255 para azul— produce cian. En cierto sentido, esto es el anticolor de rojo, $\bar{r}$, porque si se suman los valores de RGB de cian y rojo, obtenemos 255 para los tres valores de RGB, que es el "color" blanco. Rojo puro, verde puro y azul puro también se pueden sumar para obtener blanco. De tal modo, blanco representa el singulete de color que es el resultado de la suma de una combinación de cantidades iguales de todos los colores o cantidades iguales de un color y sus anticolores. También en la física de partículas sólo podemos tener singuletes de color como partículas físicamente observables. Por lo tanto, necesitamos ya sea tres quarks de diferente color, o bien, un quark de cierto color y un antiquark con el anticolor del quark, a fin de obtener partículas que podamos observar. La primera combinación se llama barión y es un fermión (ya sea con espín $\frac{1}{2}\hbar$ o espín $\frac{3}{2}\hbar$), y la segunda es un mesón, que siempre es un bosón (ya sea con espín 0 o con espín $1\hbar$). Tres antiquarks con tres diferentes anticolores también son una posibilidad para obtener un singulete de color, y ellos forman los antibariones.

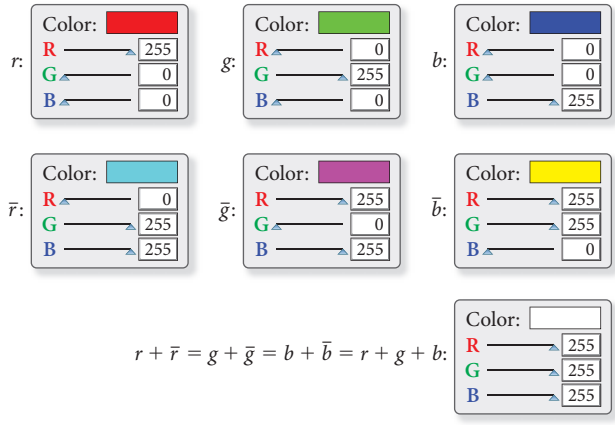


FIGURA 39.29 Barras de síntesis aditiva en un programa de gráficas de computadora como modelo para colores de quarks (hilera superior), colores de antiquarks (hilera del medio) y el singulete de color (panel inferior).

Mesones

La tabla 39.3 ofrece un listado parcial de los mesones conocidos. Incluye todos los mesones con una masa menor que 1 GeV/c^2, y unos cuantos mesones con propiedades especiales con masas mayores. Se conocen cientos de otros mesones.

Ningún mesón es absolutamente estable; todos decaen. Los más ligeros son los piones π^+, π^-, π^0, todos con masas alrededor de 140 MeV/c^2. El pión neutral decae predominantemente por medio de la reacción

$$\pi^0 \rightarrow 2\gamma. \tag{39.13}$$

Este decaimiento procede relativamente rápido, en una escala de tiempo del orden de 10^{-16} s, por medio de la interacción electromagnética. Los piones cargados, sin embargo, no pueden decaer de esta manera debido a la ley de conservación de la carga. En su lugar, tienen que descomponerse por medio de la interacción débil, predominantemente mediante la reacción

$$\begin{aligned} \pi^+ &\rightarrow \mu^+ + \nu_\mu \\ \pi^- &\rightarrow \mu^- + \bar{\nu}_\mu. \end{aligned} \tag{39.14}$$

Tabla 39.3 Los mesones más importantes, incluyendo sus masas, vida media, números cuánticos y composición de quarks

Nombre	Símb.	m[MeV/c^2]	Vida media [s]	s	S	C	B	Quarks
Pión	π^+	139.570	$2.60\cdot10^{-8}$	0	0	0	0	$u\bar{d}$
Pión	π^-	139.570	$2.60\cdot10^{-8}$	0	0	0	0	$\bar{u}d$
Pión	π^0	134.977	$8.4\cdot10^{-17}$	0	0	0	0	$\frac{1}{\sqrt{2}}(u\bar{u}-d\bar{d})$
Eta	η	547.5	$5.1\cdot10^{-19}$	0	0	0	0	$\frac{1}{\sqrt{6}}(u\bar{u}+d\bar{d}-2s\bar{s})$
Eta Prima	η'	957.8	$3.2\cdot10^{-21}$	0	0	0	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}(u\bar{u}+d\bar{d}+s\bar{s})$
Ro	ρ^+	775.5	$4.42\cdot10^{-24}$	1	0	0	0	$u\bar{d}$
Ro	ρ^-	775.5	$4.42\cdot10^{-24}$	1	0	0	0	$\bar{u}d$
Ro	ρ^0	775.5	$4.42\cdot10^{-24}$	1	0	0	0	$\frac{1}{\sqrt{2}}(u\bar{u}-d\bar{d})$
Omega	ω	782.6	$7.75\cdot10^{-23}$	1	0	0	0	$\frac{1}{\sqrt{2}}(u\bar{u}+d\bar{d})$
Fi	ϕ	1 019.46	$1.55\cdot10^{-22}$	1	0	0	0	$s\bar{s}$
Kaón	K^+	493.68	$1.239\cdot10^{-8}$	0	1	0	0	$u\bar{s}$
Kaón	K^-	493.68	$1.239\cdot10^{-8}$	0	−1	0	0	$\bar{u}s$
Kaón	K^0	497.65	K^0_S:$8.96\cdot10^{-11}$	0	1	0	0	$d\bar{s}$
Kaón	$\bar{K}^0$	497.65	K^0_L:$5.11\cdot10^{-8}$	0	−1	0	0	$\bar{d}s$
K-estrella	K^{*+}	891.7	$1.30\cdot10^{-23}$	1	1	0	0	$u\bar{s}$
K-estrella	K^{*-}	891.7	$1.30\cdot10^{-23}$	1	−1	0	0	$\bar{u}s$
K-estrella	K^{*0}	896.0	$1.31\cdot10^{-23}$	1	1	0	0	$d\bar{s}$
K-estrella	$\bar{K}^{*0}$	896.0	$1.31\cdot10^{-23}$	1	−1	0	0	$\bar{d}s$
Mesón D	D^+	1 869.3	$1.04\cdot10^{-12}$	0	0	1	0	$c\bar{d}$
Mesón D	D^-	1 869.3	$1.04\cdot10^{-12}$	0	0	−1	0	$\bar{c}d$
Mesón D	D^0	1 864.5	$4.10\cdot10^{-13}$	0	0	1	0	$c\bar{u}$
Mesón D	$\bar{D}^0$	1 864.5	$4.10\cdot10^{-13}$	0	0	−1	0	$\bar{c}u$
Mesón D_s	D^+_s	1 968.2	$5.0\cdot10^{-13}$	0	1	1	0	$c\bar{s}$
Mesón D_s	D^-_s	1 968.2	$5.0\cdot10^{-13}$	0	−1	−1	0	$\bar{c}s$
J/Psi	J/ψ	3 096.9	$7.05\cdot10^{-21}$	1	0	0	0	$c\bar{c}$
Mesón B	B^+	5 279.0	$1.64\cdot10^{-12}$	0	0	0	1	$u\bar{b}$
Mesón B	B^-	5 279.0	$1.64\cdot10^{-12}$	0	0	0	−1	$\bar{u}b$
Mesón B	B^0	5 279.4	$1.53\cdot10^{-12}$	0	0	0	1	$d\bar{b}$
Mesón B	$\bar{B}^0$	5 279.4	$1.53\cdot10^{-12}$	0	0	0	−1	$\bar{d}b$
Mesón B_s	B^0_s	5 367	$1.47\cdot10^{-12}$	0	−1	0	1	$s\bar{b}$
Mesón B_s	$\bar{B}^0_s$	5 367	$1.47\cdot10^{-12}$	0	1	0	−1	$s\bar{b}$
Mesón B_c	B^+_c	6 286	$5\cdot10^{-13}$	0	0	1	1	$c\bar{b}$
Mesón B_c	B^-_c	6 286	$5\cdot10^{-13}$	0	0	−1	−1	$\bar{c}b$
Ípsilon	Υ	9 460.3	$1.22\cdot10^{-20}$	1	0	0	0	$b\bar{b}$

Datos de W.-M. Yao *et al.* (Particle Data Group), *J. Phys.* G 33, 1 (2006) (http://pdg.lbl.gov).

En comparación con la descomposición de piones neutrales, la descomposición de los piones cargados tarda prácticamente una eternidad, del orden de 10^{-8} s, que es aproximadamente 100 millones de veces más largo que el tiempo de decaimiento del pión neutral.

Examinemos la vida media de los otros mesones. La figura 39.30 muestra tres regiones enormemente diferentes de vida media. El área resaltada en color amarillo muestra los decaimientos que proceden mediante la interacción débil; la de color blanco mediante la interacción electromagnética, y la de rosa mediante la interacción fuerte. Puesto que se debe conservar la energía en cada decaimiento, los mesones más pesados pueden decaer en mesones más ligeros, pero no viceversa. Este decaimiento a otros mesones sucede muy rápidamente, si procede mediante la interacción fuerte. Debe existir una buena razón por la que los kaones y mesones D y B vivan, comparativamente, un tiempo tan largo. Después de nuestro análisis del modelo de quarks, usted puede entender ahora que la razón es que contienen quarks de los tipos strange, charm y bottom, respectivamente, que sólo pueden decaer por medio de la interacción débil en quarks de masa menor de otros sabores.

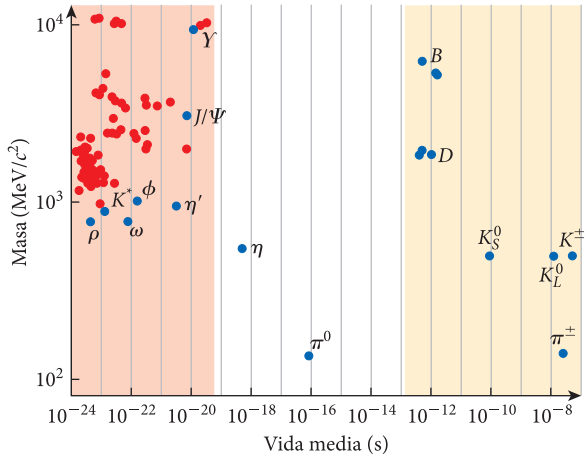


FIGURA 39.30 Gráfica de las vidas medias y masas para todos los mesones conocidos. Los puntos azules representan los mesones enumerados en la tabla 39.3, y los puntos rojos son los demás mesones.

El número de extrañeza cuántica S cuenta el número de quarks antistrange en un hadrón, menos el número de quarks strange. (Es una cuestión meramente histórica que los quarks antistrange se cuenten con números positivos. Para los números cuánticos de charm, C, y bottom, B, que cuentan el número neto de quarks charm y bottom, el signo se invierte.) Otro número cuántico útil es el isoespín, t, y su proyección, t_z. Aunque ningún momento angular real está involucrado en este caso, se puede usar la misma álgebra para el isoespín que la que se utiliza para el espín convencional. En particular, un isoespín dado t tiene $(2t+1)$ estados de proyección diferentes t_z, igual que un espín s dado tiene $(2s+1)$ estados de proyección diferentes s_z. El número de carga Z, el isoespín y el número de extrañeza cuántica para los mesones de masa baja (debajo del umbral de masa en el que empiezan a contener otros quarks además de up, down y strange) se relacionan mediante

$$Z = t_z + \tfrac{1}{2}S. \tag{39.15}$$

La figura 39.31 muestra la disposición de los mesones de masa baja de espín 0 [parte *a*)] y espín 1 $1\hbar$ [parte *b*)] como función de isoespín y extrañeza. Ellos forman nonetos característicos, que el modelo de quarks es capaz de explicar de manera hermosa. La figura 39.32 muestra la misma gráfica, pero ahora en términos de los quarks que constituyen los diferentes mesones. En cada caso, la composición de quarks de los tres mesones neutros con $S = t_z = 0$ es una combinación lineal de los tres pares de quarks-antiquarks. Las cargas de quarks en la tabla 39.1 confirman que sus cargas siempre suman la carga correspondiente para cada mesón.

Los quarks up y down tienen isoespín $\frac{1}{2}$, con las proyecciones $t_z = \frac{1}{2}$ para el quark up y $t_z = -\frac{1}{2}$ para el quark down. El isoespín para todos los demás quarks y antiquarks (strange, charm,

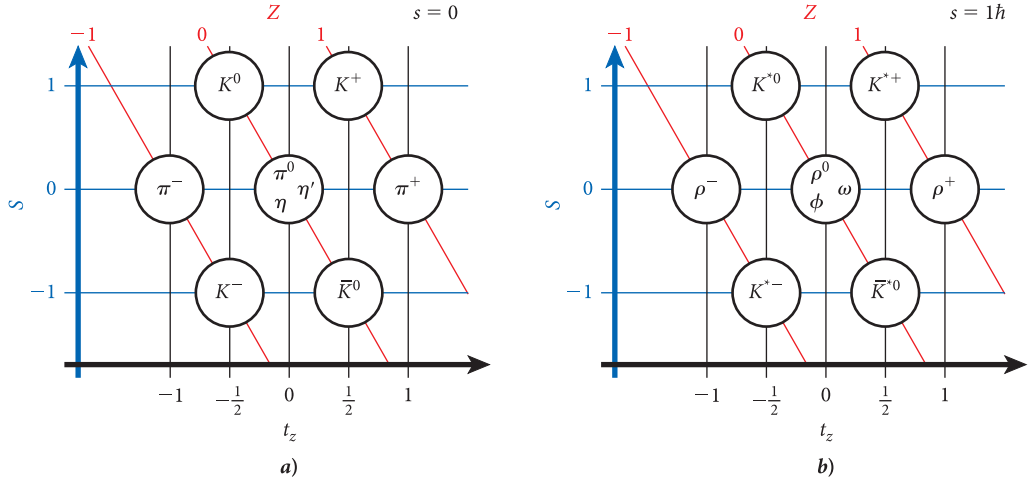


FIGURA 39.31 Nonetos de mesones con *a*) espín 0 y *b*) espín $1\hbar$.

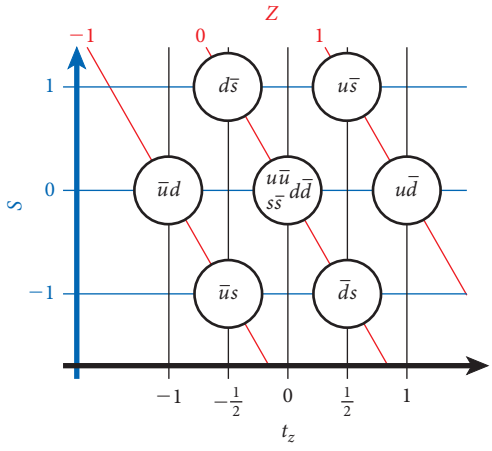


FIGURA 39.32 Composición de quarks de los dos nonetos de mesones.

bottom, top) es 0. De manera similar al caso para la cantidad de movimiento angular y espín regular, si una partícula con isoespín $\frac{1}{2}$ se combina con una partícula con isoespín 0, el isoespín resultante es $\frac{1}{2}$. Si dos partículas con isoespín $\frac{1}{2}$ se combinan, el isoespín resultante puede ser 0 (cuando los dos vectores de isoespín son antiparalelos) o 1 (cuando los dos vectores de isoespín son paralelos). Si se combinan tres partículas con isoespín $\frac{1}{2}$ el isoespín resultante puede ser $\frac{3}{2}$ (los tres vectores de isoespín son paralelos) o $\frac{1}{2}$ (uno antiparalelo a los otros dos). Esta "álgebra de isoespín" nos permite construir el isoespín observado de todos los mesones a partir de los isoespines de los quarks, como se muestra en la figura 39.32.

39.3 Ejercicio en clase

El estudio de la figura 39.32 nos lleva a concluir que las proyecciones de isoespín t_z de los quarks antiup ($\bar{u}$) y antidown ($\bar{d}$) son

a) $t_z(\bar{u}) = -\frac{1}{2}$, $t_z(\bar{d}) = -\frac{1}{2}$.

b) $t_z(\bar{u}) = -\frac{1}{2}$, $t_z(\bar{d}) = \frac{1}{2}$.

c) $t_z(\bar{u}) = \frac{1}{2}$, $t_z(\bar{d}) = -\frac{1}{2}$.

d) $t_z(\bar{u}) = \frac{1}{2}$, $t_z(\bar{d}) = \frac{1}{2}$.

e) $t_z(\bar{u}) = 0$, $t_z(\bar{d}) = 0$.

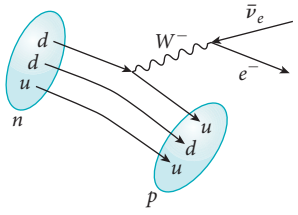


FIGURA 39.33 Diagrama de Feynman para el decaimiento beta del neutrón.

Bariones

Los bariones más importantes se encuentran en la tabla 39.4. Como ya hemos hecho constar, los bariones están compuestos por tres quarks cada uno, con un quark de cada color. El único barión estable es el protón, el barión más ligero. Como se analizó anteriormente, un neutrón puede descomponerse en un protón por medio de un decaimiento beta:

$$n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e. \tag{39.16}$$

Éste es el mismo proceso para el decaimiento beta del quark down expresado en la ecuación 39.12, porque en el proceso de la ecuación 39.16, uno de los dos quarks down del neutrón se descompone en un quark up, y los demás quarks up y down permanecen sin cambio (figura 39.33).

Tabla 39.4 Los bariones más importantes, incluyendo sus masas, vida media, números cuánticos y composición de quarks

Nombre	Símb.	m[MeV/c^2]	Vida media [s]	Z	t_z	s	S	C	B	Quarks
Protón	p	938.272	∞	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0	0	*uud*
Neutrón	n	939.565	885.7	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0	0	*udd*
Delta	Δ^{++}	1 232	$5.6 \cdot 10^{-24}$	2	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$	0	0	0	*uuu*
Delta	Δ^{+}	1 232	$5.6 \cdot 10^{-24}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	0	0	0	*uud*
Delta	Δ^{-}	1 232	$5.6 \cdot 10^{-24}$	−1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	0	0	0	*udd*
Delta	Δ^{--}	1 232	$5.6 \cdot 10^{-24}$	−2	$-\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$	0	0	0	*ddd*
Lambda	Λ^0	1 115.683	$2.63 \cdot 10^{-10}$	0	0	$\frac{1}{2}$	−1	0	0	*uds*
Sigma	Σ^+	1 189.37	$8.02 \cdot 10^{-11}$	1	1	$\frac{1}{2}$	−1	0	0	*uus*
Sigma	Σ^0	1 192.64	$7.4 \cdot 10^{-20}$	0	0	$\frac{1}{2}$	−1	0	0	*uds*
Sigma	Σ^-	1 197.45	$1.48 \cdot 10^{-10}$	−1	−1	$\frac{1}{2}$	−1	0	0	*dds*
Ji	Ξ^0	1 314.8	$2.90 \cdot 10^{-10}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	−2	0	0	*uss*
Ji	Ξ^-	1 321.3	$1.64 \cdot 10^{-10}$	−1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	−2	0	0	*dss*
Omega	Ω^-	1 672.5	$8.21 \cdot 10^{-11}$	−1	0	$\frac{3}{2}$	−3	0	0	*sss*
Lambda c	Λ^+_c	2 286.5	$2.0 \cdot 10^{-13}$	1	0	$\frac{1}{2}$	0	1	0	*udc*
Lambda b	$\Lambda_b{}^0$	5 624	$1.23 \cdot 10^{-12}$	0	0	$\frac{1}{2}$	0	0	1	*udb*

Datos de W.-M. Yao *et al.* (Particle Data Group), *J. Phys.* G 33, 1 (2006) (http://pdg.lbl.gov).

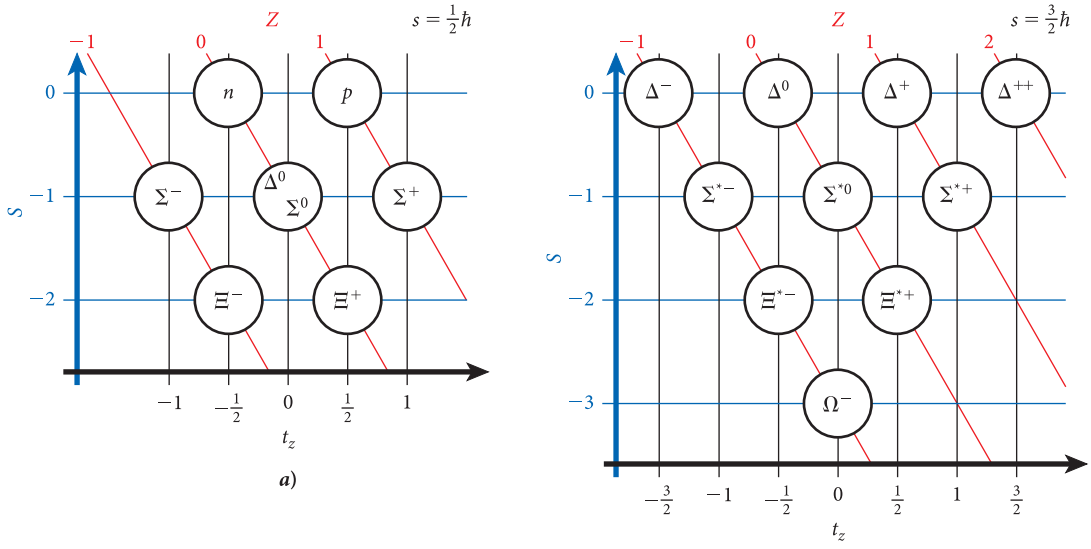


FIGURA 39.34 *a*) Octeto de bariones de espín $\frac{1}{2}\hbar$ y *b*) decapleto para espín $\frac{3}{2}\hbar$.

Los decaimientos dominantes para todos los bariones más pesados se realizan por medio de la emisión de uno o varios piones. Éste puede ser un proceso que involucra solamente la interacción fuerte, caso en el cual se encuentran vidas medias del orden de 10^{-20} s o más cortas. Además, si un quark tiene que cambiar de sabor en el proceso, luego aparecen nuevamente vidas medias mucho más largas, lo cual es típico de la interacción débil.

En la figura 39.34, los bariones de masa más baja de espín $\frac{1}{2}\hbar$ y espín $\frac{3}{2}\hbar$ se arreglan en un octeto y un decapleto como funciones de isoespín y extrañeza, parecidos al diagrama para mesones en la figura 39.31. Este arreglo en nonetos (para los mesones) y octeto y decapleto (para los bariones) deriva naturalmente de la estructura subyacente de quarks. Observe en particular el barión omega. Puesto que tiene extrañeza −3, está compuesto por tres quarks strange. Su existencia fue pronosticada por el modelo de quarks y se descubrió posteriormente en 1964. Éste fue el primer gran éxito del modelo de quarks.

39.3 Oportunidad de autoevaluación

Construya la composición de quarks para los bariones de la figura 39.34 de la misma manera en la que se hizo en la figura 39.32.

Red QCD, confinamiento y libertad asintótica

La suma de las masas de los quarks constituyentes dentro de un protón es menos que 15 MeV/c^2, que es solamente 1.5% de la masa del protón. ¿De dónde proviene el resto de la masa del protón? Responder a esta pregunta es muy difícil y requiere de herramientas matemáticas que van más allá del alcance de este libro. Sin embargo, podemos esbozar la respuesta.

La teoría fundamental, incluidas la relatividad y la física cuántica, que describe la interacción de quarks y gluones entre sí y con el vacío se llama **cromodinámica cuántica** (**QCD**, del inglés *quantum chromodynamics*). Como ejemplo ilustrativo para los tipos de procesos que la QCD tiene que tomar en cuenta, la figura 39.35 muestra un diagrama de Feynman de un quark strange propagándose a través del vacío, emitiendo y absorbiendo gluones y pares virtuales de quarks-antiquarks.

Los físicos entienden la estructura subyacente de la QCD en principio, pero es muy difícil obtener resultados numéricos. Para obtener alguna predicción que sea comparable con los experimentos, los físicos han construido supercomputadoras personalizadas para simular la QCD. A pesar del crecimiento exponencial de la potencia de las computadoras durante las últimas décadas, es justo decir que el avance en el cálculo de los observables, como las masas de hadrones, ha sido lento.

Resolver las ecuaciones de la QCD es difícil. Un método que permite resolver ecuaciones de QCD es la **red QCD**. En ésta, se supone que los quarks residen únicamente en los vértices de una red de tipo cristalino, y los gluones tienen que viajar en líneas rectas entre los quarks. Esta técnica incorpora atajos que permiten que se puedan realizar los cálculos. Claro está que el mundo real no es una red de cristales. Sin embargo, el objetivo es realizar los cálculos para espacios cada vez más pequeños y redes cada vez más grandes para hacer un mejor trabajo de aproximación a la realidad física.

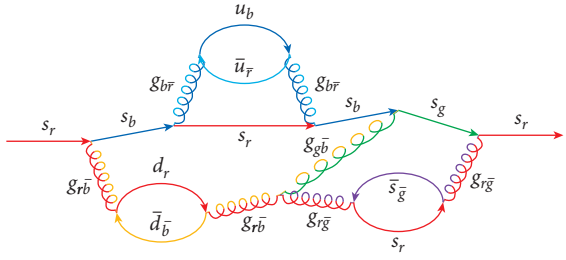


FIGURA 39.35 Ejemplo de un diagrama de Feynman de un quark strange rojo propagándose a través del vacío QCD.

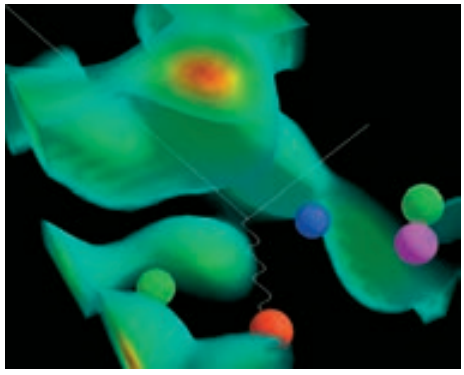


FIGURA 39.36 Interpretación artística de un protón. Las bolas rojas, verdes y azules representan la ubicación de los quarks constituyentes. El par de pelotas de color verde-magenta ("antiverde") a la derecha representa un par virtual de quark-antiquark. La línea blanca representa un electrón de alta energía que se dispersa contra uno de los quarks por medio del intercambio de un fotón (línea ondulada). Todos estos objetos se muestran sobre el fondo de un cálculo de red QCD del campo de gluones, tal como lo ejecutó el grupo de Adelaide, Australia.

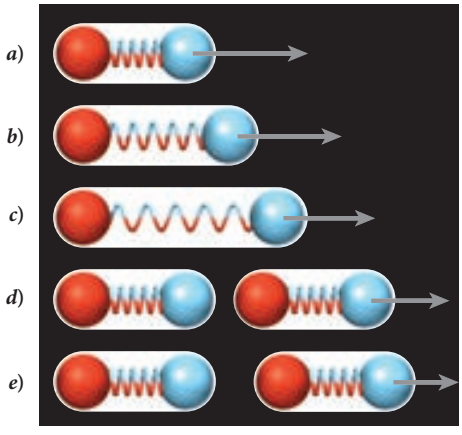


FIGURA 39.37 Ilustración esquemática de la fragmentación de un tubo de flujo de color.

La figura 39.36 muestra el resultado de un cálculo de red QCD para una toma instántenea de la configuración espacial del campo de gluones dentro de un protón. Encima de este resultado numérico se muestran tres pelotas marcando la posición de los quarks constituyentes del protón, así como un par virtual temporalmente creado de quark-antiquark.

Quarks, antiquarks y gluones, todos, llevan carga de color. La QCD predice que sólo objetos de color neutro pueden existir en aislamiento. Esto significa que un solo quark o gluón no puede ser observado por sí mismo. Se han conducido búsquedas sumamente sensibles para quarks libres, todas con resultados negativos.

Entonces, ¿qué pasa si intentamos remover un quark de un barión; por ejemplo, disparando un electrón con muy alta energía en un protón, tratando de desprender un quark? El quark puede adquirir cantidad de movimiento muy alta después de la colisión con el electrón y alejarse rápidamente de los otros dos quarks dentro del protón. Sin embargo, permanece atado a ellos por una serie de gluones llamados *tubo de flujo*. La QCD predice que la energía contenida en este tubo de flujo aumenta en proporción a su longitud. Una vez que tenga la longitud y energía suficientes, puede romperse y dividirse en dos o más objetos neutrales de color, principalmente piones. Esto se ilustra en forma esquemática en la figura 39.37, que muestra un mesón que consiste en un quark rojo y un antiquark antirrojo. El antiquark recibe un impulso y se mueve hacia la derecha, estirando el tubo de flujo de gluones entre ellos hasta que se rompe en otro par de quark-antiquark. Estas dos partículas de nueva producción hacen pareja con el quark y antiquark originales para formar dos nuevos mesones que ahora pueden alejarse libremente uno del otro. Si el impulso que recibe el quark original llega a ser suficientemente grande, el tubo de flujo de color también puede romperse en múltiples puntos, produciendo un par de quark-antiquark en cada punto de ruptura. El resultado es un grupo de mesones que son producidos en el proceso de fragmentación de cuerdas y que están viajando más o menos en la misma dirección. Siempre y cuando el impulso original sea lo suficientemente grande, el chorro formado por este grupo de partículas nuevas producidas se puede observar entonces en detectores de física de partículas.

Esto significa que todas las partículas elementales que llevan una carga de color —todos los gluones, quarks y antiquarks— son absolutamente confinadas. El confinamiento también implica que cualquier intento de remover un quark de su singulete de color sólo producirá singuletes de color adicionales, es decir, hadrones.

La fuerza de color actúa de tal modo que cuanto más se alejen objetos con carga de color uno del otro, más fuertemente están atados uno al otro. ¿Significa esto también lo contrario?; es decir, ¿cuando partículas con carga de color dentro de un singulete están cerca una de la otra se pueden mover libremente? En efecto, éste es el caso. En distancias cercanas o con altas cantidades de movimiento relativas, objetos con carga de color experimentan la llamada libertad asintótica. Esto fue pronosticado por David Gross, Frank Wilczek y David Politzer en 1973 y posteriormente confirmado de manera experimental. Ellos compartieron el premio Nobel en Física de 2004 por este logro.

EJEMPLO 39.3 Diagramas de Feynman del decaimiento de piones positivos y muones positivos

Cuando rayos cósmicos de alta energía, que consisten principalmente en protones, inciden en la atmósfera de la Tierra, ocurren reacciones que producen piones positivos. Estos piones decaen con una vida media de 26 ns en un muon positivo y un neutrino del muon

$$\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu .$$

A su vez, los muones positivos se descomponen con una vida media de 2.2 μs en un positrón, un neutrino del electrón y un neutrino del antimuon.

$$\mu^+ \rightarrow e^+ + \nu_e + \overline{\nu}_\mu .$$

PROBLEMA

Dibuje los diagramas de Feynman que representen estos dos decaimientos.

SOLUCIÓN

El pión positivo es un mesón compuesto por un quark up y un quark antidown, como muestra la figura 39.38.

Este par de quark-antiquark $u/\bar{d}$ se aniquila para producir un W^+. Luego el W^+ se materializa en el par de leptón-antileptón ν_μ/μ^+.

El muon positivo que se produce en el decaimiento ahora emite un W^+ y se transforma en un neutrino del antimuón como ilustra la figura 39.39.

El W^+ luego se materializa como el par de leptón-antileptón ν_e/e^+.

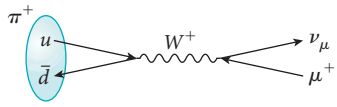


FIGURA 39.38 Diagrama de Feynman del decaimiento de un pión positivo.

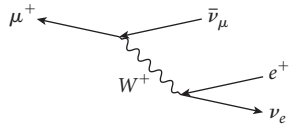


FIGURA 39.39 Diagrama de Feynman del decaimiento de un muon positivo.

DISCUSIÓN

El decaimiento de piones positivos es particularmente interesante porque los piones positivos son producidos en la parte superior de la atmósfera de la Tierra con energías relativamente altas por reacciones de protones de rayos cósmicos con los núcleos de átomos de nitrógeno y oxígeno. Estos piones se descomponen en muones y los muones resultantes viajan a una fracción grande de la velocidad de la luz. Los muones deberán viajar cuando mucho solamente 0.66 km antes de que se descompongan en positrones. Sin embargo, se observan muones producidos por rayos cósmicos en la superficie de la Tierra. Aproximadamente 10 muones por segundo pasan a través de nuestra mano. Una razón por la que los muones llegan a la superficie de la Tierra es la dilatación relativista del tiempo, como se estudió en el capítulo 35, ejemplo 35.2. Para una velocidad $\beta = v/c = 0.998$, el factor de dilatación de tiempo es

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-(0.998)^2}} = 15.8.$$

Por lo tanto, los muones viajarán una distancia de 10 km antes de que se descompongan, permitiendo que los muones lleguen a la superficie de la Tierra. Una segunda razón por la que los muones llegan a la superficie de la Tierra es que pueden atravesar la atmósfera de la Tierra sin interactuar con los núcleos en los átomos de los gases atmosféricos, porque el muon sólo interactúa mediante la fuerza débil y la fuerza electromagnética, y no por medio de la fuerza fuerte.

39.6 Cosmología del Big Bang

El cielo nocturno presenta una muestra asombrosa de luz que ha viajado por muchos años desde estrellas distantes (vea la figura 39.40). Desde el principio de la civilización, los humanos se han preguntado de dónde vino todo esto (y cómo y por qué). Desde mediados del siglo XX, los científicos han estado razonablemente seguros de que conocen la respuesta, y el panorama se esclarece cada vez más y con más detalle. Mediante la interacción de la astronomía observacional, la cosmología y la física nuclear y de partículas, los modelos se han refinado.

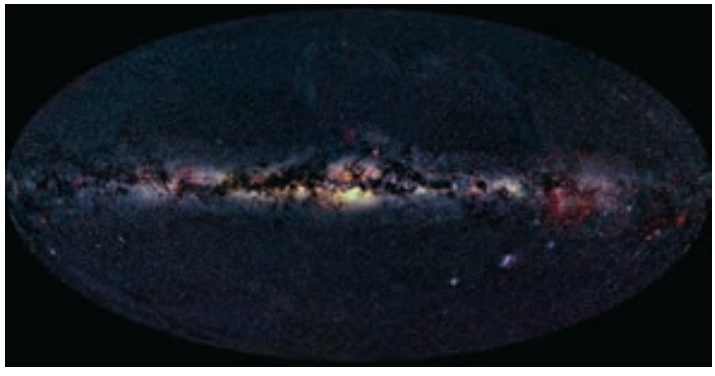


FIGURA 39.40 Vista del universo desde la Tierra en el espectro visible, usando la proyección de Aitoff en coordenadas galácticas. Esta proyección muestra la vista a lo largo de todo el cielo nocturno proyectado sobre la elipse que se muestra aquí. Las estrellas y nubes brillantes en la banda horizontal central pertenecen a la Vía Láctea.

El universo entero llegó a ser por medio de un evento singular que llamamos Big Bang. Este evento ocurrió hace $(13.73 \pm 0.12) \cdot 10^9$ años. Aunque la edad del universo no se puede fijar a una incertidumbre menor que 120 millones de años, los físicos sí son capaces de declarar cómo se desarrolló nuestro universo en las primeras fracciones de segundo después del Big Bang.

El tiempo de Planck es el tiempo más temprano después del Big Bang para el cual tiene sentido tratar de deducir una historia del universo (figura 39.41). (Vea el ejemplo 39.2.) En un tiempo de 10^{-43} s, la temperatura fue del orden de 10^{32} K. Todas las fuerzas estuvieron unificadas en aquel tiempo, y la gravedad se separó de las otras fuerzas poco tiempo después. Se estima que la era de gran unificación de las fuerzas fuertes y electrodébiles duró aproximadamente 10^{-34} s, cuando la fuerza

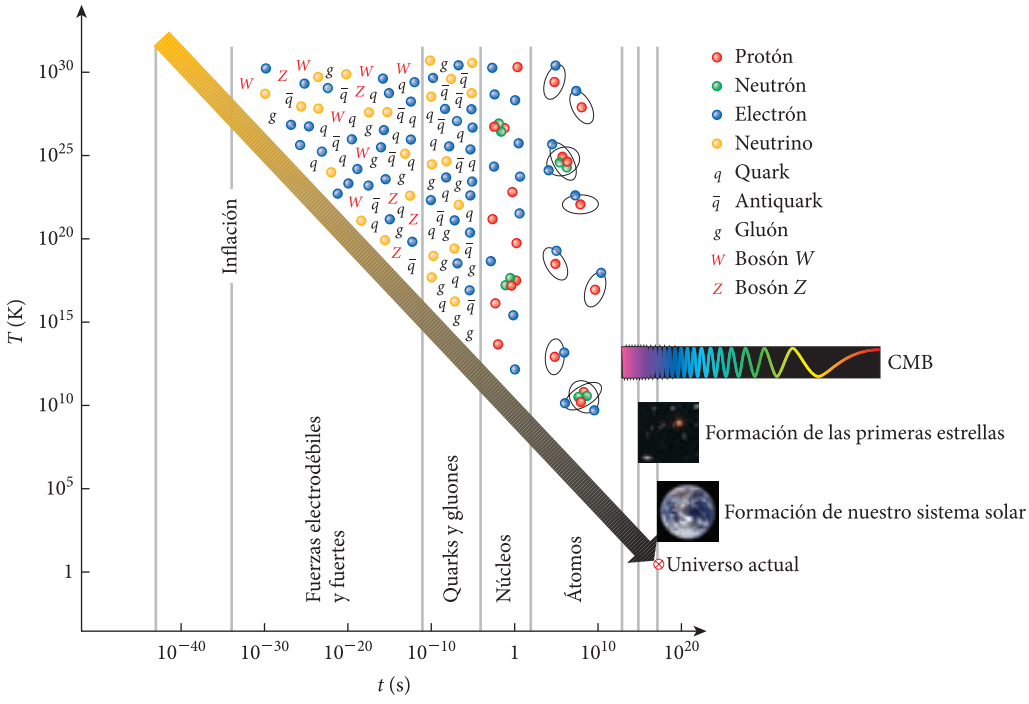


FIGURA 39.41 La temperatura del universo como función del tiempo. El círculo rojo con la cruz marca el universo actual, y las líneas verticales grises marcan los límites aproximados entre las diferentes épocas. Para cada época esbozamos los elementos básicos en ese tiempo. La radiación estuvo presente en todos los tiempos y en equilibrio con la materia hasta 10^{13} segundos, cuando el universo se volvió transparente a la radiación.

fuerte se separó de la fuerza electrodébil. Al final de esta era, el universo experimentó una rápida expansión inflacionaria. Para entender la necesidad de que este proceso haya sido parte de la historia de nuestro universo, tenemos que discutir un poco más el concepto de inflación en la cosmología.

Inflación

Tres preguntas importantes han desconcertado a los astrónomos por mucho tiempo:

1. ¿Por qué es la radiación de microondas del fondo cósmico tan increíblemente isotrópica, es decir, tan lisa y casi igual en todas las direcciones?
2. ¿Por qué está el universo hecho completamente de materia y no de antimateria?
3. ¿Por qué es el universo tan increíblemente plano (un término que pronto explicaremos)?

Las tres preguntas se merecen algo de elaboración para recalcar lo verdaderamente asombroso que son estos hechos.

Primero que nada pensemos sobre la suavidad del fondo cósmico de microondas. Como vimos en el capítulo 36, la radiación del fondo cósmico de microondas (Cosmic Microwave Background o CMB) muestra un espectro perfecto de cuerpo negro a una temperatura de 2.725 K. La radiación CMB fue descubierta en 1965 por Arno Penzias y Robert Woodrow Wilson, quienes recibieron el premio Nobel en Física por este descubrimiento en 1978. Esta radiación se había pronosticado en 1948 por George Gamov, Ralph Alpher y Robert Herman como una consecuencia del modelo del Big Bang, el cual, en aquel entonces, fue todavía muy especulativo y sólo uno de varios modelos posibles de la evolución temporal del universo. Sólo por medio de las misiones satelitales de COBE y posteriormente WMAP fue posible medir exactamente lo isotrópico que es esta radiación. Este descubrimiento dio el premio Nobel en Física a George Smoot y John C. Mather en 2006. La figura 39.42 muestra la imagen del universo en longitud de ondas de microondas. La imagen fue producida por el equipo que operaba el satélite WMAP. Muestra que las fluctuaciones de temperatura del espacio como función de la dirección sólo son del orden de $|\delta T/T| \sim 10^{-4}$ a 10^{-5}. Con fines de comparación, el equipo de WMAP también produjo un mapa de temperaturas de la superficie de la Tierra para junio de 1992, donde las fluctuaciones son del orden de $|\delta T/T| \sim 0.2$.

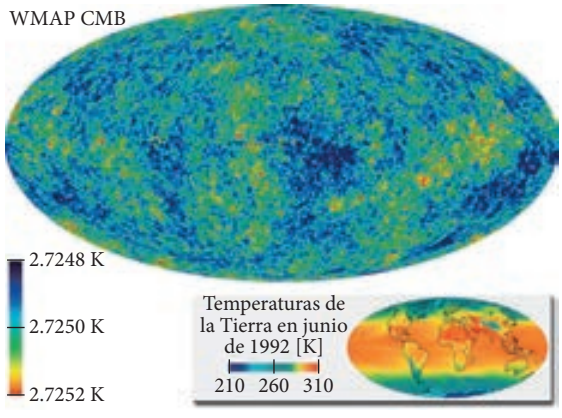


FIGURA 39.42 Mapa de temperaturas de la radiación de microondas del fondo cósmico (CMB) del universo. Recuadro: temperatura sobre la superficie de la Tierra en junio de 1992.

La suavidad de la CMB es tan asombrosa porque la radiación nos llega de todas las direcciones y tiene el mismo valor para todos los puntos en el

cielo, aun si no podrían haber estado en contacto causal durante la historia del universo (es decir, sin inflación).

En segundo lugar, hoy en día el universo está lleno de materia y casi nada de antimateria. Sabemos que inicialmente materia y antimateria fueron producidas en cantidades casi iguales y luego casi aniquiladas por completo en radiación, la cual ahora constituye el fondo cósmico de microondas. Se estima que en la actualidad existen casi 10^{10} fotones por cada hadrón. Esto significa que inicialmente había 10 000 000 001 partículas de materia por cada 10 000 000 000 partículas de antimateria. ¿De dónde viene esta asimetría tan pequeña?

En tercer lugar, después de más de 13 mil millones de años, el universo sigue en expansión y aún no podemos decidir si finalmente dejará de expandirse o si seguirá expandiéndose para siempre. Esto significa que la energía cinética total del universo es casi exactamente igual que la energía potencial total, pero con signo opuesto, así que la energía total del universo debe ser increíblemente cercana a cero. Por lo tanto, decimos que el universo es plano. Esto es análogo a la situación de disparar un rifle desde la superficie de la Tierra. Si usted dispara el rifle de tal modo que la bala tenga una velocidad inicial que es grande en comparación con la velocidad de escape, entonces fácilmente saldrá de la Tierra, pero si la velocidad inicial es menor que la velocidad de escape, entonces la bala volverá a caer. ¡Ahora imagine que después de miles de millones de años aún no podemos decidir si la bala finalmente caerá de regreso a la Tierra o si seguirá adelante! (Como un paréntesis, observamos que resultados muy recientes parecen implicar que el universo está dominado por energía oscura que paulatinamente causa la reaceleración del universo, lo que presenta otro misterio. Ya hemos mencionado este resultado en el capítulo 12. De este modo parece probable que, de acuerdo con lo que sabemos hasta ahora, el universo continuará su expansión para siempre.)

Un modelo propuesto por Alan Guth en 1980, y expandido posteriormente por otros, contesta las tres preguntas en el mismo marco del modelo, aunque suene como ciencia ficción: una fracción de tiempo muy corta después del Big Bang, el universo pasó por un periodo muy rápido de inflación. La figura 39.43 ilustra esta inflación. La idea es que, aproximadamente 10^{-34} s después del Big Bang, el universo estuvo a una temperatura cerca de 10^{27} K y en un proceso de enfriamiento rápido. Luego se volvió sobreenfriado. Esto es análogo a la lluvia helada aun siendo líquida a una temperatura a la que el agua debería estar congelada. Cuando la lluvia helada llega al suelo, el choque del impacto relativamente pequeño crea fluctuaciones que aumentan exponencialmente y causan la formación de hielo muy liso. El estado sobreenfriado de la gota de lluvia helada es un estado fundamental falso, y pequeñas fluctuaciones causan que sufra una transición al estado fundamental verdadero, es decir, hielo. Al principio del periodo de inflación, el universo también entró en un estado fundamental falso y se volvió sobreenfriado (aunque todavía a una temperatura astronómicamente alta). Esta transición al estado fundamental verdadero causó una expansión exponencial de tamaño, lo que resultó en la suavidad de la distribución de materia y radiación que aún se observa hoy en día en la radiación de microondas cósmica de fondo.

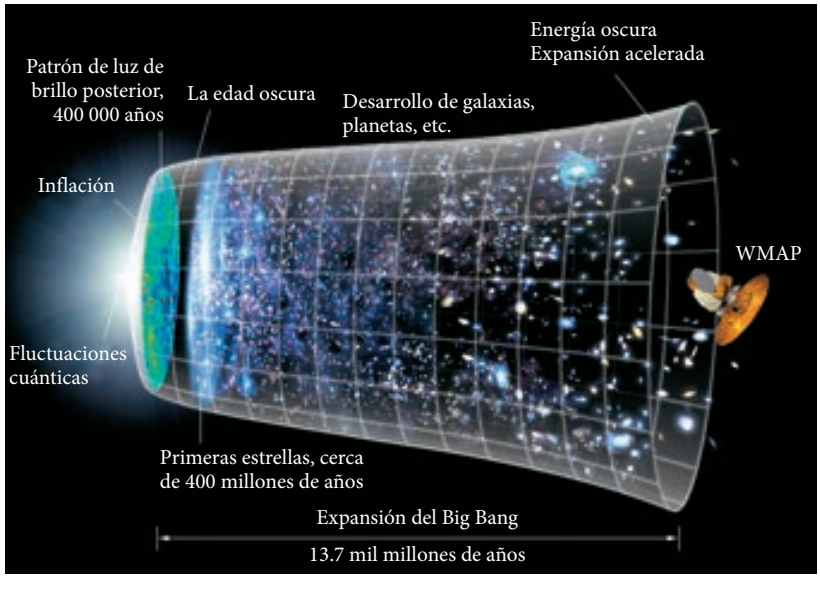


FIGURA 39.43 Ilustración para el concepto de inflación en el universo temprano.

Después del recalentamiento del periodo inflacionario, que quizás haya durado hasta 10^{-32} s, el universo entró en una era dominada por radiación que tardó aproximadamente hasta 10^{11} s. Durante este tiempo la temperatura T seguía cayendo paulatinamente y en forma inversamente proporcional a la raíz cuadrada del tiempo t,

$$T(t) = \frac{1.5 \cdot 10^{10}\ \text{K s}^{1/2}}{\sqrt{t}}. \tag{39.17}$$

Las fuerzas electromagnética y débil se separaron aproximadamente a 10^{-11} s. En este punto los bosones W y Z se volvieron masivos, por medio de un proceso llamado rompimiento espontáneo de simetría, y posteriormente decayeron rápidamente. (Quizá sea instructivo ver otro ejemplo de rompimiento espontáneo de simetría a fin de ilustrar el concepto: en agua líquida, las moléculas de agua pueden tener cualquier disposición y orientación. Sin embargo, en el proceso de congelación, esta simetría se tiene que romper para forzar las moléculas a una estructura cristalina de hielo.)

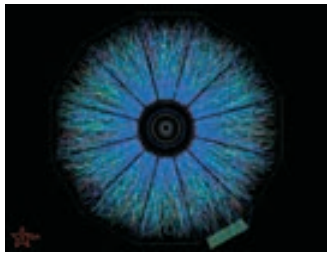


FIGURA 39.44 Visualización de una colisión de oro con oro en el Relativistic Heavy Ion Collider. Cada línea representa las huellas que una de las más de 5 000 partículas producidas ha dejado en el detector STAR. A partir de estas huellas, los científicos tratan de determinar las propiedades del estado de quark-gluón que fue creado en forma transitoria durante la colisión nuclear y aprender acerca de la historia de nuestro universo.

Plasma de quarks-gluones

Después de 10^{-11} s, y durando hasta aproximadamente 10^{-4} s, el universo era una mezcla de quarks, gluones y leptones que formaban un plasma. A pesar de llevar cargas de color, los quarks y gluones fueron asintomáticamente libres, debido a las altas temperaturas. Aproximadamente en 10^{-4} s el universo se había enfriado a una temperatura cercana a $2.1 \cdot 10^{12}$ K (180 MeV). Cálculos de red QCD indican que a esta temperatura los quarks y gluones se coaligaron a singuletes de color.

Increíblemente, el estado de quark-gluón de la materia que dominaba el universo temprano desde 10^{-11} s hasta 10^{-4} s después del Big Bang se puede recrear hoy en día en experimentos a base de aceleradores. Experimentos en el Relativistic Heavy Ion Collider en Brookhaven, Long Island (y a partir de 2010 en el Large Hadron Collider), usan rayos de colisión de núcleos de oro con una energía cinética total de hasta 20 TeV cada uno en el RHIC (y hasta 550 TeV en el LHC) para sondear las condiciones durante la evolución temporal temprana del universo y para producir pequeños volúmenes de materia de quark-gluón. Sin embargo, este estado de la materia sólo dura menos de 10^{-23} s en el laboratorio antes de explotar en más de 5 000 partículas, principalmente piones. Un evento del RHIC se ilustra en la figura 39.44.

Nucleosíntesis

Cuando el universo emergió de su fase de quark-gluón en un tiempo de 10^{-4} s después del Big Bang, consistió abrumadoramente en fotones, electrones, positrones, neutrinos y antineutrinos. También estuvo presente una pequeña cantidad de protones y neutrones, es decir, los singuletes de color más ligeros a los que los quarks se pudieron condensar. Los protones y neutrones se convirtieron constantemente unos en otros mediante las reacciones

$$\begin{aligned} n + \nu_e &\rightleftarrows p + e^- \\ n + e^+ &\rightleftarrows p + \overline{\nu}_e. \end{aligned} \tag{39.18}$$

Esto fue fácilmente posible porque la temperatura aún era del orden de 10^{11} o 10^{12} K, que corresponde de 10 a 100 MeV, mucho más grande que la diferencia de masa entre los neutrones y protones, que es sólo 1.293 MeV/c^2. Esto significa que los protones y neutrones estuvieron en equilibrio, con sus números relativos determinados por la proporción de sus factores de Boltzmann:

$$\frac{n_\text{n}}{n_\text{p}} = e^{(m_\text{n}c^2 - m_\text{p}c^2)/k_\text{B}T}. \tag{39.19}$$

Cuando el universo llegó a una temperatura de aproximadamente 10^{10} K (~0.86 MeV), las reacciones de la ecuación 39.18 procedieron demasiado lento para mantener el equilibrio. En este punto, la proporción de neutrones a protones se congeló en el valor $e^{-1.293/0.86} = 0.222$. Esto significa que entonces estaban presentes aproximadamente 22 neutrones para cada 100 protones. Para este entonces, el universo tenía la edad de 1 segundo. Sin embargo, la temperatura aún era demasiado alta en este momento para la formación de núcleos. En su lugar, todos los neutrones permanecieron libres y, por lo tanto, libres para el decaimiento beta de acuerdo con la ecuación 39.16, con una vida media de 15 minutos.

Después de 100 s, el universo se había enfriado a 10^9 K, y debido al decaimiento beta, sólo quedaban cerca de 16 neutrones por cada 100 protones. Éste fue el punto en el que se podían formar partículas alfa (que consisten en dos neutrones y dos protones cada una) y esencialmente todos los neutrones disponibles estaban ligados en ellas. También se formaban pequeños rastros

de deuterio, tritio, helio-3 y litio (se hablará más sobre ellos en el siguiente capítulo). Dieciséis neutrones y 16 protones pueden formar 8 partículas alfa. Por lo tanto, la fracción en masa total de nucleones atrapados dentro de partículas alfa en aquel tiempo fue 16 + 16 de 100 + 16: (16 + 16)/(100 + 16) ~ 27%. Este cálculo estimado es consistente con la fracción observada en masa primordial de 23% de helio (núcleo alfa + electrones). Esta predicción exitosa se considera uno de los grandes éxitos de la teoría del Big Bang.

El dominio de la radiación terminó aproximadamente a 10^{11} s (~ 3 000 años), cuando la temperatura había llegado a 10^5 K. Cuando la temperatura cayó aún más debajo de aproximadamente 3 000 K (~ 0.25 eV), electrones fueron capturados por los protones y partículas alfa para formar átomos neutros de hidrógeno y helio. Un fotón debe tener por lo menos 10.2 eV de energía para excitar un electrón del átomo de hidrógeno del primer al segundo estado (vea el capítulo 38), así que los fotones tuvieron entonces muchos electrones menos para dispersarse por ellos y, por ende, cayó la opacidad del universo. En aquel tiempo, los fotones fueron capaces de vagar libremente a través del universo, y la radiación se desacopló de la materia. En consecuencia, los fotones mostraron un espectro de cuerpo negro perfecto con la temperatura del universo a la hora del desacoplamiento. El universo tenía entonces la edad de 10^{13} s (~ 300 000 años). Estos fotones aún vagando libremente hoy en día están visibles, formando el fondo de microondas de radiación cósmica (CMB).

¿Por qué muestran los fotones de CMB ahora una temperatura de 2.725 K, aproximadamente 1 000 veces menor que la temperatura original? La respuesta es que los fotones fueron estirados debido a la expansión del universo. El factor de escala del universo es ahora aproximadamente por un factor R = 1 100 veces más grande de lo que fue en el momento en el que se desacopló la CMB. Esto significa que las longitudes de onda de estos fotones son ahora $\lambda = R\lambda_0$. De acuerdo con la ley de desplazamiento de Wien (vea el capítulo 36), la longitud de onda λ_m a la que el espectro de cuerpo negro tiene su máximo está relacionada con la temperatura como $\lambda_m T$ = const. Por consiguiente, con la expansión de las longitudes de onda por un factor de 1 100, la temperatura tiene que caer por el mismo factor. (La figura 39.41 indica este efecto en forma esquemática, estirando la longitud de onda de los fotones de CMB y cambiando el color hacia la longitud de onda más larga.)

Lo que siguió en el universo fue un periodo de oscuridad, quizá de unos cuantos millones de años, hasta que las primeras estrellas se formaron por medio de la interacción gravitacional en el gas de los átomos de hidrógeno y helio. Nuestro propio sistema solar se formó hace aproximadamente 4.5 mil millones de años, aproximadamente 9 mil millones de años después del Big Bang. En la figura 39.41, este punto en el tiempo corresponde a la última línea vertical gris, que en esta escala logarítmica está ligeramente a la izquierda del presente, el cual está marcado con el punto rojo a un tiempo de $4.3 \cdot 10^{17}$ s después del Big Bang. El capítulo 40 regresará a la física nuclear que abordó la formación de los elementos pesados que constituyen la mayoría de nuestra Tierra. Su presencia no se puede explicar tan sólo basándose en la cosmología del Big Bang y requiere otros eventos, los cuales exploraremos.

Desde esta breve narrativa de la cosmología del Big Bang queda claro cómo la física de partículas en las escalas más minúsculas imaginables está íntimamente conectada con la astronomía en las escalas más grandes. Esta conexión asombrosa entre lo más pequeño y lo más grande ha fascinado a los físicos durante los últimos 60 años y sigue fascinándolos, con nuevos resultados que se descubren año tras año.

LO QUE HEMOS APRENDIDO | GUÍA DE ESTUDIO PARA EXAMEN

- La búsqueda reduccionista para reducir sistemas a sus partes componentes es un tema importante de las ciencias y tiene su culminación actual en la física de partículas. Mientras que existe una metodología igualmente válida para entender la complejidad y estructura emergente, el presente capítulo se enfoca en el reduccionismo en la física de partículas.
- Se sondea la subestructura utilizando experimentos de dispersión. La sección transversal de dispersión se define como

$$\sigma = \frac{\text{Número de reacciones por centro de dispersión/s}}{\text{Número de partículas incidentes/s/m}^2}.$$

- Una sección transversal tiene la dimensión física de área y se mide en unidades de barn (b) o milibarn (mb): 1 b = 10^{-28} m^2, 1 mb = 10^{-31} m^2.
- La sección transversal clásica de Rutherford para la dispersión desde un blanco puntiforme por la interacción de Coulomb es

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{kZ_pZ_te^2}{4K}\right)^2 \frac{1}{\text{sen}^4\left(\frac{1}{2}\theta\right)}.$$

- Para la dispersión de una onda plana desde una fuente puntual, la función de onda de dispersión es

$$\psi_{total}(\vec{r}) = \psi_i(\vec{r}) + \psi_f(\vec{r}) = N\left(e^{i\kappa z} + f(\theta)\frac{e^{i\kappa r}}{r}\right),$$

y la sección transversal está relacionada con la amplitud de dispersión como

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left|f(\theta)\right|^2.$$

- El factor de forma es la trasformada de Fourier de la distribución de densidad,

$$F^2(\Delta p) = \left|\frac{1}{e}\int \rho(\vec{r})e^{i\Delta\vec{p}\cdot\vec{r}/\hbar}dV\right|^2$$

y mide la desviación de la sección transversal de dispersión respecto de la sección transversal de Rutherford para un blanco puntual,

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{punto}} \cdot F^2(\Delta p).$$

- Los fermiones elementales tienen espín $\frac{1}{2}\hbar$ e incluyen los seis quarks (up, down, strange, charm, bottom, top), los leptones electrón, muon y tauón, y los neutrinos del electrón, del muon y del tauón. Cada uno de estos 12 fermiones tiene una antipartícula. Todos los quarks tienen cargas no enteras de $-\frac{1}{3}e$ o $+\frac{2}{3}e$ y no pueden observarse aisladamente.
- Los bosones elementales son los mediadores de las interacciones entre los fermiones. Ellos son el fotón (electromagnético), los bosones *W* y *Z* (electrodébil), el gluón (fuerte) y el gravitón (gravitacional). El gravitón aún no se ha encontrado en forma experimental. Los gluones también pueden interactuar con otros gluones.
- La interacción de partículas fundamentales puede representarse con imágenes mediante diagramas de Feynman, y es posible realizar cálculos expresando cada paso de la interacción en términos de diagramas de Feynman.
- El modelo estándar de la física de partículas tiene varias posibles extensiones, de las cuales ninguna ha recibido la confirmación experimental hasta la fecha. En la escala de Planck se postula una gran teoría unificada de todas las fuerzas, que toma en cuenta el decaimiento del protón en escalas de tiempo muy largas. La supersimetría es otra extensión del modelo estándar, que postula la existencia de un socio supersimétrico para cada fermión y bosón conocidos. Otras teorías con un aliciente fundamental son las teorías de cuerdas que sostienen que la dimensionalidad del espacio-tiempo es 11, con las demás dimensiones compactadas en escalas muy pequeñas.
- Los quarks y antiquarks se pueden combinar para formar singuletes de color, que son partículas observables en aislamiento. Un quark y un antiquark pueden formar un mesón (pión, kaón, etcétera). Tres quarks pueden formar bariones (protón, neutrón, delta, lambda, etcétera). El único barión estable es el protón y ninguno de los mesones es estable. Las vidas de las partículas inestables varía entre 10^{-23} s y 15 minutos.
- Puesto que los gluones portan carga de color, pueden interactuar con otros gluones. Esto lleva al confinamiento de quarks. La teoría de la interacción de quarks y gluones, la cromodinámica cuántica, sólo se puede resolver analíticamente con teoría de perturbaciones en el ámbito de grandes cantidades de movimiento, de transferencia y distancias cortas. Allí, las partículas elementales muestran libertad asintótica. Para transferencias de cantidades de movimiento bajos y grandes distancias, el único método de resolución es el de la red QCD simulada en computadora.
- La historia del universo temprano en fracciones de un segundo después del Big Bang está determinada por la física de partículas. La temprana fase inflacionaria ha dejado rastros en la isotropía de la radiación de microondas del fondo cósmico que se originó 300 000 años después del Big Bang a una temperatura de 3 000 K y enfriada hasta los 2.725 K que se observan actualmente debido a la expansión del universo. La transición de fase del plasma de quark-gluón del universo temprano se puede sondear en el laboratorio mediante colisiones de iones pesados. La fracción primordial de 23% de helio relativo al hidrógeno en el universo se puede explicar a partir de la diferencia de masa de neutrones-protones, que fijó la proporción de los números de protones y neutrones a

$$n_n/n_p = e^{(m_n c^2 - m_p c^2)/k_B T}.$$

TÉRMINOS CLAVE

reduccionismo, p. 1287
complejidad, p. 1289
sección transversal, p. 1291
barn, p. 1291
constante de estructura fina, p. 1295
factor de forma, p. 1296
quarks, p. 1297
modelo estándar, p. 1297
número total de leptones, p. 1298
número neto de quarks, p. 1299
número bariónico, p. 1299
oscilaciones de neutrinos, p. 1300
interacción débil, p. 1301
partícula virtual, p. 1301
diagrama de Feynman, p. 1303
teorías de gran unificación, p. 1306
supersimetría, p. 1308
teoría de cuerdas, p. 1308
hadrones, p. 1309
mesones, p. 1309
bariones, p. 1309
color, p. 1309
cromodinámica cuántica (QCD), p. 1313
red QCD, p. 1313

NUEVOS SÍMBOLOS Y ECUACIONES

$$\sigma = \frac{\text{Número de reacciones por centro de dispersión/s}}{\text{Número de partículas incidentes/s/m}^2},$$

dispersión sección transversal

$$\alpha = \frac{ke^2}{\hbar c} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c} = \frac{1}{137.036} \approx \frac{1}{137},$$ constante de estructura fina

$\ell_{\text{neto}} = n_\ell - n_{\bar{\ell}}$ = constante, número total de leptones

$Q_{\text{neto}} = n_q - n_{\bar{q}}$ = constante, número neto de quarks

RESPUESTAS A OPORTUNIDADES DE AUTOEVALUACIÓN

39.1 $c \to s + \mu^+ + \nu_\mu$ y $t \to b + \tau^+ + \nu_\tau$

39.2 La manera más sencilla de obtener la energía de Planck es multiplicar la masa de Planck por dos potencias de la velocidad de la luz al cuadrado:

$$E_p = m_p c^2 = \sqrt{\frac{\hbar c^5}{G}} = 1.96 \cdot 10^9\,\text{J} = 1.22 \cdot 10^{19}\,\text{GeV}.$$

39.3 La mayoría de ellos ya forman parte de la tabla 39.4, con la excepción de $\Sigma^\star$ y $\Xi^\star$, que tienen la misma composición de elementos de quarks que Σ y Ξ, respectivamente.

PREGUNTAS DE OPCIÓN MÚLTIPLE

39.1 La longitud de onda de De Broglie, λ, de una partícula alfa de 5 MeV es 6.4 fm, como se muestra en este capítulo, y la distancia más cercana $r_{\text{mín}}$ al núcleo de oro a la que esta partícula alfa puede llegar es 45.5 fm (calculada en el ejemplo 39.1). Basado en el hecho de que $\lambda \ll r_{\text{mín}}$, se puede deducir que para este experimento de dispersión de Rutherford es adecuado tratar la partícula alfa como una:

a) partícula, *b*) onda.

39.2 ¿Cuál de las siguientes es una partícula compuesta? (Seleccione todas las que apliquen.)

a) Electrón. *c*) Protón.
b) Neutrino. *d*) Muon.

39.3 ¿Cuál de los siguientes fue el último en formarse en el universo?

a) Quarks. *d*) Núcleos de helio.
b) Protones y neutrones. *e*) Gluones.
c) Átomos de hidrógeno.

39.4 Una partícula de intercambio para la fuerza débil es el:

a) Fotón. *c*) Bosón *W*. *e*) Gluón.
b) Mesón. *d*) Gravitón.

39.5 ¿Cuál de las siguientes partículas no tiene espines enteros?

a) Fotón. *c*) Mesón ω.
b) Mesón π. *d*) Leptón ν_e.

39.6 ¿A qué energía cinética aproximada pasará la escala de longitud sondeada por la partícula α de la fórmula clásica a la fórmula relativista?

a) 0.3 GeV *c*) 3 GeV
b) 0.03 GeV *d*) 30 GeV

39.7 ¿Cuál de los siguientes experimentos comprobó la existencia del núcleo?

a) El efecto fotoeléctrico.
b) El experimento de la gota de aceite de Millikan.
c) El experimento de dispersión de Rutherford.
d) El experimento de Stern-Gerlach.

PREGUNTAS

39.8 ¿Cuál de las siguientes reacciones no puede ocurrir y por qué?

a) $p \to \pi^+\pi^0$ *c*) $\Lambda^0(1\,116) \to pK^-\pi^+$
b) $p\pi^0 \to ne^+$ *d*) $\Lambda^0(1\,450) \to pK^-\pi^+$

39.9 Entre la dispersión de neutrones y la dispersión de ondas electromagnéticas (como rayos X o luz), ¿cuál de las dos sería más apropiada para la investigación de la sección transversal de dispersión del átomo como un todo?, y ¿cuál sería más apropiada para la investigación del núcleo de un átomo? ¿Cuál dependerá de *Z*, el número atómico?

39.10 Considere una fuerza hipotética mediada por el intercambio de bosones que tienen la misma masa que el protón. ¿Cuál sería aproximadamente el rango máximo de esta fuerza? Usted puede suponer que la energía total de estas partículas es simplemente la energía de masa en reposo y que viajan con velocidad cercana a la velocidad de la luz. Si no hace estas suposiciones y, en su lugar, utiliza la expresión relativista para la energía total, ¿qué pasa con su estimación para el rango máximo de la fuerza?

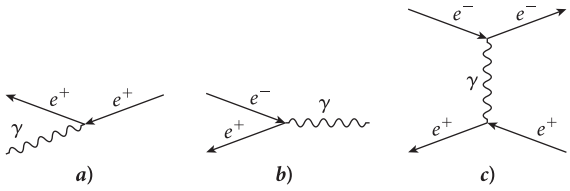
39.11 Considere la tabla 39.3. ¿Definen los quarks constituyentes el tipo de mesón en forma única?

39.12 Un neutrón libre decae en un protón y un electrón (y un antineutrino). Nunca se ha observado que un protón libre se descomponga en nada. ¿Por qué, entonces, consideramos que el neutrón es una partícula tan "fundamental" (al nivel nuclear) como el protón? ¿Por qué no consideramos que un neutrón es un compuesto de protón-electrón?

39.13 En un experimento de aniquilación de positrones, los positrones son dirigidos hacia un material como metal. ¿Qué es lo que probablemente observaremos en este experimento?, y ¿cómo podrá este experimento proporcionar informaciones sobre la cantidad de movimiento de electrones en el metal?

39.14 Si la energía del fotón virtual que media una dispersión electrón-protón, $e^- + p \rightarrow e^- + p$, está dada por E, ¿cuál es el rango de esta interacción electromagnética en términos de E?

39.15 Describa los siguientes diagramas de Feynman y los procesos físicos que representan:



39.16 El texto describe y esboza el diagrama básico de Feynman para el proceso fundamental involucrado en el decaimiento del neutrón libre. Uno de los quarks d del neutrón se convierte en un quark u, emitiendo un bosón W-virtual que a su vez decae en un electrón y un antineutrino del electrón (el único decaimiento energéticamente posible). De forma similar, describa y esboce el diagrama de Feynman básico (de tres niveles) para el proceso fundamental involucrado en cada uno de los siguientes decaimientos:

a) $\mu^- \rightarrow e^- + \nu_\mu + \nu_e$
b) $\tau^- \rightarrow \pi^- + \nu_\tau$
c) $\Delta^{++} \rightarrow p + \pi^+$
d) $K^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu$
e) $\Lambda \rightarrow p + \pi^-$

39.17 ¿Viola el siguiente decaimiento $n \rightarrow p + \pi^-$ alguna ley de conservación?

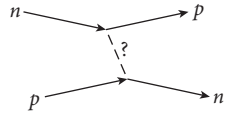
39.18 Considere el siguiente decaimiento $\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu + \nu_e$. ¿Puede ocurrir este decaimiento?

39.19 Considere la reacción propuesta $\pi^0 + n \rightarrow K^- + \Sigma^+$. ¿Puede ocurrir esta reacción?

39.20 ¿Cómo sabemos con certeza que el proceso de dispersión $e^+ + \nu_\mu \rightarrow e^+ + \nu_\mu$ procede por medio de un bosón mediador Z y no puede proceder por medio de un bosón W mediador cargado, aunque ambas opciones son posibles para $e^+ + \nu_e \rightarrow e^+ + \nu_e$?

39.21 ¿Cuáles bariones tienen un contenido de quarks de *uds*? ¿Cuál es la masa de estos bariones?

39.22 En el siguiente diagrama de Feynman para la dispersión de protones-neutrones, ¿cuál es la partícula virtual?



PROBLEMAS

Una • y dos •• indican un nivel creciente de dificultad del problema.

Sección 39.2

39.23 Una partícula alfa de 4.50 MeV incide sobre un núcleo de platino ($Z = 78$). ¿Cuál es la distancia mínima del acercamiento $r_{mín}$?

39.24 Una partícula alfa de 6.50 MeV incide en un núcleo de plomo. Debido a la fuerza de Coulomb entre ellos, la partícula alfa se acercará al núcleo sólo a la distancia mínima $r_{mín}$.

a) Determine $r_{mín}$.

b) Si la energía cinética de la partícula alfa aumenta, ¿la distancia de acercamiento de la partícula aumenta, disminuye o queda igual? Explique.

39.25 Una partícula alfa de 6.50 MeV se dispersa con un ángulo de 60.0° de un núcleo de plomo. Determine la sección transversal de dispersión diferencial de la partícula alfa.

39.26 Se dispersan protones con energía cinética de 2.00 MeV de núcleos de oro en un blanco en forma de lámina. Cada núcleo de oro contiene 79 protones. Si tanto los protones entrantes y los núcleos de oro se pueden tratar como objetos puntuales, ¿cuál es la sección transversal de dispersión diferencial para los protones para dispersarse contra los núcleos de oro con un ángulo de 30.0° respecto de su velocidad inicial?

•**39.27** La longitud de onda de De Broglie, λ, de una partícula alfa de 5.00 MeV es 6.40 fm, como se muestra en este capítulo, y la distancia más corta $r_{mín}$ al núcleo de oro a la que esta partícula alfa puede llegar es 45.5 fm (calculada en el ejemplo 39.1). ¿Cómo varía la proporción de $r_{mín}/\lambda$ con la energía cinética de la partícula alfa?

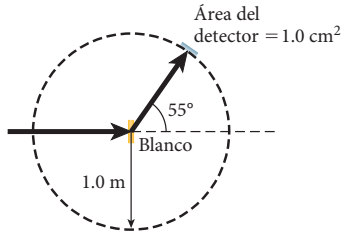
•**39.28** Se realiza un experimento de tipo Geiger-Marsden mediante el bombardeo de una lámina de oro con un espesor de 1.00 μm con rayos alfa de 8.00 MeV. Calcule la fracción de par-tículas dispersadas a un ángulo

a) entre 5.00° y 6.00° y

b) entre 30.0° y 31.0°.

(La masa atómica de oro es 197 y su densidad es 19.3 g/cm^3.)

•**39.29** La sección transversal de dispersión diferencial para partículas a dispersarse a 55° contra un blanco es $4.0 \cdot 10^{-18} \frac{m^2}{sr}$. Un detector con un área de 1.0 cm^2 se coloca a un metro de distancia del blanco a fin de detectar partículas que fueron dispersadas a 55°. Si impactan $3.0 \cdot 10^{17}$ partículas en el blanco de un área de 1.00 mm^2 cada



segundo, ¿cuántas impactarán en el detector cada segundo?

•**39.30** Algunos detectores de partículas miden el número total de partículas integradas a través de parte de una esfera con radio R a partir del blanco. Suponiendo simetría alrededor del eje del rayo de partículas entrantes, utilice la fórmula de dispersión de Rutherford para obtener el número total de partículas detectadas como función del ángulo de dispersión θ.

••**39.31** Evalúe el factor de forma y la sección transversal de dispersión diferencial de Coulomb $d\sigma/d\Omega$ para un rayo de electrones dispersándose contra una esfera cargada de *densidad uniforme* con una carga total Ze y un radio R. Describa el patrón de dispersión.

Sección 39.3

39.32 Un protón está formado por de 2 quarks up y un quark down (*uud*). Calcule su carga.

39.33 Utilice el hecho de que el momento magnético observado del protón es $1.4 \cdot 10^{-26}$ A m^2 para estimar la velocidad de los quarks. Para esta estimación, suponga que los quarks se mueven en órbitas circulares de un radio de 0.80 fm y que todos se mueven a la misma velocidad y en la misma dirección. Ignore todos los efectos relativistas.

39.34 Determine la distancia de sondeo aproximada de un fotón con una energía de 2.0 keV.

39.35 Dibuje un diagrama de Feynman para una dispersión electrón-protón, $e^- + p \rightarrow e^- + p$, mediada por un intercambio de fotones.

39.36 Con base en la información de la tabla 39.2, ¿cuál es el límite superior aproximado para el rango de una reacción mediada por el bosón de Higgs?

39.37 Dibuje posibles diagramas de Feynman para los siguientes fenómenos:

a) protones dispersándose entre sí;

b) decaimiento beta de un neutrón a un protón: $n \rightarrow p + e^- + \overline{\nu}_e$

•**39.38** Un protón y un neutrón interactúan mediante la fuerza nuclear fuerte. Su interacción es mediada por una partícula llamada mesón, parecida a la interacción entre partículas cargadas que está mediada por fotones, es decir, las partículas del campo electromagnético.

a) Realice un cálculo aproximado de la masa del mesón a partir del principio de incertidumbre y las dimensiones conocidas de un núcleo ($\sim 10^{-15}$ m). Suponga que el mesón viaja a una velocidad relativista.

b) Utilice un razonamiento parecido al de la parte *a*) para comprobar que la masa en reposo teóricamente esperada del fotón es cero.

Sección 39.5

39.39 ¿Cuántos fermiones fundamentales se encuentran en una molécula de dióxido de carbono?

39.40 Suponga que un pión neutral en reposo decae en dos fotones idénticos.

a) ¿Cuál es la energía en cada fotón?

b) ¿Cuál es la frecuencia en cada fotón?

c) ¿A qué parte del espectro electromagnético corresponde esto?

•**39.41** Dibuje un diagrama de Feynman a nivel de quarks para el decaimiento de un kaón neutral en dos piones cargados, $K^0 \rightarrow \pi^+ + \pi^-$.

Sección 39.6

39.42 Durante la era del universo dominada por radiación, la temperatura estuvo cayendo paulatinamente de acuerdo con la ecuación 39.17. Usando la ley de Stefan, encuentre la dependencia temporal de la intensidad de radiación de fondo durante la era dominada por radiación.

39.43 Utilice la ecuación 39.17 para estimar la temperatura y edad del universo en el tiempo aproximado del inicio de la formación de protones y neutrones.

39.44 Trescientos mil años después del Big Bang, la temperatura media del universo era aproximadamente 3 000 K.

a) ¿En qué longitud de onda de radiación alcanzaría el punto máximo el espectro de cuerpo negro para esta temperatura?

b) ¿A qué parte del espectro electromagnético corresponde esto?

•**39.45** Alrededor de 10^{-6} s después del Big Bang, el universo se había enfriado a una temperatura de aproximadamente 10^{13} K.

a) Calcule la energía térmica.

b) Explique qué le pasaría a la mayoría de los hadrones, es decir, protones y neutrones.

c) Explique también qué le pasaría a los electrones y positrones en términos de temperatura y tiempo.

•**39.46** Trescientos mil años después del Big Bang, la temperatura media del universo era 3 000 K. Debido a la expansión, la temperatura del universo es ahora 2.75 K. Modelando el universo como un gas ideal y suponiendo que la expansión del universo fuese adiabática, calcule qué tanto ha cambiado el volumen del universo. Si el proceso es irreversible, estime el cambio en la entropía del universo basado en el cambio de volumen.

•**39.47** La observación fundamental que subyace a la teoría cosmológica del Big Bang es el descubrimiento de Edwin Hubble en 1929, de que el arreglo de galaxias a través del espacio se está expandiendo. Al igual que los fotones del fondo cósmico de microondas, la luz de las galaxias distantes se estira a longitudes de onda más largas debido a la expansión del universo. Esto *no* es un desplazamiento Doppler: salvo por sus movimientos locales, una alrededor de la otra, las galaxias están esencialmente en reposo en el espacio; es el espacio mismo el que se expande. La proporción de la longitud de onda de la luz que la Tierra recibe λ_{rec} de una galaxia a su longitud de onda de la emisión λ_{emis} es igual a la proporción del factor de escala (es decir, el radio de curvatura) a del universo en la recepción de su valor en la emisión. El desplazamiento hacia el rojo z de la luz —que es lo que Hubble pudo medir— se define por $1 + z = \lambda_{rec}/\lambda_{emis} = a_{rec}/a_{emis}$.

a) La *ley de Hubble* declara que el desplazamiento hacia el rojo z de la luz de una galaxia es proporcional a la distancia de la galaxia a partir de nosotros (para galaxias razonablemente cercanas): $z \cong c^{-1}H\Delta s$, donde c es la velocidad de la luz en el vacío, H es la *constante de Hubble* y Δs es la distancia de la galaxia. Deduzca esta ley a partir de las primeras relaciones declaradas en el problema y determine la constante de Hubble en términos de la función del factor de escala $a(t)$.

b) Si la constante de Hubble actual tiene el valor $H_0 = 72$ (km/s)/Mpc, entonces ¿qué tan lejos está una galaxia cuya luz tiene un desplazamiento hacia el rojo $z = 0.10$? (El megapársec (Mpc) es una unidad de longitud igual a $3.26 \cdot 10^6$ años luz. En comparación, la Gran Nebulosa de Andrómeda está aproximadamente 0.60 Mpc de nosotros.)

Problemas adicionales

39.48 ¿Cuál es la energía mínima de un fotón capaz de producir un par de electrón-positrón? ¿Cuál es la longitud de onda de este fotón?

39.49 *a*) Calcule la energía cinética de un neutrón que tiene una longitud de onda de De Broglie de 0.15 nm. Compare esto con la energía de un fotón de rayos X que tiene la misma longitud de onda.

b) Comente acerca de la relevancia que esto tendría para la investigación de muestras biológicas con neutrones *vs.* rayos X.

39.50 Un fotón puede interactuar con materia mediante la producción de un par de protón-antiprotón. ¿Cuál es la energía mínima que debe tener el fotón?

39.51 Suponga que hizo un experimento para sondear la estructura en una escala tal que necesitaba electrones de 100 eV de energía cinética. Luego un rayo de neutrones estaba disponible para usted para hacer el experimento. ¿Qué energía de neutrones necesitaría para obtener la misma resolución?

39.52 ¿Cuál es la longitud de onda de De Broglie de una partícula α que tiene una energía cinética de 100 MeV? De acuerdo con la figura 39.13, ¿cómo se compara esta longitud de onda con la distancia que se puede sondear con esta partícula?

39.53 Uno de los bosones elementales para la interacción electrodébil es el bosón Z^0 que tiene una masa de 91.1876 GeV/c^2. Encuentre el orden de magnitud para el rango de la interacción débil.

39.54 ¿Cuáles son las longitudes de onda de los dos fotones que se producen cuando se aniquilan un protón y un antiprotón en reposo?

39.55 Estime la sección transversal del decaimiento de una partícula Λ (en $p\pi^\circ$, $pe^-\nu_e$) si el tiempo que tarda para que ocurra esta interacción débil es $\sim 10^{-10}$ s.

39.56 Determine la sección transversal diferencial clásica para la dispersión de Rutherford de partículas alfa con energía de 5.00 MeV dispersadas sobre átomos de uranio con un ángulo de 35.0° respecto de la dirección inicial de movimiento. Suponga cargas puntuales tanto para los átomos del blanco como para los del proyectil.

39.57 El experimento de Rutherford demostró exitosamente la existencia del núcleo e impuso límites sobre el tamaño del núcleo a partir de la dispersión de partículas alfa de láminas de oro. Suponga que la partícula alfa fuera disparada con una velocidad de 5.00% de la velocidad de la luz.

a) Deduzca el límite superior del radio del núcleo en términos de velocidad de la partícula alfa que se dispersa en la dirección inversa.

b) Calcule el radio aproximado del núcleo de oro a partir de esta información.

•**39.58** Si un rayo de neutrinos de 300. GeV de energía se pasa a través de una hoja de aluminio de 1.00 cm de espesor, ¿qué tanto se atenúa el rayo si la sección transversal de interacciones está dada por $\sigma(E) = (1.00 \cdot 10^{-38}\ \text{cm}^2\ \text{GeV}^{-1})E$?

•**39.59** Un par electrón-positrón, viajando uno hacia el otro con una velocidad de $0.99c$ con respecto a su centro de inercia, colisionan y se aniquilan de acuerdo con $e^- + e^+ \rightarrow \gamma + \gamma$. Suponiendo que el observador esté en reposo con respecto al centro de masa del par electrón-positrón, ¿cuál es la longitud de onda de los fotones?

•**39.60** Un experimento de Geiger-Marsden, en el que se dispersan partículas alfa contra una delgada película de oro, da una intensidad de partículas de $I(90°) = 100.$ cuentas/s a un ángulo de dispersión de 90° ±1°. ¿Cuál será la intensidad de partículas con un ángulo de dispersión de 60° ±1° si la dispersión obedece a la fórmula de Rutherford?

•**39.61** Se hacen colisionar rayos de electrones y positrones y se producen pares de leptones tau. Si la distribución angular en el laboratorio de los leptones tau varía como $(1 + \cos^2\theta)$, ¿qué fracción de los pares de leptones tau se capturaría en un detector que cubre solamente los ángulos de 60° a 120°?

•**39.62** Dentro de tres años después de iniciar operaciones, se espera que el rayo de protones en el Large Hadron Collider en CERN alcance una luminosidad de $10^{34}\ \text{cm}^{-2}\text{s}^{-1}$ (esto significa que en un área de 1 cm^2, se encuentran 10^{34} protones cada segundo). La sección transversal para colisiones, que llevaría a pruebas directas del bosón de Higgs, es aproximadamente 1 pb (picobarn). [Estos números fueron obtenidos del artículo "Introduction to LHC physics", por G. Polesello, *Journal of Physics: Conference Series* 53 (2006), pp. 107-116.] Si el acelerador trabaja sin interrupción, ¿cuántos de estos eventos de Higgs se pueden esperar aproximadamente en un año en el LHC?

••**39.63** Evalúe el factor de forma y la sección transversal diferencial de dispersión de Coulomb $d\sigma/d\Omega$ para un rayo de electrones dispersándose contra una *corteza esférica delgada* de carga total Ze y radio a. ¿Podría distinguir este experimento de dispersión entre las distribuciones de carga de corteza delgada y esfera sólida? Explique.

40 Física nuclear

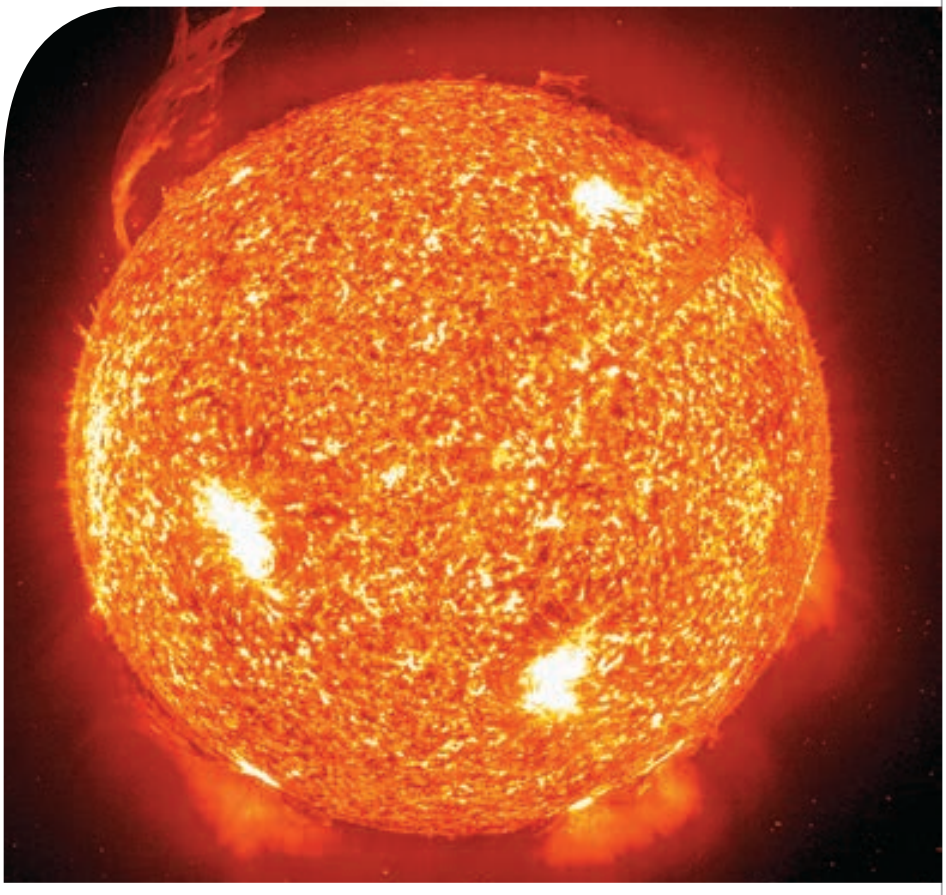


FIGURA 40.1 Nuestro Sol, el reactor gigante de fusión nuclear que provee casi todos nuestros recursos de energía, tomado con un telescopio de imagen ultravioleta extrema en la nave espacial *SOHO*, usando luz UV con una longitud de onda de 30.4 nm.

LO QUE APRENDEREMOS 1326

40.1 Propiedades nucleares 1326
- Isótopos 1326
- Interacciones nucleares 1328
- Radio nuclear y densidad nuclear 1328
- **Ejemplo 40.1** Densidad nuclear 1328
- Tiempo de vida nuclear 1329
- Masas nuclear y atómica 1330
- Reacciones nucleares y factor de calidad Q 1332
- **Ejemplo 40.2** Energía de separación 1333

40.2 Decaimiento nuclear 1334
- Ley de decaimiento exponencial 1334
- Decaimiento alfa 1335
- **Ejemplo 40.3** Decaimiento de roentgenio 1336
- Decaimiento beta 1337
- Decaimiento gamma 1339
- Otros decaimientos 1339
- Datación de carbono 1341
- **Problema resuelto 40.1** Datación de carbono 1341
- Unidades de radiactividad 1343
- Exposición a la radiación 1344
- **Ejemplo 40.4** Rayos X del tórax 1345

40.3 Modelos nucleares 1346
- Modelo de la gota líquida y la fórmula de masa empírica 1346
- Modelo de gas Fermi 1348
- Modelo de capas 1349
- Otros modelos del núcleo 1351

40.4 Energía nuclear: fisión y fusión 1351
- Fisión nuclear 1351
- **Ejemplo 40.5** Producción de energía de fisión 1354
- Fusión nuclear 1354
- **Ejemplo 40.6** Fusión en el Sol 1356

40.5 Astrofísica nuclear 1358

40.6 Medicina nuclear 1359

LO QUE HEMOS APRENDIDO/ GUÍA DE ESTUDIO PARA EXAMEN 1361
- Práctica para resolución de problemas 1362
- **Problema resuelto 40.2** Superficie nuclear 1362
- Preguntas de opción múltiple 1364
- Preguntas 1365
- Problemas 1365

LO QUE APRENDEREMOS

- El núcleo atómico está compuesto de números casi iguales de protones y neutrones (nucleones), densamente compactados para que el volumen nuclear incremente lo más linealmente posible con el número másico (el cual es igual al número de nucleones).
- Los nucleones interactúan primordialmente por medio de la interacción fuerte, la cual tiene un rango corto, del orden de 10^{-15} m.
- Se conocen únicamente 251 isótopos estables. Hasta ahora se han descubierto más de 2 400 isótopos inestables, con varios cientos de isótopos adicionales por descubrir.
- Las masas nucleares pueden medirse con mucha precisión, típicamente con la precisión de una parte en 100 millones. A partir de masas conocidas, podemos calcular la energía de enlace de los isótopos, así como el factor de calidad Q de las reacciones nucleares. El factor de calidad Q determina si una reacción es permitida por la conservación de energía o no, y se usa para encontrar cuánta energía emite la reacción.
- Es posible construir varios modelos diferentes de núcleos atómicos. Uno de los modelos está basado en la suposición de que la materia nuclear se comporta como una gota líquida. Este modelo de gota líquida explica la sistemática de la energía nuclear de enlace. Otro modelo está basado en partículas de gas cuántico atrapadas dentro de las paredes nucleares. Una tercera clase de modelos toma en cuenta los números cuánticos de la cantidad de movimiento angular y produce una imagen del modelo de capas sin diferencia de las capas de electrones del átomo.
- Isótopos inestables y sus estados excitados pueden decaer en tres maneras primarias. El decaimiento alfa es la emisión de un núcleo de helio-4. El decaimiento beta es un proceso de interacción débil y resulta ya sea en la emisión de un antineutrino y un electrón, la emisión de un neutrino y un positrón o en la captura de un electrón por el núcleo junto con una emisión de un neutrino. El decaimiento gamma es la emisión de un fotón de alta energía.
- La energía puede ser liberada de las reacciones nucleares de dos maneras principales: fisión y fusión. En la fisión, un núcleo masivo se divide en dos masas medianas de núcleos y unos cuantos neutrones. En la fusión, dos núcleos ligeros se fusionan para formar uno más pesado.
- La fisión nuclear inducida por los neutrones y las reacciones en cadena consiguientes pueden usarse para las plantas de energía nuclear, pero también para armas nucleares.
- La fusión nuclear impulsa la mayoría de las estrellas y es responsable de la creación de la luz emitida por las estrellas, así como de los elementos de masa media, hasta el hierro y níquel.
- Elementos más pesados que el hierro son producidos predominantemente en explosiones supernovas.
- La física nuclear tiene muchas aplicaciones en la medicina, tanto en el diagnóstico como en el tratamiento de radiación del cáncer.

Casi todos los recursos de energía usados en la Tierra se pueden rastrear a partir de reacciones nucleares. La abrumadora mayoría de estos recursos son gracias al Sol (figura 40.1), el cual es un reactor de fusión nuclear en su centro. Dada esta dependencia de reacciones nucleares, se vuelve importante intentar comprenderlas mejor.

En el capítulo 39 explicamos que la mayoría de la masa del átomo reside en una pequeña región llamada núcleo. Este capítulo explora la física de este núcleo, el cual ofrece un entendimiento profundo único del comportamiento de la materia a su nivel más básico.

Examinaremos varios modelos que ayudan a explicar las propiedades de los núcleos, particularmente aquellas que explican la estabilidad de algunos núcleos y los modos de decaimiento de otros. Que la mayoría de los núcleos sean inestables, o radiactivos, ha llevado a importantes aplicaciones de la física nuclear, incluidas la energía nuclear, las armas nucleares y la medicina nuclear. Además, los estudios de las propiedades nucleares han contribuido a nuestro entendimiento de la astronomía y el origen de los elementos químicos en el ciclo de vida de las estrellas.

40.1 Propiedades nucleares

Isótopos

El núcleo atómico consiste en dos tipos de **nucleones**: protones y neutrones. Estos nucleones se mantienen unidos por una interacción fuerte. Sin embargo, no todas las combinaciones de protones y neutrones son posibles, debido a las limitaciones impuestas por la interacción fuerte, la interacción de Coulomb y la mecánica cuántica. El número de protones, Z, dentro del núcleo determina el elemento que se forma. Z es el número de carga, que a veces también es llamado

número atómico. Para un elemento dado, son posibles los números diferentes de neutrones, N. Núcleos del mismo elemento con diferentes números de neutrones se llaman **isótopos**. El número total de protones y neutrones combinados se llama **número másico**, A

$$A = Z + N. \tag{40.1}$$

Convencionalmente, un núcleo dado es denotado por el símbolo que representa su átomo en la tabla periódica, con un índice superior, o superíndice, para el número másico del isótopo a la izquierda y un índice inferior, o subíndice, para el número de carga a la izquierda y, a veces, un índice inferior para el número de neutrones a la derecha. Por ejemplo, el núcleo formado por 8 protones y 9 neutrones se escribe como ${}^{17}_{8}O_9$, y el núcleo formado por 92 protones y 146 neutrones se escribe como ${}^{238}_{92}U_{146}$. Ésta es la notación de isótopos más completa. Sin embargo, la mayor parte del tiempo el subíndice a la derecha se omite, porque el número del neutrón es simplemente $N = A - Z$, de este modo puede ser computarizado fácilmente con la información provista por los sub y superíndices a la izquierda. La mayoría de los que practican física nuclear también omiten el subíndice por el número de carga; simplemente asumen que nosotros sabemos que el uranio tiene 92 protones y el oxígeno tiene 8 protones. De este modo, usted puede observar estos dos isótopos escritos en muchos libros de texto sobre física nuclear como ${}^{17}O$ (pronunciado: "oxígeno diecisiete") y ${}^{238}U$ (pronunciado: "uranio dos-treinta y ocho"). En este libro, vamos a portar el subíndice para el número de carga, pero no aquel para el número de neutrones. Los isótopos anteriores de oxígeno y uranio son, entonces, escritos como ${}^{17}_{8}O$ y ${}^{238}_{92}U$.

Los únicos dos isótopos que históricamente han recibido un nombre especial son los isótopos de hidrógeno de deuterio (${}^{2}_{1}H \equiv d$, un átomo hecho de un núcleo con un protón y un neutrón, y un solo electrón y tritio (${}^{3}_{1}H \equiv t$, un átomo hecho de un núcleo con un protón y dos neutrones, y un solo electrón).

¿Qué tipos de isótopos se encuentran en la naturaleza? La respuesta a esta pregunta nos ocupará varias veces durante este capítulo. La abrumadora mayoría de los isótopos decaen con el tiempo. Únicamente se conocen 251 isótopos estables y se muestran en la figura 40.2, donde cada uno de ellos está marcado con un cuadro morado en la punta que marca su número de neutrón y protón.

De inmediato podemos ver que no hay ningún isótopo estable con $Z > 83$ (bismuto). También, observe que no hay isótopos estables para $Z = 43$ (tecnecio) o para $Z = 61$ (promecio). Más allá, es aparente que únicamente unos pocos isótopos estables pueden ocurrir para cada valor de Z, y están localizados a lo largo de un valle estrecho en esta representación, el "valle de la estabilidad". Para unos pequeños valores de N, este valle sigue la línea de $N = Z$, la cual se muestra como la línea gris diagonal en la gráfica. Sin embargo, para $N \sim 20$ el valle de estabilidad empieza a apartarse de esta línea hacia el lado donde aumenta el número de neutrones ($N > Z$). Este efecto se debe a la interacción de Coulomb entre los protones, lo cual también limita el tamaño de los núcleos más grandes. La siguiente sección analiza esta característica en un detalle más cuantitativo.

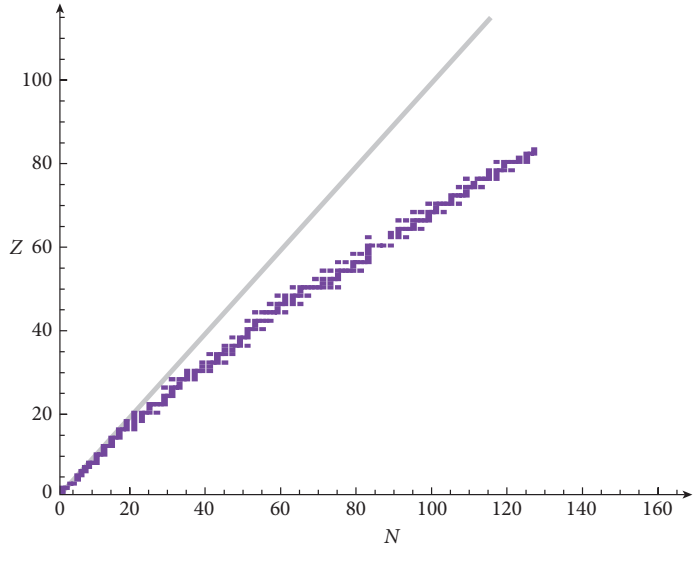


FIGURA 40.2 Isótopos estables, marcados por cuadros morados, como una función del número de neutrones y de protones. La línea gris marca la línea de $N = Z$.

Interacciones nucleares

No es conveniente describir la interacción fuerte entre los núcleos basada en un intercambio de gluones usando el formalismo de QCD, descrito en el capítulo 39. En vez de esto, es mucho más eficiente construir interacciones efectivas basadas en el intercambio de singuletes de color entre los nucleones (los cuales también son singuletes de color). Entonces los menores singuletes de color masivo son los mesones, y el menos masivo de éstos es el pión, la descripción de una interacción nucleón-nucleón en términos del intercambio de pión ha sido muy exitosa. Históricamente, estos intercambios potenciales de pión ya han sido formulados antes de que la interacción fuerte fuera entendida en términos de quarks y gluones, pero ahora hemos empezado a entender por qué han sido tan exitosos.

El físico japonés Hideki Yukawa (1907-1981) inventó la teoría del intercambio potencial de pión en 1935 y ganó el premio Nobel en Física en 1949 por este logro. El potencial de Yukawa es convencionalmente escrito en la forma

$$U(r) = -g^2 \frac{e^{-r/R_\pi}}{r}, \tag{40.2}$$

donde g es un número real y es la constante de acoplamiento del mismo modo que ke^2 es la constante de acoplamiento del potencial de Coulomb de la interacción electrostática. Aquí, R_π es el rango del potencial y está dado por la masa de pión como

$$R_\pi = \frac{\hbar}{m_\pi c} = \frac{\hbar c}{m_\pi c^2} = \frac{197.3 \text{ MeV fm}}{139.6 \text{ MeV}} = 1.413 \text{ fm}.$$

La derivada del intercambio potencial de un pión con respecto a r es más grande que cero, así que la fuerza correspondiente ($F(r) = -dU(r)/dr$) es atractiva en todas las distancias r.

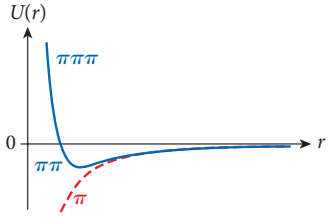


FIGURA 40.3 Dibujo esquemático del potencial nucleón-nucleón (azul). En el punto etiquetado como $\pi\pi$, un intercambio de dos piones comienza a dominar. En el punto etiquetado como $\pi\pi\pi$, un intercambio de tres piones comienza a ser importante. Se muestra en rojo el intercambio de un pión en el potencial de Yukawa.

El intercambio potencial de un pión es una aproximación muy buena al potencial nucleón-nucleón a una gran separación. Sin embargo, a distancias más cortas, intercambios de dos y tres piones dominan la interacción nucleón-nucleón. Aquí el potencial efectivo del nucleón-nucleón es fuertemente repulsivo a cortas distancias, de este modo previene que los nucleones se penetren mutuamente. Esquemáticamente, el potencial nucleón-nucleón se muestra en la figura 40.3. Varía dependiendo de las proyecciones del espín e isoespín (protones o neutrones) de los dos nucleones involucrados en la interacción, pero tiene la forma general mostrada en la gráfica, con el mínimo localizado aproximadamente a 1 fm.

Radio nuclear y densidad nuclear

Debido a que la interacción fuerte nuclear es de corto rango, lo más importante para la física nuclear es la interacción vecina más cercana entre los nucleones. El centro repulsivo del potencial previene que los nucleones se penetren mutuamente, así que se ha vuelto común visualizar los núcleos como una colección de nucleones de forma aproximadamente esférica y empacada densamente. Esto significa que el volumen de los núcleos debería ser proporcional al número másico A. Como el volumen de la esfera es proporcional a la tercera potencia del radio, encontramos que la tercera potencia del radio nuclear es proporcional a su número másico o, alternativamente,

$$R(A) = R_0 A^{1/3}, \tag{40.3}$$

donde la constante R_0 = 1.12 fm ha sido determinada experimentalmente.

EJEMPLO 40.1 Densidad nuclear

PROBLEMA

¿Cuál es la densidad de la materia nuclear, esto es, la densidad de la masa dentro de un núcleo atómico?

SOLUCIÓN

Como el núcleo puede ser aproximado por una esfera con un radio dado por la ecuación de 40.3, podemos calcular su volumen. Conocemos el número de nucleones dentro de la esfera y su masa, de ese modo podemos encontrar la densidad nuclear como la proporción de la masa sobre el volumen.

El volumen de un núcleo de número másico A es

$$V = \frac{4\pi R(A)^3}{3} = \frac{4\pi R_0^3 A}{3} = (5.88\ \text{fm}^3)A.$$

Esto nos dice que, en promedio, un nucleón ocupa aproximadamente 5.9 fm^3 de espacio dentro del núcleo. Podemos entonces dar el número de densidad de los nucleones dentro del núcleo como

$$n = \frac{A}{V} = \frac{A}{(5.88\ \text{fm}^3)A} = 0.170\ \text{fm}^{-3}.$$

Por lo tanto, un núcleo atómico tiene 0.17 nucleones por femtómetro cúbico. La masa de un nucleón es de aproximadamente $1.67 \cdot 10^{-27}$ kg. Al multiplicar esta masa de un solo nucleón con el número de la densidad de los nucleones nos da la densidad de masa de un núcleo atómico:

$$\rho = m_{\text{nucleón}} n = m_{\text{nucleón}} \frac{A}{V} = \left(1.67 \cdot 10^{-27}\ \text{kg}\right)\left(0.170\ (10^{-15}\ \text{m})^{-3}\right) = 2.84 \cdot 10^{17}\ \text{kg/m}^3.$$

Por comparación, la densidad del agua líquida es de 10^3 kg/m^3; así, la densidad de la materia nuclear es aproximadamente 280 trillones de veces más alta que la densidad del agua líquida.

Experimentos de dispersión de electrones como el descrito en el capítulo 39 han establecido que la densidad es aproximadamente constante en el interior de un núcleo pesado y disminuye gradualmente en la superficie. La dependencia del número de densidad en la coordenada radial r puede describirse con una función de Fermi

$$n(r) = \frac{n_0}{1 + e^{(r - R(A))/a}} \tag{40.4}$$

donde $R(A)$ está dada por la ecuación 40.3 y la constante a tiene el valor de 0.54 fm (figura 40.4). La distancia sobre la que la densidad diminuye de 90% de su valor central a 10% del valor central es convencionalmente definida como el espesor de la superficie nuclear t. Con el uso de la ecuación 40.4, podemos mostrar que $t \approx 4.4a$ (vea el problema resuelto 40.2). También, al usar el valor numérico $a = 0.54$ fm, el espesor de la superficie nuclear para un núcleo grande se encuentra aproximadamente a $t = 2.4$ fm.

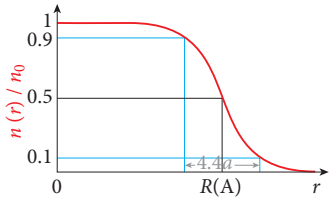


FIGURA 40.4 Perfil de la densidad nuclear como una función de las coordenadas radiales.

Tiempo de vida nuclear

Los isótopos estables mostrados en la figura 40.2 no son los únicos isótopos que pueden existir. Un número enorme de isótopos inestables se producen a través de decaimientos nucleares naturales e interacciones, o en el laboratorio. El tiempo de vida media de un isótopo inestable, lo que también llamaremos su **tiempo de vida nuclear**, es el tiempo promedio que existe antes de su decaimiento. La sección 40.3 presenta una discusión cuantitativa de los tiempos de vida. Éstos varían sobre un rango increíble, desde más grandes que la edad del universo hasta menos de un microsegundo. Hasta ahora, se conoce que existen aproximadamente 2 400 isótopos inestables, además de los 251 que son estables. Predicciones teóricas para el número de isótopos que posiblemente existen llegan hasta aproximadamente 6 000, así es que hay muchos por descubrir.

La figura 40.5 muestra los isótopos para los cuales se ha medido su tiempo de vida. Cada cuadrito representa un isótopo, y el color de cada uno indica el tiempo de vida del isótopo, de acuerdo con la escala mostrada a la derecha de la figura. En general, los tiempos de vida son más largos para isótopos que están cerca de los isótopos estables, con algunos tiempos de vida (mostrados en rojo oscuro) que incluso exceden la edad del universo (la cual es de aproximadamente $4.3 \cdot 10^{17}$ s). Más alejados de los isótopos estables, los tiempos de vida se vuelven rápidamente más cortos. Observe en particular los tiempos de vida muy cortos de todos los isótopos con números de neutrones alrededor de 130, y luego los tiempos de vida más largos para números de neutrones más grandes y números de protones alrededor de 90. Estos tiempos de vida más

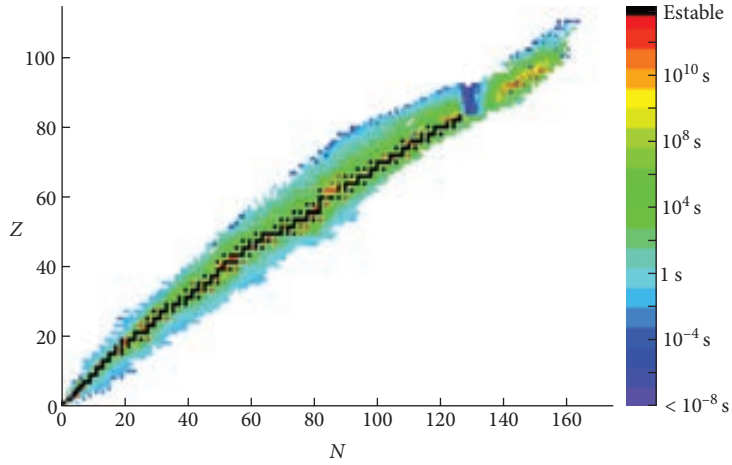


FIGURA 40.5 Tiempos de vida medidos de los isótopos conocidos.

largos incluyen los isótopos de actínidos, más notoriamente torio, uranio y plutonio. El uranio no tiene isótopos estables, pero los isótopos $^{235}_{92}$U y $^{238}_{92}$U tienen tiempos de vida de 700 millones de años y 4.5 mil millones de años, respectivamente, y de ese modo viven lo suficiente para seguirlos encontrando en grandes cantidades en la Tierra. Parte de nuestra tarea en el siguiente análisis es entender las tendencias sistemáticas de los tiempos de vida observados.

Masas nuclear y atómica

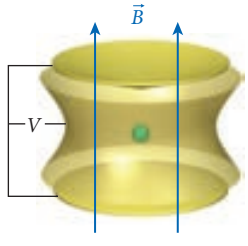
Las masas de un protón y de un neutrón son conocidas con gran precisión. Los valores equivalentes para la masa del protón y la equivalente masa-energía del protón son

$$m_p = 1.672\,621\,637(83)\cdot 10^{-27}\ \text{kg}$$
$$m_p c^2 = 1.503\,277\,359(75)\cdot 10^{-10}\ \text{J}$$
$$= 938.272\,013(23)\ \text{MeV}$$

y para la masa del neutrón y su equivalente masa-energía del neutrón

$$m_n = 1.674\,927\,211(84)\cdot 10^{-27}\ \text{kg}$$
$$m_n c^2 = 1.505\,349\,505(75)\cdot 10^{-10}\ \text{J}$$
$$= 939.565\,346(23)\ \text{MeV}.$$

a)



b)

FIGURA 40.6 *a*) Trampa de ion, la cual se usa para las medidas en masa al medir la frecuencia de ciclotrón del ion. Se muestra un dólar estadounidense de plata para una comparación a escala. *b*) La configuración de los electrodos y el campo magnético de la trampa del ion. La esfera verde representa la región en la que los iones están atrapados.

Los números entre paréntesis ( ) indican que los últimos dos dígitos son inciertos por la cantidad en los paréntesis, la cual es una notación concisa para la manera estándar ± de denotar los inciertos. Por ejemplo, la notación 1.672 621 637(83) es equivalente a escribir 1.672 621 637 ± 0.000 000 083. Los inciertos indicados de las masas del protón y neutrón significan que son conocidas aproximadamente por una parte en 10 millones. Es interesante saber que lo que limita la precisión de las masas del protón y neutrón es la exactitud con la que se determina la constante de Avogadro (capítulo 13) o, de manera equivalente, la precisión con la que se conoce en el sistema SI el kg estándar medido (capítulo 1).

Las medidas de masa para los núcleos también alcanzan esta precisión, aunque los isótopos en cuestión viven únicamente unos cuantos segundos o incluso una fracción de segundo. Una manera en la que se logra esta medida es atrapar un solo ion de un átomo dado en una trampa electromagnética dentro de un campo magnético [figura 40.6*a*)] y entonces medir su frecuencia de ciclotrón $\omega = qB/m \Rightarrow m = qB/\omega$ (vea el capítulo 27). La manipulación y almacenamiento del ion son posibles por las configuraciones del electrodo mostradas en la figura 40.6*b*).

Debido a que el cambio del ion se conoce con precisión, porque es un múltiplo entero del cambio del electrón y porque las frecuencias pueden medirse con precisión esencialmente arbitraria con sólo contar ciclos, el límite de este tipo de medidas de masa depende de la precisión con la que la fuerza del campo magnético B puede medirse. El campo magnético no puede medirse con la precisión requerida, así que usamos un átomo de referencia conocido y medimos su frecuencia de ciclotrón en la misma trampa; es decir, midiendo la masa desconocida relacionada con la conocida.

La masa de referencia usualmente elegida es el isótopo $^{12}_{6}$C. Dado que este isótopo consiste de 12 nucleones, la **unidad de masa atómica (u)** se define exactamente como $\frac{1}{12}$ de la masa de un átomo $^{12}_{6}$C (masa del núcleo de $^{12}_{6}$C más la masa de los seis electrones unidos al núcleo por medio de la interacción de Coulomb). La conversión entre u, kg y MeV/c^2 es

$$1\ \text{u} = 1.660538782(83)\cdot 10^{-27}\ \text{kg} = 931.494028(23)\ \text{MeV}/c^2. \qquad (40.5)$$

Observe que algunas referencias más antiguas usan "amu" en lugar de "u" y en química el término Dalton (Da) se emplea a menudo en vez de u. La unidad de masa atómica es 1 gramo dividido entre el número de Avogadro,

$$1\ \text{u} = 1\ \text{g}/N_A.$$

Si las masas están indicadas en términos de la unidad de masa atómica y se usa la definición anterior de u, entonces las masas de otros átomos pueden medirse de manera relativa a $^{12}_{6}$C. Esto permite las medidas de gran precisión, porque no están limitadas por la precisión de la cual el número de Avogadro es conocido. Por ejemplo, las masas del protón y neutrón pueden especificarse con 10 dígitos significativos (¡1 en 10 mil millones de precisión!) como

$$m_p = 1.007\,276\,466\,77(10)\ \text{u}$$
$$m_n = 1.008\,664\,915\,97(43)\ \text{u}. \qquad (40.6)$$

¿Por qué usar la masa del átomo neutro de $^{12}_{6}C$, incluyendo sus seis electrones, como un valor de referencia, en lugar de únicamente emplear la masa del núcleo de $^{12}_{6}C$? Esto es simplemente por conveniencia, porque es muy difícil despojar todos los electrones de un átomo y únicamente medir la masa del núcleo. Por la misma razón, las masas de todos los isótopos se enlistan siempre como masas atómicas y contienen el mismo número de electrones como de protones.

Una trampa de ion como la que muestra la figura 40.6 puede producir una precisión de una parte en 100 millones para la medida de la masa de un átomo con un tiempo de vida de únicamente 1 segundo. Esta precisión es equivalente a la medida de la masa de un convoy de 10 grandes camiones de 18 ruedas, cada uno de una masa de 20 toneladas, ¡con la precisión del peso de una sola moneda de 10 centavos en el bolsillo de uno de los conductores del camión!

La masa de un núcleo no es simplemente la suma de las masas de protones y neutrones contenidos en él. En lugar de esto, el núcleo es un objeto enlazado y se requiere de energía para poder separarlo hasta tener sus componentes. El capítulo 35 mostró que la energía se almacena en forma de masa, y que la energía y la masa están relacionadas a través de la famosa fórmula de Einstein $E = mc^2$. De este modo, la **energía de enlace** $B(N, Z)$ de un núcleo que consiste de N neutrones y Z protones puede escribirse como la diferencia entre la masa-energía de la colección de N neutrones más Z átomos de hidrógeno (que consisten en 1 protón y 1 electrón cada uno) y la masa-energía del átomo de masa $m(N, Z)$, que consiste de N neutrones, Z protones y Z electrones:

$$B(N,Z) = Zm(0,1)c^2 + Nm_n c^2 - m(N,Z)c^2. \tag{40.7}$$

Aquí $m(0,1)$ es la masa del átomo de hidrógeno con 0 neutrones, 1 protón y 1 electrón,

$$m(0,1) = 1.007825032 \text{ u}.$$

Observe que este valor es ligeramente más grande que la masa del protón dada en la ecuación 40.6; la diferencia se debe a la masa del electrón.

Mientras la ecuación 40.7 da una expresión de la energía de enlace total de un núcleo, es más instructivo examinar la energía de enlace por nucleón,

$$\frac{B(N,Z)}{(N+Z)} = \frac{B(N,Z)}{A}. \tag{40.8}$$

La figura 40.7 muestra la energía de enlace por nucleón (puntos azules) para todos los isótopos estables como una función del número másico, A. Existe un fuerte incremento para pequeños Z, con un pico en $Z = 2$, un punto de datos que representa la energía de enlace del núcleo de un átomo de helio; esto es, una partícula alfa. El valor de la energía de enlace por nucleón de la partícula alfa es $B(^4_2He)/A = 7.074$ MeV. La curva alcanza un máximo en el ion ($Z = 26$) y níquel ($Z = 28$). Los valores más altos, medidos experimentalmente, de la energía de enlace por nucleón son $B(^{62}_{28}Ni)/A = 8.795$ MeV, $B(^{58}_{26}Fe)/A = 8.792$ MeV y $B(^{56}_{26}Fe)/A = 8.790$ MeV (indicado con los círculos amarillos en la figura 40.7). Para $Z > 28$ y $A > 60$, la energía de enlace por nucleón cae gradualmente a un valor ligeramente debajo de 8 MeV. Para $A > 100$ la energía de enlace por nucleón cae casi linealmente con A, con una inclinación de

$$\left.\frac{\Delta(B/A)}{\Delta A}\right|_{A>100} = -7.1 \cdot 10^{-3} \text{ MeV}.$$

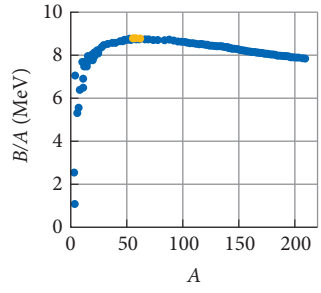


FIGURA 40.7 Energía de enlace por nucleón como función del número másico para todos los isótopos estables.

En la sección 40.3 construiremos modelos para los núcleos e intentaremos entender por qué las energías de enlace de los núcleos exhiben las tendencias mostradas en la figura 40.7.

Otra forma de expresar lo bien que los núcleos están enlazados es con el **exceso de masa**, definido como la diferencia entre la masa de un núcleo y el número másico por la unidad de masa atómica: exceso de masa = $m(N,Z) - A$ u.

El exceso de masa puede expresarse en términos de unidades de energía al convertir las unidades de masa atómicas usando la ecuación 40.5. La energía de enlace se define en términos de la masa del neutrón y el átomo de hidrógeno, mientras que el exceso de masa se define en términos de la masa de $^{12}_{6}C$. La masa de $^{12}_{6}C$ es definida como 12 u, así que su exceso de masa es cero. De este modo, el exceso de masa y la energía de enlace son similares, pero no son lo mismo. Si el exceso de masa de un núcleo es muy negativo, tendrá una gran energía de enlace por nucleón, como lo definen las ecuaciones 40.7 y 40.8. Por ejemplo, uno de los núcleos más fuertemente enlazados, $^{56}_{26}Fe$, tiene un exceso de masa de –60.6 MeV/c^2 y una energía de enlace por nucleón de 8.79 MeV/c^2. Los excesos de masa por núcleos de hasta $Z = 40$ se muestran en la figura 40.8. El valle de estabilidad descrito en la sección 40.1 es claramente visible en esta representación gráfica.

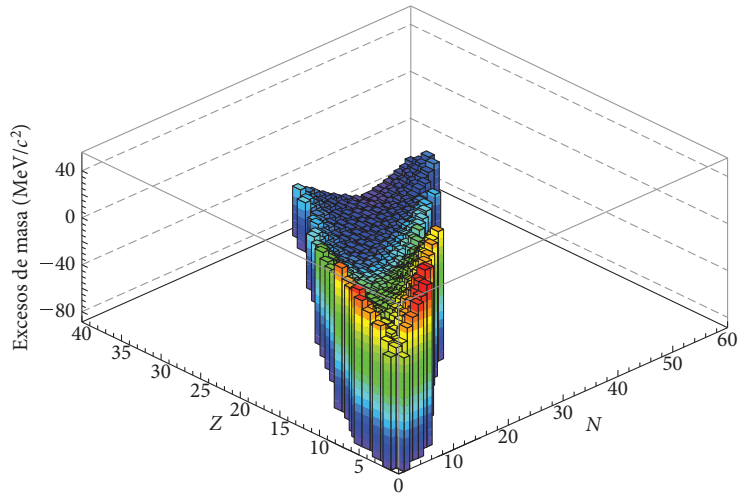


FIGURA 40.8 Los excesos de masa para núcleos de hasta $Z = 40$.

Reacciones nucleares y factor de calidad Q

El cálculo de la energía de enlace de un isótopo nuclear en la ecuación 40.7 es un caso especial de una clase grande de problemas. La energía de enlace es simplemente la energía que debe suministrarse para romper uno de los núcleos consistentes de N neutrones y Z protones en sus nucleones individuales. En general, podemos preguntar acerca del cambio de la energía neta debido a cualquier reacomodo de un grupo arbitrario de neutrones y protones de una distribución inicial a una distribución final. Este reacomodo se llama **reacción nuclear**, en analogía con las reacciones químicas en las cuales los átomos son redistribuidos entre diferentes moléculas. En las reacciones químicas, el número de átomos de una especie dada en el lado derecho (estado final) de una ecuación de reacción es exactamente el mismo que el del lado izquierdo (estado inicial). En las reacciones nucleares se observa una ley de conservación similar: debido a que el número barión es una cantidad que se conserva, el número de nucleones en el lado izquierdo y el lado derecho es el mismo. Además, el número de protones y el de neutrones también se conservan separados, con reacciones que involucran la fuerza débil que constituye la única excepción. (Se analizó la fuerza débil en el capítulo 39, en la forma del decaimiento beta del neutrón o, de modo equivalente, al quark down.)

En prácticamente todas las reacciones nucleares, el estado inicial consiste de uno o dos núcleos, pero no más, porque los tamaños nucleares y, por consiguiente, la sección transversal nuclear (vea el capítulo 39) son tan pequeños que la probabilidad de tres o más núcleos chocando entre sí simultáneamente es insignificante.

La diferencia de energía entre los estados inicial y final es convencionalmente llamada **factor de calidad Q** de la reacción. Si las masas de todos los isótopos involucrados son conocidas, entonces el factor de calidad Q se calcula fácilmente como la diferencia en la suma de las masas del estado inicial de los núcleos menos la suma de las masas del estado final de los núcleos. Por ejemplo, para un estado inicial compuesto de un deutón ($^2_1$H núcleo) y $^{12}_6$C, y un estado final compuesto por un protón aislado y $^{13}_6$C, esta reacción puede escribirse como $^2_1\text{H} + {}^{12}_6\text{C} \rightarrow \text{p} + {}^{13}_6\text{C}$, y el factor de calidad Q de esta reacción se calcula como $Q = m(1,1)c^2 + m(6,6)c^2 - (m(0,1)c^2 + m(7,6)c^2)$. En este cálculo hemos usado la masa del átomo de hidrógeno $m(0, 1)$ y la masa de un átomo de deuterio $m(1,1)$.

Nota: una notación alternativa usada a menudo para la misma reacción es $^{12}_6\text{C}(^2_1\text{H},p)^{13}_6\text{C}$ o también $^{12}_6\text{C}(d,p)^{13}_6\text{C}$. Tales reacciones "$d,p$" son herramientas muy populares para explorar la estructura nuclear.

¿Por qué es el factor de calidad Q una cantidad interesante? La respuesta es la misma que en química: el factor de calidad Q indica si la reacción es exotérmica ($Q > 0$) o endotérmica ($Q < 0$) —en otras palabras, si la energía deriva de esta reacción o si a la energía debe suministrarse dentro para que la reacción funcione—. Muchos conceptos y aplicaciones de la física nuclear dependen del factor de calidad Q y volveremos en repetidas ocasiones a este capítulo.

Si conocemos las masas de los isótopos, entonces también podemos preguntar cuánta energía se necesita para separar algunas partes de un isótopo en particular del restante del núcleo. En general, para la división de un núcleo con N neutrones y Z protones en dos núcleos más pequeños

40.1 Ejercicio en clase

¿Cuál isótopo X es necesario para completar la reacción $n + {}^{235}_{92}\text{U} \rightarrow {}^{134}_{54}\text{Xe} + 2n + X$?

a) $X = {}^{100}_{38}\text{Sr}$ *d*) $X = {}^{102}_{38}\text{Sr}$

b) $X = {}^{100}_{38}\text{Xe}$ *e*) $X = {}^{100}_{37}\text{Rb}$

c) $X = {}^{100}_{62}\text{Sr}$

40.1 Oportunidad de autoevaluación

¿Es la reacción $d + {}^{12}_6\text{C} \rightarrow p + {}^{13}_6\text{C}$ exotérmica o endotérmica?

con números de neutrones N_1 y N_2 y números de protones Z_1 y Z_2, el factor de calidad Q de este proceso puede calcularse como

$$Q_{12} = m(N,Z)c^2 - m(N_1,Z_1)c^2 - m(N_2,Z_2)c^2 \tag{40.9}$$

donde $N_1 + N_2 = N$ y $Z_1 + Z_2 = Z$. El negativo del factor de calidad Q asociado con este proceso de separación, $-Q_{12}$, se llama **energía de separación**, denotado por S; así $S = -Q_{12}$. Si $S > 0$, entonces se requiere de energía para separar el núcleo en partes 1 y 2, mientras que si $Q_{12} > 0$, entonces la energía es liberada cuando ocurre la separación.

En esta reacción de separación, el número de protones y los números de neutrones se quedan igual que en los estados iniciales y finales, para que la ecuación 40.7 pueda usarse y la energía de separación pueda expresarse como la diferencia de las energías de enlace:

$$S = B(N_1+N_2, Z_1+Z_2) - B(N_1,Z_1) - B(N_2,Z_2). \tag{40.10}$$

En el caso especial de que uno de los dos núcleos sea una partícula alfa, esta energía de separación es usualmente denotada por el símbolo S_α. Otras energías de separación convencionalmente citadas son aquellas por emisiones de protón, S_p, y emisiones individuales y dobles de neutrones, S_n y S_{2n}.

EJEMPLO 40.2 Energía de separación

PROBLEMA

La energía de enlace por nucleón de los isótopos de estaño $^{136}_{50}$Sn, $^{134}_{50}$Sn, $^{132}_{50}$Sn, $^{130}_{50}$Sn, $^{128}_{50}$Sn y $^{126}_{50}$Sn se miden como 8.1991 MeV, 8.2778 MeV, 8.3549 MeV, 8.3868 MeV, 8.4167 MeV y 8.4435 MeV, respectivamente. ¿Cuáles son las separaciones de energía de los dos neutrones de los primeros cinco de estos isótopos?

SOLUCIÓN

De los valores dados de la energía de enlace por nucleón, podemos obtener la energía de enlace total de los isótopos por multiplicación con sus respectivos números de nucleones. Encontramos de ese modo

$$^{136}_{50}\text{Sn}: \quad B(86,50) = 136 \cdot 8.1991 \text{ MeV} = 1\,115.08 \text{ MeV}$$

$$^{134}_{50}\text{Sn}: \quad B(84,50) = 134 \cdot 8.2778 \text{ MeV} = 1\,109.23 \text{ MeV}$$

$$^{132}_{50}\text{Sn}: \quad B(82,50) = 132 \cdot 8.3549 \text{ MeV} = 1\,102.85 \text{ MeV}$$

$$^{130}_{50}\text{Sn}: \quad B(80,50) = 130 \cdot 8.3868 \text{ MeV} = 1\,090.28 \text{ MeV}$$

$$^{128}_{50}\text{Sn}: \quad B(78,50) = 128 \cdot 8.4167 \text{ MeV} = 1\,077.34 \text{ MeV}$$

$$^{126}_{50}\text{Sn}: \quad B(76,50) = 126 \cdot 8.4435 \text{ MeV} = 1\,063.88 \text{ MeV}.$$

Como dos neutrones no forman un estado enlazado, la energía de enlace de los dos neutrones es cero. De este modo, en general, tenemos una fórmula simple para esta separación de dos neutrones

$$S_{2n}(N,Z) = B(N,Z) - B(N-2,Z). \tag{40.11}$$

Si usamos los valores del total de energías de enlace que ya hemos calculado, y las insertamos en la ecuación 40.11, encontramos que

$$S_{2n}(^{136}_{50}\text{Sn}) = (1\,115.08 - 1\,109.23) \text{ MeV} = 5.85 \text{ MeV}$$

$$S_{2n}(^{134}_{50}\text{Sn}) = (1\,109.23 - 1\,102.85) \text{ MeV} = 6.38 \text{ MeV}$$

$$S_{2n}(^{132}_{50}\text{Sn}) = (1\,102.85 - 1\,090.28) \text{ MeV} = 12.57 \text{ MeV}$$

$$S_{2n}(^{130}_{50}\text{Sn}) = (1\,090.28 - 1\,077.34) \text{ MeV} = 12.94 \text{ MeV}$$

$$S_{2n}(^{128}_{50}\text{Sn}) = (1\,077.34 - 1\,063.88) \text{ MeV} = 13.46 \text{ MeV}.$$

Éste es un resultado muy interesante. Muestra que repentinamente se vuelve mucho más difícil quitar un par de neutrones del isótopo de estaño cuando el número de neutrones alcanza 82. ¿Por qué hay un gran salto en el valor de la energía de separación de los dos neutrones en este número de neutrón? Esta pregunta se contestará en el análisis de la sección 40.3 del modelo de capas nucleares.

40.2 Decaimiento nuclear

Como hemos observado, no todos los isótopos nucleares que se encuentran en la naturaleza son estables. Un ejemplo es el uranio, que se puede encontrar en la Tierra en tres isótopos que ocurren naturalmente: $^{238}_{92}$U (99.3% de abundancia), $^{235}_{92}$U (0.7%) y rastros de $^{234}_{92}$U. Todos ellos decaen naturalmente en periodos largos y, de este modo, aún están presentes en cantidades apreciables que han sobrevivido desde el tiempo que la Tierra fue formada, hace aproximadamente 4.5 mil millones de años. En esta sección observamos qué procesos hacen a los núcleos inestables y les causan decaimiento en el tiempo. Analizaremos los decaimientos α, β y γ así como otros decaimientos. Estos decaimientos nucleares son colectivamente llamados **radiactividad**. Ésta fue descubierta en 1896 por Pierre (1859-1906) y Marie Curie (1867-1934) y por Henry Becquerel (1852-1908), por el cual los tres compartieron el premio Nobel en Química en 1903.

Ley de decaimiento exponencial

Debido a que las leyes de mecánica cuántica gobiernan los núcleos atómicos, todos los decaimientos pueden verse como transiciones de un estado cuántico a otro. Por lo tanto, siguen las reglas de probabilidad de mecánica cuántica como aquellas para el efecto de túnel en los capítulos 36 y 37. Es posible calcular la mayoría de estos decaimientos usando mecánica cuántica, pero no necesitamos hacer esto aquí. Todo lo que necesitamos saber para entender el decaimiento radiactivo es que la probabilidad de observar uno en un conjunto dado de núcleos atómicos en un intervalo de tiempo dado dt es proporcional al número de núcleos presentes. Si se permite que la razón de cambio del número de núcleos sea dN/dt, esto proporcionalmente se puede expresar como

$$dN = -\lambda N dt \Leftrightarrow \frac{dN}{dt} = -\lambda N,$$

donde λ es la constante de decaimiento. (El signo menos indica que los núcleos disminuyen como una función del tiempo.) La solución de esta ecuación diferencial lleva a la ley de decaimiento exponencial

$$N(t) = N_0 e^{-\lambda t}, \tag{40.12}$$

donde N_0 es el número inicial de núcleos y $N(t)$ es el número de núcleos que hay actualmente como una función del tiempo. La figura 40.9 muestra las representaciones gráficas de la ecuación 40.12.

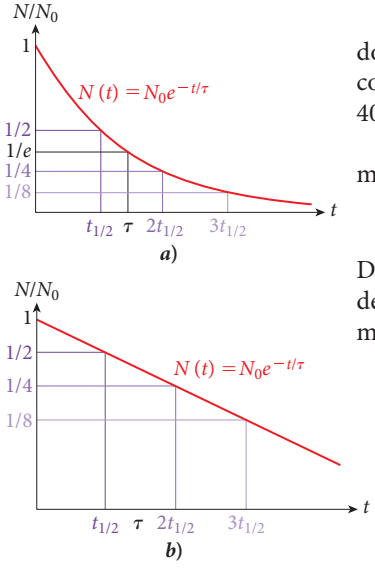


FIGURA 40.9 Decaimiento exponencial en el tiempo: *a*) representación gráfica lineal; *b*) representación gráfica logarítmica.

La **vida media**, $t_{1/2}$, es definida como el tiempo que le toma a una cantidad de núcleos de un material dado decaer hasta la mitad de ese número,

$$N(t_{1/2}) = \tfrac{1}{2} N_0. \tag{40.13}$$

Después de dos vidas medias, la población ha disminuido a un cuarto de su valor inicial, y después de tres vidas medias, a un octavo. La constante de decaimiento puede relacionarse con la vida media al insertar la ecuación 40.13 en la 40.12. Esto resulta en

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2} N_0 &= N_0 e^{-\lambda t_{1/2}} \Rightarrow \\ \tfrac{1}{2} &= e^{-\lambda t_{1/2}} \Rightarrow \\ \ln \tfrac{1}{2} &= -\lambda t_{1/2} \\ t_{1/2} &= \frac{\ln 2}{\lambda}. \end{aligned} \tag{40.14}$$

También es común hablar del **tiempo de vida media**, τ. Éste se define como el tiempo medio que le toma a un núcleo decaer si la población de núcleos obedece la ley de decaimiento exponencial (ecuación 40.12). El tiempo de vida media se obtiene por integración:

$$\tau = \langle N(t) \rangle_t = \frac{\int_0^\infty t\, N(t)dt}{\int_0^\infty N(t)dt} = \frac{\int_0^\infty t\, N_0 e^{-\lambda t} dt}{\int_0^\infty N_0 e^{-\lambda t} dt} = \frac{N_0(-1/\lambda^2)e^{-\lambda t}(1+\lambda t)\Big|_0^\infty}{N_0(-1/\lambda)e^{-\lambda t}\Big|_0^\infty} = \frac{1}{\lambda}. \tag{40.15}$$

De este modo, el tiempo de vida media τ es simplemente la inversa de la constante de decaimiento λ. Por consiguiente, como una alternativa de la ecuación 40.12, la ley de decaimiento exponencial puede escribirse como

$$N(t) = N_0 e^{-t/\tau}.$$

Después de un tiempo de vida media, la población se ha reducido por un factor de $1/e$:

$$N(\tau) = N_0 e^{-\tau/\tau} = N_0/e.$$

Por último, al combinar las ecuaciones 40.15 y 40.14, la vida media $t_{1/2}$ y el tiempo de vida media τ se relacionan mediante

$$t_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda} = \tau \ln 2.$$

Así, la vida media no es una mitad de la duración de la vida, pero un factor $\ln 2 \approx 0.693$ del tiempo de vida. Por ejemplo, el capítulo 39 citó el tiempo de vida del neutrón como de 885.7 s. Esto significa que su vida media es (885.7 s)ln2 = 613.9 s.

El tiempo de vida media τ de los isótopos es la cantidad física exhibida en la figura 40.5. ¿Qué clases de decaimientos nucleares que conducen a los tiempos de vida mostrados en la figura 40.5 son posibles en la naturaleza?

Los tres principales decaimientos nucleares son la emisión de una partícula alfa, la emisión de un electrón o positrón (o, equivalentemente, la captura de un electrón), y la emisión de un fotón. Estos decaimientos constituyen los tres componentes de lo que comúnmente se llama radiactividad o decaimientos radiactivos. Pueden ser muy dañinos para la salud humana, completamente inofensivas o, en algunos casos, incluso muy útiles en diagnósticos médicos y tratamientos. Su efecto en la salud depende del tipo de decaimiento, la energía del producto del decaimiento y la dosis de radiación; esto es, la cantidad de material radiactivo presente y la cantidad de radiación emitida. La figura 40.10 muestra cómo los diferentes decaimientos radiactivos cambian el núcleo que decae. Las siguientes secciones analizarán cada clase de decaimiento con mayor detalle.

En todos los decaimientos, el núcleo que decae es llamado el *padre* y el núcleo al que decae es el *hijo*. Si los núcleos de padre e hijo son elementos diferentes, el proceso se conoce como **transmutación**. Únicamente los decaimientos que obedecen las leyes de conservación, en particular aquellos sobre la energía, la carga y el número barión, son posibles.

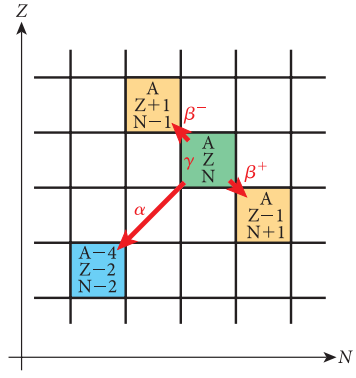


FIGURA 40.10 Decaimientos nucleares en la gráfica de isótopos.

Decaimiento alfa

En un **decaimiento alfa** (decaimiento α) el núcleo emite una partícula α la cual es el núcleo de un átomo de helio ${}^4_2\text{He}$. Esto significa que el número másico del núcleo padre disminuye por cuatro y el número de carga por dos,

$${}^{A}_{Z}\text{Nuc} \rightarrow {}^{4}_{2}\text{He} + {}^{A-4}_{Z-2}\text{Nuc}'. \qquad (40.16)$$

(La notación Nuc' indica un núcleo que es diferente en su composición al núcleo inicial antes del decaimiento.) En general, los decaimientos alfa son posibles cuando la energía contenida en la masa de un partícula α más la masa del núcleo hijo $m\left({}^{A-4}_{Z-2}\text{Nuc}'\right)$ es más pequeña que la masa del núcleo que experimenta el decaimiento alfa:

$$m\left({}^{A}_{Z}\text{Nuc}\right) > m_\alpha + m\left({}^{A-4}_{Z-2}\text{Nuc}'\right). \qquad (40.17)$$

Debido a que la energía de enlace por nucleón de la partícula alfa (de masa m_α) es muy grande, 7.074 MeV, la masa de la partícula alfa es comparativamente baja. Además, como muestra la figura 40.7, la energía de enlace por nucleón disminuye gradualmente como una función del número másico para los núcleos con grandes números de masa A. Esto hace que el decaimiento alfa sea posible para casi todos los isótopos inestables con $A > 150$.

En el capítulo 37 mencionamos de pasada que el decaimiento alfa es un ejemplo del efecto túnel: la transmisión de la función de onda de la partícula alfa a través de una región clásicamente prohibida. Esto se ilustra en la figura 40.11, donde la energía total del sistema nuclear está esbozada como una función de su separación r entre el centro de la partícula alfa y el centro del núcleo hijo. Si los cuatro nucleones que constituyen la partícula alfa están aproximadamente en el centro del núcleo padre, entonces la energía total es aproximadamente sólo la energía contenida en la masa del

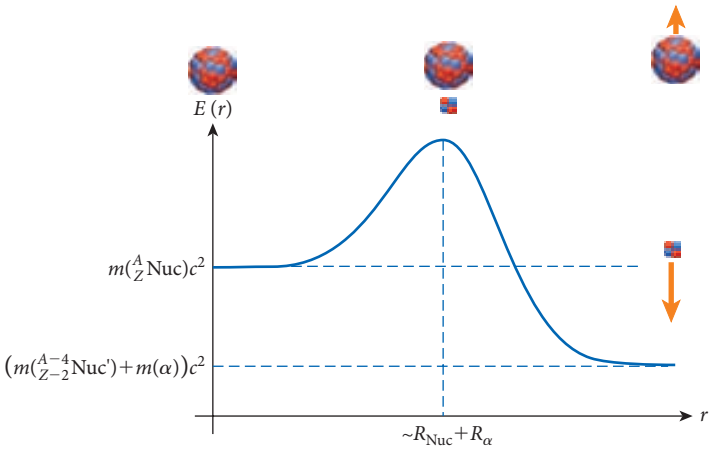


FIGURA 40.11 Esbozo de la energía potencial de la partícula alfa y del núcleo hijo, mostrando la barrera de potencial (localizada en la línea punteada vertical) para el decaimiento alfa.

núcleo padre, $m(^{A}_{Z}\text{Nuc})c^2$, como muestra la figura 40.11 en $r = 0$. Cuando la partícula alfa y el núcleo hijo están ampliamente separados, $r \to \infty$, la interacción entre los dos se vuelve insignificante y la energía total es la masa-energía del núcleo hijo más aquella de la partícula alfa, $\left(m\left(^{A-4}_{Z-2}\text{Nuc}'\right)+m(\alpha)\right)c^2$. Para muchos núcleos pesados, este valor de la energía total es *más bajo* que el valor del centro. Por consiguiente, la emisión de la partícula alfa del núcleo padre es favorable energéticamente.

Sin embargo, primero la partícula alfa tiene que salir del núcleo padre. Al mover los cuatro nucleones de la partícula alfa hacia uno u otro lado, deforma al núcleo. Esta deformación añade excitación al núcleo y la energía potencial incrementa con relación al valor de $r = 0$. En una configuración en la que la partícula alfa y el núcleo hijo casi no se tocan, indicada por la línea punteada vertical en la figura 40.11, la energía potencial tiene un máximo, debido a la repulsión de Coulomb entre la partícula alfa y el núcleo hijo. Este incremento en la energía potencial forma una barrera de potencial y previene el decaimiento alfa espontáneo. Sin embargo, la función de onda de la partícula alfa puede hacer un túnel a través de esta barrera de potencial, conduciendo a la emisión de la partícula alfa. La probabilidad del efecto túnel y, por lo tanto, del tiempo de vida del núcleo en contra del decaimiento alfa depende mucho de la figura (principalmente el ancho, pero también la altura) de la barrera.

Cuando la partícula alfa escapa del núcleo, la diferencia de energía entre la masa-energía de los núcleos padre e hijo, la cual es el factor de calidad Q de la reacción, es convertido a energía cinética de la partícula alfa y del pesado remanente,

$$K_\alpha + K_{\text{Nuc}'} = Q = \left(m\left(^{A}_{Z}\text{Nuc}\right) - m\left(^{A-4}_{Z-2}\text{Nuc}'\right) - m_\alpha\right)c^2. \tag{40.18}$$

La cantidad de movimiento total se conserva, así que la cantidad de movimiento de la partícula alfa y la cantidad de movimiento del núcleo hijo deben ser igual en magnitud y opuestas en dirección en la estructura de reposo del núcleo padre, $|\vec{p}_\alpha| = |\vec{p}_{\text{Nuc}'}|$. Para las energías cinéticas bajas que se trabajan aquí, una aproximación no relativista de $K = p^2/2m$ es suficiente. La conservación de la cantidad de movimiento significa entonces que la energía cinética del núcleo hijo está relacionada con la energía cinética de la partícula alfa por medio de

$$K_{\text{Nuc}'} m\left(^{A-4}_{Z-2}\text{Nuc}'\right) = K_\alpha m_\alpha \Leftrightarrow K_{\text{Nuc}'} = K_\alpha \frac{m_\alpha}{m\left(^{A-4}_{Z-2}\text{Nuc}'\right)}.$$

Al insertar este resultado en la ecuación 40.18, la energía cinética de la partícula alfa en la estructura en reposo del núcleo padre es

$$K_\alpha = \frac{m\left(^{A-4}_{Z-2}\text{Nuc}'\right)}{m\left(^{A-4}_{Z-2}\text{Nuc}'\right)+m_\alpha}\left(m\left(^{A}_{Z}\text{Nuc}\right) - m\left(^{A-4}_{Z-2}\text{Nuc}'\right) - m_\alpha\right)c^2. \tag{40.19}$$

EJEMPLO 40.3 Decaimiento de roentgenio

Al disparar un haz de núcleos $^{64}_{28}\text{Ni}$ a un objetivo $^{209}_{83}\text{Bi}$ en diciembre de 1994, un grupo en el laboratorio nacional GSI en Alemania fue capaz de producir un nuevo elemento con 111 protones y 161 neutrones a través de la reacción $^{64}_{28}\text{Ni} + ^{209}_{83}\text{Bi} \rightarrow ^{272}_{111}\text{Rg} + n$. Aquí, el Rg simboliza el nombre roentgenio, un nombre que este nuevo elemento recibió oficialmente en noviembre de 2006. El grupo de GSI detectó tres eventos en los cuales el nuevo elemento se produjo a través del distintivo de exitosos decaimientos alfa del nuevo elemento y sus conocidos núcleos hijos. La figura 40.12 muestra uno de los tres eventos con los tiempos de decaimiento alfa medidos.

PROBLEMA

Las masas de los núcleos en la cadena de decaimiento están listadas en las tablas de datos nucleares como 272.1536, 268.138728, 264.1246, 260.1113, 256.098629 y 252.08656 en unidades de u. ¿Qué energías alfa predice usted?

SOLUCIÓN

Como las masas de los isótopos ya están dadas, podemos calcular el factor de calidad Q para cada decaimiento usando la ecuación 40.18. Entonces podemos usar la ecuación 40.19 para calcular la energía cinética esperada de la partícula alfa. Esto se realiza en la tabla de abajo para cada uno de los decaimientos.

La última columna de la tabla compara nuestras predicciones con los resultados experimentales que ha reportado el grupo GSI. Como puede ver, estos números son razonablemente cercanos a los valores calculados.

DISCUSIÓN

En la práctica, las masas de los llamados elementos superpesados con números de carga de triple dígito son determinados, la mayoría de las veces, por las medidas de las energías cinéticas de las partículas alfa en el decaimiento de los isótopos. Lo que enlistamos en la tabla es únicamente el resultado de un evento en particular, en un experimento en particular. Las masas de los isótopos están determinadas por los mejores resultados de todos los datos disponibles. Para los elementos más pesados, estos datos consisten de únicamente unos cuantos eventos, pero para los números de carga de menos de 100, se han grabado millones de eventos. El hecho de haber observado las energías cinéticas alfa del núcleo hijo y sus tiempos de decaimiento, concordó tan bien con las medidas previas de los datos, que sirvió para convencer al grupo GSI que, en efecto, ellos habían visto los primeros eventos de la producción del nuevo elemento roentgenio.

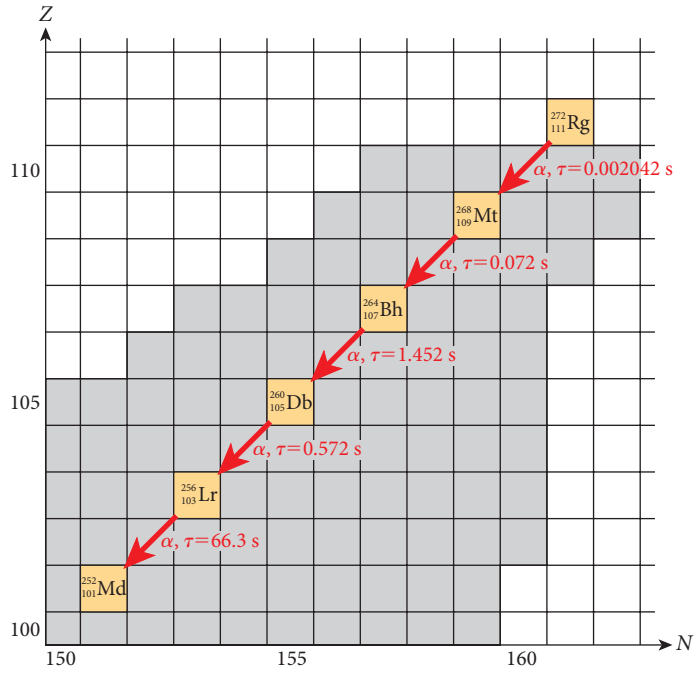


FIGURA 40.12 Una cadena de decaimiento de roentgenio se observó el 17 de diciembre de 1994 en el GSI. La cadena de decaimiento alfa procede a través de meitnerio (Mt), bohrio (Bh), dubnio (Db) y laurencio (Lr) hacia mendelevio (Md). Los cuadros grises indican los isótopos que se han observado hasta ahora.

Nombre	A	Z	m [u]	$m + m$[u]	Q [MeV]	K_α [MeV]	K_α Datos [MeV]
Rg	272	111	272.1536				
Mt	268	109	268.138728	272.1413313	11.42826	11.3	10.82
Bh	264	107	264.1246	268.1272033	10.73523	10.6	10.221
Db	260	105	260.1113	264.1139033	9.96395	9.8	9.621
Lr	256	103	256.098629	260.1012323	9.37804	9.2	9.2
Md	252	101	252.08656	256.0891633	8.81729	8.7	8.463

Decaimiento beta

En un **decaimiento beta** (decaimiento β), el núcleo emite un electrón e^- o un positrón e^+ o captura uno de sus propios electrones atómicos. En el capítulo 39 se analizó el decaimiento beta de quarks, particularmente el decaimiento β^- del quark down al quark up: $d \rightarrow u + e^- + \overline{\nu}_e$. Como el neutrón está compuesto de dos quarks down y un quark up, una manera en la que el decaimiento β^- del quark down se manifiesta es el decaimiento β^- del neutrón, $n \rightarrow p + e^- + \overline{\nu}_e$, analizado antes. La fórmula general del decaimiento β^- nuclear puede escribirse como

$$ {}^{A}_{Z}\mathrm{Nuc} \rightarrow {}^{A}_{Z+1}\mathrm{Nuc}' + e^- + \overline{\nu}_e . \qquad (40.20) $$

Esto significa que en el decaimiento β^- nuclear, el número másico del núcleo sigue siendo el mismo, pero el número de carga incrementa por 1.

Debido a que los núcleos están formados de neutrones y protones, pareciera que el decaimiento beta debería ser siempre posible. Sin embargo, el decaimiento puede ocurrir únicamente

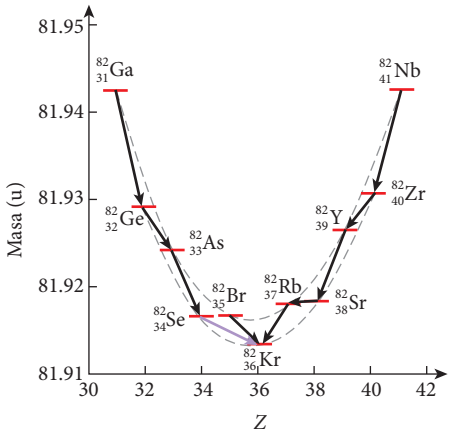


FIGURA 40.13 Núcleos de número másico 82. Sus masas medidas son exhibidas en unidades de la unidad de masa atómica u y se muestran como una función del número de carga. Las flechas negras representan procesos de decaimiento beta. Las flechas moradas representan un decaimiento beta doble.

si es permitido por la conservación de energía; esto es, la masa combinada de electrones y el núcleo hijo debe ser más pequeña que la masa del núcleo padre. Podría esperarse que esto siempre funcione debido a la diferencia de masa de 1.293 MeV/c^2 entre neutrón y protón, la cual es un poco más grande que la masa de electrones de 0.511 MeV/c^2. A pesar de que este argumento es correcto para los neutrones libres, no siempre lo es para los neutrones enlazados dentro del núcleo. La razón de esto es que la interacción nuclear favorece las configuraciones con iguales números de neutrones y protones. Como un ejemplo del efecto que esta parte de la interacción nuclear tiene, representamos gráficamente en la figura 40.13 las masas medidas experimentalmente (líneas rojas horizontales) de todos los isótopos $A = 82$ conocidos que funcionan con un número de carga Z. Está claro que es energéticamente posible para el isótopo bromo ($Z = 35$), con un número másico 82, experimentar un decaimiento beta-menos $^{82}_{35}\text{Br} \rightarrow {}^{82}_{36}\text{Kr} + e^- + \bar{\nu}_e$, pero el decaimiento beta-menos de $^{82}_{36}$Kr en $^{82}_{37}$Rb es energéticamente prohibido, porque $^{82}_{37}$Rb tiene una masa más grande que $^{82}_{36}$Kr.

Además, es posible que el decaimiento beta proceda en la dirección opuesta dentro del núcleo. En este decaimiento β^+ un protón se convierte en neutrón por medio de la emisión de un positrón y un neutrino electrón, $p \rightarrow n + e^+ + \nu_e$. Para un protón libre, este proceso no es posible energéticamente porque el neutrón tiene una masa más alta que el protón. Sin embargo, dentro del núcleo la reacción

$$^{A}_{Z}\text{Nuc} \rightarrow {}^{A}_{Z-1}\text{Nuc}' + e^+ + \nu_e \qquad (40.21)$$

puede proceder cuando las masas de los isótopos inicial y final son tales que el factor de calidad Q de esta reacción es positivo. Además, un protón dentro del núcleo puede convertirse en un neutrón de otra forma: captura de electrón, $e^- + p \rightarrow n + \nu_e$. En este proceso β^+ el núcleo captura uno de sus propios electrones:

$$e^- + {}^{A}_{Z}\text{Nuc} \rightarrow {}^{A}_{Z-1}\text{Nuc}' + \nu_e. \qquad (40.22)$$

Utilizamos la notación "decaimiento β^+ para ambos procesos, la emisión de positrones (ecuación 40.21) y la captura de electrones (ecuación 40.22). Teóricamente, una tercera manera de convertir un protón en un neutrón puede ocurrir mediante la captura de antineutrinos, $\bar{\nu}_e + p \rightarrow n + e^+$. Sin embargo, este proceso es insignificante para nuestras consideraciones de física nuclear, porque la sección transversal es extremadamente pequeña y porque un átomo no tiene una fuente de antineutrinos presente. Al consultar la figura 40.13 una vez más, verá que los núcleos en el lado derecho de la figura pueden experimentar procesos β^+.

Observe que el factor de calidad Q para las reacciones en las ecuaciones 40.21 y 40.22 no son las mismas. El estado inicial de la reacción en la ecuación 40.21 consiste de Z protones, $N = A - Z$ neutrones y Z electrones, todos los cuales están considerados en la masa del átomo inicial, $m(N, Z)$. El estado final consiste en un átomo con $Z - 1$ protones, $N + 1$ neutrones y $Z - 1$ electrones, además de un electrón adicional, más los recientemente creados positrón y neutrino. Este átomo tiene una masa $m(N + 1, Z - 1)$, y el electrón y positrón, cada uno, tienen una masa de $m_e = 0.511$ MeV/c^2. Despreciando la energía de enlace del electrón y la masa del neutrino, cada una de las cuales está del orden de 1 eV o menos, obtenemos, para el factor de calidad Q del positrón emitido en la reacción β^+ (ecuación 40.21),

$$Q(e^+) = m(N,Z)c^2 - m(N+1,Z-1)c^2 - 2(0.511\ \text{MeV}).$$

El estado inicial de la reacción en la ecuación 40.22 consiste del mismo átomo con Z protones, $N = A - Z$ neutrones y Z electrones, y el estado final consiste en un neutrino y un átomo con $Z - 1$ protones, $N + 1$ neutrones y $Z - 1$ electrones. De este modo, en el caso del factor de calidad Q es simplemente

$$Q(ec) = m(N,Z)c^2 - m(N+1,Z-1)c^2.$$

(Recuerde, ¡el núcleo capturó uno de sus propios electrones de átomo!) Es así que el factor de calidad Q de la reacción de la captura del electrón (ec) es siempre 1.022 MeV más grande que aquel para el mismo proceso β^+ que involucra la emisión de positrones (e^+). Esto implica que, para algunos isótopos, únicamente el proceso de captura de electrones es posible, no una emisión de positrones.

Para el decaimiento alfa, hemos visto que este proceso conduce a una energía característica (ecuación 40.19) para la partícula alfa emitida, porque la energía y la cantidad de movimiento

40.2 Ejercicio en clase

Los isótopos $^{82}_{36}$Kr, $^{82}_{37}$Rb, $^{82}_{38}$Sr tienen masas de 81.9134836 u, 81.9182086 u y 81.91840164 u, respectivamente. ¿Para cuál de los decaimientos β^+ de $^{82}_{37}$Rb, $^{82}_{38}$Sr es la emisión de un positrón posible?

a) Para ninguno

b) Únicamente para el decaimiento de $^{82}_{37}$Rb

c) Únicamente para el decaimiento de $^{82}_{38}$Sr

d) Para ambos

necesitan conservarse en el decaimiento. Sin embargo, en los decaimientos beta, la situación es más complicada. En decaimientos β^- el estado final consiste en tres partículas que pueden compartir la energía de decaimiento. Los neutrinos emitidos no pueden observarse directamente y pueden cargar diferentes cantidades de energía. De este modo, los electrones o positrones observados de estos decaimientos no tienen valores de energía cinética bien definidos, en lugar de eso muestran una distribución de energía continua.

Decaimiento gamma

Un **decaimiento gamma** (decaimiento γ) es la emisión de un fotón desde un núcleo y es siempre el producto de una desexcitación de un estado nuclear excitado. Los decaimientos gamma son cualitativamente diferentes de los decaimientos alfa y beta, porque son el único modo de decaimiento que no causa transmutación. Los núcleos pueden entrar a estados excitados de maneras similares a como los átomos pueden entrar a estados excitados, al colisionar con otros objetos. La energía cinética de estos procesos puede convertirse en energía de excitación, elevando los nucleones a capas más altas o causando vibraciones colectivas o rotaciones del núcleo entero.

El proceso de decaimiento gamma en los núcleos es similar a la emisión de fotones en la desexcitación de los átomos. Sin embargo, las energías de electrones características en el átomo están en el orden de eV, mientras que las energías características de estados nucleares excitados están en el orden de MeV. De este modo, los fotones emitidos en decaimientos gamma son, típicamente, un millón de veces más energéticos que los fotones emitidos en decaimientos atómicos.

Los estados inicial y final del núcleo tienen energías bien definidas, por lo que la energía del fotón es también, en principio, bien definida. Sin embargo, los estados nucleares excitados tienen tiempos de vida finitos, τ. De este modo, la incertidumbre en la energía del fotón emitido, denotada como el ancho Γ, tiene un límite más bajo dado por la relación de incertidumbre: $\Gamma > \hbar/\tau$. Así, si usted mide la energía de los rayos gamma resultantes del decaimiento entre dos estados específicos con tiempos de vida finitos en un núcleo, la distribución no hará un pico en una sola energía, más bien tomará la forma de un pico de energía con el ancho característico en energía.

La mayoría de los isótopos excitados se pueden desexcitar mediante el decaimiento gamma. Sin embargo, entre más grande sea la diferencia entre la cantidad de movimiento angular del inicio y aquel del estado nuclear final, más bajas serán las probabilidades de un decaimiento gamma. En algunos isótopos, el estado excitado más bajo tiene una gran diferencia en la cantidad de movimiento angular con estado base, y de este modo el decaimiento gamma es muy improbable. Estos isótopos forman entonces un estado "isómero" de vida larga.

Los rayos gamma emitidos de los núcleos son herramientas de diagnóstico muy importantes para aprender acerca de la estructura nuclear. Como existe un gran número de estados en un isótopo dado, es posible detectar un gran número de rayos gamma en diferentes energías. Se requiere entonces de un ingenioso trabajo de detective y un despliegue de detectores de fotones (figura 40.14) para armar la información sobre la estructura nuclear contenida en este espectro.

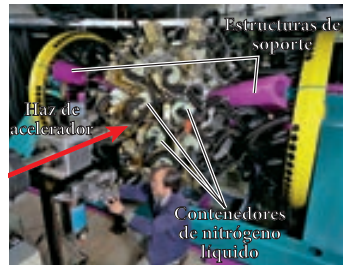


FIGURA 40.14 Gammasphere, el detector más sensible del mundo para los rayos gamma nucleares. Gammasphere consiste de 110 detectores de rayos gamma enfriados por nitrógeno líquido rodeando el punto en el que ocurren las interacciones nucleares. En la fotografía, únicamente son visibles la estructura de soporte y los contenedores de nitrógeno líquido.

Los rayos gamma no son únicamente emitidos por transiciones de una sola partícula resultantes de un solo nucleón, saltando de un estado excitado a otro. También pueden ser emitidos de las vibraciones colectivas de los núcleos, así como de la rotación de núcleos deformados. Con la ayuda de un espectroscopio de rayos gamma, se descubrieron recientemente núcleos superdeformados, los cuales tienen forma de cigarros con una proporción axial de 2:1. La figura 40.15 muestra un ejemplo de tal espectro de fotón. La característica más prominente de este espectro de rayos gamma de $^{152}_{66}$Dy es la secuencia de picos de rayos gamma con espaciado muy regular de $\Delta E = 47.5$ keV. Estos picos resultan cuando un núcleo que está rotando hace transiciones entre los estados de cantidad de movimiento angular de múltiplos pares de $\hbar$.

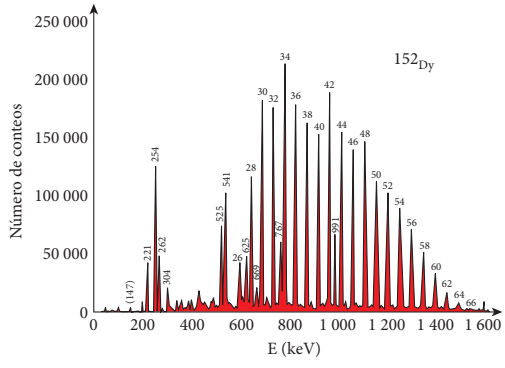


FIGURA 40.15 Espectro de rayos gamma del isótopo superdeforme disprosio 152. Los rayos gamma medidos son identificados tanto por la energía (en keV, números verticales) como por la cantidad de movimiento angular (en unidades de $\hbar$, números horizontales).

Otros decaimientos

Mientras los decaimientos α, β y γ constituyen una mayoría abrumadora de los modos de decaimiento radiactivo, siempre debemos mencionar las otras formas.

Isótopos ligeros, muy ricos en neutrones, pueden decaer por la emisión de un solo neutrón. Isótopos ligeros y muy ricos en protones pueden decaer por medio de la emisión de un protón. Emisores de neutrones y protones usualmente tienen tiempos de vida extremadamente cortos y no son núcleos del todo

40.3 Ejercicio en clase

¿Qué tipos de decaimiento nuclear son posibles para el isótopo $^{82}_{33}$As? Seleccione todos los que aplican. (*Sugerencia*: la masa de $^{82}_{33}$As es 81.925 u, la masa de $^{82}_{33}$Ge es 81.930 u, la masa de $^{82}_{34}$Se es 81.917 u, la masa de $^{78}_{31}$Ga es 77.932 u y la masa de $^{4}_{2}$He es 4.002 u.)

a) Decaimiento alfa.

b) Decaimiento beta.

c) Emisión de positrón.

d) Captura de electrón.

e) Decaimiento gamma.

enlazados. Un ejemplo de un emisor de neutrones es $^{10}_{3}$Li. En muchos laboratorios alrededor del mundo, durante los últimos diez años, se ha investigado el isótopo con un neutrón más que $^{10}_{3}$Li, $^{11}_{3}$Li, porque consiste de tres partes ($^{9}_{3}$Li + 2n) que forman un estado de enlace únicamente si los tres están juntos. No existe un estado de enlace de dos neutrones, y los emisores de neutrones $^{10}_{3}$Li ($^{9}_{3}$Li + 1n) tampoco son un núcleo enlazado. De este modo, $^{11}_{3}$Li es un núcleo extraño que consiste en un centro de $^{9}_{3}$Li y un "halo" muy grande hecho de dos neutrones. El diámetro de este halo se ha medido y es casi tan grande como aquel del núcleo líder, que consiste de 208 nucleones. $^{11}_{3}$Li es, por lo tanto, una desviación impresionante de la ley de tamaño nuclear expresada en la ecuación 40.3.

Unos cuantos isótopos se conoce que exhiben decaimientos en grupo. Los **decaimientos en grupo** son emisiones de núcleos más pesados que el helio. Casi todos los decaimientos de este tipo son en forma de isótopos de carbón, $^{12}_{6}$C o $^{14}_{6}$C, y en algunos casos raros los núcleos de oxígeno, neón o magnesio.

En la sección 40.4 se analizará un modo de decaimiento muy importante de núcleos pesados: fisión.

Muchos isótopos pueden tener dos o más modos de decaimiento. La figura 40.16 presenta una mirada global a los modos de decaimiento dominantes para todos los isótopos conocidos. Isótopos ricos en protones decaen mediante decaimiento β^+ o emisiones de protones, núcleos ricos en neutrones mediante decaimiento β^- o por emisiones de neutrones. Para núcleos más pesados, la emisión α se vuelve dominante y los isótopos más pesados muchas veces decaen predominantemente por medio de fisión espontánea.

Un modo de decaimiento extremadamente raro para algunos isótopos es el decaimiento doble beta, la cual se observó por primera vez en 1987 en un isótopo de selenio, $^{82}_{34}$Se, por Michael Moe y sus colegas de la Universidad de California-Irvine. Refiriéndonos otra vez a la figura 40.13, usted puede ver que $^{82}_{34}$Se no puede experimentar un simple decaimiento β^- a $^{82}_{35}$Br, porque su masa es más baja que aquella del $^{82}_{35}$Br. De este modo, esta reacción está prohibida por la conservación de energía. Sin embargo, la masa de $^{82}_{36}$Kr es más baja. Así que un núcleo de $^{82}_{34}$Se puede convertirse en un núcleo de $^{82}_{36}$Kr por medio de una reacción de decaimiento beta doble

$$^{82}_{34}\text{Se} \rightarrow {}^{82}_{36}\text{Kr} + 2e^- + 2\bar{\nu}_e . \qquad \textbf{(40.23)}$$

El decaimiento beta doble es la única reacción que previene $^{82}_{34}$Se de ser un isótopo estable. Este decaimiento está representado en la figura 40.17. En el capítulo 39 se observó que el proceso de decaimiento beta involucra un intercambio de un bosón W y esto conduce a un tiempo de vida comparativamente más largo. Un decaimiento beta doble requiere de dos intercambios de bosones W y de este modo conduce a un tiempo de vida de $^{82}_{34}$Se está medida en 10^{20} años, ¡que es aproximadamente 10 mil millones de veces la edad del universo! Únicamente se conocen 12 isótopos que experimentan procesos de decaimiento beta dobles (mostrados en amarillo en la figura 40.16) y sus tiempos de vida medios son todos del mismo orden que aquel para $^{82}_{34}$Se. Es así que las valoraciones de los eventos de decaimiento beta doble son extremadamente pequeños, haciendo que la detección de decaimiento beta doble sea experimentalmente muy difícil.

La investigación del decaimiento beta doble está prosperando. Existe una posibilidad teórica del decaimiento β^+ doble, pero aún no se ha observado algún isótopo que muestre este tipo de decaimiento. Además, hay búsquedas en curso por los decaimientos beta dobles de neutrinos menos. La reacción por este proceso sería la misma que en la ecuación 40.23, excepto que ningún

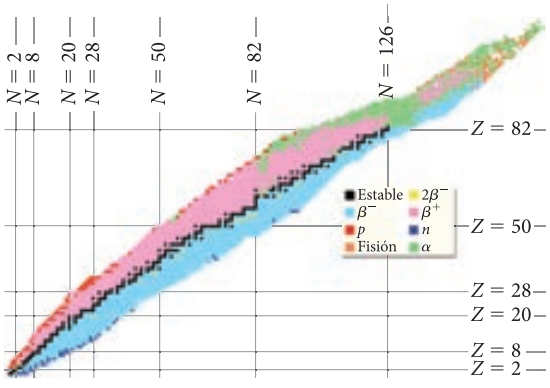


FIGURA 40.16 Modos de decaimiento dominantes para los isótopos conocidos.

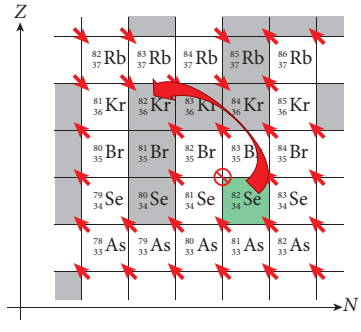


FIGURA 40.17 Parte de una gráfica de núclidos alrededor de la masa número 82. Los cuadrados sombreados de gris representan núcleos estables. Las flechas rojas indican las direcciones de los decaimientos beta. El cuadro sombreado de verde representa el decaimiento beta doble del isótopo selenio 82.

antineutrino sería emitido. Este proceso puede funcionar únicamente si el neutrino es la propia antipartícula. Si este modo de decaimiento fuera observado, violaría el modelo estándar de la física de partículas, introducido en el capítulo 39, y apuntaría hacia el descubrimiento de una física completamente nueva.

Datación de carbono

El carbono tiene dos isótopos estables: ${}^{12}_{6}\mathrm{C}$ en 98.90% de abundancia y ${}^{13}_{6}\mathrm{C}$ en 1.10% de abundancia. Todos los demás isótopos de carbón, excepto ${}^{14}_{6}\mathrm{C}$, decaen con una vida media desde milisegundos hasta minutos. La excepción, ${}^{14}_{6}\mathrm{C}$, tiene una vida media de $t_{1/2}$ $({}^{14}_{6}\mathrm{C}) = (5\,730 \pm 40)$ años. Decae por medio de una reacción β^- ${}^{14}_{6}\mathrm{C} \rightarrow {}^{14}_{7}\mathrm{N} + e^- + \overline{\nu}_e$ hacia nitrógeno. El factor de calidad Q de esta reacción es 156.5 keV.

El isótopo ${}^{14}_{6}\mathrm{C}$ es producido en la atmósfera superior a una razón constante mediante la interacción de rayos cósmicos con nitrógeno atmosférico. Debido a que este isótopo es producido a un ritmo constante y decae a una razón constante, la concentración de ${}^{14}_{6}\mathrm{C}$ en la atmósfera, y por lo tanto, la proporción del número de ${}^{14}_{6}\mathrm{C}$ átomos relacionado con el número de ${}^{12}_{6}\mathrm{C}$ átomos, es constante en el tiempo, a un valor de aproximadamente $1.20 \cdot 10^{-12}$. Las plantas de la superficie de la Tierra consumen este ${}^{14}_{6}\mathrm{C}$, principalmente en la forma de moléculas de CO_2. De este modo, la proporción de ${}^{14}_{6}\mathrm{C}/{}^{12}_{6}\mathrm{C}$ es también constante en las plantas vivas y, consecuentemente, también hasta el final de la cadena alimenticia.

Mientras las plantas y los animales están vivos y consumen comida, su proporción de isótopo de carbono permanece en un valor constante. Sin embargo, al momento de la muerte, el consumo de ${}^{14}_{6}\mathrm{C}$ cesa y, en consecuencia, la proporción de ${}^{14}_{6}\mathrm{C}/{}^{12}_{6}\mathrm{C}$ disminuye con el tiempo como el decaimiento de ${}^{14}_{6}\mathrm{C}$. Medir esta proporción en una muestra de tejido puede determinar cuánto tiempo la planta o el animal ha estado muerto. Este método puede también usarse en productos hechos con plantas o animales, como textiles u objetos de madera. El procedimiento de la determinación de la edad mediante el decaimiento radiactivo, llamado **datación de radiocarbono**, o simplemente datación de carbono, revolucionó el campo de la arqueología. Nos permite fechar muestras de hasta una edad de aproximadamente 10 vidas medias de ${}^{14}_{6}\mathrm{C}$, más de 50 000 años. El físico-químico estadounidense Willard Frank Libby (1908-1980) descubrió el método de datación de carbono en 1949 y se le otorgó el premio Nobel en Química por este logro. En principio, cualquier otro isótopo de larga vida del que se conoce su concentración inicial puede usarse como una herramienta para datar objetos, pero la datación de carbono es por mucho la más importante.

PROBLEMA RESUELTO 40.1 Datación de carbono

El Sudario de Turín, mostrado en la figura 40.18, es una larga pieza de tela de lino que algunas personas aseguran es el sudario de entierro de Jesús de Nazaret. Está guardado en la catedral de San Juan Bautista en Turín, Italia, y se exhibe únicamente en ocasiones muy especiales. Sin embargo, algunas personas expresaron sus dudas con respecto a la autenticidad de este objeto y otras aseguraron que era un engaño de origen medieval. En 1988, el Vaticano permitió la datación radiactiva del sudario por parte de tres laboratorios, en Zúrich, Oxford y Arizona, con el fin de demostrar si era de origen medieval. Las pruebas concluyeron con un 95% de nivel de confianza que el sudario fue hecho entre 1260 y 1390.

PROBLEMA

Si una muestra textil contiene $(1.08 \pm 0.01) \cdot 10^{-12}$ átomos de ${}^{14}_{6}\mathrm{C}$ isótopos por cada ${}^{12}_{6}\mathrm{C}$ isótopos, ¿qué edad tiene?

SOLUCIÓN

PIENSE

Sabemos que los decaimientos radiactivos siguen una ley de decaimiento exponencial que gobierna el número restante de ${}^{14}_{6}\mathrm{C}$ isótopos como una función del tiempo (ecuación 40.12). El número

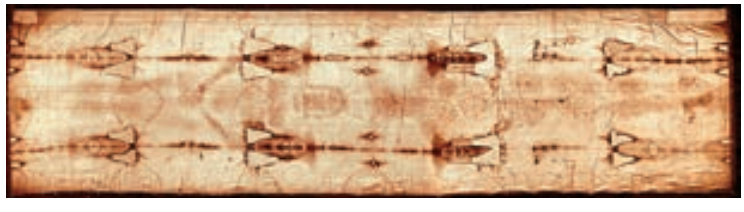


FIGURA 40.18 Ejemplo de datación de carbono: el Sudario de Turín.

(*continúa*)

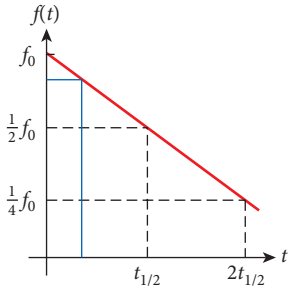


FIGURA 40.19 La fracción de cabono 14 como una función del tiempo representado gráficamente en una escala semilogarítmica.

(*continuación*)

de $^{12}_{6}$C isótopos se queda constante en el tiempo porque este isótopo es estable. Por consiguiente, la proporción de los dos isótopos, $f_{14/12}(t) = N(^{14}_{6}\text{C},t)/N(^{12}_{6}\text{C})$, sigue la misma ley de decaimiento exponencial. Debido a que conocemos vida media de $^{14}_{6}$C y las fracciones inicial y final de $^{14}_{6}$C, podemos despejar la ley de decaimiento exponencial para el tiempo y obtener nuestra respuesta.

ESBOCE

La figura 40.19 sirve para recordarnos que la ley de decaimiento exponencial también se sostiene para la fracción de $^{14}_{6}$C relacionada con $^{12}_{6}$C. Dado un cierto número para la fracción, podemos extraer la edad de la muestra.

INVESTIGUE

Podemos usar la ley de decaimiento exponencial (ecuación 40.12) para el número de átomos de $^{14}_{6}$C como una función del tiempo,

$$N(t) = N_0 e^{-\lambda t}.$$

Como ya nos han dado la vida media del isótopo, necesitamos relacionar la constante de decaimiento λ con la vida media usando la relación en la ecuación 40.14,

$$t_{1/2} = \ln 2/\lambda.$$

SIMPLIFIQUE

Primero escribimos la ley de decaimiento en términos de la vida media,

$$N(^{14}_{6}\text{C},t) = N_0(^{14}_{6}\text{C})e^{-\lambda t} = N_0(^{14}_{6}\text{C})e^{-t\ln 2/t_{1/2}}.$$

Al dividir ambos lados entre el número de $^{12}_{6}$C isótopos nos da la fracción de $^{14}_{6}$C relacionada con $^{12}_{6}$C:

$$f_{14/12}(t) = f_{14/12}(t=0)e^{-t\ln 2/t_{1/2}}.$$

Ahora podemos despejar esta ecuación para el tiempo y encontrar

$$\frac{f_{14/12}(t)}{f_{14/12}(t=0)} = e^{-t\ln 2/t_{1/2}} \Rightarrow$$

$$\ln\left(\frac{f_{14/12}(t)}{f_{14/12}(t=0)}\right) = -t\frac{\ln 2}{t_{1/2}} \Rightarrow$$

$$t = -\frac{t_{1/2}}{\ln 2}\ln\left(\frac{f_{14/12}(t)}{f_{14/12}(t=0)}\right).$$

CALCULE

Ahora estamos en la posición para insertar los números. Como indicamos anteriormente, la vida media de $^{14}_{6}$C es $t_{1/2}(^{14}_{6}\text{C}) = (5\,730\pm40)$ años y $f_{14/12}(t=0) = 1.20\cdot10^{-12}$. El problema especifica $f_{14/12}(t) = (1.08\pm0.01)\cdot10^{-12}$. De este modo, insertamos el valor promedio a la ecuación anterior para encontrar el valor medio y luego el más alto y el más bajo citados con incertidumbre para encontrar las barras de error para nuestra solución:

$$t = -\frac{5\,730 \text{ años}}{\ln 2}\ln\left(\frac{1.08}{1.20}\right) = 870.978 \text{ años}.$$

Al insertar un valor de 1.09 en la misma ecuación resulta en un tiempo de 794.787 años (76 años menos) y un valor de 1.07 produce 947.877 años (77 años más).

REDONDEE

De la incertidumbre dada en nuestra fracción $^{14}_{6}$C hemos extraído la incertidumbre de nuestra respuesta final. De este modo, hemos redondeado nuestra respuesta final a un valor de 870 años y cifrado la incertidumbre como 80 años:

$$t = (870 \pm 80) \text{ años}.$$

La muestra textil en duda habría tenido que ser producida en el siglo XII y tal vez tan temprano como el siglo XI y tan tarde como el siglo XIII.

VUELVA A REVISAR

Es bastante razonable que encontremos un tiempo que es pequeño comparado con la vida media de $^{14}_{6}C$, porque después de una vida media tendríamos una concentración remanente de $0.60 \cdot 10^{-12}$ ($= \frac{1}{2} \cdot 1.20 \cdot 10^{-12}$), y nuestro problema indica que nuestra muestra había perdido únicamente 10% de su contenido $^{14}_{6}C$. De hecho, para pequeños valores de $t/t_{1/2}$ la función de decaimiento exponencial puede expandirse como $e^{-\ln 2 \cdot t/t_{1/2}} \approx 1 - \ln 2 \cdot t / t_{1/2}$. Como 90% de la concentración inicial $^{14}_{6}C$ es sobrante en ese momento, esta aproximación lineal resulta en

$$0.9 = 1 - \ln 2 \cdot t / t_{1/2} \Rightarrow t = t_{1/2} \cdot 0.1 / \ln 2 = 0.144 t_{1/2} = 830 \text{ años.}$$

Nota: la suposición de que la concentración atmosférica de $^{14}_{6}C$ siempre ha sido constante no es del todo cierta. Cambios históricos en el flujo de los rayos cósmicos y otros eventos han resultado en fluctuaciones temporales. Además, desde 1950 se han cambiado las concentraciones atmosféricas de $^{14}_{6}C$ y otros isótopos por las pruebas atmosféricas de armas nucleares. Sin embargo, por medio de la correlación de los resultados de la datación de carbono con otras fuentes de determinación de edad (centros del hielo, anillos de los árboles, etcétera), se han desarrollado curvas de calibración para los resultados numéricos obtenidos con la datación de carbono.

Unidades de radiactividad

¿Cómo se puede medir la radiactividad de una muestra? Existen dos cantidades principales de interés. La primera es la intensidad de los productos emitidos por un decaimiento nuclear en particular; esto es, el número de decaimientos por unidad de tiempo. La segunda es el efecto que un tipo dado de radiación tiene en el cuerpo humano. (Observe que la figura 40.20 es un signo de advertencia por radiactividad.)

FIGURA 40.20 Este trébol es reconocido internacionalmente como indicador de material radiactivo.

La unidad de radiactividad en el SI es el **bequerelio (Bq)**, llamado así en honor al físico francés Henry Becquerel (1852-1908), el codescubridor de la radiactividad:

$$1 \text{ Bq} = 1 \text{ decaimientos nucleares/s.} \tag{40.24}$$

Ésta es una unidad de radiactividad increíblemente pequeña. Otra unidad común, no en el SI, pero generalmente aceptada de radiactividad es el **curie (Ci)**, nombrado así en honor al equipo francés de marido y mujer, de Pierre Curie (1859-1906) y su esposa polaca de nacimiento Marie Sklodowska-Curie ("Madame Curie", 1867-1934), quienes fueron los otros dos codescubridores de la radiactividad. Inicialmente, el curie fue definido como la actividad de 1 gramo del isótopo $^{226}_{88}Ra$, que decae por medio de una emisión α. Actualmente, el curie se define en términos del bequerelio como

$$\begin{aligned} 1 \text{ Ci} &= 3.7 \cdot 10^{10} \text{ Bq} \\ 1 \text{ Bq} &= 2.7 \cdot 10^{-11} \text{ Ci.} \end{aligned} \tag{40.25}$$

Libros de texto más antiguos aún muestran la unidad de rutherford (Rd), 1 Rd = 1 MBq.

Como ya afirmamos, el número de decaimientos solo no es suficiente para medir los efectos de la radiactividad. Mucho más importante es la dosis de absorción de radiación. La unidad del SI para la dosis de absorción es el gray (Gy) y se define en términos de otras unidades de SI como la energía de absorción de 1 joule por kilogramo de material de absorción,

$$1 \text{ Gy} = 1 \text{ J/kg.} \tag{40.26}$$

Una unidad comúnmente usada, pero que no está en el SI, es el rad (rd). Su conversión al gray es simplemente

$$\begin{aligned} 1 \text{ rd} &= 0.01 \text{ Gy} \\ 1 \text{ Gy} &= 100 \text{ rd.} \end{aligned} \tag{40.27}$$

Para rayos X y rayos gamma, es también importante medir la cantidad de ionización (separación de los electrones de sus átomos previamente neutros). A esta cantidad se le llama exposición y se mide en Coulomb/kilogramo. Una unidad de exposición que no está en el SI es el roentgen (R) y es definido cuando el material está en el aire como

$$1 \text{ R} = 2.58 \cdot 10^{-4} \text{ C/kg de aire.} \tag{40.28}$$

La exposición y la dosis absorbida están cercanamente relacionadas, y para tejido biológico encontramos que 1 roentgen corresponde a 1 rad, en una aproximación bastante buena.

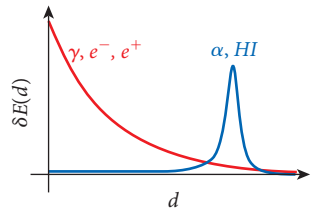


FIGURA 40.21 Perfil de la deposición de energía como una función de penetración profunda, *d*. Curva azul: perfil de partículas alfa e iones pesados. Curva roja: perfil de fotones y leptones.

El daño al tejido biológico depende no sólo de la energía depositada (dosis absorbida), sino del tipo de partícula que el decaimiento nuclear emitió. Diferentes tipos de radiación interactúan de maneras muy diferentes con la materia, en particular con el tejido biológico, y tienen perfiles de profundidad muy diferentes en los cuales depositan la energía. Cuando los fotones penetran en la materia, pierden energía exponencialmente como una función de la profundidad en la materia. Por otra parte, partículas alfa y núcleos pesados pierden una muy pequeña fracción de su energía en el punto de entrada, pero depositan casi toda su energía en el punto máximo de profundidad, la cual es una función de la energía inicial. De este modo, por ejemplo, partículas α de una energía inicial dada penetran completa a aproximadamente la misma profundidad en tejido biológico y, entonces, depositan una fracción significante de su energía en esa profundidad (figura 40.21).

Debido a las diferentes deposiciones de energía como una función de la profundidad de la penetración, una partícula α es mucho más dañina a las paredes celulares del tejido biológico que un fotón de la misma energía. De este modo, introducimos el factor de peso de la radiación w_r. Es 1 para todos los fotones y leptones, independientemente de su energía. También, $w_r = 5$ para protones con energía mayor que 2 MeV y para neutrones con energía ya sea mayor que 20 MeV o menor que 10 keV. En los intervalos de energía entre 10 keV y 100 keV, así como entre 2 MeV y 20 MeV, el factor de peso tiene un valor de 10 para neutrones. Los neutrones están en su rango más dañino en el intervalo de energía entre 100 keV y 2 MeV, donde el factor de peso es $w_r = 20$. El mismo factor de peso de 20 es también asignado a las partículas α y núcleos pesados. Con este factor de peso, podemos entonces medir el equivalente en dosis, el cual es el producto de la dosis absorbida multiplicado por el factor de peso.

La unidad SI para la dosis equivalente es el sievert (Sv), definido como

$$1\ \text{Sv} = w_r\,(1\ \text{Gy}). \tag{40.29}$$

Otra vez, una unidad comúnmente usada no perteneciente al SI, el rem (roentgen equivalente en hombre). Se define como

$$1\ \text{rem} = w_r\,(1\ \text{rd}). \tag{40.30}$$

Al comparar las ecuaciones 40.30, 40.29 y 40.27, vemos que

$$1\ \text{Sv} = 100\ \text{rem}. \tag{40.31}$$

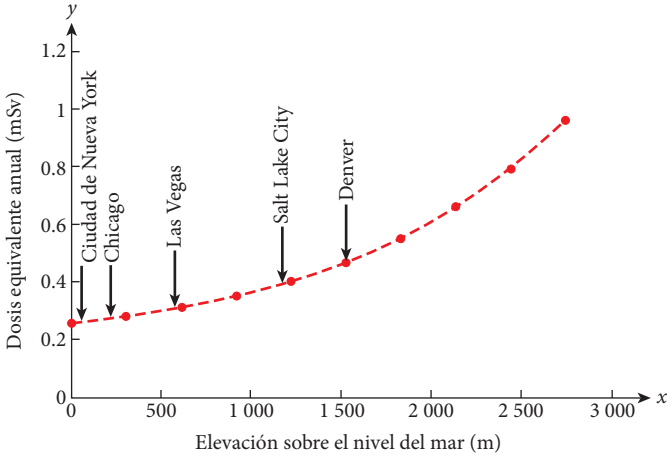


FIGURA 40.22 Dosis equivalente anual de rayos cósmicos como una función de la elevación en diferentes ciudades.

Exposición a la radiación

¿Cuál es la dosis promedio de radiación que un típico residente de Estados Unidos recibe cada año? Para responder a esta pregunta, necesitamos considerar varias fuentes de radiación. Posiblemente la más fácil de cuantificar sea la dosis que recibimos de la radiación cósmica, o rayos cósmicos. Esta dosis depende mucho de la elevación sobre el nivel del mar de la ciudad o pueblo en el que usted vive (figura 40.22). A nivel del mar usted recibe una dosis equivalente anual de 0.26 mSv, mientras que en Denver su dosis equivalente anual es casi de 0.5 mSv. Si usted construye su casa soñada en la cima de una montaña, usted puede recibir hasta 1 mSv por año.

Entre otras fuentes de radiación natural, la más importante es el gas radón. Este gas es parte del aire que usted respira y deposita su radiación dentro de su cuerpo, en sus pulmones. Esta radiación contribuye con 2 mSv por año a su dosis equivalente. Usted también ingiere isótopos radiactivos (principalmente $^{14}_{6}\text{C}$ y $^{40}_{19}\text{K}$) con su comida, otros 0.4 mSv anualmente. La Tierra misma contribuye a la radiación con: 0.16 mSv en la costa Atlántica, 0.3 mSv en el territorio continental de Estados Unidos, excepto en el área cerca de Denver, donde la dosis equivalente es de 0.63 mSv por año.

Los rayos X médicos (radiografías dentales de 0.01 mSv en lo más bajo e imágenes del tracto gastrointestinal superior con 2.5 mSv como lo más alto) y otros procedimientos añaden un promedio de 0.5 mSv a su dosis equivalente anual. Cada hora de viaje aéreo contribuye a aproximadamente 0.005 mSv a su dosis equivalente; el pasajero que disfruta del estatus de viajero frecuente (más de 50 000 millas/año voladas) paga por esto con un adicional 0.5 a 1 mSv. Otras fuentes

de minuto de radiación (ver la televisión, trabajar en la computadora, la revisión en el aeropuerto, usar una lámpara de gas de campamento o un detector de humo, etcétera) contribuyen un combinado de 0.1 mSv por año. La exposición anual total de la dosis equivalente en el residente promedio de Estados Unidos, la suma de todas las contribuciones anteriores, es aproximadamente 3.6 mSv y es desintegrada por fuente en la figura 40.23.

Las personas que trabajan con fuentes de radiación tales como máquinas de rayos X o reactores nucleares son estrictamente monitoreadas por su exposición a la radiación. Su dosis equivalente anual máxima no debe exceder los 50 mSv, que es aproximadamente 15 veces la dosis que recibe de las fuentes naturales del ambiente enlistadas aquí.

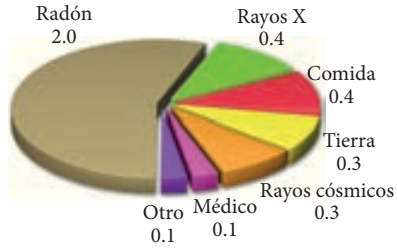


FIGURA 40.23 Promedio anual de dosis equivalentes por exposición a la radiación de un residente de Estados Unidos, en unidades de mSv.

EJEMPLO 40.4 Rayos X del tórax

Suponga que se toma unos rayos X del tórax, durante los cuales usted recibió una dosis de 60 μSv, en su última visita al médico.

PROBLEMA 1
¿Cuál fue su dosis en mrem?

SOLUCIÓN
El factor de conversión de sievert a rem está dado por la ecuación 40.31, de este modo puede convertir su dosis así

$$\left(60\cdot10^{-6}\ \text{Sv}\right)\frac{100\ \text{rem}}{1\ \text{Sv}}=6.0\cdot10^{-3}\ \text{rem}=6.0\ \text{mrem}.$$

PROBLEMA 2
¿Cuál fue la dosis absorbida en μGy y mrad?

SOLUCIÓN
El factor de peso de la radiación w_r para los rayos X es 1. Por lo tanto, la dosis absorbida de acuerdo con la ecuación 40.29 fue

$$\frac{60\ \mu\text{Sv}}{1\ \text{Sv/Gy}}=60\ \mu\text{Gy}\qquad\qquad\frac{6.0\ \text{mrem}}{1\ \text{rem/rad}}=6.0\ \text{mrad}.$$

PROBLEMA 3
¿Cuánta energía absorbió usted, asumiendo que los rayos X iluminaron 15 kg de su masa corporal?

SOLUCIÓN
El Gy (ecuación 40.26) es definido en términos de la energía absorbida dividida entre la masa sobre la cual la energía es absorbida. Es así que la energía que usted absorbió fue

$$\left(60\ \mu\text{Gy}\right)\left(15\ \text{kg}\right)=\left(60\cdot10^{-6}\ \text{J/kg}\right)\left(15\ \text{kg}\right)=9.0\cdot10^{-4}\ \text{J}.$$

PROBLEMA 4
¿Qué fracción de su dosis de radiación de su promedio anual representó estos rayos X del tórax?

SOLUCIÓN
El promedio de dosis de radiación anual es de 3.6 mSv. De este modo, la fracción de su dosis anual fue

$$\frac{60\ \mu\text{Sv}}{3.6\ \text{mSv}}=\frac{60\cdot10^{-6}\ \text{Sv}}{3.6\cdot10^{-3}\ \text{Sv}}=1.7\%.$$

40.3 Modelos nucleares

Modelo de la gota líquida y la fórmula de masa empírica

¿Cómo podemos entender las tendencias sistemáticas de la energía de enlace por nucleón, ecuación 40.7, mostrada en la figura 40.7? Un modelo del núcleo que produce asombrosamente buenos resultados es el **modelo de gota líquida**. En este modelo, el núcleo es tratado como una gota esférica de líquido cuántico compuesto por nucleones individuales. Debido a que la fuerte interacción entre los nucleones dentro del núcleo es atractiva, cada nucleón recibe en su masa una contribución positiva a la energía de enlace. Convencionalmente, esta contribución se llama término volumen y es proporcional al número de nucleones A,

$$B_v(N,Z) = a_v A = a_v(N+Z). \tag{40.32}$$

Aquí la a_v es una constante positiva que se ajusta a los datos.

Nucleones en la superficie de la gota líquida no están rodeados de otros nucleones. De este modo, tienen menos interacciones de vecinos cercanos y, por consiguiente, están menos enlazados. Consecuentemente, el modelo debe incluir un término negativo que sea proporcional al área de superficie nuclear. El área de superficie de una gota esférica es proporcional a R^2, el cuadrado de su radio. De acuerdo con la ecuación 40.3, el radio nuclear es proporcional a $A^{1/3}$. Por consiguiente, el área de superficie del núcleo es proporcional a $A^{2/3}$, y la contribución global de la superficie nuclear a la energía de enlace se puede parametrizar así

$$B_s(N,Z) = -a_s A^{2/3} = -a_s(N+Z)^{2/3} \tag{40.33}$$

con un ajuste positivo constante a_s.

Luego, necesitamos tomar en cuenta que todos los protones están positivamente cargados y, de este modo, tienen una interacción de Coulomb de repulsión uno al otro. Como el potencial de Coulomb es proporcional al cuadrado del número de carga e inversamente proporcional al radio, podemos escribirlo en estos términos:

$$B_c(N,Z) = -a_c \frac{Z^2}{A^{1/3}} = -a_c \frac{Z^2}{(N+Z)^{1/3}} \tag{40.34}$$

donde hemos vuelto a hacer uso de $R \propto A^{1/3}$ de la ecuación 40.3. La constante a_c puede ser calculada si se asume que los protones están distribuidos uniformemente en todo el núcleo. Tiene un valor de $a_c = 0.71$ MeV.

La sola interacción de Coulomb puede hacernos concluir que es mucho más ventajoso poner únicamente los protones en el núcleo. Debido a que los neutrones no pueden sentir la interacción de Coulomb, el término de la ecuación 40.34 no contribuye a su energía de enlace, así que un número de neutrones solos tendría que tener una energía de enlace más alta que el mismo número de neutrones y protones mezclados. Sin embargo, también tenemos que considerar que los protones y neutrones son fermiones y, de este modo, necesitan respetar el principio de exclusión de Pauli (vea el capítulo 36) separadamente para los protones con espín arriba y espín abajo, y para los neutrones con espín arriba y espín abajo. Así como el caso de los electrones llenando capas en un átomo con cada vez más alta cantidad de movimiento angular y energía, también tenemos que llenar más alto los niveles de energía con protones y neutrones que sumemos. Sólo con añadir neutrones se volverá energéticamente desfavorable en algún punto. De este modo, llenar el núcleo aproximadamente de manera equitativa con neutrones y protones es alentado por la acción del principio de exclusión de Pauli (figura 40.24).

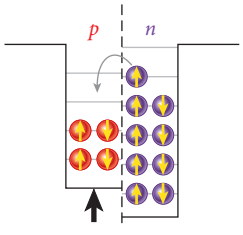


FIGURA 40.24 Ilustración del término asimétrico en la fórmula másica del modelo de gota líquida.

Este efecto puede parametrizarse por medio de un término asimétrico, el cual es negativo (representando menos enlaces) cuando el número de protones es diferente del número de neutrones. Esto motiva la siguiente expresión para el término de asimetría, donde $A = Z + N$ en la segunda igualdad:

$$B_a(N,Z) = -a_a \frac{\left(Z - \frac{1}{2}A\right)^2}{A} = -\frac{a_a}{4}\frac{\left(Z-N\right)^2}{N+Z}. \tag{40.35}$$

Finalmente, la interacción de dos cuerpos de pares de nucleones depende de su espín relativo. Esto conduce a energías de enlace más altas para núcleos que tienen a todos sus protones en pares y todos sus neutrones en pares. De este modo, un número par de protones en el núcleo resulta en una contribución positiva adicional a la energía de enlace. De la misma manera, un número par de neutrones crea también una energía de enlace más alta. Con esta parametrización se encuentran buenos resultados empíricos para el término de pares:

$$B_p(N,Z) = +a_p \frac{(-1)^Z + (-1)^N}{\sqrt{A}} = +a_p \frac{(-1)^Z + (-1)^N}{\sqrt{N+Z}}. \tag{40.36}$$

Al combinar las ecuaciones 40.32 hasta 40.36, podemos escribir una expresión para la energía de enlace como una función del número másico y el número de carga de un nucleido dado como

$$\begin{aligned} B(N,Z) &= B_v(N,Z) + B_s(N,Z) + B_c(N,Z) + B_a(N,Z) + B_p(N,Z) \\ &= a_v A - a_s A^{2/3} - a_c \frac{Z^2}{A^{1/3}} - a_a \frac{\left(Z - \frac{1}{2}A\right)^2}{A} + a_p \frac{(-1)^Z + (-1)^N}{\sqrt{A}}. \end{aligned}$$

Al dividir esta expresión entre el número másico, la energía de enlace por nucleón es

$$\frac{B(N,Z)}{A} = a_v - a_s A^{-1/3} - a_c \frac{Z^2}{A^{4/3}} - a_a \left(\frac{Z}{A} - \frac{1}{2}\right)^2 + a_p \frac{(-1)^Z + (-1)^N}{A^{3/2}}. \tag{40.37}$$

Ahora las constantes de esta expresión se pueden usar como parámetros adaptados para obtener el mejor acuerdo con todas las energías de enlace para todos los núcleos. Este procedimiento para explicar las tendencias sistemáticas en la energía de enlace por nucleón como una función del número másico fue primero inventado por los físicos alemanes Hans Bethe y Carl Friedrich von Weizsäcker en 1935, y por consiguiente la **fórmula empírica de masa** (ecuación 40.37) lleva sus nombres. Se han publicado varias adaptaciones en la literatura, todas bastante exitosas. Nosotros seguimos a Bertulani y Schechter (2002) y usamos los valores

$$\begin{aligned} &a_v = 15.85 \text{ MeV}, a_s = 18.34 \text{ MeV}, a_c = 0.71 \text{ MeV}, \\ &a_a = 92.86 \text{ MeV}, a_p = 11.46 \text{ MeV}. \end{aligned} \tag{40.38}$$

La figura 40.25 muestra los mismos valores experimentales para las energías de enlace como se exhibe en la figura 40.7, pero únicamente para los núcleos de masa impar. Para éstos, el último término en la ecuación 40.37 es cero y entonces el efecto de otros términos en la adaptación pueden compararse con los datos experimentales como una función del número másico A. (La curva es mucho más complicada para núcleos de masa par, porque ellos pueden tener tanto un número par de protones y un número par de neutrones, como un número impar de neutrones y un número impar de protones, lo que cambia el signo del término de la ecuación 40.36 y, de este modo, no produce ni una curva como la que se muestra en la figura 40.7.) La línea amarilla muestra el término (constante) de volumen. Además, el término de la superficie nos guía a la línea naranja, la cual ya muestra un muy buen acuerdo con los datos experimentales para números másicos bajos. Añadir el término de Coulomb conduce a la línea roja, la cual está muy cerca de los datos experimentales, mostrando que la interacción de Coulomb se vuelve muy importante para los núcleos grandes. Por último, añadir el término asimétrico nos conduce a la línea verde, la cual nos da una muy buena descripción general de todas las energías de enlace de todos los núcleos de masa impar, por lo menos en la resolución de la representación gráfica mostrada aquí.

El éxito de la fórmula de Bethe-Weizsäcker (ecuación 40.37) para la energía de enlace es convencionalmente interpretado como un fuerte soporte del modelo de la gota líquida del núcleo. Sin embargo, realmente es sólo la consecuencia de la figura aproximadamente esférica del núcleo, combinada con el hecho de que la fuerte interacción es de corto alcance y del orden del espaciado de vecino más cercano de los nucleones dentro del núcleo.

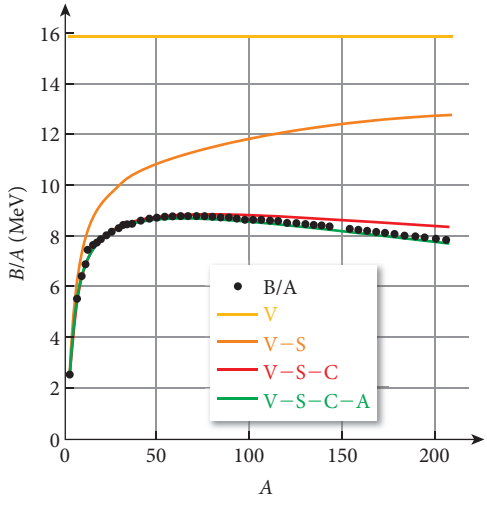


FIGURA 40.25 Energía de enlace por nucleón para núcleos impares A. Puntos negros: datos experimentales. Las líneas son adaptaciones incluyendo diferentes términos en la fórmula de masa de Bethe-Weizsäcker.

40.2 Oportunidad de autoevaluación

La figura 40.13 muestra que las masas de $A = 82$ núcleos con número impar de cargas que descansan en una parábola (línea punteada) y las masas de $A = 82$ núcleos con número par de cargas descansan en otra parábola. Explique.

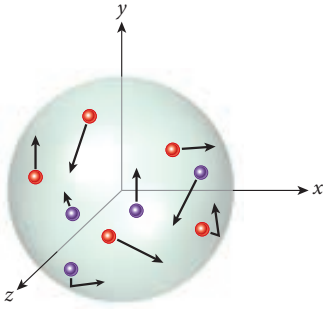


FIGURA 40.26 El modelo de gas Fermi del núcleo. Protones (morado) y neutrones (rojo) se mueven independiente y libremente a través del interior del núcleo y son rechazados de la superficie nuclear que los contiene.

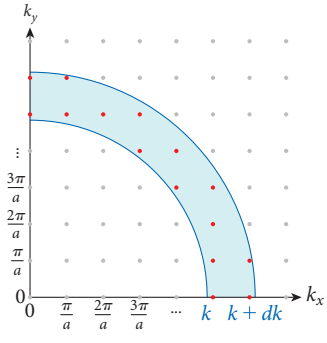


FIGURA 40.27 La densidad en los estados del modelo de gas Fermi. Cada punto representa un posible estado cuántico. El tercer momento coordinado no se muestra en esta ilustración.

40.3 Oportunidad de autoevaluación

Deduzca la ecuación 40.41.

Modelo de gas Fermi

A juzgar por el éxito del modelo de gota líquida del núcleo en la reproducción de las energías de enlace de los núcleos atómicos, uno estaría tentado a pensar acerca de los nucleones como descansando en un fijo y aproximadamente esférico arreglo dentro del núcleo. Sin embargo, la relación de indeterminación de Heisenberg (vea el capítulo 36) impone restricciones en las partículas/ondas cuánticas confinadas a un volumen tan pequeño. Como tenemos que exigir que $\Delta p_x \cdot \Delta x \geq \frac{1}{2}\hbar$, y como hemos encontrado en el presente capítulo que necesitamos localizar un nucleón dentro de un núcleo en pocos fm, esto implica una mayor indeterminación en la cantidad de movimiento, en el orden de 100 MeV/c. (Si recuerda nuestra regla práctica que $\hbar c = 197.33$ MeV/fm, esto es fácil de ver.) Eso significa que los nucleones dentro del núcleo no pueden considerarse como que están descansando en una configuración fija, sino que tienen una indeterminación de la cantidad de movimiento relativamente alta dentro del núcleo.

El **modelo de gas Fermi** del núcleo (inventado por el físico italoestadounidense Enrico Fermi, 1901-1953) considera esto y asume que los nucleones pueden moverse libremente como un gas dentro del núcleo (figura 40.26).

El capítulo 37 nos mostró que una partícula de masa m y una cantidad de movimiento k confinados a una caja cúbica de ancho a en tres dimensiones, pero que se puede mover libremente dentro de la caja, tiene una energía total de

$$E = \frac{\hbar^2}{2m}k^2 = \frac{\hbar^2}{2m}\left(k_x^2 + k_y^2 + k_z^2\right) = \frac{\hbar^2\pi^2}{2ma^2}\left(n_x^2 + n_y^2 + n_z^2\right). \tag{40.39}$$

El principio de exclusión de Pauli permite que cada estado de la cantidad de movimiento esté ocupado por exactamente cuatro nucleones (un protón con espín arriba y otro con espín abajo, y un neutrón con espín arriba y otro con espín abajo, para cada estado).

Ahora queremos usar esta información para calcular la densidad de los estados $dN(E)$, lo que nos dirá cuántos estados de cantidad de movimiento residen en un intervalo dE alrededor de una energía dada E, para el modelo de gas Fermi.

La figura 40.27 ilustra los posibles estados de cantidad de movimiento que pueden ocupar los nucleones en un gas Fermi. Cada posible estado cuántico ocupa un volumen de $(\pi/a)^3$. Entonces el número de estados $dN(k)$ entre el valor absoluto de la cantidad de movimiento k y $k + dk$ está dado por la razón del volumen de la capa esférica con radio k y grosor dk y el volumen ocupado por cada estado cuántico:

$$dN(k) = \frac{\frac{1}{8}4\pi k^2 dk}{(\pi/a)^3} = \frac{a^3k^2}{2\pi^2}dk. \tag{40.40}$$

(El factor $\frac{1}{8}$ aparece en esta ecuación porque examinamos únicamente un octavo de una esfera tridimensional, en la cual las coordenadas de las tres cantidades de movimiento son positivas. Valores negativos de las coordenadas de la cantidad de movimiento no añaden soluciones adicionales, debido a que la energía es proporcional a k^2.)

Ahora necesitamos convertir la densidad de los estados de cantidad de movimiento $dN(k)$, que acabamos de calcular, a estados de densidad $dN(E)$. La ecuación 40.39 muestra que $E = \hbar^2k^2/2m$, y de este modo $k = \sqrt{2mE}/\hbar$, así que la derivada de la energía con respecto al número de onda puede calcularse: $dE/dk = \hbar^2k/m$. La diferencial dk puede expresarse en términos de la diferencial dE mediante

$$dk = \frac{dE}{\hbar\sqrt{2E/m}}.$$

Al combinar este resultado con la ecuación 40.40, la densidad de los estados como una función de la energía es

$$dN(E) = \frac{a^3m^{3/2}}{2^{1/2}\pi^2\hbar^3}E^{1/2}dE. \tag{40.41}$$

El máximo de energía requerida para acomodar todos los nucleones A en un modelo de gas Fermi se llama **energía Fermi**, E_F. Para encontrar la energía Fermi, necesitamos integrar la densidad de los estados (ecuación 40.41) a la energía Fermi y poner este número igual a $\frac{1}{4}A$. (Recuerde que cada estado cuántico puede ser ocupado por 4 nucleones.)

$$\int_0^{n(E_F)} dN(E) = \tfrac{1}{4}A \Rightarrow$$

$$\int_0^{E_F} \frac{a^3 m^{3/2}}{2^{1/2}\pi^2\hbar^3} E^{1/2} dE = \frac{2^{1/2} a^3 m^{3/2}}{3\pi^2\hbar^3} E_F^{3/2} = \tfrac{1}{4}A \Rightarrow$$

$$E_F = \frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{3A\pi^2}{2a^3}\right)^{2/3} = \frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{3\pi^2}{2}n\right)^{2/3}, \qquad (40.42)$$

donde $n = A/a^3$ es la densidad del nucleón dentro del núcleo. Al usar el número $n = 0.17\ \text{fm}^{-3}$ para la densidad del nucleón (ejemplo 40.1), un valor de 938.9 MeV/c^2 como el promedio de las masas de protones y neutrones, y nuestro valor práctico de $\hbar c = 197.33$ MeV fm, llegamos al valor numérico de la energía Fermi:

$$E_F = \frac{(197.33\ \text{MeV fm}/c)^2}{2(938.9\ \text{MeV}/c^2)}\left(\frac{3\pi^2}{2}(0.17\ \text{fm}^{-3})\right)^{2/3} = 38\ \text{MeV}.$$

La densidad de los estados para los estados ocupados por los nucleones dentro del pozo nuclear de potencial se esboza en la figura 40.28 como una función de la energía sobre el fondo del pozo. Puede ver que la probabilidad más grande de encontrar un nucleón dentro de un núcleo corresponde a una energía justo debajo de la energía Fermi. Observe que el caso exhibido aquí es para la temperatura $T = 0$; para temperaturas no cero, la caída vertical en la energía Fermi es reemplazada por una declinación más gradual.

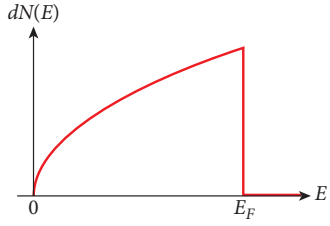


FIGURA 40.28 La densidad de los estados como una función de la energía en el modelo de gas Fermi. Aquí la energía es medida con respecto al fondo del pozo potencial.

La cantidad de movimiento de Fermi p_F es la cantidad de movimiento (magnitud) que corresponde a la energía Fermi,

$$p_F = \sqrt{2mE_F} = 270\ \text{MeV}/c$$

$$k_F = p_F/\hbar = 1.36\ \text{fm}^{-1}.$$

Al dividir la cantidad de movimiento de Fermi entre la masa del nucleón se obtiene la velocidad máxima a la que los nucleones se desplazan dentro del núcleo: $v_F = p_F/m = 0.29c$. Esto es, ¡los nucleones se desplazan dentro del núcleo con velocidades de hasta casi 30% la velocidad de la luz!

¿Son reales estos valores de cantidades de movimiento del nucleón dentro del núcleo, o son un artificio de falsa interpretación de un resultado cuántico en términos de la física clásica? La respuesta es que sí son reales. Esto puede mostrarse mediante la producción de partículas en colisiones de iones pesadas, donde la energía máxima de la partícula producida es capaz de sobrepasar la energía de haz, un resultado que puede ser rastreado directamente hasta la presencia del movimiento de Fermi de los nucleones dentro del núcleo.

La representación que emerge en este modelo puede ilustrarse como se muestra en la figura 40.29: nucleones dentro del núcleo están enlazados por el potencial de profundidad V_0, el cual es la suma de la energía Fermi y la energía de separación del nucleón menos enlazado (S_n o S_p). Las energías de separación son típicamente del orden de 8 MeV. De este modo, la profundidad del pozo nuclear es aproximadamente $V_0 = 8$ MeV + 38 MeV = 46 MeV. Este resultado es válido para todos los núcleos con A más grande que 12, debido a que desde esto hasta la saturación de la densidad nuclear es una constante $n = 0.17\ \text{fm}^{-3}$.

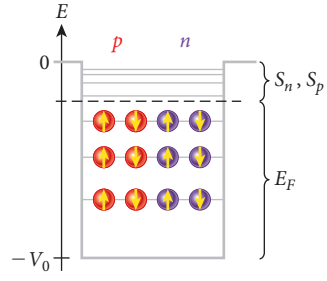


FIGURA 40.29 Aproximación del potencial nuclear en el modelo de gas Fermi.

Esta ilustración puede refinarse al introducir una energía Fermi separada por neutrones y protones. Esto da crecimiento al término asimétrico (ecuación 40.35) en la fórmula másica de Bethe-Weizsäcker (compare también con la figura 40.24).

Modelo de capas

El capítulo 38 mostró que los electrones en los átomos se arreglan a sí mismos en capas debido a los efectos combinados de la interacción de Coulomb de los electrones con el núcleo cargado positivamente, la mecánica cuántica y el principio de exclusión de Pauli. Una pieza esencial de la evidencia experimental que apoya la existencia de capas de electrones es la energía de separación (ionización) del electrón más externo como una función del número de carga, lo que muestra un máximo pronunciado en las capas llenas. En el ejemplo 40.2 calculamos las energías de separación de dos neutrones en una serie de isótopos de estaño y encontramos un pronunciado brinco en la energía de separación en el número de neutrón 82. La figura 40.30 muestra una compilación sis-

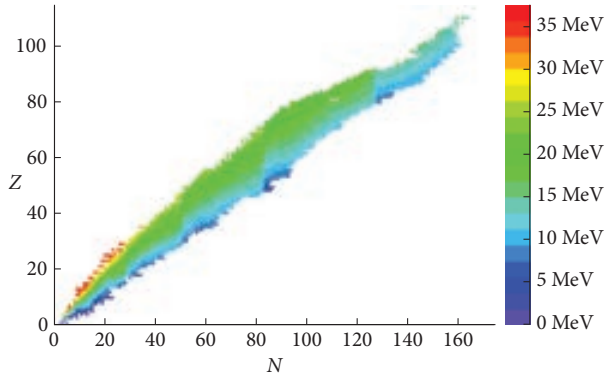


FIGURA 40.30 Energías de separación de dos neutrones medidas experimentalmente.

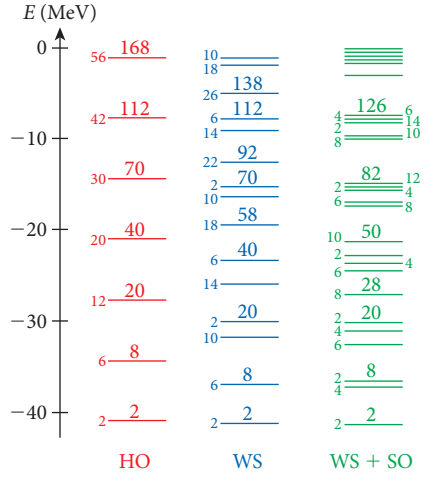


FIGURA 40.31 Niveles de energía de neutrones en un núcleo de plomo, calculados en tres diferentes potenciales: oscilador armónico (HO), Woods-Saxon (WS) y Woods-Saxon con un fuerte espín orbital acoplador (WS + SO). Los pequeños números a los lados de los niveles indican la ocupación máxima para el nivel, y los grandes números encima de los estados indican la suma acumulada de números de ocupación.

temática de la energía de separación de dos neutrones para todos los isótopos conocidos. Es claro que se vuelve más difícil remover pares de neutrones del núcleo con un número de carga Z dado y con menos neutrones N. Esta observación es una consecuencia del término de asimetría (ecuación 40.35) analizada en el contexto del modelo de la gota líquida. Sin embargo, el código de color en la figura 40.30 muestra repentinos brincos en ciertos números de neutrones, los cuales son superpuestos en esta tendencia general de crecer las energías de separación de dos neutrones conforme nos movemos de la derecha a la izquierda en una cadena de isótopos dada. Está claro, a partir de esta figura, que los números de neutrón 50, 82 y 126 son especiales, debido a que exhiben estos brincos repentinos. Cuando las energías de separación de dos protones son compiladas, una imagen similar emerge, con brincos repentinos en los así llamados números mágicos de 50 y 82 conforme nos movemos sobre las líneas de número constante de neutrón. (No existe un núcleo con número de carga $Z = 126$.)

Éstos y otros datos indican que cuando ciertos números de protones y neutrones ocurren en el núcleo, se llena una capa. Estos números son llamados **números mágicos**. Los números mágicos indican que las capas están completas y existen en núcleos justo como existen en las configuraciones de electrones en los átomos. Los números mágicos en los núcleos son

$$2, 8, 20, 28, 50, 82, 126,$$

y son los mismos para neutrones y protones, separadamente. En comparación, los números mágicos para la configuración de electrones son los números de carga de los gases nobles,

$$2, 10, 18, 36, 54, 86.$$

Estos conjuntos de números son similares, pero obviamente no idénticos. En el capítulo 38 mostramos que estos números mágicos indican capas llenas. Las capas están formadas por estados ocupados al máximo con una cantidad de movimiento angular orbital ℓ, donde la máxima ocupación de un estado dado es $2\ell + 1$. En el caso de los electrones en el átomo, el potencial es provisto por el potencial de Coulomb del núcleo.

Por otro lado, el potencial de los nucleones dentro del núcleo está provisto por la acción colectiva de los otros nucleones. No obstante, los números cuánticos de los nucleones dentro del potencial nuclear también pueden calcularse. La figura 40.31 muestra los niveles de energía de los neutrones dentro del núcleo de plomo, calculados por tres diferentes potenciales. El lado izquierdo representa un potencial oscilador armónico, para el cual las soluciones están calculadas en el capítulo 37. Estos niveles de energía están equitativamente espaciados. Es interesante saber que este simple potencial oscilador armónico ya reproduce los tres números mágicos más bajos. Un acuerdo similar es logrado al usar el potencial Woods-Saxon $V(r)$, el cual tiene la misma dependencia en la coordenada radial r como la que tiene la densidad del nucleón (ecuación 40.4):

$$V(r) = -\frac{V_0}{1 + e^{(r - R(A))/a}}. \tag{40.43}$$

De nuevo, la constante del espesor de la superficie $a = 0.54$ fm, y el radio está dado por la ecuación 40.3 como $R(A) = R_0 A^{1/3}$. La profundidad del potencial es $V_0 = 50$ MeV, cercano a lo que obtuvimos en el modelo de gas Fermi. Los niveles de energía en este potencial no pueden calcularse analíticamente, sino sólo con la ayuda de una computadora. Incluso, todavía es posible asignar números cuánticos de cantidad de movimiento angular a estas soluciones numéricas y, de este modo, los números de ocupación máxima para este potencial de Woods-Saxon pueden calcularse. Los resultados de este cálculo se muestran en azul en la figura 40.31. Para cada nivel, ilustramos nuevamente el número de ocupación máxima. El acumulado de los números de ocupación se indica únicamente donde hay una ventaja muy grande en el espacio de energía al siguiente nivel.

El entendimiento decisivo hacia el modelo nuclear por capas fue logrado en 1949 por los alemanes Maria Goeppert Mayer, Otto Hahn, J. Hans, D. Jensen y Hans Suess. Ellos se dieron cuenta de que la parte esencial de la interacción nuclear es el acoplamiento entre el espín y la cantidad de movimiento angular orbital. (Aquí no deducimos este término de interacción, simplemente afirmamos que existe: un curso de física cuántica avanzada llenará esta brecha.) Este acoplamiento del

espín orbital está también presente para los electrones, pero para nucleones es mucho más grande. Si un potencial de interacción del espín orbital con la correcta energía se añade al potencial Woods-Saxon, entonces obtenemos los niveles de energía mostrados en verde en la figura 40.31 del lado derecho. Ahora vemos que las grandes brechas de energía entre los niveles ocurren en los números mágicos observados en el experimento.

Este modelo de capas simple ha sido refinado repetidamente durante la última mitad del siglo pasado y permanece como el principal caballo de fuerza del cálculo de la estructura nuclear de baja energía. Debido a que la solución numérica del modelo de capas para núcleos pesados involucra la inversión de matrices extremadamente grandes, este problema aún no se puede resolver precisamente, incluso usando las computadoras más grandes disponibles. La investigación en el modelo de capas nucleares hace que sea un campo emocionante, enfocado en las nuevas técnicas de aproximación y refinamiento estable de las interacciones nucleares.

Otros modelos del núcleo

Los tres modelos que se han presentado hasta ahora no son de ningún modo los únicos. Los núcleos son campos de pruebas muy interesantes para muchos modelos teóricos, en particular cuando se trata de entender las colisiones de los núcleos, en las cuales los núcleos pueden calentarse y comprimirse. Los modelos de colisiones nucleares involucran muchos subcampos de la física que ya hemos introducido antes: física cuántica, dinámica de fluidos, termodinámica y electromagnetismo. Los núcleos pueden experimentar una fase de transición termodinámica entre fases parecidas al líquido y parecidas al gas. El estudio de estos fenómenos, sus aplicaciones técnicas y su relevancia interdisciplinaria han estado sucediendo en las dos últimas décadas y promete producir resultados más interesantes en las siguientes.

Como un ejemplo del modelo nuclear actual, mostramos un ejemplo de nuestra investigación. La figura 40.32 muestra la secuencia de tiempo de un modelo de simulación por computadora de una colisión de criptón 86 con niobio 93. Los núcleos experimentan una colisión no centroidal con un parámetro de impacto de 5 fm. El tiempo entre los dos marcos sucesivos es 8.0 fm/c = $2.7 \cdot 10^{-23}$ s. La densidad nuclear está exhibida, la cual está codificada por colores de acuerdo con la leyenda a la derecha de la figura. La compresión, deformación y la deflexión por los lados de los núcleos son claramente visibles. De las comparaciones de éstos y otros modelos simulados con datos experimentales, podemos sacar nuestras conclusiones sobre la dinámica y la termodinámica de los núcleos, y sobre las propiedades de la materia nuclear.

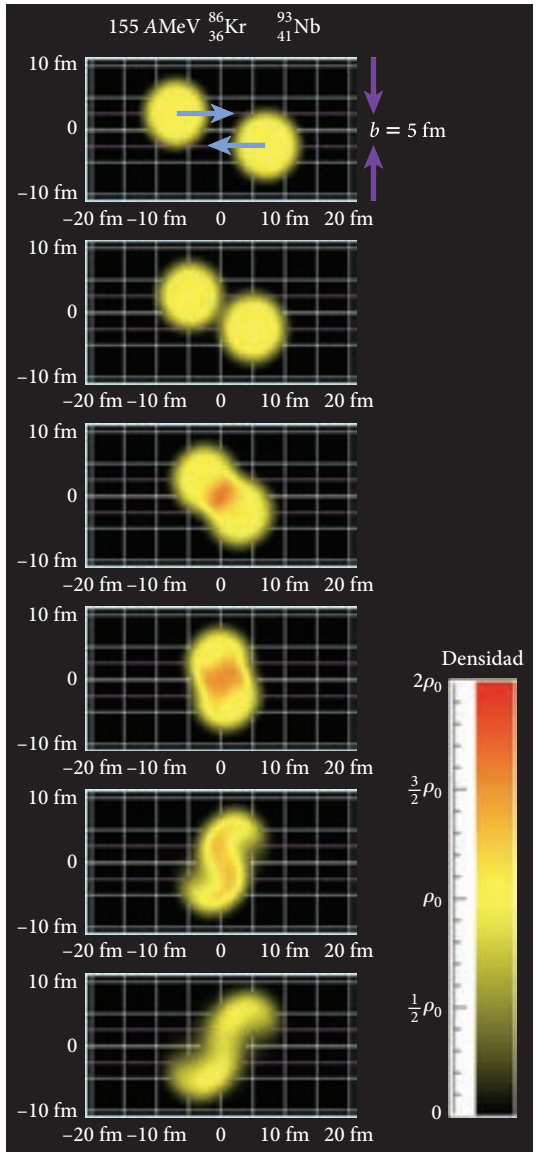


FIGURA 40.32 Secuencia de tiempo de una colisión nuclear, calculada con un modelo de transporte nuclear.

40.4 Energía nuclear: fisión y fusión

Regresemos una vez más a la figura 40.7, la cual muestra la energía de enlace por nucleón como una función del número másico para isótopos estables. Los núcleos de hierro y níquel tienen las más grandes energías de enlace por nucleón y son, de este modo, los que están más profundamente enlazados. Cualquier otro arreglo de los nucleones dentro de los núcleos, ligero o pesado, está menos profundamente enlazado. Esto sugiere que los núcleos muy pesados se pueden partir en dos núcleos de masa mediana más profundamente enlazados y obtener un factor de calidad Q positivo (figura 40.33). Este factor de calidad Q positivo produce energía útil, en un proceso llamado **fisión nuclear**. Del mismo modo, los núcleos muy ligeros pueden combinarse para dar núcleos más pesados con factores de calidad Q positivos y una energía de salida útil asociada, en el proceso de **fusión nuclear**. Ésta es la base física completa para la producción de energía en nuestro Sol y en casi todas las otras estrellas, para plantas de energía de reactor con fisión y fusión, así como para armas nucleares.

Fisión nuclear

El proceso de la fisión nuclear representa la división del núcleo atómico en dos núcleos pequeños, a menudo con la emisión de uno o más neutrones. Los dos núcleos más pequeños tienen núme-

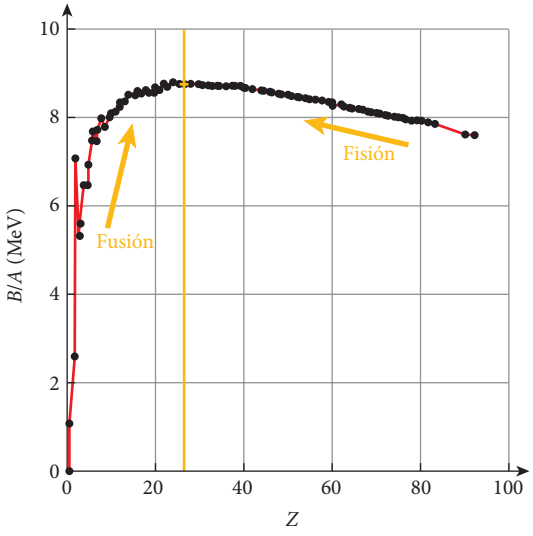


FIGURA 40.33 Ganancia de energía a través de las reacciones de fisión y fusión.

ros másicos cercanos a la mitad de aquel que tiene el núcleo padre. Como veremos, los núcleos que típicamente experimentan fisión tienen números másicos de 230 o mayores, así que los isótopos típicos resultantes de la fisión nuclear son típicamente en el rango de masa de 100 a 150. Ejemplos importantes de fragmentos de fisión son los isótopos de criptón hasta bario y algunos de los lantánidos. Estos fragmentos de fisión tienden a experimentar subsecuentes decaimientos radiactivos, algunas veces con vidas medias muy largas. Muchos de ellos son fáciles de ingerir y se acumulan en nuestros cuerpos, así que suponen grandes riesgos para la salud. Ejemplos son el tecnecio 99 (hablaremos de este isótopo más adelante), cesio 137 (vida media de 30 años) y yodo 131 (vida media de 8 días), los cuales se almacenan en la tiroides humana.

Un núcleo que está experimentando una fisión tiene que pasar a través de una configuración deformada no como la que analizamos para el decaimiento α el cual se describe en la figura 40.11. Un entendimiento cuantitativo del comienzo de la fisión espontánea en núcleos pesados requiere un criterio en términos del número másico y el número de carga. Para desarrollar este criterio, primero tenemos que parametrizar la deformación del núcleo (figura 40.34) en términos de un elipsoide con longitud del eje semimayor $R(1+\epsilon)$, donde R es el radio del mismo núcleo si fuera esférico y ϵ es el **parámetro de deformación**.

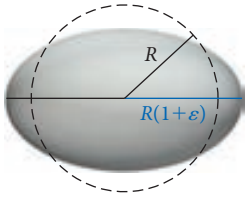


FIGURA 40.34 Deformación nuclear y definición del parámetro de deformación.

Cuando un núcleo es deformado de su configuración esférica, ¿cómo se afecta su energía de enlace por nucleón (ecuación 40.37)? El término de volumen no se cambia, debido a que depende únicamente del número de nucleones, que permanece igual. Como la proporción de carga a masa no cambia, el término de simetría debería también permanecer igual, independiente de la deformación. El número de pares de neutrones y pares de protones, y por lo tanto, el término de pares en la ecuación 40.37, también permanece constante. Sin embargo, la superficie es ligeramente incrementada cuando la esfera se deforma, así que el término de superficie incrementa como una función de la deformación. Además, los protones están en promedio más separados en el núcleo deformado, así que el término de Coulomb disminuye. Niels Bohr (1885-1962) y John Archibald Wheeler (1911-2008) mostraron en 1939 que el cambio en la energía de enlace como una función de la deformación para el término de superficie es (en orden principal) dado por $\Delta B_s(\epsilon) = \frac{2}{5}\epsilon^2 B_s\,(N,Z) = -\frac{2}{5}\epsilon^2 a_s A^{2/3}$, y el cambio en el término de Coulomb es $\Delta B_c(\epsilon) = -\frac{1}{5}\epsilon^2 B_c\,(N,Z) = \frac{1}{5}\epsilon^2 a_c A^{-1/3} Z^2$. Por consiguiente, el cambio total de la energía de enlace es

$$\begin{aligned}\Delta B(\epsilon) &= \Delta B_c(\epsilon) + \Delta B_s(\epsilon)\\ &= \tfrac{1}{5}\epsilon^2 a_c A^{-1/3} Z^2 - \tfrac{2}{5}\epsilon^2 a_s A^{2/3}\\ &= \tfrac{1}{5}\epsilon^2 (a_c A^{-1/3} Z^2 - 2a_s A^{2/3}).\end{aligned}$$

Si $\Delta B(\epsilon) > 0$, la energía puede ganarse al deformar un núcleo y puede fisionarse instantáneamente. Este punto de transición a fisión espontánea se alcanza cuando

$$\Delta B(\epsilon) = 0 \Rightarrow a_c A^{-1/3} Z^2 - 2a_s A^{2/3} = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{Z^2}{A} = \frac{2a_s}{a_c} = \frac{2(18.34\ \text{MeV})}{0.71\ \text{MeV}} \approx 51.7,$$

usando los valores dados en la ecuación 40.38.

La cantidad de Z^2/A es llamada el parámetro de fisionabilidad. Fisionabilidad más alta significa más alta probabilidad de fisión y, de este modo, un tiempo de vida más corto para el isótopo.

En la figura 40.16 usted puede ver que la fisión espontánea es el modo de decaimiento dominante para algunos de los isótopos más pesados. Sin embargo, en casi todos los casos donde la fisión espontánea domina, la vida media del isótopo es tan corta que no existe en la naturaleza. Mucho más importante para el uso de la fisión nuclear en los reactores nucleares y en las armas nucleares es el isótopo de muy larga vida $^{235}_{92}$U, el cual tiene una vida media de 700 millones de años durante los cuales se puede encontrar en depósitos naturales de uranio a 0.7% de abundancia. El isótopo de uranio más abundante es $^{238}_{92}$U, con una abundancia natural de 99.3% y una vida media de 4.5 mil millones de años. Ambos isótopos decaen abrumadoramente mediante la emisión α y tienen únicamente una probabilidad muy pequeña de fisión espontánea. Sin embargo, $^{235}_{92}$U se fisiona casi instantáneamente después de ser golpeado por un neutrón de muy baja energía. En este proceso

40.4 Ejercicio en clase

¿Cuál de los siguientes isótopos tiene la más grande fisionabilidad?

a) $^{235}_{92}$U *c*) $^{254}_{98}$Cf

b) $^{240}_{94}$Pu *d*) $^{258}_{100}$Fm

libera dos o tres neutrones, los cuales pueden producir otras reacciones inducidas por fisión en otros núcleos $^{235}_{92}$U. Si suficiente $^{235}_{92}$U está presente, la **reacción en cadena** resultante multiplicará de manera exponencial el número de neutrones en la muestra y causará una explosión nuclear. Sin embargo, para que esto suceda, el uranio necesita estar predominantemente compuesto por $^{235}_{92}$U y no por $^{238}_{92}$U (el cual no muestra fisión inducida con neutrones de baja energía). De este modo, para ser útil para armas nucleares, la concentración de $^{235}_{92}$U necesita ser *enriquecida*. Hablamos de uranio de *grado de armas* si contiene 80% o más de $^{235}_{92}$U. El enriquecimiento se puede hacer por varios medios, pero la técnica dominante es usar gas centrifugado para la separación de los isótopos.

¿Qué tanto uranio de grado de armas se necesita para hacer un arma nuclear?, esto es, ¿cuál es la **masa crítica**? El arreglo geométrico óptimo del uranio es en la forma de una esfera. En el volumen de la esfera de neutrones se producen mayores reacciones de fisión, mientras que en la superficie de la esfera, en promedio, la mitad de los neutrones escapan. La masa crítica de la esfera de $^{235}_{92}$U es de aproximadamente 50 kg. Como el uranio tiene una densidad de masa de 19.2 veces más que la del agua, el radio de la esfera de uranio $^{235}_{92}$U con masa crítica es de aproximadamente 8.6 cm. En un arma nuclear, una cantidad suficiente de $^{235}_{92}$U se mantiene separada en varias piezas y entonces se detona al empujar estas piezas a unirse mediante el uso de explosivos químicos convencionales. Los detalles exactos de este proceso son secretos militares.

Cantidades de $^{235}_{92}$U también pueden usarse para la producción energética nuclear en reactores nucleares de fisión. El uranio requerido para esto es mucho menos enriquecido que el de las armas nucleares. El arte de la construcción de reactores es mantener la reacción en cadena controlada y así evitar reacciones fugitivas. Esto se logra al usar materiales moderadores, los cuales capturan neutrones y, de este modo, los hacen no disponibles para mayores reacciones inducidas por fisión. El desastre de la fisión accidental del núcleo del reactor en la ciudad ucraniana de Chernobyl, el 26 de abril de 1986, fue el resultado de tales reacciones fugitivas en las cuales el sistema moderador falló.

Un segundo isótopo que es muy importante para las armas nucleares es el plutonio 239. $^{239}_{94}$Pu es producido en reactores de $^{238}_{92}$U por medio de la captura de neutrones y subsecuentes decaimientos β^-:

$$\begin{aligned} {}^{238}_{92}\mathrm{U} + n &\rightarrow {}^{239}_{92}\mathrm{U} + \gamma \\ {}^{239}_{92}\mathrm{U} &\rightarrow {}^{239}_{93}\mathrm{Np} + e^- + \overline{\nu}_e \\ {}^{239}_{93}\mathrm{Np} &\rightarrow {}^{239}_{94}\mathrm{Pu} + e^- + \overline{\nu}_e . \end{aligned}$$

Este proceso de producción de $^{239}_{94}$Pu suele ser referido como **cría**. $^{239}_{94}$Pu también experimenta una fisión inducida por neutrones y tiene una mayor producción de neutrones que $^{235}_{92}$U. De este modo, esta masa crítica es únicamente de 10 kg y es mucho más valiosa para armas nucleares que $^{235}_{92}$U. Sin embargo, la cría de plutonio para uso militar no es fácil, porque $^{239}_{94}$Pu puede fácilmente capturar otro neutrón y convertirse en $^{240}_{94}$Pu, el cual no muestra fisión espontánea. Una fracción muy alta de $^{240}_{94}$Pu dirigirá la detonación precrítica (fracaso) de una cabeza explosiva, así que el $^{239}_{94}$Pu necesita ser lo suficientemente puro para ser útil para el propósito de armas.

Claramente, las armas nucleares plantean una gran amenaza y un número creciente de países están adquiriendo esta peligrosa tecnología. Después de Estados Unidos y Rusia en la década de 1950, China, Francia, Gran Bretaña, Israel, India, Pakistán y posiblemente otros (Corea del Norte, Irán, Sudáfrica) se han convertido en potencias nucleares. Con cada país adicional que es capaz de producir armas nucleares, crece el peligro de que éstas puedan caer en manos equivocadas. Pequeñas cabezas de explosivos caben dentro de maletas y los terroristas han vuelto su atención hacia ellas. Incluso detonar una bomba de explosivos convencionales mezclada con material radiactivo, una así llamada *bomba sucia*, podría tener consecuencias devastadoras.

Igualmente claro, el uso pacifista de energía nuclear de reacciones de fisión es una forma de evitar las emisiones invernadero asociadas a plantas de energía convencionales que queman combustibles fósiles. Sin embargo, el almacenamiento de desperdicios nucleares con muy largas vidas medias es todavía un problema que no está completamente resuelto. Países como Alemania han jurado no usar los reactores de fisión y están enfocando su atención a fuentes alternativas de energía de carbón neutral (viento, biocombustibles, hidráulica, fotovoltaica, entre otras) para resolver el problema de gas invernadero. No obstante, con el consumo de energía creciendo de manera rápida, queda pendiente ver si estas alternativas de energía de fisión pueden satisfacer las necesidades de energía del mundo.

EJEMPLO 40.5 Producción de energía de fisión

PROBLEMA

¿Cuál es la producción de energía por kilogramo de uranio para la fisión inducida por neutrón de $^{235}_{92}\text{U}$ a criptón 92 y tres neutrones, si $^{235}_{92}\text{U}$ está enriquecido al 20% en el reactor?

SOLUCIÓN

Primero necesitamos escribir la ecuación de reacción para esta reacción de fisión. Esto nos dirá cuál es el segundo fragmento de fisión. El reactivo contiene un número total de 92 protones, el número de carga del uranio. Como uno de los fragmentos de fisión es criptón con 36 protones, el otro fragmento de fisión tiene $Z = 92 - 36 = 56$ protones. Esto significa que es un núcleo bario. Contando el total del número másico para el reactor, encontramos que $A = 236$. Al sustraer el número másico de los tres neutrones y el número másico 92 del isótopo criptón, encontramos que para el número másico del isótopo bario $A = 236 - 3 - 92 = 141$. De este modo, la ecuación de la reacción inducida por fisión en este caso es

$$n + {}^{235}_{92}\text{U} \rightarrow {}^{141}_{56}\text{Ba} + {}^{92}_{36}\text{Kr} + 3n.$$

La masa de uranio 235 es 235.0439299 u, la masa de bario 141 es 140.914411 u, la masa de criptón 92 es 91.92615621 u y la masa de un neutrón es 1.008664916 u. Por consiguiente, la diferencia de masa entre los reactantes y productos es

$$235.0439299 - (140.914411 + 91.92615621 + 2 \cdot 1.008664916) = 0.186033$$

unidades de masa atómica. Al convertirla a MeV, la diferencia de masa-energía entre los estados inicial y final es 173.3 MeV. Esto es también la suma de las energías cinéticas de los tres neutrones finales más los dos fragmentos de fisión menos la energía cinética del neutrón inicial.

Esta producción de energía también puede convertirse a joules:

$$\Delta E = (173.3 \text{ MeV})(1.602 \cdot 10^{-13} \text{ J/MeV}) = 2.776 \cdot 10^{-11} \text{ J}.$$

El uranio a una mezcla de 80% U-238 y 20% U-235 tiene un número másico medio de 0.8(238) + 0.2(235) = 237.4. De este modo, 237.4 gramos de uranio a nuestro enriquecimiento dado tiene $6.022 \cdot 10^{23}$ átomos de uranio (el número de Avogadro, vea el capítulo 13). De estos átomos, 20% son uranio 235 y pueden experimentar una fisión inducida por neutrón. Por consiguiente, 237.4 g de nuestra muestra de uranio contiene $0.2(6.022 \cdot 10^{23}) = 1.2044 \cdot 10^{23}$ átomos de uranio 235 y, consecuentemente, 1 kg de nuestra muestra contiene $1.2044 \cdot 10^{23}/0.2374 = 5.073 \cdot 10^{23}$ átomos de uranio 235.

Todo lo que falta por hacer es multiplicar el número de átomos por la producción de energía por átomo. Entonces la producción total de energía de fisión de nuestra mezcla de uranio es

$$(2.776 \cdot 10^{-11} \text{ J})(5.073 \cdot 10^{23}) = 14.08 \cdot 10^{12} \text{ J}.$$

Tome en cuenta que no toda esta energía está disponible para alimentar la red eléctrica. Algunos uranios 235 siempre permanecerán sin fisionar y algunos de los neutrones liberados golpearán el uranio 238 y lo convertirán en plutonio.

Por comparación, la combustión de 1 kg de gasolina produce un máximo de $4.6 \cdot 10^7$ J. Esto significa que la fisión nuclear de uranio enriquecido produce un factor de más de 300 000 más energía que la combustión de la gasolina de la misma masa de combustible.

Fusión nuclear

El proceso de la fusión nuclear funde núcleos ligeros en más pesados y, de este modo, también incrementa la energía de enlace por nucleón, siempre y cuando el producto final de este proceso de fusión sea más ligero que el hierro.

Fusión estelar

La fusión nuclear es el proceso básico de la energía de producción en las estrellas. Dos principales cadenas de reacción, descubiertas en 1938 por Hans Bethe, lograron esto. La primera es la cadena protón-protón y la segunda es un ciclo CNO. Ambas nos sirven para fusionar cuatro núcleos atómicos de hidrógeno en un núcleo de helio.

La **cadena protón-protón** empieza con dos protones que forman un deuterón más un positrón. Éste es un proceso de interacción débil y toma un largo tiempo, aproximadamente 10 mil millones de años en promedio (vida media). Esto explica por qué el Sol ha existido ya por aproximadamente 5 mil millones de años y no necesita explotar instantáneamente después de su formación. El deuterón recién formado puede entonces rápidamente capturar otro protón y formar helio 3; el positrón recientemente creado se aniquila casi instantáneamente con un electrón:

$$\begin{aligned} p + p &\rightarrow d + e^+ + \nu_e & Q &= 0.42 \text{ MeV} \\ d + p &\rightarrow {}^3_2\text{He} + \gamma & Q &= 5.49 \text{ MeV} \\ e^+ + e^- &\rightarrow 2\gamma & Q &= 1.02 \text{ MeV}. \end{aligned}$$

El resultado neto de estas tres reacciones es la fusión de tres protones a un núcleo de helio 3 más tres fotones y un neutrino. El factor de calidad Q combinado de las tres reacciones es Q_{neto} = (0.42 + 5.49 + 1.02) MeV = 6.93 MeV.

El siguiente paso involucra tres diferentes reacciones a través de las cuales la fusión puede proceder hacia el helio 4. En el Sol, 86% de las veces, dos núcleos de helio 3 tienen una reacción de fusión que producen

$${}^3_2\text{He} + {}^3_2\text{He} \rightarrow {}^4_2\text{He} + p + p$$

con un factor de calidad Q de 12.86 MeV. Al añadir el factor de calidad Q de esta reacción al factor de calidad Q que fue obtenido de la formación de helio 3, se obtiene

$$Q_{\text{neto}} = (2 \cdot 6.93 + 12.86) \text{ MeV} = 26.7 \text{ MeV}.$$

Ésta es exactamente la diferencia de masa entre los cuatro protones y un helio 4, como esperábamos de la conservación de energía.

Alternativamente, 14% de las veces el helio 3 encuentra un helio 4 existente en el Sol y se fusiona con el

$${}^3_2\text{He} + {}^4_2\text{He} \rightarrow {}^7_4\text{Be} + \gamma.$$

Este núcleo de berilio 7 entonces captura al electrón para formar litio 7, el cual a su vez tiene una reacción de fusión para formar dos núcleos de helio 4:

$$\begin{aligned} {}^7_4\text{Be} + e^- &\rightarrow {}^7_3\text{Li} + \nu_e \\ {}^7_3\text{Li} + p &\rightarrow 2\,{}^4_2\text{He}. \end{aligned}$$

Esta producción de 26.7 MeV de energía cinética de la fusión de cuatro protones a un núcleo de helio 4 es la razón básica de por qué el Sol brilla. ¿Qué pasa con esta energía? Parte de ella es transportada fuera por los neutrinos. Debido a la baja interacción de la sección transversal, estos neutrinos pueden dejar el Sol de inmediato en caminos rectos. Los fotones, por otro lado, esparcen a los iones y electrones en el Sol, se absorben y se vuelven a emitir en direcciones aleatorias, y toman, en promedio, aproximadamente 50 000 años en alcanzar la superficie del Sol.

El **ciclo CNO** es nombrado por los símbolos químicos de los elementos de carbón, nitrógeno y oxígeno. Este ciclo es dominante en las estrellas que son significativamente más masivas que nuestro Sol. En el ciclo CNO, el carbón sirve de catálisis para fusionar cuatro protones a un núcleo de helio 4. Esto significa que, a final del ciclo, se obtiene un núcleo de carbón 12, justo como iniciamos con:

$$\begin{aligned} {}^{12}_6\text{C} + p &\rightarrow {}^{13}_7\text{N} + \gamma & Q &= 1.95 \text{ MeV} \\ {}^{13}_7\text{N} &\rightarrow {}^{13}_6\text{C} + e^+ + \nu_e & Q &= 1.20 \text{ MeV} \\ e^+ + e^- &\rightarrow 2\gamma & Q &= 1.02 \text{ MeV} \\ {}^{13}_6\text{C} + p &\rightarrow {}^{14}_7\text{N} + \gamma & Q &= 7.54 \text{ MeV} \\ {}^{14}_7\text{N} + p &\rightarrow {}^{15}_8\text{O} + \gamma & Q &= 7.35 \text{ MeV} \\ {}^{15}_8\text{O} &\rightarrow {}^{15}_7\text{N} + e^+ + \nu_e & Q &= 1.73 \text{ MeV} \\ e^+ + e^- &\rightarrow 2\gamma & Q &= 1.02 \text{ MeV} \\ {}^{15}_7\text{N} + p &\rightarrow {}^{12}_6\text{C} + {}^4_2\text{He} & Q &= 4.96 \text{ MeV} \\ \underline{\text{neto}} \quad 4p &\rightarrow {}^4_2\text{He} + 7\gamma + 2\nu_e & Q_{\text{neto}} &= 26.8 \text{ MeV} \end{aligned}$$

Estos procesos de fusión necesitan vencer la repulsión de Coulomb entre la carga positiva de los núcleos atómicos. De este modo, la fusión está restringida al núcleo interno del Sol, el cual se extiende desde el centro hasta cerca de 20% del radio solar. El núcleo contiene cerca de 10% de la masa del Sol. En el núcleo, la densidad es de hasta 150 toneladas por metro cúbico y la temperatura es aproximadamente 13.6 millones de K. Las altas temperaturas y densidades en el núcleo solar son suficientes para que la fusión en cadena de protón-protón proceda. Por contraste, el ciclo CNO requiere temperaturas algo más altas que las que el Sol provee y así contribuye relativamente poco al total de energía solar producida. Sin embargo, conforme el Sol envejece, alcanza etapas de evolución estelar cuando las densidades y temperaturas en el núcleo son suficientemente altas para que el ciclo CNO proceda.

EJEMPLO 40.6 Fusión en el Sol

Al principio de este capítulo afirmamos que las reacciones de fusión nuclear son responsables de casi todas las fuentes de energía a nuestra disposición en la Tierra. Veamos cómo funcionan los números.

PROBLEMA

Sabiendo que el Sol irradia aproximadamente 1 370 W/m^2 en la Tierra, ¿cuánta energía total necesitan producir las fusiones solares dentro del núcleo solar por segundo, y cuántos protones se necesitan por segundo para generar tanta potencia?

SOLUCIÓN

El Sol es una esfera casi perfecta e irradia su potencia uniformemente sobre los 4π ángulos sólidos. De esta forma, si calculamos el área de superficie de la esfera con el radio de la órbita de la Tierra alrededor del Sol, podemos calcular el total de la potencia de salida. El radio de la órbita es 1 unidad astronómica, 149.6 millones de km. Por consiguiente, el área de la superficie de la esfera que estamos buscando es

$$A = 4\pi r^2 = 4\pi(1.496\cdot 10^{11}\ \text{m})^2 = 2.812\cdot 10^{23}\ \text{m}^2.$$

Dado que cada metro cuadrado en la Tierra recibe aproximadamente 1 370 W de potencia, el total de la potencia de salida del Sol es

$$P_{\text{total}} = (1.370\cdot 10^3\ \text{W/m}^2)(2.812\cdot 10^{23}\ \text{m}^2) = 3.85\cdot 10^{26}\ \text{W (385 yottaWatt).}$$

Como un recordatorio, 1 W = 1 J/s y 1 eV $=1.602178\cdot 10^{-19}$ J. La energía liberada por la fusión de cuatro protones a un helio 4 en joules se puede calcular:

$$26.8\ \text{MeV} = (26.8\cdot 10^6)(1.602178\cdot 10^{-19}\ \text{J}) = 4.29\cdot 10^{-12}\ \text{J}.$$

Un cuarto de esa energía es, por consiguiente, lo que obtenemos por cada protón involucrado en el ciclo de fusión, $1.07\cdot 10^{-12}$ J. Por lo tanto, son necesarios $(3.85\cdot 10^{26}\ \text{W})/(1.07\cdot 10^{-12}\ \text{J}) = 3.60\cdot 10^{38}$ protones cada segundo para fusionarse en helio 4. Con una masa de protón de $1.6726\cdot 10^{-27}$ kg, ¡esto significa que una masa total de $(3.60\cdot 10^{38})\ (1.6726\cdot 10^{-27}\ \text{kg}) = 6.02\cdot 10^{11}$ kg (600 millones de toneladas métricas) de protones es convertida a helio cada segundo!

40.5 Ejercicio en clase

Con esta cantidad de hidrógeno siendo convertido a helio, ¿qué tanto más puede el Sol seguir brillando al ritmo de quemado actual? (*Sugerencia*: la masa del Sol es $1.99\cdot 10^{30}$ kg, el núcleo solar contiene aproximadamente 10% de esa masa, y alrededor de la mitad de la masa nuclear es actualmente aún hidrógeno.)

a) 30 000 años

b) 2 millones de años

c) 100 millones de años

d) 5 mil millones de años

e) $3.3\cdot 10^{18}$ años

Fusión terrestre

¿Puede la potencia de la fusión implementarse en la Tierra? La respuesta es sí y tal vez. En 1952, la primera bomba de hidrógeno fue detonada en Estados Unidos. Las bombas de hidrógeno usan las reacciones de fusión nuclear para alcanzar la máxima producción de energía. Las altas temperaturas y compresiones que se requieren para lograr la fusión se obtienen al usar una bomba nuclear del tipo de fisión para ser el detonador. Así que sí, es posible lograr una reacción de fusión nuclear y obtener una gran liberación de energía. Sin embargo, las detonaciones de bombas de hidrógeno no se pueden considerar como fusiones "controladas". Fusiones controladas como un medio de producción de energía útil puede ser la solución para los problemas de energía globales. Durante las últimas cuatro o cinco décadas grandes sumas de dinero se han destinado a obtener fusión controlada, hasta ahora con muy poco éxito. Lograr las altas presiones y temperaturas necesarias para la fusión termonuclear ha sido una meta elusiva.

Hoy en día, dos diseños destacados prometen gran progreso. Uno es el ITER, la colaboración internacional para construir un reactor de fusión termonuclear con tecnología de confinamiento magnético. La figura 40.35 muestra un dibujo del núcleo central de fusión del ITER. La cámara de vacío toroidal del ITER está alineada con un escudo que absorbe el calor y los neutrones producidos en las reacciones de fusión. Los sistemas magnéticos que son usados para confinar el plasma calentado rodean la cámara de vacío. También hay un divertor para manejar las partículas neutras que no son contenidas por el campo magnético.

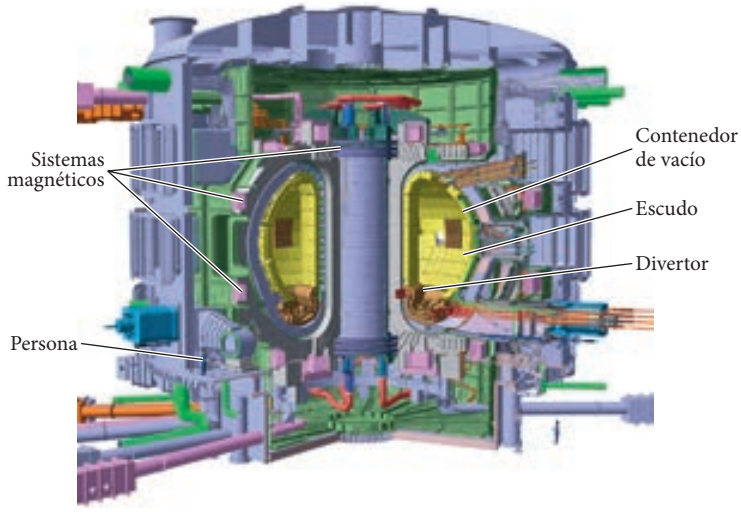
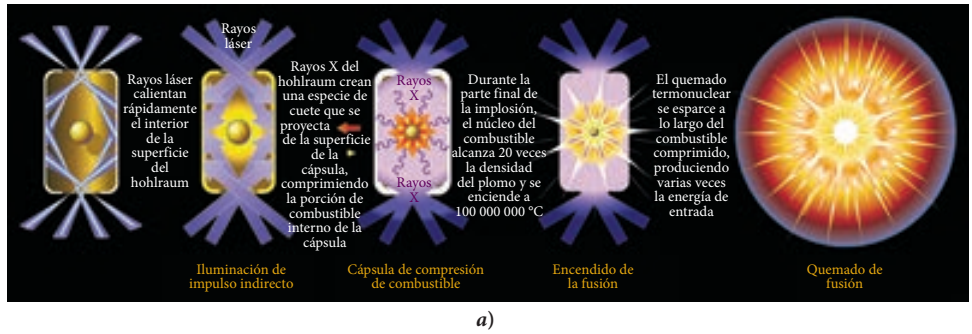


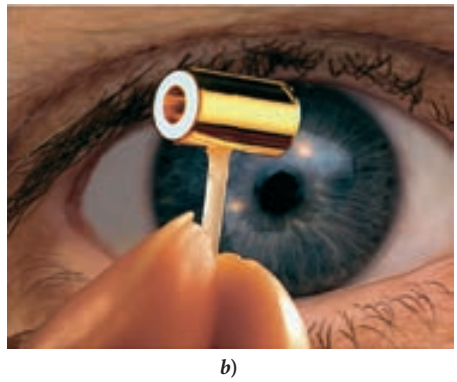
FIGURA 40.35 Dibujo del reactor planeado de fusión central de la instalación ITER, ahora bajo construcción en Cadarache, Francia.

En 2006, la Unión Europea, Estados Unidos, China, Rusia, Japón, India y Corea del Sur acordaron fundar este proyecto conjuntamente y seleccionaron el lugar de la construcción: Cadarache, en el sur de Francia. Los costos del proyecto serán de aproximadamente 15 mil millones de dólares y tomará 10 años en completarse. Se espera que el ITER proveerá de 500 MW de potencia sostenida por aproximadamente 10 minutos. Ésta es una mejora de varios órdenes de magnitud sobre lo que se ha logrado con los reactores de fusión de confinamiento magnético hasta ahora y un gran paso hacia un punto de equilibrio; esto es, extraer por lo menos la misma potencia que se ha metido.

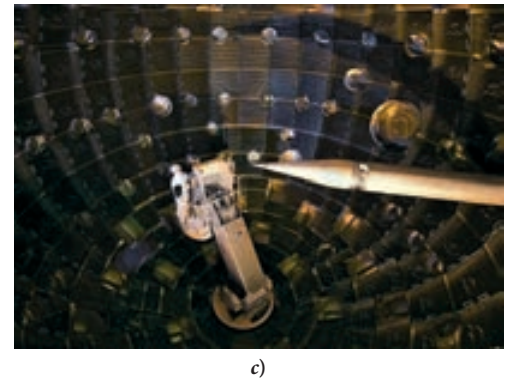
La otra aproximación prometedora a la fusión es la fusión láser. En Livermore, California, el Departamento de Energía de Estados Unidos ha construido la National Ignition Facility. Aquí los láseres más poderosos del mundo son disparados a pequeños cilindros vacíos (*hohlraum*) y los rayos X liberados de la interacción de los láseres con las paredes del hohlraum comprimen la fusión nuclear de combustible en el interior, logrando así encender la fusión. Una vista general del ensamble de láser en el National Ignition Facility se muestra al final del capítulo 38. La figura 40.36*a*) nos da una vista general esquematizada de los procesos de fusión inducidos por láser, la figura 40.36*b*) muestra uno de los cilindros hohlraum y la figura 40.36*c*) ilustra la cámara del objetivo, en la cual los objetivos del hohlraum serán encendidos y en la cual la energía de fusión liberada volverá a ser capturada.



a)



b)



c)

FIGURA 40.36 *a*) Descripción de la fusión nuclear de la National Ignition Facility. *b*) Un cilindro hohlraum tiene sólo unos cuantos milímetros de ancho (menos que el tamaño de una moneda de diez centavos de dólar), con haz de entrada por hoyos en cada lado. Contiene la cápsula de combustible de fusión, la cual es del tamaño de un pequeño chícharo o una goma de lápiz. *c*) Un técnico verifica la cámara de objetivo del NIF mientras el sistema de servicio de cámara de objetivo se eleva. Los técnicos deben vestirse con trajes de cuerpo completo para proteger la cámara de cualquier pelusa o partícula microscópica. El posicionador de objetivos, el cual sostiene el objetivo durante un disparo, está a la derecha.

40.5 Astrofísica nuclear

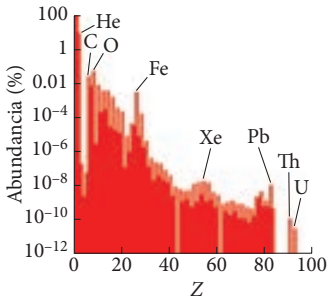


FIGURA 40.37 Abundancia de los elementos químicos en nuestro sistema solar por peso.

La interfase de la física nuclear, la física de partículas y la astrofísica es una de las áreas de investigación de la física actual más fascinantes. Pueden realizarse experimentos de laboratorio, simulaciones por computadora, estudios de modelos y cálculos para contestar preguntas básicas acerca del universo. En el capítulo 39 se analizaron varios aspectos de este campo interdisciplinario. Sin embargo, una de las preguntas más interesantes a estudiar es el origen de los elementos químicos. Hasta ahora hemos descubierto que el Big Bang (vea el capítulo 39) fue capaz de crear casi todo el hidrógeno y casi todo el helio en el universo. Reacciones de fusión en las estrellas, como acabamos de ver, generan helio también. Por otro lado, los elementos que observamos alrededor nuestro son diferentes. La Tierra está predominantemente compuesta por hierro, silicón, oxígeno, aluminio, sodio y otros elementos. Elementos tan pesados como el uranio se pueden encontrar en cantidades considerables. Nuestros propios cuerpos consisten en su mayoría de oxígeno (65% de nuestro peso), carbón (18%), hidrógeno (3%), calcio (1.5%), fósforo (1%) y rastros de muchos otros elementos. La figura 40.37 muestra el porcentaje de abundancia por peso de los elementos del sistema solar. El hidrógeno y el helio dominan, pero se pueden encontrar todos los elementos estables e incluso el torio y el uranio existen en cantidades apreciables.

¿De dónde vienen los elementos más pesados? Para responder a esta pregunta, tenemos que examinar las últimas etapas en la vida de una estrella. Por ejemplo, estudiemos una estrella de masa de 20 veces la masa del Sol. La combinación de la física nuclear y del modelo de estrellas muestra que una estrella así de masiva usa todo su combustible de hidrógeno mucho más rápido que el Sol, y después de sólo 10 millones de años, su núcleo está predominantemente compuesto por helio. Estos núcleos de helio 4 entonces se fusionan con el carbón 12 a través del así llamado procesos de triple alfa,

$$ {}^4_2\mathrm{He} + {}^4_2\mathrm{He} \leftrightarrow {}^8_4\mathrm{Be} $$
$$ {}^8_4\mathrm{Be} + {}^4_2\mathrm{He} \rightarrow {}^{12}_6\mathrm{C} + \gamma. $$

Este proceso de dos pasos es necesario porque ${}^8_4$Be no es estable y tiene una vida media de únicamente $6.7 \cdot 10^{-17}$ s y decae de regreso a dos núcleos de helio 4. Por consiguiente, la densidad del helio 4 necesita ser muy alta para que este proceso ocurra. Entonces toma aproximadamente 1 millón de años para que la mayoría del helio se convierta en carbón. Conforme la temperatura del núcleo incrementa, se vuelve eventualmente suficiente para vencer la repulsión de Coulomb de núcleos cada vez más pesados. Esto nos dirige a la producción de los núcleos como oxígeno, neón, silicón y, por último, hierro y níquel.

Como hemos visto, los isótopos estables del hierro y níquel tienen la más alta energía de enlace por nucleón. Esta producción de elementos más pesados que el hierro y el níquel a través de los procesos de fusión es entonces imposible. Esto también significa que el núcleo de una estrella no puede producir más energía a través de procesos nucleares de fusión. Este núcleo de hierro de nuestra estrella de 20 masas solares tiene una masa de 1 masa solar. Una vez que la producción de energía de fusión para, la presión térmica debida a la fusión de fotones se desvanece y el núcleo de la estrella se colapsa debido al empuje gravitacional. La captura de una fracción significativa de los electrones por los protones, $p + e^- \rightarrow n + \nu_e$, acelera el colapso. Después de tan sólo unos milisegundos, el centro de ese núcleo se ha comprimido a la densidad de la materia nuclear y una onda de choque comienza a propagarse radialmente hacia afuera a través del núcleo, causando que la estrella explote y se convierta en una **supernova**.

FIGURA 40.38 La Nebulosa del Cangrejo, un remanente de supernova.

Cómo funciona exactamente el proceso de la explosión del colapso nuclear de la supernova aún sigue bajo investigación. Sin embargo, las observaciones experimentales de supernovas son claras. La energía total emitida en la forma de fotones y neutrinos es del orden de 10^{44} J a 10^{45} J, lo que corresponde a la energía liberada por más de un miles, mieles y miles de millones (10^{27}) de bombas de hidrógeno encendidas simultáneamente. Lo que queda es una estrella de neutrones que es muy pequeña (radio aproximado de 10 km) e increíblemente densa (masa aproximada de 1.5 masas solares en la densidad de la materia nuclear). Conforme la estrella de neutrones se forma, la cantidad de movimiento angular se conserva, así que gira muy rápido. Conforme una estrella de neutrones gira, puede emitir "haces de luz tipo faro", ondas de radio, luz y/o rayos X. Tal estrella de neutrones rotante se llama pulsar. ¡Se han observado pulsares que rotan tan rápido como 40 veces por segundo! La velocidad de rotación del Sol es de $4.6 \cdot 10^{-7}$ rotaciones/s (una rotación cada 25 días).

Como resultado de una explosión de supernova, la materia es lanzada al espacio interestelar y forma nubes de polvo y gas, que son la mayoría de los objetos más pintorescos en el universo.

La figura 40.38 muestra la famosa Nebulosa del Cangrejo, la cual es el remanente de una supernova que explotó a 6 500 años luz de la Tierra y fue observada en el años 1054. Fue tan brillante que se pudo ver durante la luz del día, aunque la explosión pasó a una distancia de casi medio millón de veces más grande que la distancia al Sol.

En el proceso de la explosión de la supernova, los isótopos que existen fuera del núcleo son bombardeados por un flujo increíblemente alto de neutrones. Ellos capturan estos neutrones rápidamente y experimentan rápidos decaimientos β^- aumentando así sus números de neutrones y protones. La figura 40.39 muestra la trayectoria de este llamado *proceso r* (r = rápido) a través de la tabla de isótopos. Toma sólo segundos poblar los procesos r de isótopos, los cuales entonces decaen de regreso hacia el valle de estabilidad. Este proceso es entendido cualitativamente, pero no en detalle cuantitativo. Sin embargo, los astrónomos generalmente están de acuerdo en que esa elemental abundancia observada en el sistema solar (vea la figura 40.37) es el resultado de tales explosiones de supernova más de 5 mil millones de años atrás. Nuestro sistema solar se formó de las cenizas de esta supernova. La vasta mayoría de los átomos alrededor de nosotros y dentro de nuestro cuerpo tienen, por lo tanto, al menos 5 mil millones de años. Estos átomos simplemente se reciclan.

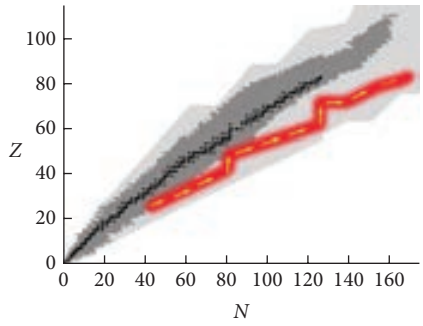


FIGURA 40.39 Trayectoria de los procesos r (rojos con flechas amarillas) a través del paisaje de los isótopos. Gris claro: isótopos postulados. Gris: isótopos conocidos. Negro: isótopos estables.

40.6 Medicina nuclear

La **medicina nuclear** es el subcampo de la medicina que está floreciendo, donde la física nuclear encuentra directa aplicación en el diagnóstico y el tratamiento de los pacientes. Se están logrando grandes progresos al usar herramientas más precisas para aplicar radiación a las áreas relevantes del cuerpo de los pacientes. También ha habido una mejora sostenida en el equipo de detección, resultando en un continuo descenso de la mínima dosis de radiación necesaria para las pruebas de diagnóstico. Progreso en la investigación de física nuclear básica se traduce, entonces, directamente en avances médicos.

Radiaciones de varios tipos se usan para el tratamiento contra el cáncer. La idea es muy directa: concentrar la radiación en las células del tumor que necesitan ser destruidas, mientras que al mismo tiempo se intenta no irradiar tejido sano. Esta opción de tratamiento es particularmente atractiva en casos en los que el tumor no puede extraerse quirúrgicamente o en los que el área de cirugía necesita tratarse después de la operación. En particular, el cáncer de cerebro se ha tratado exitosamente con métodos de radiación, un proceso que se está refinando continuamente.

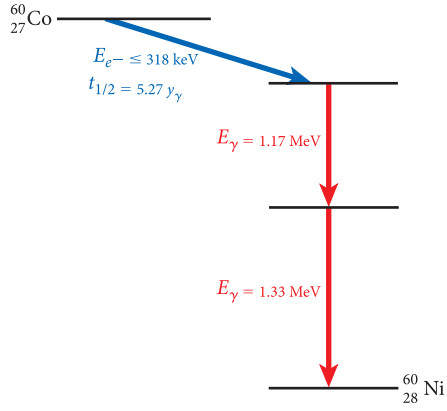


FIGURA 40.40 Esquema de decaimiento de cobalto 60.

El tratamiento más común de radiación contra cáncer es el que se basa en los rayos gamma. Esta tecnología usa una fuente de fotones radiactivos muy fuerte, usualmente $^{60}_{27}$Co. Este isótopo β^- decae hacia un estado excitado del níquel mediante $^{60}_{27}\text{Co} \rightarrow {}^{60}_{28}\text{Ni} + e^- + \bar{\nu}_e$ con un factor de calidad Q de 318 keV. La vida media de este proceso es de 5.27 años. Una vez que está poblado, el estado excitado de $^{60}_{28}$Ni decae entonces pronto hacia el estado fundamental o base mediante la emisión de dos rayos gamma de alta energía (figura 40.40). De este modo, este isótopo emite dos rayos gamma de alta energía, pero aún tiene una vida media muy larga. Como $^{60}_{27}$Co es producido directamente con 99% de pureza en reactores a través de la captura del neutrón en el isótopo estable $^{59}_{27}$Co, es un isótopo ideal para propósitos médicos, pero también para otros propósitos como la irradiación de comida.

El cobalto radiactivo es contenido detrás de un escudo grueso. Canales angostos en el escudo permiten a los fotones escapar en direcciones bien definidas para ser usados como un haz de radiación. Ésta es la base de la estructura del **cuchillo gamma** (inventado en 1968), usado principalmente para tratar cáncer de cerebro inoperable (figura 40.41). Para cada paciente se diseña un colimador personalizado de radiación con forma de casco muy grueso, por el cual los muchos canales a través del escudo apuntan todos a un cierto punto dentro de la cabeza del paciente donde se localiza el tumor cancerígeno.

FIGURA 40.41 Instalación de tratamiento contra el cáncer de cuchillo gamma en el Scripps Memorial Hospital, La Jolla, California.

Los últimos años han visto un fuerte incremento en la investigación de tratamientos contra el cáncer con pesados haces de iones, los cuales, al igual que partículas α, depositan mucha de su energía cerca de su máxima profundidad de penetración y así permiten mayor control de profundidad en la dosis de radiación depositada. Con el uso de este método se pueden esperar grandes avances en el tratamiento con radiación.

En el campo de imágenes, la tecnología más importante está basada en la resonancia magnética nuclear (NMR, del inglés *nuclear magnetic resonance*). La tecnología de imagen que está

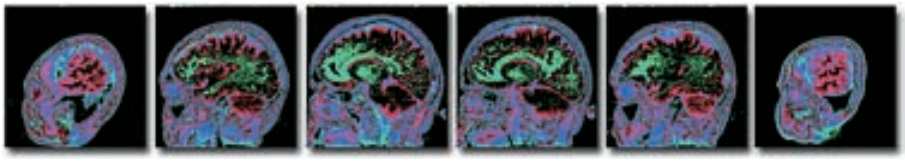


FIGURA 40.42 Cortes de imágenes a través de una cabeza humana, obtenida mediante técnicas de MRI.

basada en NMR es llamada imagen por resonancia magnética (MRI, del inglés *magnetic resonance imaging*). ¿Cómo funciona NMR/MRI? Las partículas como los protones tienen un momento dipolar magnético intrínseco, como se analizó en el capítulo 28. Cuando los protones son colocados en un campo magnético fuerte, su espín y, consecuentemente, su momento dipolar magnético únicamente puede tener dos direcciones: paralela o antiparalela a los campos externos. La diferencia en energía entre los dos estados es dada por la diferencia en la energía potencial magnética, la cual es $2\mu B$, donde μ es el componente del momento magnético de los protones a lo largo de la dirección del campo externo. Esta diferencia de energía potencial se estudió en el capítulo 27.

Un campo eléctrico variable en el tiempo a una frecuencia correcta puede inducir a algunos de los protones a voltear la dirección de sus momentos dipolares magnéticos desde la paralela hasta la antiparalela al campo externo, y los protones ganan consecuentemente energía potencial. Debido a que la energía potencial magnética puede tener únicamente dos posibles valores, la energía requerida para voltear la dirección es un valor discreto, dependiendo de la magnitud del campo externo. El capítulo 36 mostró que la energía entregada por el campo es proporcional a la frecuencia. De este modo, únicamente una frecuencia de oscilación dada causará que el momento dipolar se voltee. Si cesa el campo eléctrico variable en el tiempo, los protones en los estados más altos de energía, con momentos dipolares que no están alineados con el campo, se voltearán de regreso para estar paralelos con el campo, emitiendo fotones de una energía bien definida que se puede detectar.

Un aparato de imagen de resonancia magnética usa el principio físico de la resonancia magnética nuclear que acabamos de describir. Esta técnica puede hacer una imagen de la localidad de los protones en un cuerpo humano al introducir un campo eléctrico variable en el tiempo, y entonces variar el campo magnético en una manera precisa, conocida, para producir una imagen de tres dimensiones de la distribución del tejido que contiene hidrógeno. La calidad de esta imagen depende de la fuerza del campo magnético externo. La figura 40.42 muestra los resultados de una MRI.

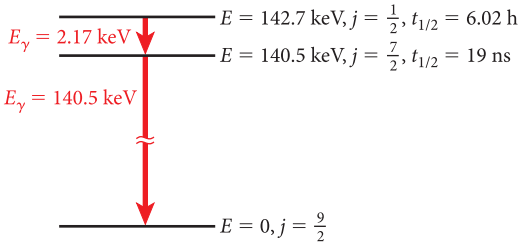


FIGURA 40.43 Los niveles de energía más bajos del tecnecio, su cantidad de movimiento angular en unidades de la constante de Planck y sus vidas medias.

Concluimos con un ejemplo interesante del uso para el diagnóstico de la radiación nuclear. El elemento tecnecio ($Z = 43$) no tiene isótopos estables. El isótopo de más larga vida de tecnecio es $^{99}_{43}$Tc, con una vida media de 4.2 millones de años. No obstante, para un propósito de diagnóstico médico, el isótopo $^{99}_{43}$Tc es muy valioso. Sus niveles de energía más bajos, sus valores de la cantidad de movimiento angular y sus vidas medias se muestran en la figura 40.43. El estado con cantidad de movimiento angular de $\frac{1}{2}\hbar$ es un estado isomérico, porque su cantidad de movimiento angular es más de $1\hbar$ diferente de los dos estados de baja energía. De este modo, es relativamente de vida larga y decae a una vida media de 6.02 h al estado $j = \frac{7}{2}\hbar$ mediante la emisión de fotones con energía de 2.17 keV. Esto es seguido por un decaimiento muy rápido al estado fundamental o base, con una vida media de sólo 19 ns, mediante la emisión de un fotón de 140.5 keV. Por lo tanto, el decaimiento de $^{99}_{43}$Tc entrega fotones de energía alta muchas horas después de la preparación inicial del isótopo. Como un fotón de 140.5 keV penetra fácilmente en tejido biológico, este isótopo se puede usar para propósitos diagnósticos.

En un escaneo de tecnecio, $^{99}_{43}$Tc se inyecta al paciente. Después de unos pocos minutos a unas cuantas horas, se puede tomar una fotografía del paciente con una cámara de rayos gamma para monitorear por dónde ha viajado el tecnecio en el cuerpo. Algunos cánceres resultan en un incremento local de concentración de $^{99}_{43}$Tc cerca del tumor y aparecen como áreas negras en la fotografía de rayos gamma. El paciente mostrado en la figura 40.44 afortunadamente resultó estar libre de cáncer. (El punto negro cerca del codo izquierdo es el punto de inyección.) $^{99}_{43}$Tc es, así, un gran ejemplo del uso médico de isótopos específicos.

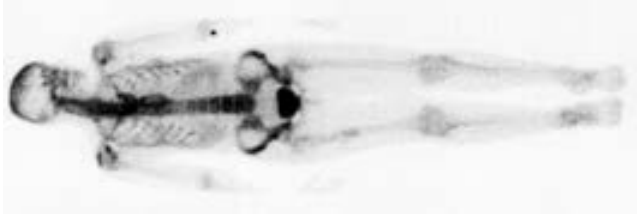


FIGURA 40.44 Un escaneo de tecnecio de una paciente. Las áreas oscuras muestran un aumento en la concentración del isótopo tecnecio 99 en el cuerpo.

LO QUE HEMOS APRENDIDO | GUÍA DE ESTUDIO PARA EXAMEN

- El núcleo atómico consiste de protones y neutrones, colectivamente llamados nucleones. Núcleos con diferentes números de neutrones, pero con el mismo número de protones, se llaman isótopos del mismo elemento. El número másico de un isótopo es la suma del número de protones y el número de neutrones, $A = Z + N$.
- La interacción entre los nucleones es de corto rango y puede ser efectivamente descrito por los posibles intercambios de piones.
- Los núcleos son figuras aproximadamente esféricas, con el radio de una esfera dependiendo del número másico, $R(A) = R_0A^{1/3}$, y $R_0 = 1.12$ fm.
- El número de densidad de la materia nuclear en el interior de un núcleo es $n = 0.17$ fm^{-3}, y la densidad de masa es $\rho = m_{\text{nucleón}}n = 2.8 \cdot 10^{17}$ kg/m^3. La dependencia del número de densidad de masa en la coordenada radial está dada por la función de Fermi $n(r) = n_0/[1 + e^{(r - R(A))/a}]$, con $a = 0.54$ fm.
- Existen 251 isótopos estables y más de 2 400 isótopos inestables conocidos, con tiempos de vida de fracciones de segundo hasta muchas veces la edad del universo.
- La masa nuclear es medida en múltiplos de la unidad de masa atómica, 1 u = $1.660538782 \cdot 10^{-27}$ kg = 931.494028 MeV/c^2, con la definición de 1 u como 1/12 de la masa del átomo ${}^{12}_{6}$C.
- La masa de un núcleo con Z protones y N neutrones es más pequeña que la suma de las masas de los nucleones individuales, y la energía de enlace es definida como la diferencia de masa por c^2, $B(N, Z) = Zm_pc^2 + Nm_nc^2 - m(N, Z)c^2$.
- El exceso de masa de un núcleo es definido como la diferencia entre la masa de un núcleo expresada en unidades de masa atómica y el número másico: exceso de masa = $m(N, Z) - A$ u.
- La energía de enlace de los diferentes isótopos se puede reproducir muy bien con la fórmula de Bethe-Weisäcker para el modelo de la gota líquida, como la suma de volumen, superficie, Coulomb, asimetría y contribuciones de pares,

$$B(N,Z) = a_{\text{v}}A - a_{\text{s}}A^{2/3} - a_{\text{c}}Z^2A^{-1/3}$$
$$-a_{\text{a}}\left(Z - \tfrac{1}{2}A\right)^2 A^{-1} + a_{\text{p}}\left((-1)^Z + (-1)^N\right)A^{-1/2}.$$

- El factor de calidad Q de una reacción nuclear dada es la diferencia entre la suma de las energías de las masas de los núcleos iniciales menos aquélla de los núcleos finales.
- El modelo de gas Fermi aproxima al núcleo como un gas cuántico de nucleones que se mueven libremente dentro del núcleo, pero que están confinados por la superficie nuclear. La densidad de estados del modelo de gas Fermi es $dN(E) = m^{3/2}E^{1/2}dE/(2^{1/2}\pi^2a^3\hbar^3)$.
- La energía Fermi es

$$E_{\text{F}} = (\hbar^2/2m)\left(\tfrac{3}{2}\pi^2 n_0\right)^{2/3} = 38 \text{ MeV}.$$

- El modelo de capas nucleares predice capas con cantidad de movimiento angular dentro del núcleo similar al de las capas de electrón en el átomo. Es capaz de reproducir los números mágicos de 2, 8, 20, 28, 50, 82, 126.
- Decaimientos nucleares muestran leyes de decaimientos exponenciales, $N(t) = N_0e^{-\lambda t}$. La constante de decaimiento λ, la vida media $t_{1/2}$ y el tiempo de vida media τ están relacionadas por $t_{1/2} = \ln 2/\lambda = \tau \ln 2$.
- En un decaimiento α, del núcleo emite un núcleo del helio 4:

$${}^{A}_{Z}\text{Nuc} \rightarrow {}^{4}_{2}\text{He} + {}^{A-4}_{Z-2}\text{Nuc}'.$$

En un decaimiento β^- un electrón y un antineutrino son emitidos:

$${}^{A}_{Z}\text{Nuc} \rightarrow {}^{A}_{Z+1}\text{Nuc}' + e^- + \overline{\nu}_e.$$

En un decaimiento β^+ puede proceder por medio de una emisión de positrón:

$${}^{A}_{Z}\text{Nuc} \rightarrow {}^{A}_{Z-1}\text{Nuc}' + e^+ + \nu_e$$

o la captura de un electrón:

$$e^- + {}^{A}_{Z}\text{Nuc} \rightarrow {}^{A}_{Z-1}\text{Nuc}' + \nu_e.$$

Un decaimiento γ es la emisión de un fotón de alta energía de un estado excitado del núcleo, un proceso que no transmuta al núcleo.

- La unidad de SI para la radiactividad es el bequerelio, 1 Bq = 1 decaimiento nuclear. La unidad de SI para la dosis absorbida es el gray, 1 Gy = 1 J/kg. La unidad de SI para la dosis equivalente es el sievert, 1 Sv = w_{r}(1 Gy), donde el factor de peso de radiación w_{r} varía entre 1 y 20, dependiendo del tipo de energía emitida por la partícula.
- La fisión nuclear es la fractura de un núcleo muy pesado en dos núcleos de masa mediana, usualmente con la emisión asociada de uno o algunos neutrones. Este proceso es la base física para las plantas de energía nuclear, así como para las armas nucleares.
- La fusión nuclear es la unión de dos núcleos ligeros en uno más pesado. La fusión nuclear es el proceso básico de la potencia de las estrellas. Las dos cadenas de fusión más comunes son la cadena protón-protón y la cadena CNO.
- La investigación astrofísica nuclear es empleada para explicar, entre otras cosas, la abundancia de los elementos químicos en nuestro sistema solar.
- La medicina nuclear usa la física nuclear para diagnósticos médicos y tratamientos de radiación contra cáncer.

TÉRMINOS CLAVE

nucleones, p. 1326
isótopos, p. 1327
número másico, p. 1327
tiempo de vida nuclear, p. 1329
unidad de masa atómica (u), p. 1330
energía de enlace, p. 1331
exceso de masa, p. 1331
reacción nuclear, p. 1332
factor de calidad Q, p. 1332
energía de separación, p. 1333
radiactividad, p. 1334
vida media, p. 1334
tiempo de vida media, p. 1334
transmutación, p. 1335
decaimiento alfa, p. 1335
decaimiento beta, p. 1337
decaimiento gamma, p. 1339
decaimientos en grupo, p. 1340
datación de radiocarbono, p. 1341
bequerelio (Bq), p. 1343
curie (Ci), p. 1343
modelo de gota líquida, p. 1346
fórmula empírica de masa, p. 1347
modelo de gas Fermi, p. 1348
energía Fermi, p. 1348
números mágicos, p. 1350
fisión nuclear, p. 1351
fusión nuclear, p. 1351
parámetro de deformación, p. 1352
reacción en cadena, p. 1353
masa crítica, p. 1353
cría, p. 1353
cadena protón-protón, p. 1355
ciclo CNO, p. 1355
supernova, p. 1358
medicina nuclear, p. 1359
cuchillo gamma, p. 1359

RESPUESTAS A OPORTUNIDADES DE AUTOEVALUACIÓN

40.1

Partícula	Masa (u)
d	2.014101778
$^{12}_{6}\mathrm{C}$	12
p	1.007825032
$^{13}_{6}\mathrm{C}$	13.00573861

$$Q=(2.014101778\ \mathrm{u})c^2+(12\ \mathrm{u})c^2-\left((1.007825032\ \mathrm{u})c^2+(13.00573861\ \mathrm{u})c^2\right)=(0.000538128\ \mathrm{u})c^2=0.501263\ \mathrm{MeV},\ \text{positiva, exotérmica.}$$

40.2 Primero observamos únicamente los núcleos de carga impar. Usando la fórmula de masa, vemos que tienen los mismos valores para el término de volumen, término de superficie y término de pares. El término asimétrico y el término de Coulomb, juntos, se combinan para producir la forma parabólica. Los núcleos de carga par tienen una parábola similar que está compensada verticalmente con respecto a los núcleos de carga por el término impar.

40.3

$$dE=\frac{\hbar^2}{m}k\,dk=\frac{\hbar^2}{m}\frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}dk=\hbar\sqrt{2E/m}\,dk\Rightarrow\frac{dE}{\hbar\sqrt{2E/m}}=dk$$

$$dN(E)=\frac{a^3k^2}{2\pi^2}\frac{dE}{\hbar\sqrt{2E/m}}=\frac{a^3\,2mE/\hbar^2}{2\pi^2}\frac{dE}{\hbar\sqrt{2E/m}}=\frac{a^3m^{3/2}}{2^{1/2}\pi^2\hbar^3}E^{1/2}dE.$$

PRÁCTICA PARA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Lineamientos para resolución de problemas

1. Recuerde que el núcleo es el sistema prototípico cuántico. El principio de exclusión de Pauli y la relación de incertidumbre proveen herramientas esenciales para trabajar relaciones de cantidad de movimiento, energía y tamaños.

2. Cuando se trata de energías de enlace, primero debería considerar las opciones provistas por la fórmula de la gota líquida.

3. Si usted necesita resolver un problema que involucre los decaimientos nucleares, primero asegúrese de qué proceso de decaimiento está involucrado. Puede hacer esto al comparar los núcleos inicial y final involucrados en el decaimiento. Después necesita asegurarse de respetar las leyes de conservación (número leptón, número barión, cantidad de movimiento, energía, carga, etcétera) en su proceso de decaimiento. Calcular el factor de calidad Q es una buena idea, porque le permite saber si su decaimiento es posible o no.

PROBLEMA RESUELTO 40.2 Superficie nuclear

PROBLEMA

El espesor de la superficie nuclear t está definida como la distancia sobre la que la densidad nuclear disminuye de 90 a 10% de su valor central. Deduzca una relación entre este espesor de la superficie y los parámetros de la función de Fermi (ecuación 40.4). ¿Cuáles son las distancias sobre las que la densidad nuclear disminuye de 80 a 20% y de 70 a 30%, de su valor central?

SOLUCIÓN

PIENSE

La ecuación 40.4 nos da la función de Fermi para la densidad nuclear $n(r)$ como una función de la coordenada radial r. Contiene los 3 parámetros n_0, $R(A)$ y a,

$$n(r)=\frac{n_0}{1+e^{(r-R(A))/a}}.$$

La sección 40.1 establece que el valor empírico de los parámetros son $a = 0.54$ fm, $n_0 = 0.17$ fm^{-3} y $R(A) = R_0 A^{1/3}$ con $R_0 = 1.12$ fm. Como n_0 es una constante multiplicativa en la función de Fermi, no puede tener ninguna influencia en el espesor de la superficie nuclear. Sin embargo, no es tan fácil ver si $R(A)$ o a determinan el espesor de la superficie.

ESBOCE

La figura 40.45 muestra la función de Fermi para tres valores diferentes del radio nuclear R. Es claro por este esbozo que el espesor de la superficie nuclear t es independiente de R. De este modo, nuestra expresión deseada para el espesor de la superficie nuclear sólo puede ser una función del parámetro a.

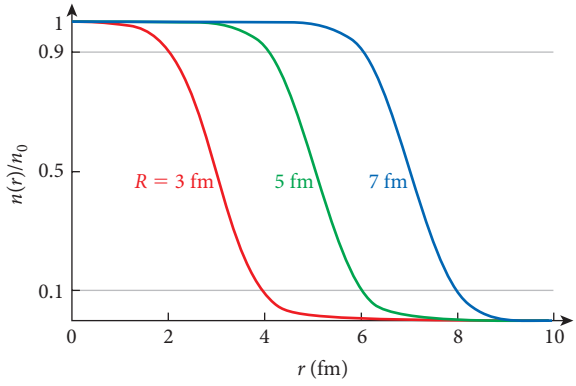


FIGURA 40.45 Función de Fermi para tres diferentes radios nucleares.

INVESTIGUE

Nuestro punto de partida es la función de Fermi, la cual nos da la densidad como una función de la coordenada radial, $n(r)$,

$$\frac{n(r)}{n_0} = \frac{1}{1 + e^{(r-R)/a}}.$$

Aquí hemos escrito simplemente R en vez de $R(A)$ para simplificar nuestra notación, reconociendo de nuestro esbozo que los valores particulares del radio nuclear no tendrán influencia en el espesor de la superficie nuclear. Necesitamos invertir esta función para poder obtener la coordenada radial como una función de la densidad, $r(n/n_0)$. Entonces, el espesor está definido como

$$t = r(10\%) - r(90\%).$$

SIMPLIFIQUE

Resolvimos nuestra expresión anterior para r al tomar la inversa en ambos lados y luego sustrayendo 1 de ambos lados

$$\frac{n_0}{n} = 1 + e^{(r-R)/a} \Rightarrow$$

$$\frac{n_0}{n} - 1 = e^{(r-R)/a}$$

Ahora podemos tomar el logaritmo natural y encontrar

$$\ln\left(\frac{n_0}{n} - 1\right) = (r - R)/a.$$

La multiplicación de ambos lados por a y la adición de R resulta entonces en

$$r = R + a\ln\left(\frac{n_0}{n} - 1\right),$$

la cual es nuestra expresión deseada de la coordenada radial como una función de la densidad, $r(n/n_0)$. Al usar esta expresión para $n = 0.1n_0$ y $n = 0.9n_0$ podemos expresar el espesor de la superficie como

$$t = r(0.1) - r(0.9) = r = \left[R + a\ln\left(\frac{1}{0.1} - 1\right)\right] - \left[R + a\ln\left(\frac{1}{0.9} - 1\right)\right]$$

$$t = a\left[\ln\left(\frac{1}{0.1} - 1\right) - \ln\left(\frac{1}{0.9} - 1\right)\right] = a\left[\ln 9 - \ln 0.\overline{1}\right] = 2a\ln 9$$

$$t = 4.39445a.$$

CALCULE

Podemos obtener la relación deseada entre el parámetro a de la función de Fermi y el espesor de la superficie nuclear, $t \approx 4.4a$. Usando $a = 0.54$ fm, encontramos que el espesor de la super-

(*continúa*)

(*continuación*)

ficie del núcleo es 2.4 fm. Lo que resta calcular es el espesor de las regiones sobre las cuales la densidad disminuye de 80 a 20% y de 70 a 30%:

$$r(0.2)-r(0.8)=(0.54\text{ fm})\left[\ln\left(\frac{1}{0.2}-1\right)-\ln\left(\frac{1}{0.8}-1\right)\right]=1.4972\text{ fm}$$

$$r(0.3)-r(0.7)=(0.54\text{ fm})\left[\ln\left(\frac{1}{0.3}-1\right)-\ln\left(\frac{1}{0.7}-1\right)\right]=0.91508\text{ fm}.$$

REDONDEE

Como la constante a = 0.54 fm es dada únicamente a 2 cifras significativas, no tiene sentido especificar nuestro resultado a mayor precisión que ésta, y nuestra respuesta final es

$$r(0.2)-r(0.8)=1.5\text{ fm}$$
$$r(0.3)-r(0.7)=0.92\text{ fm}.$$

VUELVA A REVISAR

Como puede ver del esbozo, la función de Fermi disminuye casi linealmente entre n/n_0 = 0.9 y n/n_0 = 0.1. Como los intervalos de densidad entre n/n_0 = 0.7 y n/n_0 = 0.3 son la mitad de aquellos entre 0.9 y 0.1, esperamos que la distancia sobre la cual ocurre la disminución es aproximadamente la mitad del espesor de la superficie nuclear. (Recuerde: ¡el espesor de la superficie es definido como la distancia sobre la cual la densidad disminuye de 0.9 a 0.1 de su densidad central!) Encontramos que el espesor es t = 2.4 fm, de este modo no es irrazonable encontrar $r(0.3) - r(0.7)$ = 0.92 fm.

PREGUNTAS DE OPCIÓN MÚLTIPLE

40.1 El radio 226 decae emitiendo una partícula alfa. ¿Cuál es el núcleo hijo?

a) Rd *b*) Rn *c*) Bi *d*) Pb

40.2 ¿Cuáles de los siguientes modos de decaimiento se deben a una transición entre estados del mismo núcleo?

a) Decaimiento alfa.
b) Decaimiento beta.
c) Decaimiento gamma.
d) Ninguna de las anteriores.

40.3 En estrellas de neutrones, las cuales son casi 90% neutrones y sostenidas casi por completo por fuerzas nucleares, ¿cuáles de los siguientes términos de energía de enlace se vuelven relativamente dominantes comparado con núcleos ordinarios?

a) Término de Coulomb.
b) Término de asimetría.
c) Término de pares.
d) Todos los anteriores.
e) Ninguno de los anteriores.

40.4 Cuando un núcleo objetivo es bombardeado por un haz apropiado de partículas, es posible producir:

a) un núcleo menos masivo, pero no uno más masivo;
b) un núcleo más masivo, pero no uno menos masivo;
c) un núcleo con un número de carga más pequeño, pero no uno con un número de carga más grande;
d) un núcleo con un número de carga más grande, pero no uno con un número de carga más pequeño;
e) un núcleo con un número de carga más grande o más pequeño.

40.5 La interacción nuclear fuerte (seleccione todas las que apliquen)

a) es solamente atractiva;
b) no actúa con electrones;
c) únicamente actúa con unos cuantos fm;
d) todas las anteriores son verdaderas:
e) ninguna de las anteriores es verdadera.

40.6 El cobalto tiene un isótopo estable, ^{59}Co, y 22 isótopos radiactivos. Su isótopo radiactivo más estable es ^{60}Co. ¿Cuál es el modo de decaimiento dominante para este isótopo ^{60}Co?

a) β^+ *b*) β^- *c*) p *d*) n

40.7 La masa de un átomo (masa atómica) es igual a

a) la suma de las masas de los protones;
b) la suma de las masas de los protones y neutrones;
c) la suma de las masas de los protones, neutrones y electrones;
d) la suma de las masas de los protones, neutrones y electrones menos la energía de enlace del átomo.

PREGUNTAS

40.8 ¿Cuál es el material radiactivo más peligroso, uno con una vida media corta o larga?

40.9 Aparte de la fatiga, ¿cuál es otra razón por la que la Federal Aviation Administration limita el número de horas intercontinentales que los pilotos pueden volar anualmente?

40.10 ¿Por qué hay números mágicos en el modelo de capas nucleares?

40.11 La energía de enlace de ${}^{3}_{2}\text{He}$ es más baja que aquella de ${}^{3}_{1}\text{H}$. Facilite una explicación plausible, considerando la interacción de Coulomb entre dos protones en ${}^{3}_{2}\text{He}$.

40.12 ¿Cuáles de las siguientes cantidades es conservada durante una reacción nuclear, y cómo?

a) Carga.
b) El número de nucleones, A.
c) Masa-energía.
d) Cantidad de movimiento lineal.
e) Cantidad de movimiento angular.

40.13 Algunos tipos de comida son tratados con radiación gamma para matar las bacterias. ¿Por qué no hay una preocupación de que la gente que come esta comida pueda estar consumiendo comida contaminada con radiación gamma?

40.14 Refiérase a la subsección "Fusión terrestre" en la sección 40.4 para ver cómo lograr fusiones controladas sería la solución para los problemas de energía de la humanidad, y qué tan difícil es hacerlo. ¿Por qué es tan difícil? El Sol lo hace todo el tiempo (vea la subsección previa: "Fusión estelar"). ¿Necesitamos entender mejor cómo funciona el Sol para construir un reactor de fusión nuclear útil?

40.15 ¿Por qué están los núcleos atómicos más o menos limitados en tamaño y en proporciones neutrón-protón? Esto es, ¿por qué no hay núcleos estables con 10 veces más de neutrones como de protones, y por qué no hay núcleos atómicos del tamaño de las canicas?

40.16 Una reacción nuclear del tipo ${}^{3}_{2}\text{He} + {}^{12}_{6}\text{C} \rightarrow \text{X} + \alpha$ es llamada una reacción nuclear *pick-up*.

a) ¿Por qué es llamada una reacción *pick-up*, esto es, qué es lo que se recoge y de dónde viene?
b) ¿Cuál es el núcleo X resultante?
c) ¿Cuál es el factor de calidad Q de esta reacción?
d) ¿Es ésta una reacción endotérmica o exotérmica?

40.17 El isoespín, o *espín isotópico*, es una variable cuántica que describe la relación entre protones y neutrones en física nuclear y de partículas. (Estrictamente, describe la relación entre quarks *u* y *d*, como fueron descritos en el capítulo 39, pero el isoespín fue introducido antes del advenimiento del modelo de quark.) Tiene las mismas propiedades algebraicas que la cantidad de movimiento angular cuántica: los protones y neutrones forman estados isopares, con número total cuántico de isoespín $\frac{1}{2}$; el protón es el estado $t_z = +\frac{1}{2}$, el neutrón es el estado $t_z = -\frac{1}{2}$, donde *z* se refiere a la dirección en un espacio del isoespín abstracto.

a) ¿Qué estados de isoespín se pueden construir de dos nucleones, esto es, dos objetos $t = \frac{1}{2}$? ¿A qué núcleos corresponden estos estados?

b) ¿Qué estados de isoespín se pueden construir a partir de tres nucleones? ¿A qué núcleos corresponderían?

40.18 Antes de que lo busque, haga una predicción del espín (espín intrínseco, por ejemplo, cantidad de movimiento angular real) del deuterón, ${}^{2}_{1}\text{H}$. Explique su razonamiento. *Sugerencia*: los nucleones son fermiones.

40.19 ${}^{39}\text{Ar}$ es un isótopo con una vida media de 269 años. Si decae a través de una emisión de beta menos, ¿qué isótopo resultará?

40.20 Una estrella neutrón es esencialmente un núcleo gigante con una masa 1.35 veces más que la del Sol, o número másico de orden 10^{57}. Consiste de aproximadamente 99% de neutrones, el resto son protones y un número igual de electrones. Explique la física que determina estas características.

40.21 ¿Cuál es la configuración nuclear del núcleo hijo asociado al decaimiento alfa de Hf ($A = 157$, $Z = 72$)?

PROBLEMAS

Una • y dos •• indican un nivel creciente de dificultad en los problemas.

Sección 40.1

40.22 Estime el volumen del núcleo de uranio 235.

40.23 Usando la tabla de isótopos en el apéndice B, calcule la energía de enlace de los siguientes núcleos.

a) ${}^{7}\text{Li}$ *b*) ${}^{12}\text{C}$ *c*) ${}^{56}\text{Fe}$ *d*) ${}^{85}\text{Rb}$

40.24 De acuerdo con la notación estándar, encuentre el número de protones, nucleones, neutrones y electrones de ${}^{134}_{54}\text{Xe}$.

•**40.25** Usando la función de Fermi, determine los cambios relativos en densidad $(dn(r)/dr)/n_0$ en una superficie nuclear, $r = R(A)$.

•**40.26** Calcule la energía de enlace para los siguientes dos isótopos de uranio:

a) ${}^{238}_{92}\text{U}$, el cual consiste de 92 protones, 92 electrones y 146 neutrones, con una masa total de 238.0507826 u.

b) ${}^{235}_{92}\text{U}$, el cual consiste de 92 protones, 92 electrones y 143 neutrones, con una masa total de 235.0439299 u.

La unidad de masa atómica $u = 1.66 \cdot 10^{-27}$ kg. ¿Cuál isótopo es más estable (o menos inestable)?

Sección 40.2

40.27 Escriba las ecuaciones que describan el decaimiento β^- de los siguientes átomos:

a) ${}^{60}\text{Co}$ *b*) ${}^{3}\text{H}$ *c*) ${}^{14}\text{C}$

40.28 Escriba las ecuaciones que describan el decaimiento alfa de los siguientes átomos:

a) ^{212}Rn *b*) ^{241}Am

40.29 ¿Cuánta energía se libera en el decaimiento beta de ^{14}C?

40.30 Un cierto isótopo radiactivo decae a un octavo de su cantidad original en 5.0 horas.

a) ¿Cuál es su vida media? *b*) ¿Cuál es su tiempo de vida media?

40.31 Un cierto isótopo radiactivo decae a un octavo de su cantidad original en 5.00 horas. ¿Qué tanto tiempo le tomaría para decaer 10.0% de éste?

40.32 Determine la constante de decaimiento del radio 226, el cual tiene una vida media de 1 600 años.

40.33 Una muestra de 1.00 gramo de torio 228 decayendo radiactivamente lo hace por medio de emisiones β^- y 75 conteos se han grabado en un día en un detector que tiene 10% de eficiencia (esto es, 10.0% de todos los eventos que ocurren son realmente grabados por este detector). ¿Cuál es el tiempo de vida de este isótopo?

40.34 La vida media de una muestra con 10^{11} átomos que decaen por medio de emisiones alfa es de 10 min. ¿Cuántas partículas alfa son emitidas entre el intervalo de tiempo de 100 min y 200 min?

•**40.35** La actividad específica de un material radiactivo es el número de decaimientos por segundo por gramo de átomos radiactivos.

a) Dado que la vida media del ^{14}C es 5 730 años, calcule la actividad específica de ^{14}C. Exprese su resultado en desintegraciones por segundo por gramo, bequerelio por gramo y curie por gramo.

b) Calcule la actividad inicial de una pieza de madera de 5.00 g.

c) ¿Cuántas desintegraciones de ^{14}C han ocurrido en una pieza de madera de 5.00 g que fue cortada de un árbol el 1 de enero de 1700?

•**40.36** Durante un viaje a un sitio de excavación histórica, un arqueólogo encontró una pieza de carbón. Los análisis del carbón encontraron que la actividad de ^{14}C en la muestra es de 0.42 Bq. Si la masa de carbón es de 7.2 g, estime la edad aproximada del sitio.

•**40.37** En 2008, investigadores de la escena de un crimen descubrieron los huesos de una persona que parecía haber sido la víctima de un asesinato brutal, que ocurrió hace mucho tiempo. Les gustaría saber el año cuando esta persona fue asesinada. Usando la datación de carbono, han determinado que la razón de cambio del $^{14}_{6}$C es de 0.268 Bq por gramo de carbón. La razón de cambio de $^{14}_{6}$C en los huesos de una persona que acaba de morir es de 0.270 Bq por gramo de carbón. ¿En qué año mataron a la víctima? La vida media del $^{14}_{6}$C es $5.73 \cdot 10^3$ años.

•**40.38** Los físicos saben hacer estallar las cosas mejor que cualquier otra persona. La figura de mérito por estallar cosas es la fracción de la masa en reposo inicial convertida a energía en el proceso. Buscando los datos necesarios, calcule esta fracción para los siguientes procesos:

a) combustión química del hidrógeno: $2H_2 + O_2 \rightarrow 2H_2O$

b) fisión nuclear: $n + {}^{235}_{92}\text{U} \rightarrow {}^{89}_{36}\text{Kr} + {}^{142}_{56}\text{Ba} + 5n$

c) fusión termonuclear: ${}^{6}_{3}\text{Li} + {}^{2}_{1}\text{H} \rightarrow {}^{7}_{4}\text{Be} + n$

d) el decaimiento de neutrones libres: $n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e$

e) el decaimiento de muon: $\mu^- \rightarrow e^- + \nu_\mu + \bar{\nu}_e$

f) aniquilación electrón-positrón: $e^- + e^+ \rightarrow 2\gamma$

••**40.39** Un núcleo inestable A decae en un núcleo inestable B, que a su vez decae en un núcleo estable. Si en $t = 0$ s hay N_{A0} y N_{B0} núcleos presentes, derive una expresión para N_B, el número de B núcleos presentes, como una función del tiempo.

••**40.40** En un simple caso de decaimiento de una *cadena* radiactiva, una especie radiactiva de núcleos *padre*, A, decae con una constante de decaimiento λ_1 hacia una especie radiactiva de núcleos *hijo*, B, el cual decae luego con una constante de decaimiento λ_2 hacia un elemento C *estable*.

a) Escriba las ecuaciones describiendo el número de núcleos en cada una de las tres especies como una función del tiempo y deduzca una expresión para el número de núcleos hijo, N_2, como una función del tiempo, y para la actividad de los núcleos hijo, A_2, como una función del tiempo.

b) Analice los resultados en el caso cuando $\lambda_2 > \lambda_1$ ($\lambda_2 \approx 10\,\lambda_1$) y cuando $\lambda_2 >> \lambda_1$ ($\lambda_2 \approx 100\,\lambda_1$).

Sección 40.3

•**40.41** Considere la fórmula de Bethe-Weizsäcker para el caso de núcleo impar *A*. Muestre que esta fórmula puede escribirse como una cuadrática en *Z*, y de este modo, para cualquier *A* dada, las energías de enlace de los isótopos en términos de *A* tomará una forma cuadrática, $B = a + bZ + cZ^2$. Encuentre el isótopo más profundamente enlazado (el más estable) teniendo $A = 117$ usando su resultado.

••**40.42** Se define que la línea de goteo del neutrón debe ser el punto en el cual la energía de separación del neutrón para cualquier isótopo de un elemento es negativa. Esto es, el neutrón no está enlazado. Usando la fórmula másica de Bethe-Wiezsäcker, encuentre la línea de goteo para el elemento Sn. Encuentre este valor usando S_n y S_{2n}. Grafique tanto S_n como $S_{2n}/2$ como una función del número de neutrones.

Sección 40.4

40.43 Una planta de energía nuclear de fisión produce cerca de 1.50 GW de energía eléctrica. Asuma que la planta tiene una eficiencia general de 35.0% y que cada evento de fisión produce 200. MeV de energía. Calcule la masa de ^{235}U consumida cada día.

40.44 *a*) ¿Cuál es la energía liberada en la reacción de fusión ${}^{2}_{1}\text{H} + {}^{2}_{1}\text{H} \rightarrow {}^{4}_{2}\text{He} + Q$?

b) Los océanos tienen una masa total de agua de $1.50 \cdot 10^{16}$ kg, y 0.0300% de esta cantidad es deuterio, ${}^{2}_{1}\text{H}$. Si todo el deuterio en el océano se fuera a fusionar por una fusión controlada hacia ${}^{4}_{2}\text{He}$, ¿cuántos joules de energía serían liberados?

c) El consumo de potencia en el mundo es de alrededor de $1.00 \cdot 10^{13}$ W. Si el consumo se quedara constante y todos los

problemas que surgen del consumo de agua de los océanos (incluyendo aquellos políticos, meteorológicos y de naturaleza ecológica) se pudieran evitar, ¿cuántos años duraría la energía calculada en la parte *b*)?

40.45 El Sol irradia energía a razón de $3.85 \cdot 10^{26}$ W.

a) ¿A qué rapidez, en kg/s, se convierte la masa del Sol en energía?

b) ¿Por qué es este resultado diferente de la razón calculada en el ejemplo 40.6, $6.02 \cdot 10^{11}$ kg de protones convertidos en helio cada segundo?

c) Asumiendo que la masa actual del Sol es de $1.99 \cdot 10^{30}$ kg y que irradia a la misma razón en su vida entera de $4.50 \cdot 10^{9}$ años, ¿qué porcentaje de la masa del Sol se convirtió en energía durante toda su vida?

40.46 Considere la siguiente reacción de fusión, la cual permite a las estrellas producir elementos progresivamente más pesados: ${}^{3}_{2}\mathrm{He} + {}^{4}_{2}\mathrm{He} \rightarrow {}^{7}_{4}\mathrm{Be} + \gamma$. La masa de ${}^{3}_{2}\mathrm{He}$ es 3.016029 u, la masa de ${}^{4}_{2}\mathrm{He}$ es de 4.002603 u y la masa de ${}^{7}_{4}\mathrm{Be}$ es de 7.0169298 u. La unidad de masa atómica es $u = 1.66 \cdot 10^{-27}$ kg. Asumiendo que el átomo Be está en reposo después de la reacción y despreciando cualquier energía potencial entre los átomos y la energía cinética del núcleo de He, calcule la energía mínima posible y la máxima longitud de onda posible del fotón γ que se está liberando en esta reacción.

•**40.47** Estime la temperatura que se necesitaría para hacer que la reacción de fusión ${}^{3}_{2}\mathrm{He} + {}^{3}_{2}\mathrm{He} \rightarrow {}^{4}_{2}\mathrm{He} + p + p$ se inicie.

•**40.48** Considere un proceso de fisión hipotético donde un núcleo ${}^{120}_{52}\mathrm{Te}$ se divide en dos núcleos idénticos ${}^{60}_{26}\mathrm{Fe}$ sin producir ninguna otra partícula de radiación. La masa de ${}^{120}_{52}\mathrm{Te}$ es 119.904040 u y la masa de ${}^{60}_{26}\mathrm{Fe}$ es 59.934078 u. El momento en que los dos núcleos Fe se forman, pero antes de que se empiecen a mover lejos debido a la repulsión de Coulomb, ¿qué tan lejos están los dos núcleos Fe uno del otro?

•**40.49** El *exceso de masa* de un núcleo está definido como la diferencia entre la masa atómica (en unidades de masa atómica, u) y el número másico del núcleo, *A*. Usando la conversión de masa-energía 1 u = 931.49 MeV/c^2, este exceso de masa es usualmente expresado en unidades de keV. La siguiente tabla presenta los excesos de masa de varios nucleidos (por la base de datos *NuBase* del Berkeley National Lab):

Núm.	Nucleido	Número másico *A*	Exceso de masa Δm (keV/c^2)	Masa atómica (u)
1	${}^{1}_{0}n$	1	8 071.3	1.00866491
2	${}^{252}_{98}\mathrm{Cf}$	252	76 034	
3	${}^{256}_{100}\mathrm{Fm}$	256	85 496	
4	${}^{140}_{56}\mathrm{Ba}$	140	−83 271	
5	${}^{140}_{54}\mathrm{Xe}$	140	−72 990	
6	${}^{112}_{46}\mathrm{Pd}$	112	−86 336	
7	${}^{109}_{42}\mathrm{Mo}$	109	−67 250	

a) Calcule la masa atómica (en unidades de masa atómica) para cada uno de los elementos de la tabla. Para referencia, la masa del átomo del neutrón está incluida.

b) Usando sus resultados en *a*), determine la diferencia de masa-energía entre los estados inicial y final para las siguientes posibles reacciones: ${}^{252}_{98}\mathrm{Cf} \rightarrow {}^{140}_{56}\mathrm{Ba} + {}^{109}_{42}\mathrm{Mo} + 3n$ y ${}^{256}_{100}\mathrm{Fm} \xrightarrow{\mathrm{sf}} {}^{140}_{54}\mathrm{Xe} + {}^{112}_{46}\mathrm{Pd} + 4n$

c) ¿Ocurrirán estas reacciones de manera espontánea?

Sección 40.5

40.50 Las estrellas de neutrones son algunas veces nada más núcleos atómicos grandes (pero con muchos más neutrones). Asumiendo que una estrella de neutrones es tan densa como un núcleo atómico, estime el número de nucleones en la estrella para una estrella de 10.0 km de diámetro.

40.51 ¿Cuál es el promedio de energía cinética de los protones en el centro de la estrella cuando la temperatura es de $1.00 \cdot 10^{7}$ K? ¿Cuál es la velocidad media de estos protones?

•**40.52** Hace miles de millones de años, nuestro sistema solar fue creado de los remanentes de explosiones de estrellas. Los científicos nucleares creen que dos isótopos de uranio, ${}^{235}\mathrm{U}$ y ${}^{238}\mathrm{U}$, fueron creados en cantidades iguales en el momento de la explosión estelar. Sin embargo, hoy en día 99.28% del uranio es en forma de ${}^{238}\mathrm{U}$ y solamente 0.72% está en la forma de ${}^{235}\mathrm{U}$. Asumiendo un modelo simplificado en el cual toda la materia del sistema solar se originó en una sola estrella que explotó, estime el tiempo aproximado de esta explosión.

Sección 40.6

40.53 A las 9:30 a.m., se inyectará a un paciente una droga que contiene ${}^{99}_{43}\mathrm{Tc}$ ($t_{1/2}$ = 6.05 h) con una actividad de 1.50 μCi. Usted debe preparar la muestra 2.50 horas antes de la inyección (a las 7:00 a.m.). ¿Qué actividad debe tener la droga al tiempo de su preparación (7:00 a.m.)?

40.54 Considere un fotón de 42.58 MHz que necesita producir una transición NMR en protones libres en un campo magnético de 1.000 T. ¿Cuál es la longitud de onda del fotón, su energía y la región del espectro en el cual se encuentra? ¿Podría ser dañino para el cuerpo humano?

40.55 El isótopo de radón ${}^{222}\mathrm{Rn}$, el cual tiene una vida media de 3.825 días, es usado para propósitos médicos como la radioterapia. ¿Cuánto tiempo le toma hasta que el ${}^{222}\mathrm{Rn}$ decae al 10.00% de su cantidad inicial?

40.56 La terapia de radiación es una de las modalidades del tratamiento contra el cáncer. Basados en la masa aproximada del tumor, los oncólogos pueden calcular la dosis de radiación necesaria para tratar a los pacientes. Suponga que tiene un tumor de 50.0 g y necesita recibir 0.180 J de energía para matar las células cancerígenas. ¿Cuántos rad (dosis de absorción de radiación) debería recibir el paciente?

Problemas adicionales

40.57 El núcleo del sodio 22 (${}^{22}_{11}\mathrm{Na}$) tiene una masa de 21.994435 u. ¿Cuánto trabajo sería necesario hacer para separar este núcleo por completo en sus piezas constituyentes (protones y neutrones)?

40.58 Un contador Geiger graba inicialmente 7 210 conteos por segundo. Después de 45 min graba 4 585 conteos/s. Ignore

cualquier incertidumbre en los conteos y encuentre la vida media del material.

40.59 ¿Qué tan cercana puede estar una partícula alfa de 5.00 MeV del núcleo de uranio 238, asumiendo que la única interacción es la de Coulomb?

40.60 ^{239}Pu decae a una vida media de 24 100 años emitiendo una partícula alfa de 5.25 MeV. Si usted tiene una muestra esférica de 1.00 kg de ^{239}Pu, encuentre la actividad inicial en Bq.

40.61 La actividad de una muestra de ^{210}Bi (con una vida media de 5.01 días) fue medida como 1.000 μCi. ¿Cuál es la actividad de esta muestra después de 1 año?

40.62 Asumiendo que el carbón es hasta 14% de la masa del cuerpo humano, calcule la actividad de una persona de 75 kg considerando únicamente el decaimiento beta del carbono 14.

40.63 ^{8}Li es un isótopo que tiene un tiempo de vida de menos de un segundo. Su masa es 8.022485 u. Calcule su energía de enlace en MeV.

40.64 ¿Cuál es la energía total liberada en el decaimiento $n \rightarrow p + e^- + \overline{\nu}_e$?

40.65 Un galón de gasolina regular (densidad de 737 kg/m^3) contiene cerca de 131 MJ de energía química. ¿Cuánta energía es contenida en la masa en reposo de este galón?

40.66 10^{30} átomos de una muestra radiactiva quedan después de 10 vidas medias. ¿Cuántos más átomos quedarán después de 20 vidas medias?

40.67 Calcule la energía de enlace por nucleón de

a) $^{4}_{2}$He (4.002603 u).
b) $^{3}_{2}$He (3.016030 u).
c) $^{3}_{1}$H (3.016050 u).
d) $^{2}_{1}$H (2.014102 u).

40.68 La constante de tiempo de un núcleo radiactivo es 4 300 s. ¿Cuál es su ciclo de vida?

40.69 ^{214}Pb tiene una vida media de 26.8 min. ¿Cuántos minutos deben pasar para que el 90.0% de una muestra dada de átomos de ^{214}Pb se desintegren?

•**40.70** Un fragmento de 10.0 g de carbón debe ser datado carbónicamente. Las medidas muestran que el ^{14}C tiene una actividad de 100. decaimientos/min. Indique la edad del árbol del cual proviene este carbón.

•**40.71** Después de que un árbol ha sido talado y quemado para producir ceniza, los isótopos de carbón en la ceniza se encuentran en una proporción de ^{14}C a ^{12}C de $1.300 \cdot 10^{-12}$. Pruebas experimentales en los átomos del ^{14}C revelan que ^{14}C es un emisor beta con una vida media de 5 730 años. En una excavación arqueológica, se encuentra un esqueleto cerca de una fogata con un poco de ceniza de madera. Si 50.0 g de carbón de esa ceniza en la fogata emite betas a una razón de 20.0 por h, ¿qué tan vieja es la fogata?

•**40.72** Si su masa es de 70.0 kg y usted tiene un tiempo de vida de tres puntos y diez (70.0 años), ¿cuántos decaimientos de protones esperaría usted tener en su cuerpo durante su vida (asuma que su cuerpo está enteramente compuesto por agua)? Use una vida media de $1.00 \cdot 10^{30}$ años.

•**40.73** Usted ha desarrollado una gran teoría unificada que predice las siguientes cosas acerca del decaimiento del protón: 1) los protones nunca envejecen, en el sentido de que su probabilidad de decaimiento por unidad de tiempo nunca cambia, y 2) la mitad de los protones en cualquier colección de protones dada decae en $1.80 \cdot 10^{29}$ años. A usted le dan instalaciones experimentales para probar su teoría: un tanque que contiene $1.00 \cdot 10^{4}$ toneladas de agua y sensores para grabar los decaimientos de protón. A usted se le permitirá el acceso a esta instalación por dos años. ¿Cuántos decaimientos de protón ocurrirán en este periodo si su teoría es correcta?

•**40.74** La frecuencia de precesión de los protones en un espectrómetro de laboratorio NMR es 15.35850 MHz. El momento magnético del protón es $1.410608 \cdot 10^{-26}$ J/T, mientras su cantidad de movimiento angular de espín es $0.5272863 \cdot 10^{-34}$ J s. Calcule la magnitud del campo magnético en el cual los protones están inmersos.

•**40.75** Dos especies de núcleos radiactivos, A y B, cada uno con una población inicial N_0, empiezan a decaer. Después de un tiempo de 100. s se observa que $N_A = 100\ N_B$. Si $\tau_A = 2\tau_B$, encuentre el valor de τ_B.

••**40.76** El isótopo más común del uranio, $^{238}_{92}$U, produce radón $^{222}_{86}$Rn a través de la siguiente secuencia de decaimientos:

$$^{238}_{92}\mathrm{U} \rightarrow {}^{234}_{90}\mathrm{Th} + \alpha,\ {}^{234}_{90}\mathrm{Th} \rightarrow {}^{234}_{91}\mathrm{Pa} + \beta^- + \overline{\nu}_e,$$
$$^{234}_{91}\mathrm{Pa} \rightarrow {}^{234}_{92}\mathrm{U} + \beta^- + \overline{\nu}_e,\ {}^{234}_{92}\mathrm{U} \rightarrow {}^{230}_{90}\mathrm{Th} + \alpha,$$
$$^{230}_{90}\mathrm{Th} \rightarrow {}^{226}_{88}\mathrm{Ra} + \alpha,\ {}^{226}_{88}\mathrm{Ra} \rightarrow {}^{222}_{86}\mathrm{Rn} + \alpha.$$

Una muestra de $^{238}_{92}$U acumulará las concentraciones de equilibrio de los núcleos hijo hasta $^{226}_{88}$Ra; las concentraciones de cada uno son tales, que cada hijo es producido tan rápido como decae. El $^{226}_{88}$Ra decae a $^{222}_{86}$Rn, el cual escapa como un gas. (Las partículas α también escapan, como helio; ésta es una gran fuente del helio que encontramos en la Tierra.) En altas concentraciones, el radón es un peligro para la salud en edificios construidos sobre tierra o cimentaciones que contienen minerales de uranio, puesto que puede ser inhalado.

a) Busque los datos necesarios y calcule la razón a la cual 1.00 kg de una mezcla equilibrada de $^{238}_{92}$U y sus primeros cinco hijos producen $^{222}_{86}$Rn (masa por unidad de tiempo).

b) ¿Qué actividad (en curies por unidad de tiempo) de radón representa esto?

Apéndice A

Matemáticas Primer

1. Álgebra A-1
1.1 Lo básico A-1
1.2 Exponentes A-2
1.3 Logaritmos A-2
1.4 Ecuaciones lineales A-3
2. Geometría A-3
2.1 Formas geométricas en dos dimensiones A-3
2.2 Formas geométricas en tres dimensiones A-3
3. Trigonometría A-3
3.1 Triángulos rectángulos A-3
3.2 Triángulos generales A-5
4. Cálculo A-6
4.1 Derivadas A-6
4.2 Integrales A-6
5. Números complejos A-7
Ejemplo A.1 Conjunto de Mandelbrot A-8

Notación:

Las letras a, b, c, x y y representan números reales.

Las letras i, j, m y n representan números enteros.

Las letras griegas α, β y γ representan ángulos, que se miden en radianes.

1. Álgebra

1.1 Lo básico

Factores:

$$ax + bx + cx = (a + b + c)x \tag{A.1}$$

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \tag{A.2}$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \tag{A.3}$$

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2 \tag{A.4}$$

Ecuación cuadrática:
Una ecuación de la forma:

$$ax^2 + bx + c = 0 \tag{A.5}$$

Para valores dados de a, b y c tiene las dos soluciones:

$$x = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

y (A.6)

$$x = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Las soluciones de esta ecuación cuadrática se denominan *raíces*. Las raíces son los números reales si $b^2 \geq 4ac$.

1.2 Exponentes

Si a es un número real, a^n es el producto de a por sí mismo n veces:

$$a^n = \underbrace{a \times a \times a \times \cdots \times a}_{n \text{ factores}} \tag{A.7}$$

El número n se denomina *exponente*. No obstante, un exponente no tiene que ser un número positivo o un entero. Cualquier número real x puede usarse como exponente.

$$a^{-x} = \frac{1}{a^x} \tag{A.8}$$

$$a^0 = 1 \tag{A.9}$$

$$a^1 = a \tag{A.10}$$

Raíces:

$$a^{1/2} = \sqrt{a} \tag{A.11}$$

$$a^{1/n} = \sqrt[n]{a} \tag{A.12}$$

Multiplicación y división:

$$a^x a^y = a^{x+y} \tag{A.13}$$

$$\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y} \tag{A.14}$$

$$\left(a^x\right)^y = a^{xy} \tag{A.15}$$

1.3 Logaritmos

El logaritmo es la función inversa de la función exponencial de la sección previa:

$$y = a^x \Leftrightarrow x = \log_a y \tag{A.16}$$

La notación $\log_a y$ indica el logaritmo de y con respecto a la base a. Puesto que las funciones exponencial y logaritmo son inversas entre sí, también podemos escribir la identidad como:

$$x = \log_a(a^x) = a^{\log_a x} \qquad \text{(para cualquier base } a\text{)} \tag{A.17}$$

Las dos bases de uso más común son la base 10, la base de los logaritmos comunes, y la base e, la base de los logaritmos naturales. El valor numérico de e es

$$e = 2.718281828\ldots \tag{A.18}$$

Base 10:

$$y = 10^x \Leftrightarrow x = \log_{10} y \tag{A.19}$$

Base e:

$$y = e^x \Leftrightarrow x = \ln y \tag{A.20}$$

El libro sigue la convención de usar ln para indicar el logaritmo con respecto a la base e.

Las reglas para calcular con logaritmos se concluyen a partir de las reglas para calcular con exponentes:

$$\log(ab) = \log a + \log b \tag{A.21}$$

$$\log\left(\frac{a}{b}\right) = \log a - \log b \tag{A.22}$$

$$\log(a^x) = x \log a \tag{A.23}$$

$$\log 1 = 0 \tag{A.24}$$

Puesto que estas reglas son válidas para cualquier base, se ha omitido el subíndice que indica la base.

1.4 Ecuaciones lineales

La forma general de una ecuación lineal es

$$y = ax + b \tag{A.25}$$

donde a y b son constantes. La gráfica de y contra x es una línea recta; la pendiente de esta recta es a, y b es la ordenada al origen. Vea la figura A.1.

La pendiente de la recta puede calcularse al escribir dos valores diferentes, x_1 y x_2, en la ecuación de la recta y calcular los valores resultantes, y_1 y y_2:

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x} \tag{A.26}$$

Si $a = 0$, entonces la recta es horizontal: si $a > 0$, entonces la recta crece cuando x crece, como muestra el ejemplo de la figura A.1; si $a < 0$, entonces la recta cae cuando x crece.

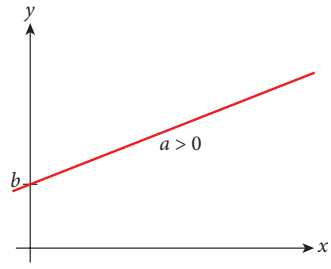
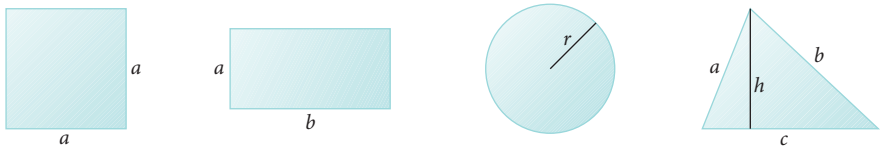


FIGURA A.1 Representación grafica de una ecuación lineal.

2. Geometría

2.1 Formas geométricas en dos dimensiones

La figura A.2 enumera el área, A, y la longitud del perímetro o circunferencia, C, de objetos bidimensionales comunes.

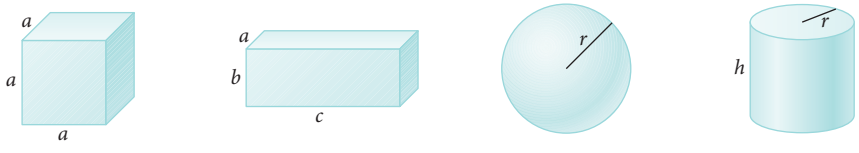


Cuadrado	Rectángulo	Círculo	Triángulo
$A = a^2$	$A = ab$	$A = \pi r^2$	$A = \frac{1}{2}ch$
$C = 4a$	$C = 2(a + b)$	$C = 2\pi r$	$C = a + b + c$

FIGURA A.2 Área, A, y longitud del perímetro, C, del cuadrado, rectángulo, círculo y triángulo.

2.2 Formas geométricas en tres dimensiones

La figura A.3 muestra el volumen, V, y el área superficial, A, de objetos tridimensionales comunes.



Cubo	Rectángulo	Esfera	Cilindro
$V = a^3$	$V = abc$	$V = \frac{4}{3}\pi r^3$	$V = \pi r^2 h$
$A = 6a^2$	$A = 2(ab + ac + bc)$	$A = 4\pi r^2$	$A = 2\pi r^2 + 2\pi rh$

FIGURA A.3 Volumen, V, y área superficial, A, de objetos tridimensionales comunes.

3. Trigonometría

Resulta importante observar que a partir de ahora todos los ángulos deben medirse en radianes.

3.1 Triángulos rectángulos

Un triángulo rectángulo es un triángulo que contiene un ángulo recto; es decir, un ángulo que mide exactamente 90° ($\pi/2$ rad) (indicado por el pequeño cuadrado en la figura A.4). La hipotenusa es el lado opuesto al ángulo de 90°. Por convención, la hipotenusa se indica con la letra c.

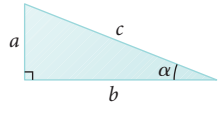


FIGURA A.4 Definición de las longitudes de los lados, a, b, c y los ángulos del triángulo rectángulo.

Teorema de Pitágoras:

$$a^2 + b^2 = c^2 \tag{A.27}$$

Definición de las funciones trigonométricas (vea la figura A.5):

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{a}{c} = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} \tag{A.28}$$

$$\cos\alpha = \frac{b}{c} = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}} \tag{A.29}$$

$$\tan\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} = \frac{a}{b} \tag{A.30}$$

$$\cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{1}{\tan\alpha} = \frac{b}{a} \tag{A.31}$$

$$\csc\alpha = \frac{1}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{c}{a} \tag{A.32}$$

$$\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha} = \frac{c}{b} \tag{A.33}$$

Las funciones trigonométricas inversas (en este libro se usa la notación sen^{-1}, $\cos^{-1}$, etcétera):

$$\operatorname{sen}^{-1}\frac{a}{c} \equiv \operatorname{arcsen}\frac{a}{c} = \alpha \tag{A.34}$$

$$\cos^{-1}\frac{b}{c} \equiv \arccos\frac{b}{c} = \alpha \tag{A.35}$$

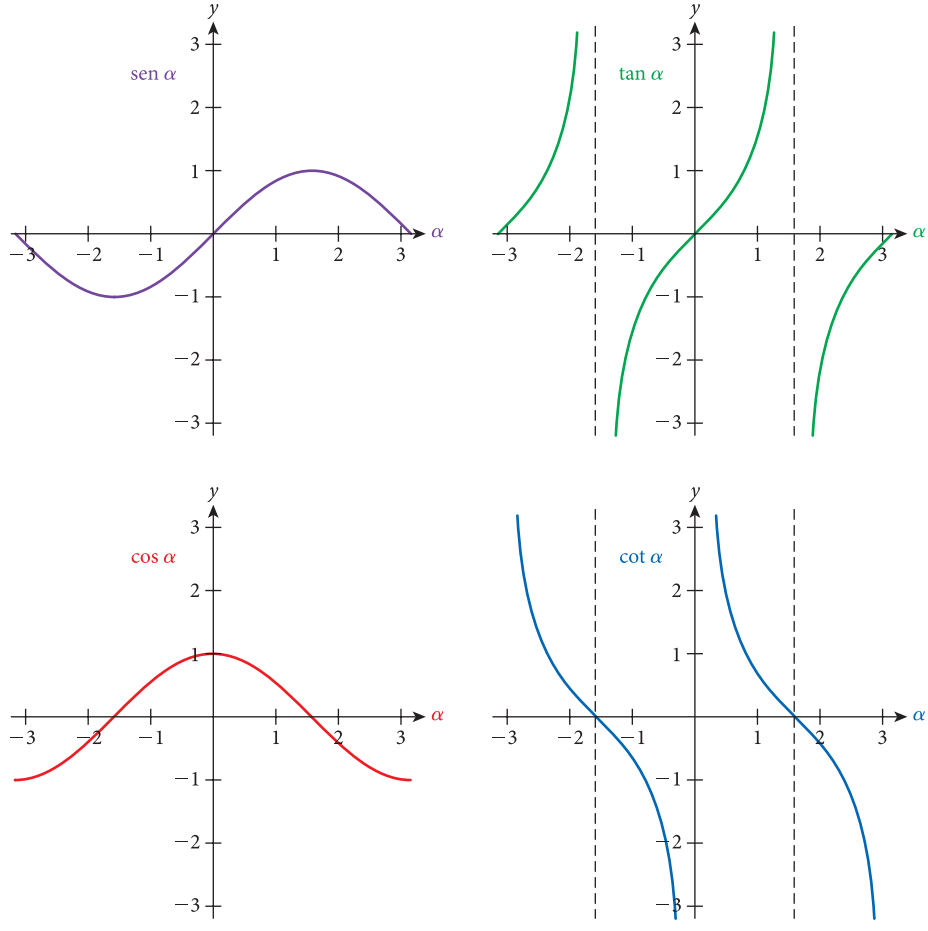


FIGURA A.5 Las funciones trigonométricas sen, cos, tan y cot.

$$\tan^{-1}\frac{a}{b} \equiv \arctan\frac{a}{b} = \alpha \tag{A.36}$$

$$\cot^{-1}\frac{b}{a} \equiv \operatorname{arccot}\frac{b}{a} = \alpha \tag{A.37}$$

$$\csc^{-1}\frac{c}{a} \equiv \operatorname{arccsc}\frac{c}{a} = \alpha \tag{A.38}$$

$$\sec^{-1}\frac{c}{b} \equiv \operatorname{arcsec}\frac{c}{b} = \alpha \tag{A.39}$$

Todas las funciones trigonométricas son periódicas:

$$\operatorname{sen}(\alpha + 2\pi) = \operatorname{sen}\alpha \tag{A.40}$$

$$\cos(\alpha + 2\pi) = \cos\alpha \tag{A.41}$$

$$\tan(\alpha + \pi) = \tan\alpha \tag{A.42}$$

$$\cot(\alpha + \pi) = \cot\alpha \tag{A.43}$$

Otras relaciones entre funciones trigonométricas:

$$\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \tag{A.44}$$

$$\operatorname{sen}(-\alpha) = -\operatorname{sen}\alpha \tag{A.45}$$

$$\cos(-\alpha) = \cos\alpha \tag{A.46}$$

$$\operatorname{sen}(\alpha \pm \pi/2) = \pm\cos\alpha \tag{A.47}$$

$$\operatorname{sen}(\alpha \pm \pi) = -\operatorname{sen}\alpha \tag{A.48}$$

$$\cos(\alpha \pm \pi/2) = \mp\operatorname{sen}\alpha \tag{A.49}$$

$$\cos(\alpha \pm \pi) = -\cos\alpha \tag{A.50}$$

Fórmulas de suma:

$$\operatorname{sen}(\alpha \pm \beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\ \operatorname{sen}\beta \tag{A.51}$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \operatorname{sen}\alpha\ \operatorname{sen}\beta \tag{A.52}$$

Aproximación de ángulo pequeño:

$$\operatorname{sen}\alpha \approx \alpha - \tfrac{1}{6}\alpha^3 + \cdots \qquad (\text{para } |\alpha| \ll 1) \tag{A.53}$$

$$\cos\alpha \approx 1 - \tfrac{1}{2}\alpha^2 + \cdots \qquad (\text{para } |\alpha| \ll 1) \tag{A.54}$$

Para ángulos pequeños, para $|\alpha| \ll 1$, a menudo es aceptable usar las aproximaciones de ángulos pequeños $\cos\alpha = 1$ y $\operatorname{sen}\alpha = \tan\alpha = \alpha$.

3.2 Triángulos generales

La suma de los tres ángulos de cualquier triángulo es π radianes (vea la figura A.6):

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi \tag{A.55}$$

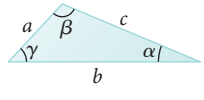


FIGURA A.6 Definición de los lados y ángulos de un triángulo general.

Ley de los cosenos:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma \tag{A.56}$$

(Ésta es una generalización del teorema de Pitágoras para el caso en que el ángulo γ tenga un valor distinto de 90°, o $\pi/2$ rads.)

Ley de los senos:

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha}{a} = \frac{\operatorname{sen}\beta}{b} = \frac{\operatorname{sen}\gamma}{c} \tag{A.57}$$

4. Cálculo

4.1 Derivadas

Polinomios:

$$\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1} \tag{A.58}$$

Funciones trigonométricas:

$$\frac{d}{dx}\operatorname{sen}(ax) = a\cos(ax) \tag{A.59}$$

$$\frac{d}{dx}\cos(ax) = -a\operatorname{sen}(ax) \tag{A.60}$$

$$\frac{d}{dx}\tan(ax) = \frac{a}{\cos^2(ax)} \tag{A.61}$$

$$\frac{d}{dx}\cot(ax) = -\frac{a}{\operatorname{sen}^2(ax)} \tag{A.62}$$

Exponenciales y logaritmos:

$$\frac{d}{dx}e^{ax} = ae^{ax} \tag{A.63}$$

$$\frac{d}{dx}\ln(ax) = \frac{1}{x} \tag{A.64}$$

$$\frac{d}{dx}a^x = a^x \ln a \tag{A.65}$$

Regla del producto:

$$\frac{d}{dx}\big(f(x)g(x)\big) = \left(\frac{df(x)}{dx}\right)g(x) + f(x)\left(\frac{dg(x)}{dx}\right) \tag{A.66}$$

Regla de la cadena:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} \tag{A.67}$$

4.2 Integrales

Todas las integrales indefinidas tienen una constante de integración, c.
Polinomiales:

$$\int x^n dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + c \qquad (\text{para } n \neq -1) \tag{A.68}$$

$$\int x^{-1}dx = \ln|x| + c \tag{A.69}$$

$$\int \frac{1}{a^2+x^2}dx = \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a} + c \tag{A.70}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}dx = \ln\left|x + \sqrt{a^2+x^2}\right| + c \tag{A.71}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx = \operatorname{sen}^{-1}\frac{x}{|a|} + c \equiv \tan^{-1}\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}} + c \tag{A.72}$$

$$\int \frac{1}{\left(a^2+x^2\right)^{3/2}}dx = \frac{1}{a^2}\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}} + c \tag{A.73}$$

$$\int \frac{x}{\left(a^2+x^2\right)^{3/2}}dx = -\frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}+c \tag{A.74}$$

Funciones trigonométricas:

$$\int \operatorname{sen}(ax)dx = -\frac{1}{a}\cos(ax)+c \tag{A.75}$$

$$\int \cos(ax)dx = \frac{1}{a}\operatorname{sen}(ax)+c \tag{A.76}$$

Exponenciales:

$$\int e^{ax}dx = \frac{1}{a}e^{ax}+c \tag{A.77}$$

5. Números complejos

Todos conocemos los números reales, que pueden disponerse a lo largo de una recta numérica en orden creciente, desde $-\infty$ hasta $+\infty$. Estos números reales están incrustados en un conjunto mucho mayor de números denominados *números complejos*. Los números complejos se definen en términos de su parte real y su parte imaginaria. El espacio de números complejos es un plano, en el cual los números reales constituyen un eje, identificado por $\Re(z)$ en la figura A.7. La parte imaginaria constituye el otro eje, identificado por $\Im(z)$ en la figura A.7. (Suele acostumbrarse usar las antiguas letras mayúsculas alemanas R e I para representar las partes real e imaginaria de los números complejos.)

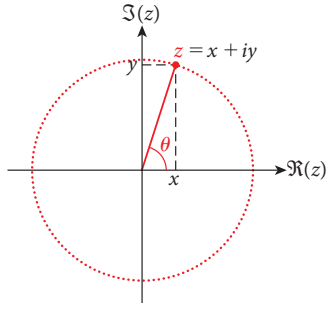


FIGURA A.7 El plano complejo. El eje horizontal se forma con la parte real de los números complejos y el eje vertical, con la parte imaginaria.

Un número complejo z se define en términos de su parte real, x, su parte imaginaria, y, y la constante de Euler, i:

$$z = x+iy \tag{A.78}$$

La constante de Euler se define como:

$$i^2 = -1 \tag{A.79}$$

Tanto la parte real, $x = \Re(z)$, como la parte imaginaria, $y = \Im(z)$, de un número complejo son números reales. La suma, la resta, la multiplicación y la división de números complejos se definen en analogía con las mismas operaciones para números reales, con $i^2 = -1$:

$$(a+ib)+(c+id) = (a+c)+i(b+d) \tag{A.80}$$

$$(a+ib)-(c+id) = (a-c)+i(b-d) \tag{A.81}$$

$$(a+ib)(c+id) = (ac-bd)+i(ad+bc) \tag{A.82}$$

$$\frac{a+ib}{c+id} = \frac{(cd+bd)+i(bc-ad)}{c^2+d^2}. \tag{A.83}$$

Para todo número complejo z existe un conjugado complejo, z^*, que tiene la misma parte real, pero la parte imaginaria tiene signo opuesto:

$$z = x+iy \Leftrightarrow z^* = x-iy \tag{A.84}$$

Podemos expresar las partes real e imaginaria de un número complejo en términos del número y su conjugado complejo:

$$\Re(z) = \tfrac{1}{2}(z+z^*) \tag{A.85}$$

$$\Im(z) = \tfrac{1}{2}i(z^*-z). \tag{A.86}$$

Justo como con un vector bidimensional, un número complejo $z = x + iy$, tiene la magnitud $|z|$ así como un ángulo θ con respecto al eje de los números reales positivos, como indica la figura A.7:

$$|z|^2 = zz^* \tag{A.87}$$

$$\theta = \tan^{-1}\frac{\Im(z)}{\Re(z)} = \tan^{-1}\frac{i(z^* - z)}{(z^* + z)} \tag{A.88}$$

Por lo tanto, podemos escribir el número complejo $z = x + iy$ en términos de la magnitud y el "ángulo de fase":

$$z = |z|(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta) \tag{A.89}$$

Una identidad interesante y más útil es la *fórmula de Euler*:

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta \tag{A.90}$$

Con ayuda de esta identidad podemos escribir, para cualquier número complejo, z,

$$z = |z|e^{i\theta} \tag{A.91}$$

Así, podemos elevar cualquier número complejo a cualquier potencia n:

$$z^n = |z|^n e^{in\theta} \tag{A.92}$$

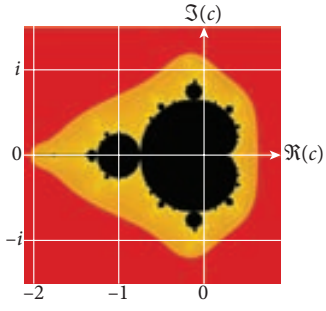


FIGURA A.8 Conjunto de Mandelbrot en el plano complejo.

EJEMPLO A.1 Conjunto de Mandelbrot

Podemos hacer buen uso de nuestro conocimiento de los números complejos y su multiplicación al examinar el *conjunto de Mandelbrot*, definido como el conjunto de todos los puntos c en el plano complejo para el cual la serie de iteraciones

$$z_{n+1} = z_n^2 + c, \qquad \text{con } z_0 = c$$

no se va a infinito; es decir, para los cuales $|z_n|$ permanece finito para todas las iteraciones.

Esta prescripción de iteraciones es aparentemente simple. Por ejemplo, podemos ver que cualquier número para el cual $|c| > 2$ no puede pertenecer al conjunto de Mandelbrot. No obstante, si graficamos los puntos del conjunto de Mandelbrot en el plano complejo, surge un objeto excepcionalmente hermoso. En la figura A.8, los puntos negros forman parte del conjunto de Mandelbrot, y los puntos restantes están codificados según su color para indicar cuán rápido z_n se van al infinito.

Apéndice B

Masas de isótopos, energías de enlace y vidas medias

Sólo se enumeran isótopos cuya vida media es mayor que 1.

Z	*N*	Sím	*m* (uma)	*B* (MeV)	Espín	%	τ(s)
1	0	H	1.007825032	0.000	1/2+	99.985	estable
1	1	H	2.014101778	1.112	1+	0.0115	estable
1	2	H	3.016049278	2.827	1/2+		3.89E+08
2	1	He	3.016029319	2.573	1/2+	0.0001	estable
2	2	He	4.002603254	7.074	0+	100	estable
3	3	Li	6.0151223	5.332	1+	7.5	estable
3	4	Li	7.0160040	5.606	3/2–	92.41	estable
4	3	Be	7.0169292	5.371	3/2–		4.59E+06
4	5	Be	9.0121821	6.463	3/2–	100	estable
4	6	Be	10.0135337	6.498	0+		4.76E+13
5	5	B	10.01293699	6.475	3+	19.9	estable
5	6	B	11.00930541	6.928	3/2–	80.1	estable
6	6	C	12	7.680	0+	98.89	estable
6	7	C	13.00335484	7.470	1/2–	1.11	estable
6	8	C	14.0032420	7.520	0+		1.81E+11
7	7	N	14.003074	7.476	1+	99.632	estable
7	8	N	15.0001089	7.699	1/2–	0.368	estable
8	8	O	15.99491463	7.976	0+	99.757	estable
8	9	O	16.999131	7.751	5/2+	0.038	estable
8	10	O	17.999163	7.767	0+	0.205	estable
9	9	F	18.0009377	7.632	1+		6.59E+03
9	10	F	18.99840322	7.779	1/2+	100	estable
10	10	Ne	19.99244018	8.032	0+	90.48	estable
10	11	Ne	20.99384668	7.972	3/2+	0.27	estable
10	12	Ne	21.9913855	8.080	0+	9.25	estable
11	11	Na	21.9944368	7.916	3+		8.21E+07
11	12	Na	22.9897697	8.111	3/2+	100	estable
11	13	Na	23.9909633	8.063	4+		5.39E+04
12	12	Mg	23.9850419	8.261	0+	78.99	estable
12	13	Mg	24.9858370	8.223	5/2+	10	estable
12	14	Mg	25.9825930	8.334	0+	11.01	estable
12	16	Mg	27.9838767	8.272	0+		7.53E+04
13	13	Al	25.98689169	8.150	5+		2.33E+13
13	14	Al	26.9815384	8.332	5/2+	100	estable
14	14	Si	27.97692653	8.448	0+	92.23	estable
14	15	Si	28.9764947	8.449	1/2+	4.6832	estable
14	16	Si	29.9737702	8.521	0+	3.0872	estable
14	17	Si	30.97536323	8.458	3/2+		9.44E+03
14	18	Si	31.97414808	8.482	0+		5.42E+09
15	16	P	30.9737615	8.481	1/2+	100	estable
15	17	P	31.9739072	8.464	1+		1.23E+06
15	18	P	32.9717253	8.514	1/2+		2.19E+06
16	16	S	31.9720707	8.493	0+	94.93	estable
16	17	S	32.97145876	8.498	3/2+	0.76	estable
16	18	S	33.9678668	8.583	0+	4.29	estable
16	19	S	34.9690322	8.538	3/2+		7.56E+06
16	20	S	35.96708076	8.575	0+	0.02	estable
16	22	S	37.9711634	8.449	0+		1.02E+04
17	18	Cl	34.9688527	8.520	3/2+	75.78	estable
17	19	Cl	35.9683069	8.522	2+		9.49E+12
17	20	Cl	36.9659026	8.570	3/2+	24.22	estable
18	18	Ar	35.96754511	8.520	0+	0.3365	estable
18	19	Ar	36.966776	8.527	3/2+		3.02E+06
18	20	Ar	37.96273239	8.614	0+	0.0632	estable
18	21	Ar	38.9643134	8.563	7/2–		8.48E+09
18	22	Ar	39.9623831	8.595	0+	99.6	estable
18	23	Ar	40.9645008	8.534	7/2–		6.56E+03
18	24	Ar	41.963046	8.556	0+		1.04E+09
19	20	K	38.9637069	8.557	3/2+	93.258	estable
19	21	K	39.9639987	8.538	4–	0.0117	4.03E+16
19	22	K	40.9618254	8.576	3/2+	6.7302	estable
19	23	K	41.962403	8.551	2–		4.45E+04
19	24	K	42.960716	8.577	3/2+		8.03E+04
20	20	Ca	39.96259098	8.551	0+	96.941	estable
20	21	Ca	40.9622783	8.547	7/2–		3.25E+12
20	22	Ca	41.9586183	8.617	0+	0.647	estable
20	23	Ca	42.95876663	8.601	7/2–	0.135	estable
20	24	Ca	43.9554811	8.658	0+	2.086	estable
20	25	Ca	44.956186	8.631	7/2–		1.40E+07
20	26	Ca	45.9536928	8.669	0+	0.004	estable
20	27	Ca	46.9545465	8.639	7/2–		3.92E+05
20	28	Ca	47.9525335	8.666	0+	0.187	1.89E+26

(*continúa*)

(*continuación*)

Z	*N*	Sím	*m* (uma)	*B* (MeV)	Espín	%	τ(s)	*Z*	*N*	Sím	*m* (uma)	*B* (MeV)	Espín	%	τ(s)
21	22	Sc	42.9611507	8.531	7/2–		1.40E+04	28	31	Ni	58.9343516	8.737	3/2–		2.40E+12
21	23	Sc	43.9594030	8.557	2+		1.41E+04	28	32	Ni	59.93078637	8.781	0+	26.223	estable
21	24	Sc	44.9559102	8.619	7/2–	100	estable	28	33	Ni	60.93105603	8.765	3/2–	1.1399	estable
21	25	Sc	45.9551703	8.622	4+		7.24E+06	28	34	Ni	61.92834512	8.795	0+	3.6345	estable
21	26	Sc	46.9524080	8.665	7/2–		2.89E+05	28	35	Ni	62.9296729	8.763	1/2–		3.19E+09
21	27	Sc	47.952231	8.656	6+		1.57E+05	28	36	Ni	63.92796596	8.777	0+	0.9256	estable
22	22	Ti	43.9596902	8.533	0+		1.89E+09	28	37	Ni	64.9300880	8.736	5/2–		9.06E+03
22	23	Ti	44.9581243	8.556	7/2–		1.11E+04	28	38	Ni	65.92913933	8.739	0+		1.97E+05
22	24	Ti	45.9526295	8.656	0+	8.25	estable	29	32	Cu	60.9334622	8.715	3/2–		1.20E+04
22	25	Ti	46.9517638	8.661	5/2–	7.44	estable	29	34	Cu	62.92959747	8.752	3/2–	69.17	estable
22	26	Ti	47.9479471	8.723	0+	73.72	estable	29	35	Cu	63.9297679	8.739	1+		4.57E+04
22	27	Ti	48.9478700	8.711	7/2–	5.41	estable	29	36	Cu	64.9277929	8.757	3/2–	30.83	estable
22	28	Ti	49.9447921	8.756	0+	5.18	estable	29	38	Cu	66.9277503	8.737	3/2–		2.23E+05
23	25	V	47.9522545	8.623	4+		1.38E+06	30	32	Zn	61.93432976	8.679	0+		3.31E+04
23	26	V	48.9485161	8.683	7/2–		2.85E+07	30	34	Zn	63.9291466	8.736	0+	48.63	estable
23	27	V	49.9471609	8.696	6+	0.25	4.42E+24	30	35	Zn	64.929245	8.724	5/2–		2.11E+07
23	28	V	50.9439617	8.742	7/2–	99.75	estable	30	36	Zn	65.92603342	8.760	0+	27.9	estable
24	24	Cr	47.95403032	8.572	0+		7.76E+04	30	37	Zn	66.92712730	8.734	5/2–	4.1	estable
24	26	Cr	49.94604462	8.701	0+	4.345	4.10E+25	30	38	Zn	67.92484949	8.756	0+	18.75	estable
24	27	Cr	50.9447718	8.712	7/2–		2.39E+06	30	40	Zn	69.9253193	8.730	0+	0.62	estable
24	28	Cr	51.9405119	8.776	0+	83.789	estable	30	42	Zn	71.926858	8.692	0+		1.68E+05
24	29	Cr	52.9406513	8.760	3/2–	9.501	estable	31	35	Ga	65.93158901	8.669	0+		3.42E+04
24	30	Cr	53.9388804	8.778	0+	2.365	estable	31	36	Ga	66.9282049	8.708	3/2–		2.82E+05
25	27	Mn	51.9455655	8.670	6+		4.83E+05	31	37	Ga	67.92798008	8.701	1+		4.06E+03
25	28	Mn	52.9412947	8.734	7/2–		1.18E+14	31	38	Ga	68.9255736	8.725	3/2–	60.108	estable
25	29	Mn	53.9403589	8.738	3+		2.70E+07	31	40	Ga	70.9247013	8.718	3/2–	39.892	estable
25	30	Mn	54.9380471	8.765	5/2–	100	estable	31	41	Ga	71.9263663	8.687	3–		5.08E+04
25	31	Mn	55.9389094	8.738	3+		9.28E+03	31	42	Ga	72.92517468	8.694	3/2–		1.75E+04
26	26	Fe	51.948114	8.610	0+		2.98E+04	32	34	Ge	65.93384345	8.626	0+		8.14E+03
26	28	Fe	53.9396127	8.736	0+	5.845	estable	32	36	Ge	67.92809424	8.688	0+		2.34E+07
26	29	Fe	54.9382980	8.747	3/2–		8.61E+07	32	37	Ge	68.927972	8.681	5/2–		1.41E+05
26	30	Fe	55.93493748	8.790	0+	91.754	estable	32	38	Ge	69.92424	8.722	0+	20.84	estable
26	31	Fe	56.93539397	8.770	1/2–	2.119	estable	32	39	Ge	70.9249540	8.703	1/2–		9.88E+05
26	32	Fe	57.93327556	8.792	0+	0.282	estable	32	40	Ge	71.92207582	8.732	0+	27.54	estable
26	33	Fe	58.9348880	8.755	3/2–		3.85E+06	32	41	Ge	72.92345895	8.705	9/2+	7.73	estable
26	34	Fe	59.934072	8.756	0+		4.73E+13	32	42	Ge	73.92117777	8.725	0+	36.28	estable
27	28	Co	54.942003	8.670	7/2–		6.31E+04	32	43	Ge	74.92285895	8.696	1/2–		4.97E+03
27	29	Co	55.9398439	8.695	4+		6.68E+06	32	44	Ge	75.92140256	8.705	0+	7.61	estable
27	30	Co	56.936296	8.742	7/2–		2.35E+07	32	45	Ge	76.92354859	8.671	7/2+		4.07E+04
27	31	Co	57.935757	8.739	2+		6.12E+06	32	46	Ge	77.922853	8.672	0+		5.29E+03
27	32	Co	58.93319505	8.768	7/2–	100	estable	33	38	As	70.92711243	8.664	5/2–		2.35E+05
27	33	Co	59.9338222	8.747	5+		1.66E+08	33	39	As	71.92675228	8.660	2–		9.33E+04
27	34	Co	60.9324758	8.756	7/2–		5.94E+03	33	40	As	72.92382484	8.690	3/2–		6.94E+06
28	28	Ni	55.94213202	8.643	0+		5.25E+05	33	41	As	73.92392869	8.680	2–		1.54E+06
28	29	Ni	56.939800	8.671	3/2–		1.28E+05	33	42	As	74.92159648	8.701	3/2–	100	estable
28	30	Ni	57.9353462	8.732	0+	68.077	estable	33	43	As	75.92239402	8.683	2–		9.31E+04

Z	N	Sím	m (uma)	B (MeV)	Espín	%	τ(s)	Z	N	Sím	m (uma)	B (MeV)	Espín	%	τ(s)
33	44	As	76.92064729	8.696	3/2–		1.40E+05	38	50	Sr	87.9056143	8.733	0+	82.58	estable
33	45	As	77.92182728	8.674	2–		5.44E+03	38	51	Sr	88.9074529	8.706	5/2+		4.37E+06
34	38	Se	71.92711235	8.645	0+		7.26E+05	38	52	Sr	89.907738	8.696	0+		9.08E+08
34	39	Se	72.92676535	8.641	9/2+		2.57E+04	38	53	Sr	90.9102031	8.664	5/2+		3.47E+04
34	40	Se	73.92247644	8.688	0+	0.89	estable	38	54	Sr	91.9110299	8.649	0+		9.76E+03
34	41	Se	74.92252337	8.679	5/2+		1.03E+07	39	46	Y	84.91643304	8.628	(1/2)–		9.65E+03
34	42	Se	75.9192141	8.711	0+	9.37	estable	39	47	Y	85.914886	8.638	4–		5.31E+04
34	43	Se	76.91991404	8.695	1/2–	7.63	estable	39	48	Y	86.9108778	8.675	1/2–		2.88E+05
34	44	Se	77.91730909	8.718	0+	23.77	estable	39	49	Y	87.9095034	8.683	4–		9.21E+06
34	45	Se	78.9184998	8.696	7/2+		2.05E+13	39	50	Y	88.9058483	8.714	1/2–	100	estable
34	46	Se	79.9165213	8.711	0+	49.61	estable	39	51	Y	89.90715189	8.693	2–		2.31E+05
34	48	Se	81.9166994	8.693	0+	8.73	2.62E+27	39	52	Y	90.907305	8.685	1/2–		5.06E+06
35	40	Br	74.92577621	8.628	3/2–		5.80E+03	39	53	Y	91.9089468	8.662	2–		1.27E+04
35	41	Br	75.924541	8.636	1–		5.83E+04	39	54	Y	92.909583	8.649	1/2–		3.66E+04
35	42	Br	76.92137908	8.667	3/2–		2.06E+05	40	46	Zr	85.91647359	8.612	0+		5.94E+04
35	44	Br	78.91833709	8.688	3/2–	50.69	estable	40	47	Zr	86.91481625	8.624	(9/2)+		6.05E+03
35	46	Br	80.9162906	8.696	3/2–	49.31	estable	40	48	Zr	87.9102269	8.666	0+		7.21E+06
35	47	Br	81.9168047	8.682	5–		1.27E+05	40	49	Zr	88.908889	8.673	9/2+		2.83E+05
35	48	Br	82.915180	8.693	3/2–		8.64E+03	40	50	Zr	89.9047037	8.710	0+	51.45	estable
36	40	Kr	75.9259483	8.609	0+		5.33E+04	40	51	Zr	90.90564577	8.693	5/2+	11.22	estable
36	41	Kr	76.92467	8.617	5/2+		4.46E+03	40	52	Zr	91.9050401	8.693	0+	17.15	estable
36	42	Kr	77.9203948	8.661	0+	0.35	6.31E+28	40	53	Zr	92.9064756	8.672	5/2+		4.83E+13
36	43	Kr	78.920083	8.657	1/2–		1.26E+05	40	54	Zr	93.90631519	8.667	0+	17.38	estable
36	44	Kr	79.9163790	8.693	0+	2.25	estable	40	55	Zr	94.9080426	8.644	5/2+		5.53E+06
36	45	Kr	80.9165923	8.683	7/2+		7.22E+12	40	56	Zr	95.9082757	8.635	0+	2.8	1.23E+27
36	46	Kr	81.9134836	8.711	0+	11.58	estable	40	57	Zr	96.9109507	8.604	1/2+		6.08E+04
36	47	Kr	82.9141361	8.696	9/2+	11.49	estable	41	48	Nb			(9/2+)		6.84E+03
36	48	Kr	83.911507	8.717	0+	57	estable	41	48	Nb	88.9134955	8.617	(1/2)–		4.25E+03
36	49	Kr	84.9125270	8.699	9/2+		3.40E+08	41	49	Nb	89.911265	8.633	8+		5.26E+04
36	50	Kr	85.91061073	8.712	0+	17.3	estable	41	50	Nb	90.9069905	8.671	9/2+		2.14E+10
36	51	Kr	86.9133543	8.675	5/2+		4.57E+03	41	51	Nb	91.9071924	8.662	7+		1.09E+15
36	52	Kr	87.914447	8.657	0+		1.02E+04	41	52	Nb	92.90637806	8.664	9/2+	100	estable
37	44	Rb	80.918996	8.645	3/2–		1.65E+04	41	53	Nb	93.9072839	8.649	6+		6.40E+11
37	46	Rb	82.915110	8.675	5/2–		7.45E+06	41	54	Nb	94.9068352	8.647	9/2+		3.02E+06
37	47	Rb	83.91438482	8.676	2–		2.83E+06	41	55	Nb	95.9081001	8.629	6+		8.41E+04
37	48	Rb	84.9117893	8.697	5/2–	72.17	estable	41	56	Nb	96.9080971	8.623	9/2+		4.32E+03
37	49	Rb	85.91116742	8.697	2–		1.61E+06	42	48	Mo	89.9139369	8.597	0+		2.04E+04
37	50	Rb	86.9091835	8.711	3/2–	27.83	1.50E+18	42	50	Mo	91.9068105	8.658	0+	14.84	estable
38	42	Sr	79.92452101	8.579	0+		6.38E+03	42	51	Mo	92.90681261	8.651	5/2+		1.26E+11
38	44	Sr	81.918402	8.636	0+		2.21E+06	42	52	Mo	93.9050876	8.662	0+	9.25	estable
38	45	Sr	82.9175567	8.638	7/2+		1.17E+05	42	53	Mo	94.9058415	8.649	5/2+	15.92	estable
38	46	Sr	83.91342528	8.677	0+	0.56	estable	42	54	Mo	95.90467890	8.654	0+	16.68	estable
38	47	Sr	84.9129328	8.676	9/2+		5.60E+06	42	55	Mo	96.90602147	8.635	5/2+	9.55	estable
38	48	Sr	85.9092602	8.708	0+	9.86	estable	42	56	Mo	97.9054078	8.635	0+	24.13	estable
38	49	Sr	86.9088793	8.705	9/2+	7	estable	42	57	Mo	98.90771187	8.608	1/2+		2.37E+05

(*continúa*)

(*continuación*)

Z	*N*	Sím	*m* (uma)	*B* (MeV)	Espín	%	τ(s)	*Z*	*N*	Sím	*m* (uma)	*B* (MeV)	Espín	%	τ(s)
42	58	Mo	99.90747734	8.605	0+	9.63	3.78E+26	48	58	Cd	105.9064594	8.539	0+	1.25	estable
43	50	Tc	92.91024898	8.609	9/2+		9.90E+03	48	59	Cd	106.9066179	8.533	5/2+		2.34E+04
43	51	Tc	93.9096563	8.609	7+		1.76E+04	48	60	Cd	107.9041837	8.550	0+	0.89	estable
43	52	Tc	94.90765708	8.623	9/2+		7.20E+04	48	61	Cd	108.904982	8.539	5/2+		4.00E+07
43	53	Tc	95.907871	8.615	7+		3.70E+05	48	62	Cd	109.9030056	8.551	0+	12.49	estable
43	54	Tc	96.90636536	8.624	9/2+		1.33E+14	48	63	Cd	110.9041781	8.537	1/2+	12.8	estable
43	55	Tc	97.90721597	8.610	(6)+		1.32E+14	48	64	Cd	111.9027578	8.545	0+	24.13	estable
43	56	Tc	98.90625475	8.614	9/2+		6.65E+12	48	65	Cd	112.9044017	8.527	1/2+	12.22	2.93E+23
44	51	Ru	94.91041293	8.587	5/2+		5.91E+03	48	66	Cd	113.9033585	8.532	0+	28.73	estable
44	52	Ru	95.90759784	8.609	0+	5.54	estable	48	67	Cd	114.905431	8.511	1/2+		1.93E+05
44	53	Ru	96.9075547	8.604	5/2+		2.51E+05	48	68	Cd	115.9047558	8.512	0+	7.49	9.15E+26
44	54	Ru	97.90528713	8.620	0+	1.87	estable	48	69	Cd	116.9072186	8.489	1/2+		8.96E+03
44	55	Ru	98.9059393	8.609	5/2+	12.76	estable	49	60	In	108.9071505	8.513	9/2+		1.51E+04
44	56	Ru	99.90421948	8.619	0+	12.6	estable	49	61	In	109.9071653	8.509	7+		1.76E+04
44	57	Ru	100.9055821	8.601	5/2+	17.06	estable	49	62	In	110.90511	8.522	9/2+		2.42E+05
44	58	Ru	101.9043493	8.607	0+	31.55	estable	49	64	In	112.904061	8.523	9/2+	4.29	estable
44	59	Ru	102.9063238	8.584	3/2+		3.39E+06	49	66	In	114.9038785	8.517	9/2+	95.71	1.39E+22
44	60	Ru	103.9054301	8.587	0+	18.62	estable	50	60	Sn	109.9078428	8.496	0+		1.48E+04
44	61	Ru	104.9077503	8.562	3/2+		1.60E+04	50	62	Sn	111.9048208	8.514	0+	0.97	estable
44	62	Ru	105.9073269	8.561	0+		3.23E+07	50	63	Sn	112.9051734	8.507	1/2+		9.94E+06
45	54	Rh	98.9081321	8.580	1/2–		1.39E+06	50	64	Sn	113.9027818	8.523	0+	0.66	estable
45	55	Rh	99.90812155	8.575	1–		7.49E+04	50	65	Sn	114.9033424	8.514	1/2+	0.34	estable
45	56	Rh	100.9061636	8.588	1/2–		1.04E+08	50	66	Sn	115.9017441	8.523	0+	14.54	estable
45	57	Rh	101.9068432	8.577	2–		1.79E+07	50	67	Sn	116.9029517	8.510	1/2+	7.68	estable
45	58	Rh	102.9055043	8.584	1/2–	100	estable	50	68	Sn	117.9016063	8.517	0+	24.22	estable
45	60	Rh	104.9056938	8.573	7/2+		1.27E+05	50	69	Sn	118.9033076	8.499	1/2+	8.59	estable
46	54	Pd	99.90850589	8.564	0+		3.14E+05	50	70	Sn	119.9021966	8.505	0+	32.58	estable
46	55	Pd	100.9082892	8.561	(5/2+)		3.05E+04	50	71	Sn	120.9042369	8.485	3/2+		9.76E+04
46	56	Pd	101.9056077	8.580	0+	1.02	estable	50	72	Sn	121.9034401	8.488	0+	4.63	estable
46	57	Pd	102.9060873	8.571	5/2+		1.47E+06	50	73	Sn	122.9057208	8.467	11/2–		1.12E+07
46	58	Pd	103.9040358	8.585	0+	11.14	estable	50	74	Sn	123.9052739	8.467	0+	5.79	estable
46	59	Pd	104.9050840	8.571	5/2+	22.33	estable	50	75	Sn	124.907785	8.446	11/2–		8.33E+05
46	60	Pd	105.9034857	8.580	0+	27.33	estable	50	76	Sn	125.9076533	8.444	0+		3.15E+12
46	61	Pd	106.9051285	8.561	5/2+		2.05E+14	50	77	Sn	126.9103510	8.421	(11/2–)		7.56E+03
46	62	Pd	107.9038945	8.567	0+	26.46	estable	51	66	Sb	116.9048359	8.488	5/2+		1.01E+04
46	63	Pd	108.9059535	8.545	5/2+		4.93E+04	51	68	Sb	118.9039465	8.488	5/2+		1.37E+05
46	64	Pd	109.9051533	8.547	0+	11.72	estable	51	69	Sb	119.905072	8.476	8–		4.98E+05
46	66	Pd	111.9073141	8.521	0+		7.57E+04	51	70	Sb	120.9038180	8.482	5/2+	57.21	estable
47	56	Ag	102.9089727	8.538	7/2+		3.96E+03	51	71	Sb	121.9051754	8.468	2–		2.35E+05
47	57	Ag	103.9086282	8.536	5+		4.14E+03	51	72	Sb	122.9042157	8.472	7/2+	42.79	estable
47	58	Ag	104.9065287	8.550	1/2–		3.57E+06	51	73	Sb	123.9059375	8.456	3–		5.20E+06
47	60	Ag	106.905093	8.554	1/2–	51.839	estable	51	74	Sb	124.9052478	8.458	7/2+		8.70E+07
47	62	Ag	108.9047555	8.548	1/2–	48.161	estable	51	75	Sb	125.9072482	8.440	(8–)		1.08E+06
47	64	Ag	110.9052947	8.535	1/2–		6.44E+05	51	76	Sb	126.9069146	8.440	7/2+		3.33E+05
47	65	Ag	111.9070048	8.516	2(–)		1.13E+04	51	77	Sb	127.9091673	8.421	8–		3.24E+04
47	66	Ag	112.9065666	8.516	1/2–		1.93E+04	51	78	Sb	128.9091501	8.418	7/2+		1.58E+04

Z	N	Sím	m (uma)	B (MeV)	Espín	%	τ(s)	Z	N	Sím	m (uma)	B (MeV)	Espín	%	τ(s)
52	64	Te	115.9084203	8.456	0+		8.96E+03	55	74	Cs	128.9060634	8.416	1/2+		1.15E+05
52	65	Te	116.90864	8.451	1/2+		3.72E+03	55	76	Cs	130.9054639	8.415	5/2+		8.37E+05
52	66	Te	117.9058276	8.470	0+		5.18E+05	55	77	Cs	131.906430	8.406	2+		5.60E+05
52	67	Te	118.9064081	8.462	1/2+		5.77E+04	55	78	Cs	132.9054469	8.410	7/2+	100	estable
52	68	Te	119.9040202	8.477	0+	0.09	estable	55	79	Cs	133.9067134	8.399	4+		6.51E+07
52	69	Te	120.9049364	8.467	1/2+		1.45E+06	55	80	Cs	134.905972	8.401	7/2+		7.25E+13
52	70	Te	121.9030471	8.478	0+	2.55	estable	55	81	Cs	135.907307	8.390	5+		1.14E+06
52	71	Te	122.9042730	8.466	1/2+	0.89	1.89E+22	55	82	Cs	136.9070895	8.389	7/2+		9.48E+08
52	72	Te	123.9028180	8.473	0+	4.74	estable	56	70	Ba	125.9112502	8.380	0+		6.01E+03
52	73	Te	124.9044285	8.458	1/2+	7.07	estable	56	72	Ba	127.90831	8.396	0+		2.10E+05
52	74	Te	125.9033095	8.463	0+	18.84	estable	56	73	Ba	128.9086794	8.391	1/2+		8.03E+03
52	75	Te	126.905217	8.446	3/2+		3.37E+04	56	74	Ba	129.9063105	8.406	0+	0.106	estable
52	76	Te	127.9044631	8.449	0+	31.74	2.43E+32	56	75	Ba	130.9069308	8.399	1/2+		9.94E+05
52	77	Te	128.906596	8.430	3/2+		4.18E+03	56	76	Ba	131.9050562	8.409	0+	0.101	estable
52	78	Te	129.9062244	8.430	0+	34.08	8.51E+28	56	77	Ba	132.9060024	8.400	1/2+		3.32E+08
52	80	Te	131.9085238	8.408	0+		2.77E+05	56	78	Ba	133.9045033	8.408	0+	2.417	estable
53	67	I	119.9100482	8.424	2–		4.86E+03	56	79	Ba	134.9056827	8.397	3/2+	6.592	estable
53	68	I	120.9073668	8.442	5/2+		7.63E+03	56	80	Ba	135.9045701	8.403	0+	7.854	estable
53	70	I	122.9055979	8.449	5/2+		4.78E+04	56	81	Ba	136.905824	8.392	3/2+	11.232	estable
53	71	I	123.9062114	8.441	2–		3.61E+05	56	82	Ba	137.9052413	8.393	0+	71.698	estable
53	72	I	124.9046242	8.450	5/2+		5.13E+06	56	83	Ba	138.908836	8.367	7/2–		4.98E+03
53	73	I	125.9056242	8.440	2–		1.13E+06	56	84	Ba	139.91060	8.353	0+		1.10E+06
53	74	I	126.9044727	8.445	5/2+	100	estable	57	75	La	131.910110	8.368	2–		1.73E+04
53	76	I	128.9049877	8.436	7/2+		4.95E+14	57	76	La	132.908218	8.379	5/2+		1.41E+04
53	77	I	129.9066742	8.421	5+		4.45E+04	57	78	La	134.9069768	8.383	5/2+		7.02E+04
53	78	I	130.9061246	8.422	7/2+		6.93E+05	57	80	La	136.90647	8.382	7/2+		1.89E+12
53	79	I	131.9079945	8.406	4+		8.26E+03	57	81	La	137.9071068	8.375	5+	0.09	3.31E+18
53	80	I	132.9078065	8.405	7/2+		7.49E+04	57	82	La	138.9063482	8.378	7/2+	99.91	estable
53	82	I	134.91005	8.385	7/2+		2.37E+04	57	83	La	139.9094726	8.355	3–		1.45E+05
54	68	Xe	121.9085484	8.425	0+		7.24E+04	57	84	La	140.910958	8.343	(7/2+)		1.41E+04
54	69	Xe	122.908480	8.421	(1/2)+		7.49E+03	57	85	La	141.9140791	8.321	2–		5.46E+03
54	70	Xe	123.9058942	8.438	0+	0.09	estable	58	74	Ce	131.9114605	8.352	0+		1.26E+04
54	71	Xe	124.906398	8.431	(1/2)+		6.08E+04	58	75	Ce	132.911515	8.350	9/2–		1.76E+04
54	72	Xe	125.9042736	8.444	0+	0.09	estable	58	75	Ce	132.9115515	8.350	1/2+		5.83E+03
54	73	Xe	126.905184	8.434	1/2+		3.14E+06	58	76	Ce	133.9089248	8.366	0+		2.73E+05
54	74	Xe	127.9035313	8.443	0+	1.92	estable	58	77	Ce	134.9091514	8.362	1/2(+)		6.37E+04
54	75	Xe	128.9047794	8.431	1/2+	26.44	estable	58	78	Ce	135.907172	8.373	0+	0.185	estable
54	76	Xe	129.903508	8.438	0+	4.08	estable	58	79	Ce	136.9078056	8.367	3/2+		3.24E+04
54	77	Xe	130.9050824	8.424	3/2+	21.18	estable	58	80	Ce	137.9059913	8.377	0+	0.251	estable
54	78	Xe	131.9041535	8.428	0+	26.89	estable	58	81	Ce	138.9066466	8.370	3/2+		1.19E+07
54	79	Xe	132.905906	8.413	3/2+		4.53E+05	58	82	Ce	139.905434	8.376	0+	88.45	estable
54	80	Xe	133.9053945	8.414	0+	10.44	estable	58	83	Ce	140.908271	8.355	7/2–		2.81E+06
54	81	Xe	134.90721	8.398	3/2+		3.29E+04	58	84	Ce	141.909241	8.347	0+	11.114	1.58E+24
54	82	Xe	135.9072188	8.396	0+	8.87	2.93E+27	58	85	Ce	142.9123812	8.325	3/2–		1.19E+05
55	72	Cs	126.9074175	8.412	1/2+		2.25E+04	58	86	Ce	143.913643	8.315	0+		2.46E+07

(*continúa*)

(*continuación*)

Z	*N*	Sím	*m* (uma)	*B* (MeV)	Espín	%	τ(s)	*Z*	*N*	Sím	*m* (uma)	*B* (MeV)	Espín	%	τ(s)
59	78	Pr	136.910687	8.341	5/2+		4.61E+03	63	88	Eu	150.919848	8.239	5/2+	47.81	estable
59	80	Pr	138.9089384	8.349	5/2+		1.59E+04	63	89	Eu	151.921744	8.227	3–		4.27E+08
59	82	Pr	140.9076477	8.354	5/2+	100	estable	63	90	Eu	152.921229	8.229	5/2+	52.19	estable
59	83	Pr	141.910041	8.336	2–		6.88E+04	63	91	Eu	153.922976	8.217	3–		2.71E+08
59	84	Pr	142.9108122	8.329	7/2+		1.17E+06	63	92	Eu	154.92289	8.217	5/2+		1.50E+08
59	86	Pr	144.9145069	8.302	7/2+		2.15E+04	63	93	Eu	155.9247522	8.205	0+		1.31E+06
60	78	Nd	137.91195	8.325	0+		1.81E+04	63	94	Eu	156.9254236	8.200	5/2+		5.46E+04
60	80	Nd	139.90931	8.338	0+		2.91E+05	64	82	Gd	145.9183106	8.250	0+		4.17E+06
60	81	Nd	140.9096099	8.336	3/2+		8.96E+03	64	83	Gd	146.919090	8.243	7/2–		1.37E+05
60	82	Nd	141.907719	8.346	0+	27.2	estable	64	84	Gd	147.918110	8.248	0+		2.35E+09
60	83	Nd	142.90981	8.330	7/2–	12.2	estable	64	85	Gd	148.919339	8.239	7/2–		8.02E+05
60	84	Nd	143.910083	8.327	0+	23.8	7.22E+22	64	86	Gd	149.9186589	8.243	0+		5.64E+13
60	85	Nd	144.91257	8.309	7/2–	8.3	estable	64	87	Gd	150.9203485	8.231	7/2–		1.07E+07
60	86	Nd	145.913116	8.304	0+	17.2	estable	64	88	Gd	151.919789	8.233	0+	0.2	3.41E+21
60	87	Nd	146.916096	8.284	5/2–		9.49E+05	64	89	Gd	152.9217495	8.220	3/2–		2.09E+07
60	88	Nd	147.916889	8.277	0+	5.7	estable	64	90	Gd	153.9208623	8.225	0+	2.18	estable
60	89	Nd	148.920145	8.255	5/2–		6.22E+03	64	91	Gd	154.922619	8.213	3/2–	14.8	estable
60	90	Nd	149.920887	8.250	0+	5.6	3.47E+26	64	92	Gd	155.922122	8.215	0+	20.47	estable
61	82	Pm	142.9109276	8.318	5/2+		2.29E+07	64	93	Gd	156.9239567	8.204	3/2–	15.65	estable
61	83	Pm	143.912586	8.305	5–		3.14E+07	64	94	Gd	157.924103	8.202	0+	24.84	estable
61	84	Pm	144.9127439	8.303	5/2+		5.58E+08	64	95	Gd	158.9263861	8.188	3/2–		6.65E+04
61	85	Pm	145.914696	8.289	3–		1.74E+08	64	96	Gd	159.9270541	8.183	0+	21.86	estable
61	86	Pm	146.9151339	8.284	7/2+		8.27E+07	65	82	Tb	146.9240446	8.207	(1/2+)		6.12E+03
61	87	Pm	147.9174746	8.268	1–		4.64E+05	65	83	Tb	147.9242717	8.204	2–		3.60E+03
61	88	Pm	148.91833	8.262	7/2+		1.91E+05	65	84	Tb	148.9232459	8.210	1/2+		1.48E+04
61	89	Pm	149.92098	8.244	(1–)		9.65E+03	65	85	Tb	149.9236597	8.206	(2)–		1.25E+04
61	90	Pm	150.921207	8.241	5/2+		1.02E+05	65	86	Tb	150.9230982	8.209	1/2(+)		6.34E+04
62	80	Sm	141.9151976	8.286	0+		4.35E+03	65	87	Tb	151.9240744	8.202	2–		6.30E+04
62	82	Sm	143.911998	8.304	0+	3.07	estable	65	88	Tb	152.9234346	8.205	5/2+		2.02E+05
62	83	Sm	144.913407	8.293	7/2–		2.94E+07	65	89	Tb	153.9246862	8.197	0(+)		7.74E+04
62	84	Sm	145.913038	8.294	0+		3.25E+15	65	90	Tb	154.9235052	8.203	3/2+		4.60E+05
62	85	Sm	146.914894	8.281	7/2–	14.99	3.34E+18	65	91	Tb	155.924744	8.195	3–		4.62E+05
62	86	Sm	147.914819	8.280	0+	11.24	2.21E+23	65	92	Tb	156.9240212	8.198	3/2+		2.24E+09
62	87	Sm	148.91718	8.263	7/2–	13.82	6.31E+22	65	93	Tb	157.9254103	8.189	3–		5.68E+09
62	88	Sm	149.9172730	8.262	0+	7.38	estable	65	94	Tb	158.9253431	8.189	3/2+	100	estable
62	89	Sm	150.919929	8.244	5/2–		2.84E+09	65	95	Tb	159.9271640	8.177	3–		6.25E+06
62	90	Sm	151.9197282	8.244	0+	26.75	estable	65	96	Tb	160.9275663	8.174	3/2+		5.94E+05
62	91	Sm	152.922097	8.229	3/2+		1.67E+05	66	86	Dy	151.9247140	8.193	0+		8.57E+03
62	92	Sm	153.9222053	8.227	0+	22.75	estable	66	87	Dy	152.9257647	8.186	7/2(–)		2.30E+04
62	94	Sm	155.9255279	8.205	0+		3.38E+04	66	88	Dy	153.9244220	8.193	0+		9.46E+13
63	82	Eu	144.9162652	8.269	5/2+		5.12E+05	66	89	Dy	154.9257538	8.184	3/2–		3.56E+04
63	83	Eu	145.91720	8.262	4–		3.97E+05	66	90	Dy	155.9242783	8.192	0+	0.06	estable
63	84	Eu	146.916742	8.264	5/2+		2.08E+06	66	91	Dy	156.9254661	8.185	3/2–		2.93E+04
63	85	Eu	147.91815	8.254	5–		4.71E+06	66	92	Dy	157.924405	8.190	0+	0.1	estable
63	86	Eu	148.917930	8.254	5/2+		8.04E+06	66	93	Dy	158.925736	8.182	3/2–		1.25E+07
63	87	Eu	149.9197018	8.241	5(–)		1.16E+09	66	94	Dy	159.925194	8.184	0+	2.34	estable

Z	N	Sím	m (uma)	B (MeV)	Espín	%	τ(s)	Z	N	Sím	m (uma)	B (MeV)	Espín	%	τ(s)
66	95	Dy	160.926930	8.173	5/2+	18.91	estable	70	106	Yb	175.942571	8.064	0+	12.76	estable
66	96	Dy	161.926795	8.173	0+	25.51	estable	70	107	Yb	176.9452571	8.050	9/2+		6.88E+03
66	97	Dy	162.928728	8.162	5/2–	24.9	estable	70	108	Yb	177.9466467	8.043	0+		4.43E+03
66	98	Dy	163.9291712	8.159	0+	28.18	estable	71	98	Lu	168.937649	8.086	7/2+		1.23E+05
66	99	Dy	164.93170	8.144	7/2+		8.40E+03	71	99	Lu	169.9384722	8.082	0+		1.74E+05
66	100	Dy	165.9328032	8.137	0+		2.94E+05	71	100	Lu	170.93791	8.085	7/2+		7.12E+05
67	94	Ho	160.9278548	8.163	7/2–		8.93E+03	71	101	Lu	171.9390822	8.078	4–		5.79E+05
67	96	Ho	162.9287303	8.157	7/2–		1.44E+11	71	102	Lu	172.938927	8.079	7/2+		4.32E+07
67	98	Ho	164.9303221	8.147	7/2–	100	estable	71	103	Lu	173.940334	8.071	(1)–		1.04E+08
67	99	Ho	165.9322842	8.135	0–		9.63E+04	71	104	Lu	174.94077	8.069	7/2+	97.41	estable
67	100	Ho	166.933127	8.130	7/2–		1.12E+04	71	105	Lu	175.9426824	8.059	7–	2.59	1.29E+18
68	90	Er	157.9298935	8.148	0+		8.24E+03	71	106	Lu	176.9437550	8.053	7/2+		5.82E+05
68	92	Er	159.92908	8.152	0+		1.03E+05	71	108	Lu	178.9473274	8.035	7/2(+)		1.65E+04
68	93	Er	160.93	8.146	3/2–		1.16E+04	72	98	Hf	169.939609	8.071	0+		5.76E+04
68	94	Er	161.928775	8.152	0+	0.14	estable	72	99	Hf	170.940492	8.066	7/2+		4.36E+04
68	95	Er	162.9300327	8.145	5/2–		4.50E+03	72	100	Hf	171.9394483	8.072	0+		5.90E+07
68	96	Er	163.929198	8.149	0+	1.61	estable	72	101	Hf	172.940513	8.066	1/2–		8.50E+04
68	97	Er	164.930726	8.140	5/2–		3.73E+04	72	102	Hf	173.940044	8.069	0+	0.16	6.31E+22
68	98	Er	165.9302900	8.142	0+	33.61	estable	72	103	Hf	174.9415024	8.061	5/2–		6.05E+06
68	99	Er	166.932046	8.132	7/2+	22.93	estable	72	104	Hf	175.941406	8.061	0+	5.26	estable
68	100	Er	167.9323702	8.130	0+	26.78	estable	72	105	Hf	176.9432207	8.052	7/2–	18.6	estable
68	101	Er	168.9345881	8.117	1/2–		8.12E+05	72	106	Hf	177.9436988	8.049	0+	27.28	estable
68	102	Er	169.935461	8.112	0+	14.93	estable	72	107	Hf	178.9458161	8.039	9/2+	13.62	estable
68	103	Er	170.938026	8.098	5/2–		2.71E+04	72	108	Hf	179.94655	8.035	0+	35.08	estable
68	104	Er	171.9393521	8.090	0+		1.77E+05	72	109	Hf	180.9490991	8.022	1/2–		3.66E+06
69	94	Tm	162.9326500	8.125	1/2+		6.52E+03	72	110	Hf	181.9505541	8.015	0+		2.84E+14
69	96	Tm	164.932433	8.126	1/2+		1.08E+05	72	111	Hf	182.9535304	8.000	(3/2–)		3.84E+03
69	97	Tm	165.9335541	8.119	2+		2.77E+04	72	112	Hf	183.9554465	7.991	0+		1.48E+04
69	98	Tm	166.9328516	8.123	1/2+		7.99E+05	73	100	Ta	172.94354	8.044	5/2–		1.13E+04
69	99	Tm	167.9341728	8.115	3+		8.04E+06	73	101	Ta	173.944256	8.040	3(+)		3.78E+03
69	100	Tm	168.934212	8.114	1/2+	100	estable	73	102	Ta	174.9437	8.044	7/2+		3.78E+04
69	101	Tm	169.9358014	8.106	1–		1.11E+07	73	103	Ta	175.944857	8.039	1–		2.91E+04
69	102	Tm	170.936426	8.102	1/2+		6.05E+07	73	104	Ta	176.9444724	8.041	7/2+		2.04E+05
69	103	Tm	171.9384	8.091	2–		2.29E+05	73	105	Ta	177.9457782	8.034	7–		8.50E+03
69	104	Tm	172.9396036	8.084	1/2+		2.97E+04	73	106	Ta	178.94593	8.034	7/2+		5.74E+07
70	94	Yb	163.9344894	8.109	0+		4.54E+03	73	107	Ta	179.9474648	8.026	1+	0.012	2.93E+04
70	96	Yb	165.9338796	8.112	0+		2.04E+05	73	108	Ta	180.9479958	8.023	7/2+	99.988	estable
70	98	Yb	167.9338969	8.112	0+	0.13	estable	73	109	Ta	181.9501518	8.013	3–		9.89E+06
70	99	Yb	168.9351871	8.104	7/2+		2.77E+06	73	110	Ta	182.9513726	8.007	7/2+		4.41E+05
70	100	Yb	169.934759	8.107	0+	3.04	estable	73	111	Ta	183.954008	7.994	(5–)		3.13E+04
70	101	Yb	170.936323	8.098	1/2–	14.28	estable	74	102	W	175.945634	8.030	0+		9.00E+03
70	102	Yb	171.9363777	8.097	0+	21.83	estable	74	103	W	176.946643	8.025	(1/2–)		8.10E+03
70	103	Yb	172.938208	8.087	5/2–	16.13	estable	74	104	W	177.9458762	8.029	0+		1.87E+06
70	104	Yb	173.9388621	8.084	0+	31.83	estable	74	106	W	179.9467045	8.025	0+	0.12	estable
70	105	Yb	174.941273	8.071	7/2–		3.62E+05	74	107	W	180.9481972	8.018	9/2+		1.05E+07

(*continúa*)

(*continuación*)

Z	*N*	Sím	*m* (uma)	*B* (MeV)	Espín	%	τ(s)
74	108	W	181.9482042	8.018	0+	26.5	estable
74	109	W	182.950223	8.008	1/2–	14.31	estable
74	110	W	183.9509312	8.005	0+	30.64	estable
74	111	W	184.9534193	7.993	3/2–		6.49E+06
74	112	W	185.9543641	7.989	0+	28.43	estable
74	113	W	186.9571605	7.975	3/2–		8.54E+04
74	114	W	187.9584891	7.969	0+		6.00E+06
75	106	Re	180.9500679	8.004	5/2+		7.16E+04
75	107	Re	181.9512101	7.999	7+		2.31E+05
75	107	Re			2+		4.57E+04
75	108	Re	182.9508198	8.001	5/2+		6.05E+06
75	109	Re	183.9525208	7.993	3–		3.28E+06
75	110	Re	184.952955	7.991	5/2+	37.4	estable
75	111	Re	185.9549861	7.981	1–		3.21E+05
75	112	Re	186.9557531	7.978	5/2+	62.6	1.37E+18
75	113	Re	187.9581144	7.967	1–		6.13E+04
75	114	Re	188.959229	7.962	5/2+		8.75E+04
76	105	Os	180.953244	7.983	1/2–		6.30E+03
76	106	Os	181.9521102	7.990	0+		7.96E+04
76	107	Os	182.9531261	7.985	9/2+		4.68E+04
76	108	Os	183.9524891	7.989	0+	0.02	estable
76	109	Os	184.9540423	7.981	1/2–		8.09E+06
76	110	Os	185.9538382	7.983	0+	1.59	6.31E+22
76	111	Os	186.9557505	7.974	1/2–	1.96	estable
76	112	Os	187.9558382	7.974	0+	13.24	estable
76	113	Os	188.9581475	7.963	3/2–	16.15	estable
76	114	Os	189.958447	7.962	0+	26.26	estable
76	115	Os	190.9609297	7.951	9/2–		1.33E+06
76	116	Os	191.9614807	7.948	0+	40.78	estable
76	117	Os	192.9641516	7.936	3/2–		1.08E+05
76	118	Os	193.9651821	7.932	0+		1.89E+08
77	107	Ir	183.957476	7.959	5–		1.11E+04
77	108	Ir	184.956698	7.964	5/2–		5.18E+04
77	109	Ir	185.9579461	7.958	5+		5.99E+04
77	109	Ir			2–		7.20E+03
77	110	Ir	186.9573634	7.962	3/2+		3.78E+04
77	111	Ir	187.9588531	7.955	1–		1.49E+05
77	112	Ir	188.9587189	7.956	3/2+		1.14E+06
77	113	Ir	189.960546	7.948	(4)+		1.02E+06
77	114	Ir	190.960594	7.948	3/2+	37.3	estable
77	115	Ir	191.962605	7.939	4(+)		6.38E+06
77	116	Ir	192.9629264	7.938	3/2+	62.7	estable
77	117	Ir	193.9650784	7.928	1–		6.89E+04
77	118	Ir	194.9659796	7.925	3/2+		9.00E+03
78	107	Pt	184.960619	7.940	9/2+		4.25E+03
78	108	Pt	185.9593508	7.947	0+		7.20E+03
78	109	Pt	186.960587	7.941	3/2–		8.46E+03
78	110	Pt	187.9593954	7.948	0+		8.81E+05
78	111	Pt	188.9608337	7.941	3/2–		3.91E+04
78	112	Pt	189.9599317	7.947	0+	0.014	2.05E+19
78	113	Pt	190.9616767	7.939	3/2–		2.47E+05
78	114	Pt	191.961038	7.942	0+	0.782	estable
78	115	Pt	192.9629874	7.934	1/2–		1.58E+09
78	116	Pt	193.9626803	7.936	0+	32.967	estable
78	117	Pt	194.9647911	7.927	1/2–	33.832	estable
78	118	Pt	195.9649515	7.927	0+	25.242	estable
78	119	Pt	196.9673402	7.916	1/2–		7.16E+04
78	120	Pt	197.9678928	7.914	0+	7.163	estable
78	122	Pt	199.9714407	7.899	0+		4.50E+04
78	124	Pt	201.97574	7.881	0+		1.56E+05
79	112	Au	190.9637042	7.925	3/2+		1.14E+04
79	113	Au	191.964813	7.920	1–		1.78E+04
79	114	Au	192.9641497	7.924	3/2+		6.35E+04
79	115	Au	193.9653653	7.919	1–		1.37E+05
79	116	Au	194.9650346	7.921	3/2+		1.61E+07
79	117	Au	195.9665698	7.915	2–		5.33E+05
79	118	Au	196.9665687	7.916	3/2+	100	estable
79	119	Au	197.9682423	7.909	2–		2.33E+05
79	120	Au	198.9687652	7.907	3/2+		2.71E+05
80	112	Hg	191.9656343	7.912	0+		1.75E+04
80	113	Hg	192.9666654	7.908	3/2–		1.37E+04
80	114	Hg	193.9654394	7.915	0+		1.64E+10
80	115	Hg	194.9667201	7.909	1/2–		3.79E+04
80	116	Hg	195.9658326	7.914	0+	0.15	estable
80	117	Hg	196.9672129	7.909	1/2–		2.34E+05
80	118	Hg	197.966769	7.912	0+	9.97	estable
80	119	Hg	198.9682799	7.905	1/2–	16.87	estable
80	120	Hg	199.968326	7.906	0+	23.1	estable
80	121	Hg	200.9703023	7.898	3/2–	13.18	estable
80	122	Hg	201.970643	7.897	0+	29.86	estable
80	123	Hg	202.9728725	7.887	5/2–		4.03E+06
80	124	Hg	203.9734939	7.886	0+	6.87	estable
81	114	Tl	194.9697743	7.891	1/2+		4.18E+03
81	115	Tl	195.9704812	7.888	2–		6.62E+03
81	116	Tl	196.9695745	7.893	1/2+		1.02E+04
81	117	Tl	197.9704835	7.890	2–		1.91E+04
81	118	Tl	198.969877	7.894	1/2+		2.67E+04
81	119	Tl	199.9709627	7.890	2–		9.42E+04
81	120	Tl	200.9708189	7.891	1/2+		2.62E+05
81	121	Tl	201.9721058	7.886	2–		1.06E+06
81	122	Tl	202.9723442	7.886	1/2+	29.524	estable
81	123	Tl	203.9738635	7.880	2–		1.19E+08

Z	N	Sím	m (uma)	B (MeV)	Espín	%	τ(s)	Z	N	Sím	m (uma)	B (MeV)	Espín	%	τ(s)
81	124	Tl	204.9744275	7.878	1/2+	70.476	estable	88	138	Ra	226.0254098	7.662	0+		5.05E+10
82	116	Pb	197.972034	7.879	0+		8.64E+03	88	140	Ra	228.0310703	7.642	0+		1.81E+08
82	117	Pb	198.9729167	7.876	3/2–		5.40E+03	88	142	Ra	230.0370564	7.622	0+		5.58E+03
82	118	Pb	199.9718267	7.882	0+		7.74E+04	89	135	Ac	224.0217229	7.670	0–		1.04E+04
82	119	Pb	200.9728845	7.878	5/2–		3.36E+04	89	136	Ac	225.0232296	7.666	(3/2–)		8.64E+05
82	120	Pb	201.9721591	7.882	0+		1.66E+12	89	137	Ac	226.0260981	7.656	(1–)		1.06E+05
82	121	Pb	202.9733905	7.877	5/2–		1.87E+05	89	138	Ac	227.0277521	7.651	3/2–		6.87E+08
82	122	Pb	203.9730436	7.880	0+	1.4	4.42E+24	89	139	Ac	228.0310211	7.639	3(+)		2.21E+04
82	123	Pb	204.9744818	7.874	5/2–		4.83E+14	89	140	Ac	229.0330152	7.633	(3/2+)		3.78E+03
82	124	Pb	205.9744653	7.875	0+	24.1	estable	90	137	Th	227.0277041	7.647	3/2+		1.62E+06
82	125	Pb	206.9758969	7.870	1/2–	22.1	estable	90	138	Th	228.0287411	7.645	0+		6.03E+07
82	126	Pb	207.9766521	7.867	0+	52.4	estable	90	139	Th	229.0317624	7.635	5/2+		2.49E+11
82	127	Pb	208.9810901	7.849	9/2+		1.17E+04	90	140	Th	230.0331338	7.631	0+		2.38E+12
82	128	Pb	209.9841885	7.836	0+		7.03E+08	90	141	Th	231.0363043	7.620	5/2+		9.18E+04
82	130	Pb	211.9918975	7.804	0+		3.83E+04	90	142	Th	232.0380553	7.615	0+	100	4.43E+17
83	118	Bi	200.977009	7.855	9/2–		6.48E+03	90	144	Th	234.0436012	7.597	0+		2.08E+06
83	119	Bi	201.9777423	7.852	5+		6.19E+03	91	137	Pa	228.0310514	7.632	(3+)		7.92E+04
83	120	Bi	202.976876	7.858	9/2–		4.23E+04	91	138	Pa	229.0320968	7.630	(5/2+)		1.30E+05
83	121	Bi	203.9778127	7.854	6+		4.04E+04	91	139	Pa	230.0345408	7.622	(2–)		1.50E+06
83	122	Bi	204.9773894	7.857	9/2–		1.32E+06	91	140	Pa	231.035884	7.618	3/2–	100	1.03E+12
83	123	Bi	205.9784991	7.853	6+		5.39E+05	91	141	Pa	232.0385916	7.609	(2–)		1.13E+05
83	124	Bi	206.9784707	7.854	9/2–		9.95E+08	91	142	Pa	233.0402473	7.605	3/2–		2.33E+06
83	125	Bi	207.9797422	7.850	(5)+		1.16E+13	91	143	Pa	234.0433081	7.595	4+		2.41E+04
83	126	Bi	208.9803987	7.848	9/2–	100	estable	91	148	Pa	239.05726	7.550	(3/2)(–)		6.37E+03
83	127	Bi	209.9841204	7.833	1–		4.33E+05	92	138	U	230.0339398	7.621	0+		1.80E+06
83	129	Bi	211.9912857	7.803	1(–)		3.63E+03	92	139	U	231.0362937	7.613	(5/2)		3.63E+05
84	120	Po	203.9803181	7.839	0+		1.27E+04	92	140	U	232.0371562	7.612	0+		2.17E+09
84	121	Po	204.9812033	7.836	5/2–		5.98E+03	92	141	U	233.0396352	7.604	5/2+		5.01E+12
84	122	Po	205.9804811	7.841	0+		7.60E+05	92	142	U	234.0409521	7.601	0+	0.0055	7.74E+12
84	123	Po	206.9815932	7.837	5/2–		2.09E+04	92	143	U	235.0439299	7.591	7/2–	0.72	2.22E+16
84	124	Po	207.9812457	7.839	0+		9.14E+07	92	144	U	236.045568	7.586	0+		7.38E+14
84	125	Po	208.9824304	7.835	1/2–		3.22E+09	92	145	U	237.0487302	7.576	1/2+		5.83E+05
84	126	Po	209.9828737	7.834	0+		1.20E+07	92	146	U	238.0507882	7.570	0+	99.275	1.41E+17
85	122	At	206.9857835	7.814	9/2–		6.48E+03	92	148	U	240.056592	7.552	0+		5.08E+04
85	123	At	207.98659	7.812	6+		5.87E+03	93	141	Np	234.042895	7.590	(0+)		3.80E+05
85	124	At	208.9861731	7.815	9/2–		1.95E+04	93	142	Np	235.0440633	7.587	5/2+		3.42E+07
85	125	At	209.9871477	7.812	5+		2.92E+04	93	143	Np	236.0465696	7.579	(6–)		4.86E+12
85	126	At	210.9874963	7.811	9/2–		2.60E+04	93	143	Np			1(–)		8.10E+04
86	124	Rn	209.9896962	7.797	0+		8.71E+03	93	144	Np	237.0481734	7.575	5/2+		6.75E+13
86	125	Rn	210.9906005	7.794	1/2–		5.26E+04	93	145	Np	238.0509464	7.566	2+		1.83E+05
86	136	Rn	222.0175777	7.694	0+		3.30E+05	93	146	Np	239.052939	7.561	5/2+		2.04E+05
86	138	Rn	224.02409	7.671	0+		6.41E+03	93	147	Np	240.0561622	7.550	(5+)		3.72E+03
88	135	Ra	223.0185022	7.685	3/2+		9.88E+05	94	140	Pu	234.0433171	7.585	0+		3.17E+04
88	136	Ra	224.0202118	7.680	0+		3.16E+05	94	142	Pu	236.046058	7.578	0+		9.01E+07
88	137	Ra	225.0236116	7.668	1/2+		1.29E+06	94	143	Pu	237.0484097	7.571	7/2–		3.91E+06

(*continúa*)

(*continuación*)

Z	*N*	Sím	*m* (uma)	*B* (MeV)	Espín	%	τ(s)	*Z*	*N*	Sím	*m* (uma)	*B* (MeV)	Espín	%	τ(s)
94	144	Pu	238.0495599	7.568	0+		2.77E+09	97	151	Bk	248.073086	7.491	(6+)		2.84E+08
94	145	Pu	239.0521634	7.560	1/2+		7.60E+11	97	151	Bk			1(–)		8.53E+04
94	146	Pu	240.0538135	7.556	0+		2.07E+11	97	152	Bk	249.0749867	7.486	7/2+		2.76E+07
94	147	Pu	241.0568515	7.546	5/2+		4.53E+08	97	153	Bk	250.0783165	7.476	2–		1.16E+04
94	148	Pu	242.0587426	7.541	0+		1.18E+13	98	148	Cf	246.0688053	7.499	0+		1.29E+05
94	149	Pu	243.0620031	7.531	7/2+		1.78E+04	98	149	Cf	247.0710006	7.493	(7/2+)		1.12E+04
94	150	Pu	244.0642039	7.525	0+		2.55E+15	98	150	Cf	248.0721849	7.491	0+		2.88E+07
94	151	Pu	245.0677472	7.514	(9/2–)		3.78E+04	98	151	Cf	249.0748535	7.483	9/2–		1.11E+10
94	152	Pu	246.0702046	7.507	0+		9.37E+05	98	152	Cf	250.0764061	7.480	0+		4.12E+08
94	153	Pu	247.07407	7.494	1/2+		1.96E+05	98	153	Cf	251.0795868	7.470	1/2+		2.83E+10
95	142	Am	237.049996	7.561	5/2(–)		4.39E+03	98	154	Cf	252.0816258	7.465	0+		8.34E+07
95	143	Am	238.0519843	7.556	1+		5.87E+03	98	155	Cf	253.0851331	7.455	(7/2+)		1.54E+06
95	144	Am	239.0530245	7.554	5/2–		4.28E+04	98	156	Cf	254.0873229	7.449	0+		5.23E+06
95	145	Am	240.0553002	7.547	(3–)		1.83E+05	98	157	Cf	255.091046	7.438	(9/2+)		5.04E+03
95	146	Am	241.0568291	7.543	5/2–		1.36E+10	99	150	Es	249.076411	7.474	7/2(+)		6.12E+03
95	147	Am	242.0595492	7.535	1–		5.77E+04	99	151	Es	250.078612	7.469	(6+)		3.10E+04
95	148	Am	243.0613811	7.530	5/2–		2.32E+11	99	151	Es			1(–)		7.99E+03
95	149	Am	244.0642848	7.521	(6–)		3.64E+04	99	152	Es	251.0799921	7.466	(3/2–)		1.19E+05
95	150	Am	245.0664521	7.515	(5/2)+		7.38E+03	99	153	Es	252.0829785	7.457	(5–)		4.07E+07
96	142	Cm	238.0530287	7.548	0+		8.64E+03	99	154	Es	253.0848247	7.453	7/2+		1.77E+06
96	143	Cm	239.054957	7.543	(7/2–)		1.04E+04	99	155	Es	254.088022	7.444	(7+)		2.38E+07
96	144	Cm	240.0555295	7.543	0+		2.33E+06	99	156	Es	255.0902731	7.438	(7/2+)		3.44E+06
96	145	Cm	241.057653	7.537	1/2+		2.83E+06	99	157	Es			(8+)		2.74E+04
96	146	Cm	242.0588358	7.534	0+		1.41E+07	100	151	Fm	251.081575	7.457	(9/2–)		1.91E+04
96	147	Cm	243.0613891	7.527	5/2+		9.18E+08	100	152	Fm	252.0824669	7.456	0+		9.14E+04
96	148	Cm	244.0627526	7.524	0+		5.71E+08	100	153	Fm	253.0851852	7.448	1/2+		2.59E+05
96	149	Cm	245.0654912	7.516	7/2+		2.68E+11	100	154	Fm	254.0868542	7.445	0+		1.17E+04
96	150	Cm	246.0672237	7.511	0+		1.49E+11	100	155	Fm	255.0899622	7.436	7/2+		7.23E+04
96	151	Cm	247.0703535	7.502	9/2–		4.92E+14	100	156	Fm	256.0917731	7.432	0+		9.46E+03
96	152	Cm	248.0723485	7.497	0+		1.07E+13	100	157	Fm	257.0951047	7.422	(9/2+)		8.68E+06
96	153	Cm	249.0759534	7.486	1/2+		3.85E+03	101	155	Md	256.094059	7.420	(0–,1–)		4.69E+03
96	154	Cm	250.078357	7.479	0+		3.06E+11	101	156	Md	257.0955414	7.418	(7/2–)		1.99E+04
97	146	Bk	243.0630076	7.517	(3/2–)		1.62E+04	101	157	Md	258.0984313	7.410	(8–)		4.45E+06
97	147	Bk	244.0651808	7.511	(1–)		1.57E+04	101	157	Md	256.09360		(1–)		3.60E+03
97	148	Bk	245.0663616	7.509	3/2–		4.27E+05	101	158	Md	259.100509	7.405	(7/2–)		5.76E+03
97	149	Bk	246.0686729	7.503	2(–)		1.56E+05	101	159	Md	260.103652	7.396			2.40E+06
97	150	Bk	247.0703071	7.499	(3/2–)		4.35E+10	103	159	Lr	262.109634	7.374			1.30E+04

Apéndice C

Propiedades de los elementos

Z	Número de carga (número de protones en el núcleo = número de electrones)
ρ	Densidad de masa a temperatura (20 °C = 293.15 K) y presión (1 atmósfera) normales
m	Peso atómico estándar (masa media de un átomo, promedio ponderado de abundancia de las masas de isótopos)
$T_{\text{fusión}}$	Temperatura del punto de fusión (punto de transición entre la fase sólida y la fase líquida) a presión de 1 atm
$T_{\text{ebullición}}$	Temperatura del punto de ebullición (punto de transición entre la fase líquida y la fase gaseosa) a presión de 1 atm
L_{m}	Calor de derretimiento/fusión
L_{v}	Calor de vaporización
E_1	Energía de ionización (energía necesaria para retirar el electrón con enlace más débil)

Z	Sím	Nombre	Configuración electrónica	ρ(g/cm^3)	m(g/mol)	$T_{\text{fusión}}$ (K)	$T_{\text{ebullición}}$ (K)	L_{m} (kJ/mol)	L_{v} (kJ/mol)	E_1(eV)
1	H	Hidrógeno$_{\text{gas}}$	$1s^1$	$8.988 \cdot 10^{-5}$	1.00794	14.01	20.28	0.117	0.904	13.5984
2	He	Helio$_{\text{gas}}$	$1s^2$	$1.786 \cdot 10^{-4}$	4.002602	—	4.22	—	0.0829	24.5874
3	Li	Litio	$[\text{He}]2s^1$	0.534	6.941	453.69	1 615	3.00	147.1	5.3917
4	Be	Berilio	$[\text{He}]2s^2$	1.85	9.012182	1 560	2 742	7.895	297	9.3227
5	B	Boro	$[\text{He}]2s^2\,2p^1$	2.34	10.811	2 349	4 200	50.2	480	8.2980
6	C	Carbono$_{\text{grafito}}$	$[\text{He}]2s^2\,2p^2$	2.267	12.0107	3 800	4 300	117	710.9	11.2603
7	N	Nitrógeno$_{\text{gas}}$	$[\text{He}]2s^2\,2p^3$	$1.251 \cdot 10^{-3}$	14.0067	63.1526	77.36	0.72	5.56	14.5341
8	O	Oxígeno$_{\text{gas}}$	$[\text{He}]2s^2\,2p^4$	$1.429 \cdot 10^{-3}$	15.9994	54.36	90.20	0.444	6.82	13.6181
9	F	Flúor$_{\text{gas}}$	$[\text{He}]2s^2\,2p^5$	$1.7 \cdot 10^{-3}$	18.998403	53.53	85.03	0.510	6.62	17.4228
10	Ne	Neón$_{\text{gas}}$	$[\text{He}]2s^2\,2p^6$	$9.002 \cdot 10^{-4}$	20.1797	24.56	27.07	0.335	1.71	21.5645
11	Na	Sodio	$[\text{Ne}]3s^1$	0.968	22.989770	370.87	1 156	2.60	97.42	5.1391
12	Mg	Magnesio	$[\text{Ne}]3s^2$	1.738	24.3050	923	1 363	8.48	128	7.6462
13	Al	Aluminio	$[\text{Ne}]3s^2\,3p^1$	2.70	26.981538	933.47	2 792	10.71	294.0	5.9858
14	Si	Silicio	$[\text{Ne}]3s^2\,3p^2$	2.3290	28.0855	1 687	3 538	50.21	359	8.1517
15	P	Fósforo$_{\text{blanco}}$	$[\text{Ne}]3s^2\,3p^3$	1.823	30.973761	317.3	550	0.66	12.4	10.4867
16	S	Azufre	$[\text{Ne}]3s^2\,3p^4$	1.92–2.07	32.065	388.36	717.8	1.727	45	10.3600
17	Cl	Cloro	$[\text{Ne}]3s^2\,3p^5$	$3.2 \cdot 10^{-3}$	35.453	171.6	239.11	6.406	20.41	12.9676
18	Ar	Argón	$[\text{Ne}]3s^2\,3p^6$	$1.784 \cdot 10^{-3}$	39.948	83.80	87.30	1.18	6.43	15.7596
19	K	Potasio	$[\text{Ar}]4s^1$	0.89	39.0983	336.53	1 032	2.4	79.1	4.3407

(*continúa*)

(*continuación*)

Z	Sím	Nombre	Configuración electrónica	ρ(g/cm^3)	*m*(g/mol)	$T_{fusión}$ (K)	$T_{ebullición}$ (K)	L_m (kJ/mol)	L_v (kJ/mol)	E_1(eV)
20	Ca	Calcio	$[Ar]4s^2$	1.55	40.078	1 115	1 757	8.54	154.7	6.1132
21	Sc	Escandio	$[Ar]3d^1\ 4s^2$	2.985	44.955910	1 814	3 109	14.1	332.7	6.5615
22	Ti	Titanio	$[Ar]3d^2\ 4s^2$	4.506	47.867	1 941	3 560	14.15	425	6.8281
23	V	Vanadio	$[Ar]3d^3\ 4s^2$	6.0	50.9415	2 183	3 680	21.5	459	6.7462
24	Cr	Cromo	$[Ar]3d^5\ 4s^1$	7.19	51.9961	2 180	2 944	21.0	339.5	6.7665
25	Mn	Manganeso	$[Ar]3d^5\ 4s^2$	7.21	54.938049	1 519	2 334	12.91	221	7.4340
26	Fe	Hierro	$[Ar]3d^6\ 4s^2$	7.874	55.845	1 811	3 134	13.81	340	7.9024
27	Co	Cobalto	$[Ar]3d^7\ 4s^2$	8.90	58.933200	1 768	3 200	16.06	377	7.8810
28	Ni	Níquel	$[Ar]3d^8\ 4s^2$	8.908	58.6934	1 728	3 186	17.48	377.5	7.6398
29	Cu	Cobre	$[Ar]3d^{10}\ 4s^1$	8.94	63.546	1 357.77	2 835	13.26	300.4	7.7264
30	Zn	Cinc	$[Ar]3d^{10}\ 4s^2$	7.14	65.409	692.68	1 180	7.32	123.6	9.3942
31	Ga	Galio	$[Ar]3d^{10}\ 4s^2\ 4p^1$	5.91	69.723	302.9146	2 477	5.59	254	5.9993
32	Ge	Germanio	$[Ar]3d^{10}\ 4s^2\ 4p^2$	5.323	72.64	1 211.40	3 106	36.94	334	7.8994
33	As	Arsénico	$[Ar]3d^{10}\ 4s^2\ 4p^3$	5.727	74.92160	1 090	887	24.44	34.76	9.7886
34	Se	Selenio	$[Ar]3d^{10}\ 4s^2\ 4p^4$	4.28-4.81	78.96	494	958	6.69	95.48	9.7524
35	Br	$Bromo_{líquido}$	$[Ar]3d^{10}\ 4s^2\ 4p^5$	3.1028	79.904	265.8	332.0	10.571	29.96	11.8138
36	Kr	$Kriptón_{gas}$	$[Ar]3d^{10}\ 4s^2\ 4p^6$	$3.749 \cdot 10^{-3}$	83.798	115.79	119.93	1.64	9.08	13.9996
37	Rb	Rubidio	$[Kr]5s^1$	1.532	85.4678	312.46	961	2.19	75.77	4.1771
38	Sr	Estroncio	$[Kr]5s^2$	2.64	87.62	1 050	1 655	7.43	136.9	5.6949
39	Y	Itrio	$[Kr]4d^1\ 5s^2$	4.472	88.90585	1 799	3 609	11.42	365	6.2173
40	Zr	Circonio	$[Kr]4d^2\ 5s^2$	6.52	91.224	2 128	4 682	14	573	6.6339
41	Nb	Niobio	$[Kr]4d^4\ 5s^1$	8.57	92.90638	2 750	5 017	30	689.9	6.7589
42	Mo	Molibdeno	$[Kr]4d^5\ 5s^1$	10.28	95.94	2 896	4 912	37.48	617	7.0924
43	Tc	Tecnecio	$[Kr]4d^5\ 5s^2$	11	(98)	2 430	4 538	33.29	585.2	7.28
44	Ru	Rutenio	$[Kr]4d^7\ 5s^1$	12.45	101.07	2 607	4 423	38.59	591.6	7.3605
45	Rh	Rodio	$[Kr]4d^8\ 5s^1$	12.41	102.90550	2 237	3 968	26.59	494	7.4589
46	Pd	Paladio	$[Kr]4d^{10}$	12.023	106.42	1 828.05	3 236	16.74	362	8.3369
47	Ag	Plata	$[Kr]4d^{10}\ 5s^1$	10.49	107.8682	1 234.93	2 435	11.28	250.58	7.5762
48	Cd	Cadmio	$[Kr]4d^{10}\ 5s^2$	8.65	112.411	594.22	1 040	6.21	99.87	8.9938
49	In	Indio	$[Kr]4d^{10}\ 5s^2\ 5p^1$	7.31	114.818	429.7485	2 345	3.281	231.8	5.7864
50	Sn	$Estaño_{blanco}$	$[Kr]4d^{10}\ 5s^2\ 5p^2$	7.365	118.710	505.08	2 875	7.03	296.1	7.3439
51	Sb	Antimonio	$[Kr]4d^{10}\ 5s^2\ 5p^3$	6.697	121.760	903.78	1 860	19.79	193.43	8.6084
52	Te	Telurio	$[Kr]4d^{10}\ 5s^2\ 5p^4$	6.24	127.60	722.66	1 261	17.49	114.1	9.0096
53	I	Yodo	$[Kr]4d^{10}\ 5s^2\ 5p^5$	4.933	126.90447	386.85	457.4	15.52	41.57	10.4513
54	Xe	$Xenón_{gas}$	$[Kr]4d^{10}\ 5s^2\ 5p^6$	$5.894 \cdot 10^{-3}$	131.293	161.4	165.03	2.27	12.64	12.1298
55	Cs	Cesio	$[Xe]6s^1$	1.93	132.90545	301.59	944	2.09	63.9	3.8939
56	Ba	Bario	$[Xe]6s^2$	3.51	137.327	1 000	2 170	7.12	140.3	5.2117
57	La	Lantano	$[Xe]5d^1\ 6s^2$	6.162	138.9055	1 193	3 737	6.20	402.1	5.5769
58	Ce	Cerio	$[Xe]4f^1\ 5d^1\ 6s^2$	6.770	140.116	1 068	3 716	5.46	398	5.5387
59	Pr	Praseodimio	$[Xe]4f^3\ 6s^2$	6.77	140.90765	1 208	3 793	6.89	331	5.473
60	Nd	Neodimio	$[Xe]4f^4\ 6s^2$	7.01	144.24	1 297	3 347	7.14	289	5.5250
61	Pm	Prometeo	$[Xe]4f^5\ 6s^2$	7.26	(145)	1 315	3 273	7.13	289	5.582

Z	Sím	Nombre	Configuración electrónica	ρ(g/cm^3)	m(g/mol)	$T_{fusión}$ (K)	$T_{ebullición}$ (K)	L_m (kJ/mol)	L_v (kJ/mol)	E_1(eV)
62	Sm	Samario	$[Xe]4f^6\,6s^2$	7.52	150.36	1 345	2 067	8.62	165	5.6437
63	Eu	Europio	$[Xe]4f^7\,6s^2$	5.264	151.964	1 099	1 802	9.21	176	5.6704
64	Gd	Gadolinio	$[Xe]4f^7\,5d^1\,6s^2$	7.90	157.25	1 585	3 546	10.05	301.3	6.1498
65	Tb	Terbio	$[Xe]4f^9\,6s^2$	8.23	158.92534	1 629	3 503	10.15	293	5.8638
66	Dy	Disprosio	$[Xe]4f^{10}\,6s^2$	8.540	162.500	1 680	2 840	11.06	280	5.9389
67	Ho	Holmio	$[Xe]4f^{11}\,6s^2$	8.79	164.93032	1 734	2 993	17.0	265	6.0215
68	Er	Erbio	$[Xe]4f^{12}\,6s^2$	9.066	167.259	1 802	3 141	19.90	280	6.1077
69	Tm	Tulio	$[Xe]4f^{13}\,6s^2$	9.32	168.93421	1 818	2 223	16.84	247	6.1843
70	Yb	Iterbio	$[Xe]4f^{14}\,6s^2$	6.90	173.04	1 097	1 469	7.66	159	6.2542
71	Lu	Lutecio	$[Xe]4f^{14}\,5d^1\,6s^2$	9.841	174.967	1 925	3 675	22	414	5.4259
72	Hf	Hafnio	$[Xe]4f^{14}\,5d^2\,6s^2$	13.31	178.49	2 506	4 876	27.2	571	6.8251
73	Ta	Tantalio	$[Xe]4f^{14}\,5d^3\,6s^2$	16.69	180.9479	3 290	5 731	36.57	732.8	7.5496
74	W	Tungsteno	$[Xe]4f^{14}\,5d^4\,6s^2$	19.25	183.84	3 695	5 828	52.31	806.7	7.8640
75	Re	Renio	$[Xe]4f^{14}\,5d^5\,6s^2$	21.02	186.207	3 459	5 869	60.3	704	7.8335
76	Os	Osmio	$[Xe]4f^{14}\,5d^6\,6s^2$	22.61	190.23	3 306	5 285	57.85	738	8.4382
77	Ir	Iridio	$[Xe]4f^{14}\,5d^7\,6s^2$	22.56	192.217	2 739	4 701	41.12	563	8.9670
78	Pt	Platino	$[Xe]4f^{14}\,5d^9\,6s^1$	21.45	195.078	2 041.4	4 098	22.17	469	8.9588
79	Au	Oro	$[Xe]4f^{14}\,5d^{10}\,6s^1$	19.3	196.96655	1 337.33	3 129	12.55	324	9.2255
80	Hg	Mercurio$_{líquido}$	$[Xe]4f^{14}\,5d^{10}\,6s^2$	13.534	200.59	234.32	629.88	2.29	59.11	10.4375
81	Tl	Talio	$[Xe]4f^{14}\,5d^{10}\,6s^2\,6p^1$	11.85	204.3833	577	1 746	4.14	165	6.1082
82	Pb	Plomo	$[Xe]4f^{14}\,5d^{10}\,6s^2\,6p^2$	11.34	207.2	600.61	2 022	4.77	179.5	7.4167
83	Bi	Bismuto	$[Xe]4f^{14}\,5d^{10}\,6s^2\,6p^3$	9.78	208.98038	544.7	1 837	11.30	151	7.2855
84	Po	Polonio	$[Xe]4f^{14}\,5d^{10}\,6s^2\,6p^4$	9.320	(209)	527	1 235	13	102.91	8.414
85	At	Astatino	$[Xe]4f^{14}\,5d^{10}\,6s^2\,6p^5$	?	(210)	?	?	?	?	?
86	Rn	Radón	$[Xe]4f^{14}\,5d^{10}\,6s^2\,6p^6$	$9.73\cdot10^{-3}$	(222)	202	211.3	3.247	18.10	10.7485
87	Fr	Francio	$[Rn]7s^1$	1.87	(223)	~300	~950	~2	~65	4.0727
88	Ra	Radio	$[Rn]7s^2$	5.5	(226)	973	2 010	8.5	113	5.2784
89	Ac	Actinio	$[Rn]6d^1\,7s^2$	10	(227)	1 323	3 471	14	400	5.17
90	Th	Torio	$[Rn]6d^2\,7s^2$	11.7	232.0381	2 115	5 061	13.81	514	6.3067
91	Pa	Protactinio	$[Rn]5f^2\,6d^1\,7s^2$	15.37	231.03588	1 841	~4 300	12.34	481	5.89
92	U	Uranio	$[Rn]5f^3\,6d^1\,7s^2$	19.1	238.02891	1 405.3	4 404	9.14	417.1	6.1941
93	Np	Neptunio	$[Rn]5f^4\,6d^1\,7s^2$	20.45	(237)	910	4 273	3.20	336	6.2657
94	Pu	Plutonio	$[Rn]5f^6\,7s^2$	19.816	(244)	912.5	3 505	2.82	333.5	6.0260
95	Am	Americio	$[Rn]5f^7\,7s^2$	12	(243)	1 449	2 880	14.39	238.5	5.9738
96	Cm	Curio	$[Rn]5f^7\,6d^1\,7s^2$	13.51	(247)	1 613	3 383	~15	?	5.9914
97	Bk	Berkelio	$[Rn]5f^9\,7s^2$	~14	(247)	1 259	?	?	?	6.1979
98	Cf	Californio	$[Rn]5f^{10}\,7s^2$	15.1	(251)	1 173	1 743	?	?	6.2817
99	Es	Einstenio	$[Rn]5f^{11}\,7s^2$	8.84	(252)	1 133	?	?	?	6.42
100	Fm	Fermio	$[Rn]5f^{12}\,7s^2$	?	(257)	1 800	?	?	?	6.50
101	Md	Mendelevio	$[Rn]5f^{13}\,7s^2$	?	(258)	1 100	?	?	?	6.58
102	No	Nobelio	$[Rn]5f^{14}\,7s^2$	?	(259)	?	?	?	?	6.65

(*continúa*)

(*continuación*)

Z	Sím	Nombre	Configuración electrónica	ρ(g/cm^3)	m(g/mol)	$T_{fusión}$ (K)	$T_{ebullición}$ (K)	L_m (kJ/mol)	L_v (kJ/mol)	E_1(eV)
103	Lr	Laurencio	$[Rn]5f^{14}\,7s^2\,7p^1$	?	(262)	?	?	?	?	4.9
104	Rf	Rutherfordio	$[Rn]5f^{14}\,6d^2\,7s^2$	?	(261)	?	?	?	?	6
105	Db	Dubnio	$[Rn]5f^{14}\,6d^3\,7s^2$	?	(262)	?	?	?	?	?
106	Sg	Seaborgio	$[Rn]5f^{14}\,6d^4\,7s^2$	?	(266)	?	?	?	?	?
107	Bh	Bohrio	$[Rn]5f^{14}\,6d^5\,7s^2$	?	(264)	?	?	?	?	?
108	Hs	Hassio	$[Rn]5f^{14}\,6d^6\,7s^2$	?	(277)	?	?	?	?	?
109	Mt	Meitnerio	$[Rn]5f^{14}\,6d^7\,7s^2$	?	(276)	?	?	?	?	?
110	Ds	Darmstadtium	$*[Rn]5f^{14}\,6d^9\,7s^1$	?	(281)	?	?	?	?	?
111	Rg	Roentgenio	$*[Rn]5f^{14}\,6d^9\,7s^2$	?	(280)	?	?	?	?	?
112			$*[Rn]5f^{14}\,6d^{10}\,7s^2$	?	(285)	?	?	?	?	?
113			$*[Rn]5f^{14}\,6d^{10}\,7s^2\,7p^1$	?	(284)	?	?	?	?	?
114			$*[Rn]5f^{14}\,6d^{10}\,7s^2\,7p^2$	?	(289)	?	?	?	?	?
115			$*[Rn]5f^{14}\,6d^{10}\,7s^2\,7p^3$	?	(288)	?	?	?	?	?
116			$*[Rn]5f^{14}\,6d^{10}\,7s^2\,7p^4$	?	(293)	?	?	?	?	?
118			$*[Rn]5f^{14}\,6d^{10}\,7s^2\,7p^6$	?	(294)	?	?	?	?	?

*Pronosticado.

(Isótopo con mayor vida)

Respuestas de problemas y preguntas seleccionadas

Capítulo 21: Electrostática

Opción múltiple

21.1 *b*). **21.3** *b*). **21.5** *b*). **21.7** *a*). **21.9** *c*).

Problemas

21.27 96 470 C. **21.29** $3.12\cdot10^{17}$ electrones. **21.31** 31.7 C. **21.33** *a*) $5.00\cdot10^{16}$ electrones de conducción/cm^3. *b*) Hay $5.88\cdot10^{16}$ electrones de conducción en la muestra de silicio contaminada por cada electrón de conducción en la muestra de cobre. **21.35** $1.05\cdot10^{-5}$ C; la fuerza es de atracción. **21.37** $-2.9\cdot10^{-9}$ N. **21.39** 127 N. **21.41** $q = 2.02\cdot10^{-5}$C. **21.43** 3.1 N. **21.45** *a*) 0. *b*) $\pm a/\sqrt{2}$. **21.47** $\vec{F}_{\text{neta},2} = (-1.22\cdot10^{8}\ \text{N})\hat{x} + (7.25\cdot10^{7}\ \text{N})\hat{y}$; $\left|\vec{F}_{\text{neta},2}\right| = 1.42\cdot10^{8}$ N. **21.49** No; $T = -0.582$ N. **21.51** $-3.7\cdot10^{-29}\text{C} = -2.3\cdot10^{-10}\ e$. **21.55** $5.71\cdot10^{12}$ C.

21.57 $n = 1$: $F_1 = 8.24\cdot10^{-8}$ N; $F_{g,1} = 3.63\cdot10^{-47}$ N
$n = 2$: $F_2 = 5.15\cdot10^{-9}$ N; $F_{g,2} = 2.27\cdot10^{-48}$ N
$n = 3$: $F_3 = 1.02\cdot10^{-9}$ N; $F_{g,3} = 4.49\cdot10^{-49}$ N
$n = 4$: $F_4 = 3.22\cdot10^{-10}$ N; $F_{g,4} = 1.42\cdot10^{-49}$ N.

21.59 $4.41\cdot10^{-40}$.

Problemas adicionales

21.61 $-4.80\ \text{N}\hat{y}$. **21.63** *a*) 67.9 N. *b*) $4.06\cdot10^{28}$ m/s^2. **21.65** 114 N. **21.67** −65 μC. **21.69** $1.65\cdot10^{-7}\ e$; $9.39\cdot10^{-19}$ kg. **21.71** 0.169 μC. **21.73** $m_2 = 50.4$ g. **21.75** q =1.1 pC. **21.77** −24.1 cm. **21.79** 3.04 nC. **21.81** 2.8 m.

Capítulo 22: Campos eléctricos y ley de Gauss

Opción múltiple

22.1 *e*). **22.3** *a*). **22.5** *d*). **22.7** *c*). **22.9** *a*).

Problemas

22.23 $5.75\cdot10^{4}$ N/C. **22.25** 192.53° en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj desde el eje x positivo. **22.27** 0.56 m y 4.4 m. **22.29** $E = -kp/x^3$; la intensidad de campo baja más rápido perpendicularmente hacia el eje dipolo.

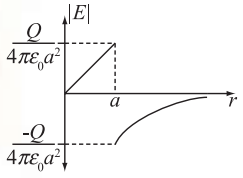
22.31 $(3.7\ \text{m/s})\hat{x} + (2.4\ \text{m/s})\hat{y}$. **22.33** $\vec{E} = (-Q/\pi\epsilon_0\pi R^2)\hat{j}$.

22.35 $\vec{E}(d) = \left(\dfrac{kQ}{d\sqrt{d^2+L^2}}\right)\hat{x} - \left(\dfrac{kQ}{dL} - \dfrac{kQ}{L\sqrt{d^2+L^2}}\right)\hat{y}$.

22.37 $4.12\cdot10^{3}$ N/C. **22.39** $3.46\cdot10^{-15}$ N m. **22.41** 0.189 m.

22.43 *a*) $v = \sqrt{2h\left(g - QE/M\right)}$. *b*) Si el valor $g - QE/M$ es menor que cero, el valor es no real y el cuerpo no se mueve. **22.45** *a*) 0.0141 N/C. *b*) $1.35\cdot10^{6}$ m/s^2. *c*) Hacia el alambre. **22.47** $-1.00\cdot10^{-8}$ C. **22.49** 60.0 N/C hacia la cara del cubo. **22.51** Como el radio del globo nunca llega a R, la carga incluida es constante, y el campo eléctrico no cambia. **22.53** *a*) −54.0 N/C. *b*) 0 N/C. *c*) 0.360 N/C. *d*) $4.97\cdot10^{-12}$ C/m^2. **22.55** $-6.77\cdot10^{5}$ C. **22.57** $1.13\cdot10^{5}$ N/C dirigido desde la placa positiva hacia la placa negativa. **22.59** $Q = (4/5)\pi AR^5$. **22.61** *a*) $4.5\cdot10^{8}$ N/C. *b*) $2.0\cdot10^{8}$ N/C. *c*) 0, puesto que está en la corteza conductora. *d*) $-1.6\cdot10^{7}$ N/C. **22.63** *a*) $1.13\cdot10^{5}$ N/C en la dirección x negativa. *b*) $4.52\cdot10^{5}$ N/C en la dirección x positiva. **22.65** *a*) $\vec{E} = (Qr/4\pi a^3\epsilon_0)\hat{r}$. *b*) $\vec{E} = (Q/4\pi\epsilon_0 r^2)\hat{r}$.

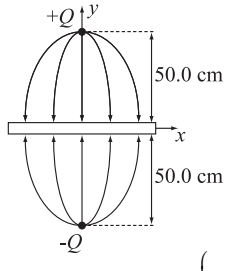
c)



La discontinuidad en $r = a$ se debe a la densidad de carga superficial del oro. La carga sobre la capa de oro produce un pico repentino en la carga total resultando en una discontinuidad en los campos eléctricos. **22.67** $E_x = 8.63\cdot10^{4}$ N/C, $E_y = 4.33\cdot10^{4}$ N/C.

Problemas adicionales

22.69 0. **22.71** $1.45\cdot10^{2}$ N/C en dirección alejándose del eje y. **22.73** *a*) −5.00 μC. *b*) 0. **22.75** $2.64\cdot10^{13}$ m/s^2. **22.77** $4.31\cdot10^{-5}$ C/m. **22.79** $3.1\cdot10^{16}$ electrones. **22.81** 274.76 N/C. **22.83** $7.13\cdot10^{4}$ N/C. **22.85** *a*)



b) $8.99\cdot10^{-3}$ N hacia abajo. *c*) $E_{\text{total}} = \dfrac{1}{2\pi\epsilon_0}\left(\dfrac{Qa}{\left(a^2+\rho^2\right)^{3/2}}\right)$.

d) $\sigma(\rho) = E\epsilon_0 = \dfrac{1}{2\pi}\left(\dfrac{Qa}{\left(a^2+\rho^2\right)^{3/2}}\right)$.

e) La carga total inducida es igual a la carga en magnitud.

Capítulo 23: Potencial eléctrico

Opción múltiple

23.1 *a*). **23.3** *c*). **23.5** *a*). **23.7** *a*). **23.9** *a*) y *c*).

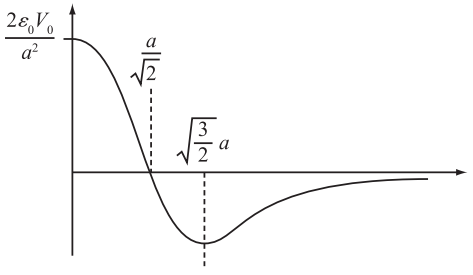
Problemas

23.21 0.266 m. **23.23** $3.85\cdot10^{-17}$ J. **23.25** $3.10\cdot10^{5}$ m/s. **23.27** *a*) 0.0293 m. *b*) 7.9 cm. *c*) 247 km/s. **23.29** *a*) 18 kV. *b*) –72 kV. **23.31** $6.95\cdot10^{12}$ electrones. **23.33** 11.2 MV. **23.35** 847 V. **23.37** *a*) 7.19 kV. *b*) 10.8 kV. **23.39** 480 V. **23.41** *a*) $x_{\text{máx}} = 1$. *b*) $E_0\,(2e^{-1} - 1)$. **23.43** 70. V/m. **23.45** 11.2 m/s^2. **23.47** *a*) $10x$ V/m^2. *b*) $3.83\cdot10^{9}$ m/s^2. *c*) $2.84\cdot10^{5}$ m/s.

23.49 $\vec{E}(\vec{r}) = \dfrac{kq}{r^3}\left(x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}\right)$.

23.51 *a*) $\vec{E}(\vec{r}) = \dfrac{2V_0\vec{r}}{a^2}e^{-r^2/a^2}$. *b*) $\rho(\vec{r}) = \dfrac{2\epsilon_0 V_0}{a^2}\left[1-2\left(\dfrac{r^2}{a^2}\right)\right]e^{-r^2/a^2}$. *c*) 0.

d)



23.53 $2.31\cdot10^{-13}$ J = 1.44 MeV. **23.55** 140 000 eV. **23.57** $v_1 = 0.105$ m/s, $v_2 = 0.0658$ m/s.

Problemas adicionales

23.59 campo: 0; potencial: 12 V. **23.61** $1.98\cdot10^{5}$ V. **23.63** $2.0\cdot10^{5}$ V. **23.65** $5.00\cdot10^{5}$ V; $1.39\cdot10^{-5}$ C. **23.67** *a*) 4:1. *b*) 100/3 μC. **23.69** 2.0 J. **23.71** Primera esfera: $3.00\cdot10^{3}$ N/C; segunda esfera: $6.00\cdot10^{3}$ N/C. **23.73** *a*) 46.8 V. *b*) 7.29 cm. **23.75** *a*) $9.4\cdot10^{4}$ V. *b*) $0.84\cdot10^{-6}$ C .

23.77 *a*) $V(x) = \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\dfrac{q_1}{x-x_1} + \dfrac{q_2}{x-x_2}\right)$ para $x > x_1, x_2$,

$V(x) = \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\dfrac{q_1}{x_1-x} + \dfrac{q_2}{x-x_2}\right)$ para $x_1 < x < x_2$ y

$V(x) = \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\dfrac{q_1}{x_1-x} + \dfrac{q_2}{x_2-x}\right)$ para $x < x_1, x_2$. *b*) $x = 11.0$ m, $x = 0.250$ m.

c) $E = \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[\dfrac{q_1}{(x-x_1)^2} + \dfrac{q_2}{(x-x_2)^2}\right]$ para $x > x_1, x_2$,

$E = \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[-\dfrac{q_1}{(x_1-x)^2} + \dfrac{q_2}{(x-x_2)^2}\right]$ para $x_1 < x < x_2$ y

$E = \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[-\dfrac{q_1}{(x_1-x)^2} - \dfrac{q_2}{(x_2-x)^2}\right]$ para $x < x_1, x_2$.

23.79 *a*) $V = \dfrac{q}{4\pi\epsilon_0}\left(\dfrac{1}{R}\right)$. *b*) $V = \dfrac{q}{4\pi\epsilon_0}\left(\dfrac{1}{R}\right)$. *c*) El campo eléctrico depende de la dirección, de modo que esto no es posible.

Capítulo 24: Capacitores

Opción múltiple

24.1 *b*). **24.3** *c*). **24.5** *c*). **24.7** *d*). **24.9** *a*).

Problemas

24.25 $1.13\cdot10^{2}$ km^2. **24.27** $8.99\cdot10^{9}$ m. **24.29** $7.09\cdot10^{-4}$ F. **24.31** *a*) 64.0 F. *b*) 4.5 V^{-7}. **24.33** 1.33 pF. **24.35** 4.3 nF. **24.37** *a*) 2.7 nF. *b*) 3.101 nF. **24.39** C_1/1 275. **24.41** 0.0360 J. **24.43** $1.0\cdot10^{-8}$ FV^2/m^3. **24.45** 1.00 F; $7.10\cdot10^{13}$ J. **24.47** *a*) 72.0 nJ. *b*) 36.0 nJ. *c*) 9.00 nJ. *d*) 18.0 nJ; la pérdida de energía es la diferencia entre las energías inicial y final del sistema. **24.49** $3.89\cdot10^{4}$. **24.51** $2.2\cdot10^{-5}$ C/m. **24.53** 70.8 pF.

24.55 $q = \dfrac{\pi\epsilon_0 L(\kappa+1)V}{2\ln(r_2/r_1)}$; $\dfrac{\kappa+1}{2}$. **24.57** *a*) 12.6 kV/M. *b*) 6.00 nC. *c*) 4.89 nC.

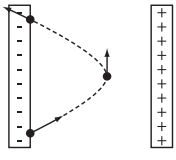
24.59 $C_{\text{aire}} = \dfrac{(8.85\cdot10^{-12}\text{ F/m})(1.00\cdot10^{-2}\text{ m})(10.0\cdot10^{-2}\text{ m})}{1.00\cdot10^{-4}\text{ m}} = 8.85\cdot10^{-11}$ F,

$q_{\text{aire}} = (8.85\cdot10^{-11}\text{ F})(1.00\cdot10^{3}\text{ V}) = 8.85\cdot10^{-8}$ C, $U_{\text{aire}} = \dfrac{(8.85\cdot10^{-8}\text{ C})^2}{2(8.85\cdot10^{-11}\text{ F})} =$ $4.425\cdot10^{-5}$ J, $U_{\text{agua}} = \dfrac{4.425\cdot10^{-5}\text{ J}}{80.4} = 5.51\cdot10^{-7}$ J.

Problemas adicionales

24.61 $5.5\cdot10^{-8}$ C. **24.63** 210%. **24.65** 1.5 km. **24.67** $V_A = 0.30$ V. **24.69** $4.0\cdot10^{-13}$ F. **24.71** 0.79 nF. **24.73** *a*) 5.40. *b*) 0.129 μC. *c*) $5.42\cdot10^{5}$ N/C. *d*) $5.42\cdot10^{5}$ N/C. **24.75** $9.5\cdot10^{-9}$ N en la dirección del movimiento del material dieléctrico. **24.77** *a*) $C_0 = 35$ pF, $U_0 = 1.0\cdot10^{-7}$ J. *b*) $C' = 92$ pF, $U = 3.8\cdot10^{-8}$ J. *c*) No. **24.79** *a*) 0.74 nC. *b*) 36 nJ. *c*) $1.2\cdot10^{5}$ V/m. **24.81** 45.0 μC.

24.83 *b*)



c) $V = mv_i^2\,\text{sen}^2\theta/(2q)$. *d*) $v_i = 2.00\cdot10^{5}$.

Capítulo 25: Corriente y resistencia

Opción múltiple

25.1 *d*). **25.3** *c*). **25.5** *c*). **25.7** *c*). **25.9** *c*). **25.11** *c*).

Problemas

25.27 Densidad corriente: 318 A/m^2; rapidez de arrastre de electrones: $3.30\cdot10^{-8}$ m/s. **25.29** *a*) $5.85\cdot10^{22}$ cm^{-3}. *b*) 133 A/m^2. *c*) $1.42\cdot10^{-8}$ m/s. **25.31** $R_B = 1.12$ mm. **25.33** calibre de alambre entre 9 y 10. **25.35** 3. **25.39** 0.0200 Ω. **25.41** *a*) –84%. *b*) 540%. *c*) A temperatura ambiente, $V_d = 0.43$ mm/s. A 77 k, la rapidez es $V_d = 2.7$ mm/s. **25.43** 2.571 Ω. **25.45** *a*) 1.5 Ω. *b*) 1.1 Ω. *c*) Cuando dos bombillas se conectan en serie, se espera que brillen más tenuemente que una sola bombilla. Esto significa que una bombilla se calentaría más y entonces tendría una mayor resistencia. **25.47** $R_{eq} = 60.9$ Ω. **25.49** *a*) $R_{eq} = 12.00$ Ω. *b*) $i = 1.00$ A. *c*) $\Delta V_3 = 1.00$ V. **25.51** *a*) $\Delta V_1 = 5.41$ V, $\Delta V_2 = 10.8$ V, $\Delta V_3 = \Delta V_4 = 2.70$ V, $\Delta V_5 = \Delta V_6 = 1.08$ V. *b*) $i_1 = i_2 = 1.00$ A, $i_3 = i_4 = i_5 = i_6 = 0.500$ A. **25.53** 86.0% más brillante. **25.55** 7.56 Ω. **25.57** *a*) 8.5 W. *b*) $\Delta V_1 = 81$ V y $\Delta V_2 = \Delta V_3 = 40$. V. **25.59** $P_1 = 16.0$ W; $P_2 = 18.0$ W; $P_3 = 17.3$ W. **25.61** *a*) $R_C = 64.6$ mΩ. *b*) $i = 9.99$ mA. *c*) $b = 1.31$ mm. *d*) 0.772 s. *e*) 4.99 mW. *f*) La potencia eléctrica se pierde como calor.

Problemas adicionales

25.63 10. A. **25.65** L = 1.00 m. **25.67** *a*) 0.0450 W. *b*) Cuando los resistores están conectados en paralelo, la potencia suministrada a los 200 Ω por la batería de 9 V es 9.00 veces mayor que en la configuración en serie. **25.69** 25.0 W. **25.71** 9.00 W. **25.73** *a*) $3.2\cdot10^{-5}$ A. *b*) 640 kW. *c*) $6.3\cdot10^{14}$ Ω. **25.75** *a*) V_{bc} = 55.0 V. *b*) i = 27.5 A. *c*) P = 1.01 kW. **25.77** 2.7 s. **25.79** 23.8:1. **25.81** *a*) *EJ*. *b*) ρJ^2; σE^2.

Capítulo 26: Circuitos de corriente directa

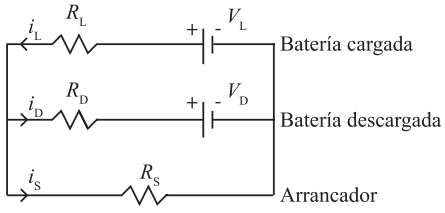
Opción múltiple

26.1 *a*). **26.3** *b*). **26.5** *b*). **26.7** *c*). **26.9** *d*), *e*) y *f*).

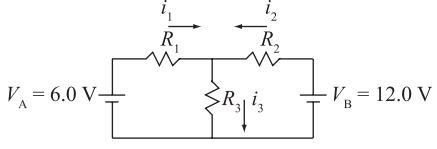
Problemas

26.23 $V_1=\left(\dfrac{R_1}{R_1+R_2}\right)\Delta V$, $V_2=\left(\dfrac{R_2}{R_1+R_2}\right)\Delta V$; los resistores en serie constituyen un divisor de voltaje. El voltaje ΔV se divide entre los dos resistores con caída de potencial proporcional a sus resistencias respectivas. **26.25** R = 40 Ω, V_{fem} =120 V.

26.27 *a*)



b) Arrancador: 150. A; batería cargada: 150. A; batería descargada: 0.496 A. **26.29** i_1 = 0.20 A, i_2 = 0.20 A, i_3 = 0.40 A, P_A = 1.2 W, P_B = 2.4 W.



26.31 i_1 = 0.251 en el sentido del movimiento de las manecillas del reloj, i_2 = 0.375 en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj, i_3 = 0.152 en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj, i_4 = 0.625 en el sentido del movimiento de las manecillas del reloj, i_5 = 0.222 en el sentido del movimiento de las manecillas del reloj, i_6 = 0.403 en el sentido del movimiento de las manecillas del reloj, $P(V_{fem,1})$ = 1.33 W, $P(V_{fem,2})$ = 4.84 W.

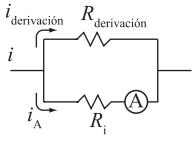
26.33 $R_L=\left(1+\sqrt{3}\right)R$.

26.35 $R_{derivación}=\dfrac{R_{Amperímetro}}{N-1}$; $R_{derivación}=10.1\ \text{m}\Omega$; 1/100 por el amperímetro 99/100 por la derivación.

26.37 V_{ab} = 2.99 V, V_{bc} = 3.02 V. Aumentar R_{volt} reduce el error puesto que el voltímetro extrae menos corriente. **26.39** *a*) 6.00 A a través de cada uno. *b*) 0.012 A. **26.41** 8.99 s. **26.43** $2.40\cdot10^{-4}$ C; 41.6 μs, **26.45** 4.35 ms. **26.47** 89 s. **26.49** 22 kV, 0.020 μF. **26.51** *a*) 2.22 V. *b*) 4.94 μJ. *c*) 1.41 μJ. **26.53** $\left(\sqrt{3}-1\right)C/2$.

Problemas adicionales

26.55 *a*) El resistor de derivación porta la mayor parte de la carga, de modo que el amperímetro no es dañado.



b) 7.5 mΩ. **26.57** C = 80 nF, R =10 kΩ. **26.59** *a*) 225 mA. *b*) 18.5 mA. **26.61** 3.8 s. **26.63** P_1 = 7.44 mW, P_2 = 4.30 W, P_3 = 7.23 W. **26.65** *a*) $1.22\cdot10^{-4}$ s. *b*) 68.5 μC. **26.67** *a*) 0.693 τ. *b*) 1:4. *c*) 10.0 μs. *d*) 6.93 μs. **26.69** i_2 = 469 mA. **26.71** 2*C*.

Capítulo 27: Magnetismo

Opción múltiple

27.1 *a*). **27.3** *e*). **27.5** *a*). **27.7** *a*), *c*), *d*) y *e*).

Problemas

27.21 $9.4\cdot10^{-5}$ T. **27.23** $\left|\vec{F}\right|=7.62\cdot10^{-4}$ N, la dirección de la fuerza está en el plano yz, θ = 23.2° por arriba del eje y negativo. **27.25** B = $3.37\cdot10^{-4}$ T. **27.27** $\dfrac{d\vec{p}}{dt}=-q\left(\vec{E}+\vec{v}\times\vec{B}\right)$, $\dfrac{dK}{dt}=-q\vec{E}\bullet\vec{v}$. **27.29** $6.8\hat{z}$ T.

27.31 El protón crea una espiral con una velocidad de $3.0\cdot10^5$ m/s a lo largo del eje z, donde el movimiento circular tiene una velocidad de $2.2\cdot10^5$ m/s y un radio de 4.7 mm. **27.33** 1:4; el campo eléctrico debe tener magnitud $E = vB$ y apuntar en la dirección y positiva para que las partículas se muevan en línea recta. **27.35** *a*) 1.71 T. *b*) 4.62 cm. *c*) $2.02\cdot10^6$ m/s. **27.37** m = 0.408 kg. **27.39** 15.0 N; esto es lo mismo que la fuerza sobre un alambre de la misma longitud con la misma corriente y el mismo campo magnético. **27.41** $0.92\cdot10^3$ rad/s^2. **27.43** $\dfrac{iB_0l^2}{a}\hat{x}$. **27.45** 0.14 T. **27.47** 1.8 rad/s^2. **27.51** *a*) $\vec{F}_{ab}=-0.32\hat{y}$ N. *b*) 0.62 N dirigido a 15° del eje x hacia el eje z negativo. *c*) F_{neta} = 0. *d*) τ = 0.025 N m y rota a lo largo del eje y de manera contraria al movimiento de las manecillas del reloj. *e*) La bobina rota de manera contraria al movimiento de las manecillas del reloj como se ve desde arriba. **27.53** *a*) Huecos de electrones. *b*) $2.3\cdot10^{24}$ e/m^3.

Problemas adicionales

27.55 $7.39\cdot10^{-2}$ N. **27.57** $2.33\cdot10^6$ A. **27.59** $2.00\cdot10^5$ m/s en la dirección x positiva. **27.61** *a*) $1.89\cdot10^{-6}$ T. *b*) ninguno. *c*) $4.71\cdot10^{-6}$ μs. **27.63** 0.031 m, $3.8\cdot10^{-7}$s. **27.65** $2\cdot10^5$ m/s. **27.67** $B=-4.23\cdot10^{-3}\,\hat{z}$ T. **27.69** 6.97°. **27.71** *b*) 10.4 mm. *c*) T =$1.31\cdot10^{-7}$ s, f = $7.62\cdot10^6$ Hz. *d*) 114 mm.

Capítulo 28: Campos magnéticos de cargas en movimiento

Opción múltiple

28.1 *b*). **28.3** *c*). **28.5** *d*). **28.7** *c*). **28.9** *a*).

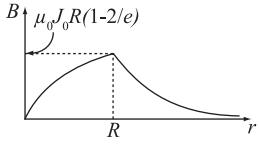
Problemas

28.27 Paralelo al eje z por (0,4,0), portando una corriente en dirección opuesta al primer alambre. **28.29** 7.5° por abajo del eje x. **28.31** 45° en el plano xy a una altura de b. **28.33** 204 A. **28.35** *a*) $-1.89\cdot10^{-2}$ N$\hat{y}$. *b*) $\vec{F}=1.89\cdot10^{-2}$ N$\hat{x}$. *c*) $\vec{F}=0$ N. **28.37** $9.42\cdot10^{-5}$ T a 45.0° de la dirección x negativa hacia el eje y positivo. **28.39** B_a = 0; B_b = $1.08\cdot10^{-6}$ T; B_c = $2.70\cdot10^{-6}$ T; B_d =$1.69\cdot10^{-6}$ T. **28.41** Sí. **28.43** $9.4\cdot10^{-5}$ T.

28.45 Si $r \le R$ $B_{r<R}=\dfrac{\mu_0J_0}{r}[R^2-R(R+r)e^{-r/R}]$;

si $r \ge R$ entonces

$B_{r>R}=\dfrac{\mu_0J_0R^2}{r}[1^2-2e^{-1}]$.



28.47 4:3. **28.49** *a*) $1.3\cdot10^{-5}$ T. *b*) $1.0\cdot10^{-2}$ T. **28.51** $1.9\cdot10^{-19}$ kg m/s. **28.53** 0.20 K. **28.55** 55. **28.57** $1.12\cdot10^{-5}$ Am^2. **28.59** *a*) $L = I\bar{\omega} = (2/5)mR^2\bar{\omega}$. *b*) $\mu = q\bar{\omega}R^2/5$. *c*) $\gamma_e = -e/(2m)$.

Problemas adicionales

28.61 4.00 mT hacia la página. **28.63** $4.1\cdot10^{9}$ A. **28.65** 18 000 vueltas. **28.67** 24.5 mT. **28.69** q = 0.491 C. **28.71** $1.25\cdot10^{-7}\,\hat{x}$ N m. **28.73** *a*) $-7.28\cdot10^{10}$ m/s^2. *b*) $-1.19\cdot10^{11}$ m/s^2. **28.75** *a*) $1.06\cdot10^{-4}$ N m. *b*) 1.72 rad/s. **28.77** 4.42 A en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj (según se ve desde la barra imantada).

28.79 $B = \mu_0 J_0\left[\frac{r}{2} - \frac{r^2}{3R}\right]$.

Capítulo 29: Inducción electromagnética

Opción múltiple

29.1 *d*). **29.3** *a*). **29.5** *a*). **29.7** *d*).

Problemas

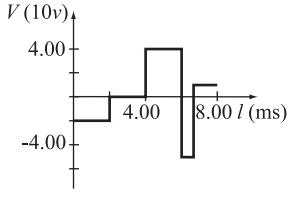
29.23 $1.89\cdot10^{-5}$ V. **29.25** 0.

29.27 $\Delta V_{\text{ind}} = \frac{\mu_0\pi a^2 V_0\omega}{2bR_1}\cos\omega t$; $i = -\frac{\mu_0\pi a^2 V_0\omega}{2bR_1R_2}\cos\omega t$.

29.29 *a*) 7.07 mA. *b*) En el sentido del movimiento de las manecillas del reloj. **29.31** 0.558 V. **29.33** $v_{\text{term}} = \frac{mgR}{\omega^2B^2}$. **29.35** $6.24\cdot10^{-7}$ V.

29.37 17.5 Hz. **29.39** *a*) 0.370 A. *b*) 0.2617 A, 102.7 W.

29.41



29.43 *a*) 1.00 μs. *b*) 0; 8.65 μA; 10.0 μA. **29.45** 11 V. **29.47** *a*) 6.0 A. *b*) 3.0 A. *c*) 3.0 A. *d*) −18 V. *e*) −18 V. *f*) 0. *g*) 0. **29.49** $1.0\cdot10^{3}$ m^3. **29.51** *a*) $6.4\cdot10^{26}$ J/m^3. *b*) $7.07\cdot10^{9}$ kg/m^3. **29.53** $4.17\cdot10^{-5}$ °C. **29.55** 1:1.

Problemas adicionales

29.57 $7.54\cdot10^{-3}$ V. **29.59** No cambia. **29.61** $u_B = 9.95\cdot10^{-4}$ J/m^3, $u_E = 9.95\cdot10^{-8}$ J/m^3; $\frac{u_B}{u_E} = 1.00\cdot10^{5}$. **29.63** 0.0866 H. **29.65** 10.0 V; la corriente inducida es en sentido contrario al movimiento de las manecillas de reloj. **29.67** 2.0 m^2. **29.69** 0.275 H. **29.71** *a*) i_1 = 4.00 mA; i_2 = 2.00 mA. *b*) 2.00 mW. *c*) 0.300 mN. **29.73** 9.4 μV. **29.75** *a*) 0.257 mN. *b*) 25.8 μW. *c*) 25.7 μW.

Capítulo 30: Oscilaciones y corrientes electromagnéticas

Opción múltiple

30.1 *d*). 30.3 *b*). **30.5** *d*). **30.7** *d*).

Problemas

30.23 $9.42\cdot10^{-4}$ s. **30.25** 7.15 mF. **30.27** 1.19 ms, 3.25 ms, 5.63 ms. **30.29** $t = (L/R)\ln(2)$. **30.31** 251 Hz. **30.33** 500. rad/s. **30.35** 295 Ω; 40.7 mA. **30.37** *a*) 2 240 rad/s. *b*) 0.400 A. **30.39** 117 Ω. **30.41** 537 V. **30.43** *a*) $I_{\text{máx}}$ = 34 A. *b*) θ = 0.816 rad. *c*) C' = 757 μF, $I'_{\text{máx}}$ = 50. A, φ' = 0 rad. **30.45** *a*) C = 1.33 nF; use un capacitor de capacitancia 1.00 nF. *b*) 124 kHz. **30.47** $Q = (1/R)\sqrt{L/C}$. **30.49** *a*) 18.4 kHz. *b*) 2.25 W. **30.51** *a*) 0.392 pF. *b*) 11.9 Ω. **30.53** *a*) 1.1 V. *b*) 0. **30.55** 2.03 W. **30.57** *a*) 14 V. *b*) 9.0 V.

Problemas adicionales

30.59 $2.53\cdot10^{-12}$ F. **30.61** *a*) 0.77 A. *b*) 160 V. **30.63** 1.45 Ω. **30.65** *a*) 0.101 A. *b*) $7.02\cdot10^{-4}$ s. **30.67** *a*) 10.0 Ω. *b*) 7.50 Ω. *c*) $5.97\cdot10^{-5}$ H. *d*) 26.7 kHz. **30.69** *a*) $1.01\cdot10^{-3}$ J/m^3. *b*) 10.1 A. **30.71** $P = \frac{1}{2}I_R^2R\left(1-\cos(2\omega t)\right)$. **30.73** 377 Hz. **30.75** 1 990 Hz.

Capítulo 31: Ondas electromagnéticas

Opción múltiple

31.1 *c*). **31.3** *b*). **31.5** *a*). **31.7** *c*).

Problemas

31.21 $2.5\cdot10^{-5}$ T. **31.23** 10.0 μA.

31.25 $i_d = \epsilon_0 R\left(\frac{A}{L}\right)\frac{di}{dt} = \epsilon_0\rho\frac{di}{dt}$.

31.27 0.984 pies. **31.29** *a*) 0.03 s. *b*) 0.24 s; cuando la señal viaja por el cable no es notable. No obstante, vía satélite, Alicia recibirá una respuesta de su novio al cabo de 0.5 s, lo cual es bastante notable. **31.31** De $4\cdot10^{14}$ Hz a $8\cdot10^{14}$ Hz. **31.33** 3.2 mH. **31.35** *a*) 1.3 W/m^2. *b*) 1.2 W/m^2. *c*) 0.12 W/m^2. **31.37** $1.70\cdot10^{6}$ V/m. **31.39** S_{prom} = 13.3 W/m^2. *a*) $U = 4.43\cdot10^{-8}$ J/m^3. *b*) $B = 3.33\cdot10^{-7}$ T. **31.41** *a*) $I = 1.27\cdot10^{7}$ W/m^2. La intensidad es mucho mayor que la intensidad de la luz solar sobre la Tierra (1 400 W/m^2). *b*) $E_{\text{rms}} = 6.93\cdot10^{4}$ V/m. *c*) $S_{\text{prom}} = 1.27\cdot10^{7}$ W/m^2. *d*) $S(x,t) = 3\cdot10^{7}$ W/m^2 sen$^2(10^7\,x\ \text{m}^{-1} - 4\cdot10^{15}t$ Hz). *e*) $B_{\text{rms}} = 2.31\cdot10^{-4}$ T. **31.43** *a*) E = 726 V/m, B = 2.42 μT. *b*) P_r = 3.33 μPa, F = 2.50 μN. **31.45** $3.27\cdot10^{-6}$ N. **31.47** 15.1 mW. **31.49** *a*) $w = 3.08\cdot10^{-9}$ N = 3.08 nN. *b*) I = 1.59 kW/m^2, P_r = 5.31 μN/m^2. *c*) N = 185 láseres. **31.51** 2.50 mW. **31.53** $I_2 = 1.13\cdot10^{4}$ W/m^2, $E = 2.92\cdot10^{3}$ V/m, $B = 9.74\cdot10^{-6}$ T.

Problemas adicionales

31.55 E_{total} = 518 kW h. **31.57** $3.88\cdot10^{5}$ V/m. **31.59** 136 W. **31.61** 100 V/m. **31.63** 6.3 cm. **31.65** *a*) $7.07\cdot10^{-8}$ T. *b*) 38.0 W. **31.67** *a*) E_{rms} = 775 V/m. *b*) $E_{\text{total}} = 8.34\cdot10^{-12}$ J. **31.69** $2.07\cdot10^{7}$ m/s^2. **31.71** $S = 1.66\cdot10^{-5}$ W/m^2. *b*) $F_{\text{rms}} = 8.96\cdot10^{-21}$ N. **31.73** t = 8.94 h (u 8 horas 57 minutos); $N = 4.00\cdot10^{23}$.

Capítulo 32: Óptica geométrica

Opción múltiple

32.1 *c*). **32.3** *a*). **32.5** *b*).

Problemas

32.21 −1.0 m. **32.23** 6 m. **32.25** −13 cm. **32.27** 0.389. **32.29** −3.0 m. **32.33** $\theta_{c,\text{aire}} = 42°$, $\theta_{c,\text{agua}} = 63°$, $\theta_{c,\text{aceite}} = 90.°$. **32.35** 52.4°. **32.37** 16.3°. **32.39** 1.35%.

Problemas adicionales

32.43 *a*) La imagen está 50.0 cm dentro del espejo. *b*) La imagen tiene la misma altura, h = 2.00 m. *c*) La imagen está derecha. *d*) La imagen es virtual. **32.45** Si el objeto se coloca a 15.0 cm, la imagen

será real y estará a una distancia de 30.0 cm del espejo. Si el objeto se coloca a 5.00 cm, la imagen será virtual y estará a −10.0 cm del espejo. **32.47** 128.0°. **32.49** El ángulo crítico en el agua es de 9.03° mayor que el ángulo crítico en el aire. **32.51** 28.9° con respecto a la normal. **32.53** 1.92 m. **32.55** *a*) $\vec{B}(\vec{x},t) \rightarrow -\vec{B}(\vec{x},-t)$. *b*) No transmiten luz de manera unidireccional. **32.57** 1.40 rad/s.

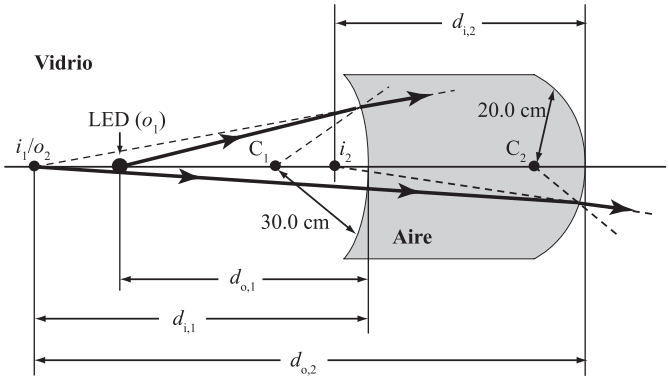
Capítulo 33: Lentes e instrumentos ópticos

Opción múltiple

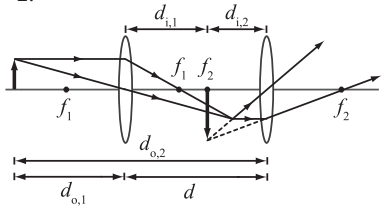
33.1 *b*). **33.3** *c*). **33.5** *a*). **33.7** *b*). **33.9** *b*). **33.11** *b*).

Problemas

33.29 3.0. **33.31** 0.198 m. **33.33** 1.5; invertida.
33.35 *a*) 48.0 cm.
b)



33.37 5.00. **33.39** 6.00 cm. **33.41** −8.5 mm, invertida, virtual.
33.43 *a*) 2*f*. *b*) −2.
c)



d) virtual, invertida, más grande.
33.45 18.2 cm. **33.47** *a*) 2.50 cm. *b*) 2.3 cm. **33.49** *a*) 40. cm. *b*) −125 cm; el negativo indica que la imagen está en el mismo lado que el objeto. *c*) 59 cm. *d*) 1.7 dioptrías. *e*) Convergente.
33.51 39 cm; 50. cm. **33.53** 28.75 cm; 9.86 cm; la relación de amplificación angular es $\frac{m_{\text{cerca}}}{m_{\text{normal}}} = 0.34$.
33.55 *a*) $3.5 \cdot 10^2$ mm. *b*) $2.5 \cdot 10^2$ mm. **33.57** 4.0 veces el de la lente original. **33.59** 2.4 cm. **33.61** 4.00 cm. **33.63** *a*) 20.0 mm. *b*) 9.7 mm. **33.65** 20.0, invertida. **33.67** −20.0. **33.69** 1.3 m.

Problemas adicionales

33.73 −4 dioptrías. **33.75** 13 cm. **33.77** A 18 cm de la lente, del mismo lado de la lente que el objeto. **33.79** −1.4 dioptrías. **33.81** 8.84 cm. **33.83** 0.243 mm. **33.85** 190 cm a la derecha del objeto; 5.0 cm. **33.87** miope; 0.12 m. **33.89** 1.3 pulgadas; amplificación −0.070. **33.91** 38.0 cm. **33.93** 8.33 cm. **33.95** 1.0 dioptría.

Capítulo 34: Óptica de ondas

Opción múltiple

34.1 *c*). **34.3** *d*). **34.5** *a*). **34.7** *b*).

Problemas

34.19 *a*) 421.9 nm. *b*) $1.999 \cdot 10^8$ m/s. **34.21** 87.5 nm. **34.23** 1.0 m. **34.25** 1.05 mm. **34.27** 420 nm. **34.29** 139 nm. **34.31** 1.50. **34.33** 720.3 nm. **34.35** $17.0 \cdot 10^2$. **34.37** 1 230 nm. **34.39** 600. nm. **34.41** $2.7 \cdot 10^{-6}$ grados. **34.43** Telescopio espacial Hubble: $1.3 \cdot 10^{-5}$ grados: telescopio Keck: $3.1 \cdot 10^{-6}$ grados; Radio Telescopio de Arecibo: 0.048 grados: el Radio Telescopio de Arecibo es peor que los telescopios anteriores en términos de resolución angular. El telescopio Keck es mejor que el telescopio espacial Hubble debido a su mayor diámetro. **34.45** *a*) $7.7 \cdot 10^{-3}$ grados. *b*) 11 km. **34.47** 31. **34.49** *a*) $a = 10\lambda$. *b*) $d = 100\lambda$. *c*) $a/d = 1{:}10$. *d*) Sin λ, hay información insuficiente para encontrar *a* o *d*. **34.51** 449 nm. **34.53** 400 nm, 600 nm.

Problemas adicionales

34.55 $1.25 \cdot 10^4$ líneas/cm. **34.57** 0.593 m. **34.59** 665 nm. **34.61** 30.0 mm. **34.63** 104 nm. **34.65** 667. **34.67** 2.1 km. **34.69** 122 nm. **34.71** 2.1 μm. **34.73** (3) 89.

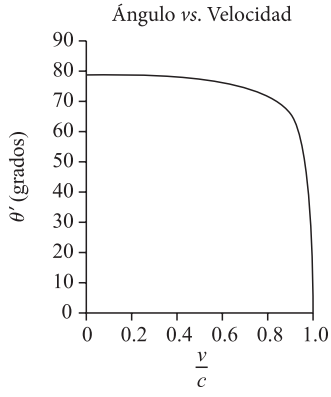
Capítulo 35: Relatividad

Opción múltiple

35.1 *a*). **35.3** *c*). **35.5** *a*). **35.7** *c*).

Problemas

35.21 0.984 pies/un metro. **35.23** $(1/v)\sqrt{v^2-u^2}$. **35.25** *a*) un metro. *b*) 0.87 m. **35.27** 0.94*c*. **35.29** *a*) $t_s = 4.44 \cdot 10^{-8}$ s. *b*) $L = 6.40$ m. **35.31** *a*) 0.81*c*. *b*) 20. años luz. **35.33** 77.7°.



35.35 0.22*c*. **35.37** 314 Hz. **35.39** *a*) B. *b*) $3.73 \cdot 10^{-5}$s.
35.41 −100. m/s. **35.43** *a*) 4.9 ly. *b*) 7.6 y. **35.45** *a*) 66.14 m. *b*) 0.8514*c*. *c*) 2.06 μs. *d*) 529 m. **35.47** 0.707*c*. **35.49** 4.02 GeV. **35.51** 1 200 MeV. **35.53** *a*) 5 keV. *b*) 0.139*c*. *c*) Las energías relativista y clásica son E_R = 516 keV y 5.00 keV, respectivamente. Los momentos relativista y clásico son 71.7 keV/c y 71.5 keV/c, respectivamente. **35.55** *a*) $c/\sqrt{2}$. *b*) $\sqrt{17}m$. *c*) $\sqrt{18}$. **35.59** *a*) 2.954 km. *b*) $2.485 \cdot 10^{-54}$ m; si un protón tuviera una descripción espacio-tiempo clásica, sería un objeto extraño y no físico, conocido cono singularidad desnuda. **35.61** 0.0735 AU.

Problemas adicionales

35.63 $1.82\cdot10^{-27}$ kg m/s. **35.65** 32.5 MeV. **35.67** 0.678 g. **35.69** 0.882*c*. **35.71** 0.484 ns, demasiado pequeño para detectar. Medido por alguien en la nave espacial, t_1 = 32.9 años. Visto por alguien en la estación espacial, t_2 = 105 años. **35.77** *a*) $0.736c = 2.21\cdot10^{8}$ m/s. *b*) Parecería que los fotones viajan a la velocidad de la luz. **35.79** 18.0 horas.

35.81 *a*) $dv = g\left(1-\dfrac{v^2}{c^2}\right)d\tau$. *b*) $v(t)=\dfrac{gt}{\left(1+(gt/c)^2\right)^{1/2}}$.

c) En el tiempo, $gt \ll c$, es decir, el límite newtoniano $v(t) \cong gt$. En el límite einsteiniano (relativista), $\lim\limits_{t\to+\infty} v(t)=c$. *d*)

$$x(t)=\frac{c^2}{g}\sqrt{1+\left(\frac{gt}{c}\right)^2}.$$

e) La trayectoria forma parte de una rama de una hipérbola en un diagrama de Minkowski. *f*) 354 días, 0.401 años luz.

Capítulo 36: Física cuántica

Opción múltiple

36.1 *b*). **36.3** *a*), *c*). **36.5** *c*). **36.7** *c*).

Problemas

36.19 *a*) $5.00\cdot10^{-7}$ m. *b*) $9.67\cdot10^{-6}$ m. **36.21** $3.5\cdot10^{-19}$ m; la energía del rayo gamma es 3 700 veces mayor que la masa de un protón en reposo. **36.23** *a*) 9.42 μm. *b*) 1.02 kW. *c*) Su longitud de onda no está en el espectro visible. **36.25** *a*) E = 0.243 J. *b*) $n = 1.21\cdot10^{19}$ fotones por segundo. *c*) $V_T = 1.49\cdot10^{-6}$ m^3. **36.27** 0.34 eV. **36.29** *a*) 2.30 eV. *b*) Potasio o sodio. **36.31** *a*) 0.622 eV. *b*) $5.00\cdot10^{2}$ nm. *c*) 500 nm. **36.33** $2.42\cdot10^{-12}$ m. **36.35** 64 eV. **36.37** *a*) $1.49\cdot10^{-4}$ *b*) 9.48 MeV. **36.39** *a*) 600 nm. *b*) 0.867 nm. **36.41** *a*) 47.52 pm. *b*) 11 nm. **36.43** *a*) 1300 m/s. *b*) Esta velocidad es mucho menor que la velocidad de la luz, de modo que la aproximación no relativista es suficiente. *c*) 5.0 μeV.

36.45 *a*) $\omega(k)=\dfrac{hk^2}{4\pi m}$. *b*) $v_p=\dfrac{p}{2m}$, $v_g=\dfrac{p}{m}$, velocidad de fase.

36.47 *a*) $6.63\cdot10^{-35}$ m/s. *b*) $5.27\cdot10^{-36}$ m/s. **36.49** $6.52\cdot10^{-55}$ kg. **36.51** 1.45 m/s.

36.53 $\langle n\rangle=\dfrac{\exp\left(\dfrac{-E}{k_BT}\right)}{1-\exp\left(\dfrac{-E}{k_BT}\right)}$.

36.55 $C=Nk_B\left(\dfrac{E}{k_BT}\right)^2\dfrac{\exp\left(\dfrac{E}{k_BT}\right)}{\left(\exp\left(\dfrac{E}{k_BT}\right)+1\right)^2}$. Para $k_BT \gg 1$,

$C\approx\dfrac{Nk_B}{4}\left(\dfrac{E}{k_BT}\right)^2$. Para $0 < k_BT \ll 1$, $C\approx Nk_B\left(\dfrac{E}{k_BT}\right)^2\exp\left(-\dfrac{E}{k_BT}\right)$.

Problemas adicionales

36.57 0.02333. **36.59** Para la pelota: $1.48\cdot10^{-34}$ m. Para la nave espacial: $7.63\cdot10^{-41}$ m. **36.61** $1.06\cdot10^{19}$ s^{-1}. **36.63** 60 pm. **36.65** 0.579 m. **36.67** 61. **36.69** 388 nm. **36.71** $3\cdot10^{43}$. **36.73** $p = 1.89\cdot10^{-19}$ N m, $E = 5.68\cdot10^{-11}$ J.

Capítulo 37: Mecánica cuántica

Opción múltiple

37.1 *c*). **37.3** *d*). **37.5** *b*). **37.7** *d*). **37.9** *a*).

Problemas

37.23 9.0 fm; puesto que el diámetro de los protones y los neutrones es aproximadamente 1.00 fm, serían objetivos útiles para demostrar la naturaleza ondulatoria de neutrones a 10.0 MeV. **37.25** 0.094 eV, 0.38 eV. **37.27** 4.

37.29

$$\psi(x)=\begin{cases}0 & \text{para } x<-a/2 \text{ y } x>a/2\\ \sqrt{\dfrac{2}{a}}\operatorname{sen}\left(\dfrac{n\pi x}{a}\right) & \text{para } -a/2\le x\le a/2 \text{ con } n \text{ par}\\ \sqrt{\dfrac{2}{a}}\cos\left(\dfrac{n\pi x}{a}\right) & \text{para } -a/2\le x\le a/2 \text{ con } n \text{ impar}\end{cases}$$

37.31 No. **37.33** 5.9. **37.35** 6.99 eV. **37.37** 45.5 eV.

37.39 *a*) $\psi(x)=\begin{cases}Ae^{\gamma x} & \text{para } x\le -a/2\\ C\cos(\kappa x)+D\operatorname{sen}(\kappa x) & \text{para } -a/2\le x\le a/2\\ Fe^{-\gamma x} & \text{para } x\ge a/2\end{cases}$

$E=\dfrac{\hbar^2\kappa^2}{2m}$.

b) $\eta=\dfrac{1}{\gamma}=\sqrt{\dfrac{\hbar^2}{2m(U_0-E)}}=\dfrac{\hbar}{\sqrt{2m(U_0-E)}}$. *c*) 467 pm.

37.41 720 nm. **37.43** 101 eV; 85.5 kN/m.

37.45 *a*) $A_2=\dfrac{1}{\sqrt[4]{\pi}\sqrt{b}}$. *b*) 0.157. **37.47** *a*) $A=\sqrt{\dfrac{2}{L}}$. *b*) 0.402.

37.49 0.250. **37.51** $\Psi(\vec{r},t)=Ae^{i(\vec{p}\cdot\vec{r})/\hbar}e^{-ip^2t/2m\hbar}=A^2$.

37.53 $\left|\Psi(x,t)\right|^2=\dfrac{1}{a}\operatorname{sen}^2\left(\dfrac{\pi x}{a}\right)\left[1+4\cos^2\left(\dfrac{\pi x}{a}\right)+4\cos\left(\dfrac{\pi x}{a}\right)\cos\left(\dfrac{3\hbar\pi^2t}{2ma^2}\right)\right]$.

37.55 *a*) $3.22\cdot10^{-22}$ s. *b*) $1.75\cdot10^{-25}$ s.

Problemas adicionales

37.57 28.2 eV.

37.59 *a*) $\psi=\left(\sqrt{\dfrac{2}{L}}\right)^3\operatorname{sen}\dfrac{\pi x}{L}\operatorname{sen}\dfrac{\pi y}{L}\operatorname{sen}\dfrac{\pi z}{L}$; $0<x,y,z<L$. *b*) 14.

37.61 $8.21\cdot10^{-4}$ eV. **37.63** 4.0 pm. **37.65** *a*) 1.2 eV. *b*) 0.19 eV. **37.67** 2.9 MeV. **37.69** $1.10\cdot10^{3}$ nm. **37.71** 38 eV. **37.73** (2,2) y (1,4).

Capítulo 38: Física atómica

Opción múltiple

38.1 *d*). **38.3** *d*). **38.5** *b*). **38.7** *b*).

Problemas

38.19 91.2 nm. **38.21** 2 279 nm, 7 458 nm; no. **38.23** –0.378 eV. **38.25** *a*) $1.0968\cdot10^{7}$ m^{-1}. *b*) $5.4869\cdot10^{6}$ m^{-1}. **38.27** inicial: 6; final: 3.

38.29 $r=\dfrac{\hbar^2}{GMm^2}n^2$; $2.523\cdot10^{74}$.

38.31 $4.716\cdot10^{-34}$ J s y 0 J s. **38.33** 65.9°.

38.35 *a*) $A_1 = \dfrac{2}{a_0^{3/2}}$. *b*) e^{-1}/a_0.
38.37 0.03432. **38.39** $a_0/2$.
38.41 *a*) $\dfrac{E_0}{\kappa^2}$. *b*) 27.2 MeV.
38.43 *a*) $r_n = \dfrac{a_0 n^2}{Z}$. *b*) $v_n = \dfrac{Z}{n}\sqrt{\dfrac{ke^2}{\mu a_0}}$. *c*) $E_0' = \dfrac{-Z^2}{n^2}E_0$.
38.45 656 nm; se requiere un láser con una longitud de onda alrededor de 5.4 veces mayor. **38.47** *a*) 30.0 μJ. *b*) $1.03 \cdot 10^{14}$ átomos.

Problemas adicionales

38.49 91.16 nm. **38.51** 0.05445%, $4.554 \cdot 10^{-31}$ kg. **38.53** El elemento es tulio (Th). **38.55** –2 528 eV, –632 eV, –281 eV. **38.57** –54.4 eV, –13.6 eV, –6.05 eV. **38.59** –6.72 meV. **38.61** $3.70 \cdot 10^{-3}$ eV.
38.63 Sí. $v = 4.07$ m/s. **38.65** 0.323.

Capítulo 39: Física de partículas elementales

Opción múltiple

39.1 *a*). **39.3** *c*). **39.5** *d*). **39.7** *c*).

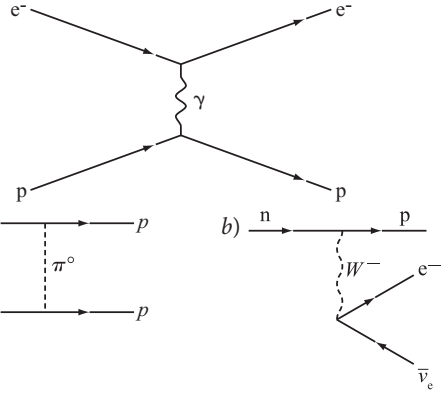
Problemas

39.23 49.9 fm. **39.25** $1.32 \cdot 10^{-27}$ m^2/sr. **39.27** $r_{\text{mín}}/\lambda$ es proporcional a $1/\sqrt{K}$. **39.29** 120 partículas por segundo.

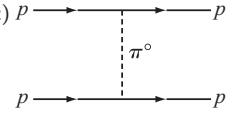
39.31 $F^2(\Delta p) = \dfrac{4\pi\rho\hbar^3}{Ze(\Delta p)^3}\left[\operatorname{sen}\left(\dfrac{\Delta pR}{\hbar}\right) - \left(\dfrac{\Delta pR}{\hbar}\right)\cos\left(\dfrac{\Delta pR}{\hbar}\right)\right]$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{(2kZ_pZ_te^2m_p)^2}{(\Delta p)^4}\left[\frac{3\hbar^3}{\Delta p^3R^3}\operatorname{sen}\left(\frac{\Delta pR}{\hbar}\right) - \left(\frac{\Delta pR}{\hbar}\right)\cos\left(\frac{\Delta pR}{\hbar}\right)\right]^2.$$

39.33 $2.2 \cdot 10^8$ m/s.
39.35

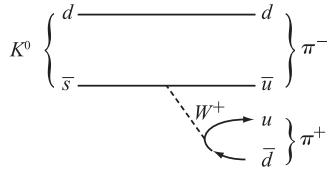


39.37 *a*)



b)

39.39 154.
39.41



39.43 $2.1 \cdot 10^{12}$ K; $5.1 \cdot 10^{-5}$ s. **39.45** *a*) $9 \cdot 10^5$ eV.
39.47 *a*) $H = \left(\dfrac{1}{a}\dfrac{da}{dt}\right)_{\text{rec}}$. *b*) 420 Mpc.

Problemas adicionales

39.49 *a*) 0.03636 eV más de 200 000 veces menor. **39.51** 54.4 meV. **39.53** 10^{-18} m. **39.55** $9 \cdot 10^{-4}$ m^2. **39.57** *a*) 316 ke^2/mv^2. *b*) 48.8 fm. **39.59** 340 fm. **39.61** 13/32.
39.63 $F(\Delta p) = \dfrac{\operatorname{sen}[(\Delta p)a/\hbar]}{(\Delta p)a/\hbar}$; $\dfrac{d\sigma}{d\Omega} = \left[\dfrac{2Ze^2m_e}{4\pi\epsilon_0}\right]^2 \dfrac{1}{(\Delta p)^4}\left[\dfrac{\operatorname{sen}[(\Delta p)a/\hbar]}{(\Delta p)a/\hbar}\right]^2$;
Sí.

Capítulo 40: Física nuclear

Opción múltiple

40.1 *b*). **40.3** *b*). **40.5** *d*). **40.7** *d*).

Problemas

40.23 *a*) 39 MeV. *b*) 92 MeV. *c*) 489 MeV. *d*) 731 MeV.
40.25 –0.46 fm^{-1}. **40.27** *a*) ${}^{60}_{27}\text{Co} \rightarrow {}^{60}_{28}\text{Ni}^+ + {}^{0}_{-1}\text{e}^- + \bar{\nu}_e$.
b) ${}^{3}_{1}\text{H} \rightarrow {}^{3}_{2}\text{He}^+ + {}^{0}_{-1}\text{e}^- + \bar{\nu}_e$. *c*) ${}^{14}_{6}\text{C} \rightarrow {}^{14}_{7}\text{N}^+ + {}^{0}_{-1}\text{e}^- + \bar{\nu}_e$.
40.29 0.352 MeV. **40.31** 0.253 h. **40.33** $9.65 \cdot 10^{15}$ años.
40.35 *a*) $1.65 \cdot 10^{11}$ desint/(g s) = $1.65 \cdot 10^{11}$ Bq/g = 4.45 Ci/g.
b) 1.15 Bq. *c*) $1.11 \cdot 10^{10}$ desint. **40.37** 1 946 o bien, 1 947.

40.39 $N_B(t) = \dfrac{\lambda_A}{\lambda_B - \lambda_A}N_{A0}e^{-\lambda_A t} + \left(N_{B0} - \dfrac{\lambda_A}{\lambda_B - \lambda_A}N_{A0}\right)e^{-\lambda_B t}$.

40.41 ${}^{117}_{50}\text{Sn}$. **40.43** 4.51 kg. **40.45** *a*) $4.28 \cdot 10^9$ kg/s. *c*) 0.030%.
40.47 13.8 GK.
40.49

No.	Núclido	Número de masa, A	Exceso de masa Δm (keV/c^2)	Masa atómica (u)
1	${}^{1}_{0}n$	1	8 071.3	1.0087
2	${}^{252}_{98}\text{Cf}$	252	76 034	252.08
3	${}^{256}_{100}\text{Fm}$	256	85 496	256.09
4	${}^{140}_{56}\text{Ba}$	140	–83 271	139.91
5	${}^{140}_{54}\text{Xe}$	140	–72 990	139.92
6	${}^{112}_{46}\text{Pd}$	112	–86 336	111.91
7	${}^{109}_{42}\text{Mo}$	109	–67 250	108.93

b) $\Delta E_{\text{Cf}} = 202\,341$ keV y $\Delta E_{\text{Fm}} = 212\,537$ keV. *c*) Sí.
40.51 $2 \cdot 10^{-16}$ J; $4.98 \cdot 10^5$ m/s. **40.53** 2.00 μCi. **40.55** 12.71 días.

Problemas adicionales

40.57 168.512 MeV. **40.59** 53.0 fm. **40.61** $1.17 \cdot 10^{-22}$ μCi.
40.63 41.279 MeV. **40.65** $2.51 \cdot 10^{17}$ J. **40.67** *a*) 7.074 MeV.
b) 2.573 MeV. *c*) 2.827 MeV. *d*) 1.112 MeV. **40.69** 89.0 min.
40.71 $6 \cdot 10^4$ años. **40.73** $2.57 \cdot 10^4$ decaimientos. **40.75** 10.9 s.

Créditos

Fotografías

Acerca de los autores

Fotografía cortesía de Okemos Studio of Photography.

El gran panorama

Figura 1: © M. F. Crommie, C. P. Lutz, y D. M. Eigler, IBM Almaden Research Center Visualization Laboratory, http://www.almaden.ibm.com/vis/stm/images/stm15.jpg. Imagen reproducida con permiso de IBM Research, Almaden Research Center. Prohibida su reproducción sin autorización; **2:** © M. Feig, Michigan State University; **3a-b:** colaboración de STAR, Brookhaven National Laboratory; **4:** © CERN; **5:** © Vol. 54 PhotoDisc/Getty Images RF; **6:** Andrew Fruchter (STScI) *et al.*, WFPC2, HST, NASA.

Capítulo 21

Figura 21.1a-c: © W. Bauer y G. D. Westfall; **21.2:** © R. Morley/PhotoLink/Getty Images RF; **21.7a:** © Kim Steele/Getty Images RF; **21.7b:** © Geostock/Getty Images RF; **21.8-21.11, 21.18, 21.19:** © W. Bauer y G. D. Westfall.

Capítulo 22

Figura 22.1: © Royalty-Free/Corbis; **22.2:** National Weather Service; **22.17:** Brookhaven National Laboratory; **22.19:** © The McGraw-Hill Companies, Inc./Mark Dierker, fotógrafo; **22.21:** © Royalty-Free/Corbis; **22.31a-b:** © W. Bauer y G. D. Westfall; **22.32:** © Gerd Kortemeyer; **22.41:** © Royalty-Free/Corbis.

Capítulo 23

Figura 23.1 (izquierda)-(derecha): Springer Netherlands/ *Annals of Biomedical Engineering*, Vol. 30, Núm. 9, octubre de 2002, 1172-80, "Induced current impedance technique for monitoring brain cryosurgery in a two-dimensional model of the head," Zlochiver S, Radai MM, Rosenfeld M, Abboud S., Fig. 6. con el permiso de Springer Science and Business Media; **23.5a-b:** © W. Bauer y G. D. Westfall; **23.7a:** © Regis Duvignau/Reuters; **23.7b:** © Candy Lab Studios/ Mendola Artists; **23.8:** © 2009 Tesla Motors, Inc. Todos los derechos reservados. 'Tesla Motors' y 'Tesla Roadster' son marcas registradas de Tesla Motors, Inc. (version 1-5-0296-228); **23.9a-b:** © W. Bauer y G. D. Westfall.

Capítulo 24

Figura 24.1-24.2: © W. Bauer y G. D. Westfall; **24.21:** © Lawrence Livermore National Laboratory.

Capítulo 25

Figura 25.1: © ImageSource/agefotostock RF; **25.2 a-f:** © W. Bauer y G. D. Westfall; **25.3a:** © IBM; **25.3c:** © Brand X Pictures/PunchStock RF; **25.3d:** © Don Farrall/Getty Images RF; **25.3e:** © W. Bauer y G. D. Westfall; **25.3f:** © Craig Bickford/International Light Technologies; **25.3g:** © 1000Bulbs.com; **25.3h:** © Josh Slaymaker/Grant Heilman Photography, Inc.; **25.3i**: © Thomas Allen/Getty Images RF; **25.3j:** NASA; **25.3k:** © Lawrence Livermore National Laboratory; **25.3l**: NASA artist Werner Heil; **25.4:** © W. Bauer y G. D. Westfall; **25.8a:** fotografía cortesía de Mike Smith, www.mds975.co.uk; **25.8b:** © Josh Slaymaker/ Grant Heilman Photography, Inc.; **25.15:** impresa con permiso de Mayfield Clinic; **25.21a-b:** cortesía de ABB; **25.22a-b:** © W. Bauer y G. D. Westfall; **25.24:** © Julie Jacobson/AP Photo; **25.25:** http://en.wikipedia.org/wiki/File:Path_65_ P0002014.jpg.

Capítulo 26

Figura 26.1: © Royalty-Free/Corbis.

Capítulo 27

Figura 27.1: NASA/TRACE; **27.4b:** © Steve Cole/Getty Images RF; **27.7:** NASA/cortesía de nasaimages.org; **27.8:** NASA/Hubble/Z. Levay y J. Clarke; **27.11:** © W. Bauer y G. D. Westfall; **27.12:** © The McGraw-Hill Companies, Inc./ Mark Dierker, fotógrafo; **27.13:** National Geophysical Data Center; **27.15:** © W. Bauer y G. D. Westfall; **27.16:** Lawrence Berkeley National Laboratory; **27.17a:** Brookhaven National Laboratory; **27.17b:** STAR collaboration/RHIC/Brookhaven National Laboratory; **27.18:** Brookhaven National Laboratory; **27.19a:** © Michigan State University; **27.22:** © W. Bauer y G. D. Westfall; **27.23a:** © Ren Long, Xinhua/AP Photo; **27.24b, 27.28:** © The McGraw-Hill Companies, Inc./Mark Dierker, fotógrafo.

Capítulo 28

Figura 28.1: © Photolibrary/agefotostock RF; **28.3b, 28.5:** © The McGraw-Hill Companies, Inc./Mark Dierker, fotógrafo; **28.9:** Fotografía U.S. Navy por Mr. John F. Williams; **28.18a:** © W. Bauer y G. D. Westfall; **28.22 (mano):** © The McGraw-Hill Companies, Inc./Mark Dierker, fotógrafo; **28.25:** © High Field Magnet Laboratory, Radboud University Nijmegen, Holanda; **28.28a-e:** © W. Bauer y G. D. Westfall; **28.30:** © Royalty-Free/Corbis; **28.31a-d:** © The McGraw-Hill Companies, Inc./Mark Dierker, fotógrafo.

Capítulo 29

Figura 29.1: © PhotoLink/Getty Images RF; **29.11:** © W. Bauer y G. D. Westfall; **29.14a:** NASA; **29.14b:** NASA/cortesía de nasaimages.org; **29.16:** © W. Bauer y G. D. Westfall; **29.19 & (interior):** © Tom Watson; **29.29:** © Daisuke Morita/Getty Images RF; **p. 955:** © Royalty-Free/Corbis.

Capítulo 30

Figura 30.1a: © Ryan McVay/Getty Images RF; **30.1b:** © Royalty-Free/Corbis; **30.18:** © W. Bauer y G. D. Westfall; **30.21:** © The McGraw-Hill Companies, Inc./Mark Dierker, fotógrafo; **30.31a:** © Edmond Van Hoorick/Getty Images RF; **30.31b**, **30.32:** © W. Bauer y G. D. Westfall.

Capítulo 31

Figura 31.1: E. Kolmhofer, H. Raab; JohannesKepler-Observatory, Linz, Austria (http://www.sternwarte.at); **31.9a:** © Kim Steele/Getty Images RF; **31.9b:** NASA/cortesía de nasaimages.org; **31.9c:** © W. Bauer y G. D. Westfall; **31.10b:** © C. Borland/PhotoLink/Getty Images RF; **31.10c:** © W. Bauer y G. D. Westfall; **31.10d:** © Don Tremain/Getty Images RF; **31.10e:** © PhotoLink/ Getty Images RF; **31.10f:** © Geostock/Getty Images RF; **31.10h-i:** © Russell Illig/Getty Images RF; **31.10j:** © Royalty-Free/Corbis; **31.10k:** © David R. Frazier Photography/Alamy RF; **31.10l:** © W. of Lockheed Martin Corporation. Bauer y G. D. Westfall; **31.10m:** © PhotoDisc/ Getty Images RF; **31.10n:** © W. Bauer y G. D. Westfall; **31.10o:** © ImageState/Alamy RF; **31.14a:** © John Keating/Photo Researchers, Inc.; **31.14b:** © General Motors Corp. Utilizada con permiso, GM Media Archives; **31.23:** © Photographer's Choice/Getty Images RF.

Capítulo 32

Figura 32.1, 32.7, 32.9a-b, 32.10 (arriba, centro, abajo), 32.18a-b, 32.25a-b, 32.31a: © W. Bauer y G. D. Westfall; **32.33:** © P. K. Chen; **32.35a-b, 32.37a-b, 32.40-32.41:** © W. Bauer y G. D. Westfall; **32.43a:** cortesía de IT Concepts GmbH; **32.43b:** © David M. Martin, M.D./Photo Researchers, Inc.; **32.45a, 32.51:** © W. Bauer y G. D. Westfall.

Capítulo 33

Figura 33.1a: NASA y The Hubble Heritage Team (STScI/AURA); **33.1b:** Prof. Gordon T. Taylor, Stony Brook University/NSF Polar Programs; **33.6a-c, 33.10a-c:** © W. Bauer y G. D. Westfall; **33.14:** © Robert George Young/Getty Images; **33.20:** © Scott Bodell/Getty Images RF; **33.26 (izquierda)-(derecha), 33.28a-c, 33.29, 33.31:** © W. Bauer y G. D. Westfall; **33.32:** © Comstock/PunchStock RF; **33.33:** © Meade; **33.35:** © Victor Krabbendam/Southern Astrophysical Research Telescope; **33.37a:** STS-82 Crew/STScI/NASA; **33.37b:** NASA, ESA, STScI, J. Hester y P. Scowen (Arizona State University); **33.38a-b:** NASA, STScI; **33.39:** NASA; **33.40a:** NASA/CXC/D.Berry; **33.40b:** NASA/CXC/D.Berry & A.Hobart; **33.40c:** NASA/CXC/MIT/F.K.Baganoff *et al.*

Capítulo 34

Figura 34.1: © Mila Zinkova; **34.12a, 34.17, 34.19a-b, 34.23, 34.28a, 34.31, 34.32a-c:** © W. Bauer y G. D. Westfall; **34.33:** NASA, 1990; **34.35, 34.38, 34.41, 34.42a-b:** © W. Bauer y G. D. Westfall; **34.51**: © Dr. Bernard Santarsiero, University of Illinois en Chicago; **34.52:** Argonne National Laboratory, administrado y operado por UChicago Argonne, LLC, para el Departamento de Energía estadounidense, según el contrato núm. DE-AC02-06CH11357.

Capítulo 35

Figura 35.1: NASA, ESA, y STScI; **35.8:** U.S. Air Force; fotografía de Master Sgt Michael A. Kaplan, carrera NASCAR; **35.17:** © W. Bauer y G. D. Westfall; **35.19:** F. W. Dyson, A. S. Eddington, y C. Davidson, "A Determination of the Deflection of Light by the Sun's Gravitational Field, from Observations Made at the Total Eclipse of May 29, 1919", *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical or Physical Character* (1920): **291-333, 332; 35.21b:** NASA, Andrew Fruchter y el equipo ERO [Sylvia Baggett (STScI), Richard Hook (ST-ECF), Zoltan Levay (STScI)] (STScI); **35.22:** NASA/JPL/Caltech; **35.23:** imagen cortesía de Lockheed Martin Corporation

Capítulo 36

Figura 36.1: © Kai Pfaffenbach/Reuters/Corbis; **36.2:** © Royalty-Free/Corbis; **36.10a:** © Lencho Guerra; **36.16a:** © W. Bauer y G. D. Westfall; **36.17:** reimpresa con permiso de P.G. Merli, G.F. Missiroli, G. Pozzi, *American Journal of Physics*, "On the Statistical Aspect of Electron Interference Phenomena," Vol. 44, Núm 3, pp. 306-307, marzo de 1976. © 1976, American Association of Physics Teachers; **36.26:** © Mike Matthews, JILA.

Capítulo 37

Figura 37.1a: fotografía cortesía de Erik Lucero y Max Hofheinz; **37.9a-b, 37.17b:** imagen reproducida con permiso de IBM Research, Almaden Research Center. Prohibida su reproducción sin autorización; **37.27:** De R. Blatt "Quantum Information Processing: Dream and Realization," *Entangled World*, pp. 235-270, Wiley-VCH, Weinheim 2006. Imagen cortesía de R. Blatt, University of Innsbruck.

Capítulo 38

Figura 38.1: © WMKO; **38.2-38.3, 38.25:** © W. Bauer y G. D. Westfall; **38.26-38.27:** imagen cortesía de University of California, Lawrence Livermore National Laboratory, y el Departamento de Energía.

Capítulo 39

Figura 39.1: NASA/ESA/STScI/AURA; **39.2a:** © Royalty-Free/Corbis; **39.4-39.6:** © CERN; **39.27:** © Kamioka Observatory, ICRR (Institute for Cosmic Ray Research), The University of Tokyo; **39.36:** imagen cortesía de Derek Leinweber, CSSM, University of Adelaide; **39.40:** © Axel Mellinger, University of Potsdam, Alemania; **39.41b:** NASA, ESA, y The Hubble Heritage Team (STScI/AURA); Hubble Space Telescope ACS; STScIPRC05-20; **39.41c:** © Royalty-Free/Corbis; **39.42-39.43:** NASA/WMAP Science Team; **39.44:** STAR collaboration/RHIC/Brookhaven National Laboratory.

Capítulo 40

Figura 40.1: © Brand X Pictures/PunchStock RF; **40.6a:** © MSU National Superconducting Cyclotron Laboratory; **40.14:** Lawrence Berkeley National Laboratory; **40.18:** http://en.wikipedia.org/wiki/File:Shroudofturin.jpg; **40.35:** © ITER; **40.36a-c:** Imagen cortesía de University of California, Lawrence Livermore National Laboratory, y el Departamento de Energía estadounidense **40.38:** NASA/ESA/ JPL/Arizona State University; **40.41:** imagen cortesía de Steve Goetsch; **40.42, 40.44:** © W. Bauer y G. D. Westfall.

Iconografía

Capítulo 25

Tabla 25.2: información de American Wire Gauge convention.

Capítulo 27

Figura 27.9: información de imagen de NOAA's National Geophysical Data Center (NGDC), Boulder, Colorado, con base en International Goemagnetic Reference Field (IGRF), Epoch 2000 actualizado el 31 de diciembre de 2004. El IGRF se desarrolló por la International Association of Geomagnetism and Aeronomy (IAGA) Division V.

Capítulo 36

Figura 36.6: COBE información de NASA / COBE Science Team.

Capítulo 39

Figura 39.11: según la información reportada por Geiger y Marsden en Phil. Mag. 25 (1913), p. 604; **Figura 39.12:** según la información reportada por Eisberg y Porter, Rev. Mod. Phys. 33 (1961), p. 190; **Figura 39.15:** según la información reportada por R. Hofstadter en *Annual Reviews of Nuclear Science* 7 (1957), p. 231; **Tabla 39.3:** información de W.-M. Yao, *et al.* (Particle Data Group), J. Phys. G 33, 1 (2006), http://pdg.lbl.gov); **Figura 39.30**: información de W.-M. Yao *et al.* (Particle Data Group), J. Phys. G 33, 1 (2006), http://pdg.lbl.gov; **Tabla 39.4:** información de W.-M. Yao *et al.* (Particle Data Group), J. Phys. G 33, 1 (2006), http://pdg.lbl.gov.

Capítulo 40

Figura 40.12: información de GSI National Laboratory en Alemania, 17 de diciembre de 1994; **Figura 40.15**: cortesía de Argonne National Laboratory, adaptada de T. Lauritzen *et al.*, Phys. Rev. Lett. 88, 042501 (2002); **Figura 40.31**: cálculo por B. Alex Brown, Michigan State University; **Problema 40.49**; **Tabla:** datos de Berkeley National Laboratory NuBase data base.

Apéndice B

Fuentes de información: David R. Lide (ed.), Norman E. Holden en *CRC Handbook of Chemistry and Physics*, 85a. edición, versión en línea. CRC Press. Boca Raton, Florida (2005). Sección 11, tabla de isótopos.

Apéndice C

Fuentes de información: http://physics.nist.gov/PhysRefData/PerTable/periodic-table.pdf

http://www.wikipedia.org/ and Generalic, Eni. "EniG. Periodic Table of the Elements." 31 de marzo de 2008. KTF-Split. <http://www.periodni.com/>.

Tablas al final del libro

Constantes fundamentales de National Institute of Standards and Technology, http://physics.nist.gov/constants.

Otras constantes útiles de National Institute of Standards and Technology, http://physics.nist.gov/constants.

Índice

A

Aberración
  cromática, 1080
  esférica, 1039, 1081
Abertura de la lente, 1074
Absorción
  de un fotón, 1277
  total de las ondas electromagnéticas, 1007
Aceleración
  centrípeta, 871, 1255
Acelerador
  con blanco fijo, 1156
  de riel electromagnético, 898
  Tevatrón de Fermilab, 1302
  Van de Graaff, 751
Aceleradores de partículas modernos, 1122
Adaptación de impedancia, 981
ADN, 1288
Agua de baja conductividad, 913
Agujero negro, 1160
Aire
  constante dieléctrica del, 789
  resistencia dieléctrica del, 789
Aislante(s), 688, 811
Alambre(s)
  circular, campo magnético en el centro de un, 900
  de nicromo, 812, 815
Aleación metálica de resistencia constante, 815
Álgebra de
  isoespín, 1312
  síntesis aditiva, 1309
Almacenamiento de energía potencial eléctrica, 784
Alternador, 937
American Wire Gauge (AWG), 813
Amperímetro, 847
Amperio (A), 686, 806
Amplificación
  angular
    de la lupa, 1067
    del telescopio, 1079
  del espejo, 1036
  del telescopio, 1078
Amplificación de luz por emisión estimulada, 1276. *Véase también* Láser
Amplitud de dispersión, 1296
Amplitudes, 1304
Análisis de bucles únicos, 843
Ancho de rejilla, 1116
Ancho del máximo central, 1112
Ángulo
  aparente subtendido por la imagen, 1067
  crítico de reflexión interna total, 1046
  de Bragg, 1122
  de Brewster, 1051
  de deflexión, 1253
  de fasor, 968
  de incidencia, 1030, 1042, 1043
  de la luz refractada, 1042, 1043
  de reflexión, 1030
  de rotación, 730
  de visión
    de la cámara, 1075
    horizontal de la visión humana normal, 1076
  del frente de onda incidente, 1098
  del rayo de luz refractado, 1051, 1060
  horizontal de visión, 1075
  refractado, 1059
  subtendido por el objeto, 1067
Anillos de Newton, 1106
  cálculo de los, 1106
Aniquilación de materia-antimateria, 1241
Ánodo, 749
Antena(s)
  dipolo, 1003
  parabólicas, 1040
Antibariones, 1299, 1309
Antimateria, 1241
Antipartícula, 1297
  del electrón, 1241
  del protón, 1241
Antiprotón, 1241
Antiquarks, 1299
  antiazul, 1302
  antirrojo, 1302
  antiverde, 1302
Anzatz, 1209, 1210, 1233, 1240
Aplicación de
  fuerzas electrostáticas, 697-698
  la capacitancia, 791
  los capacitores, 784
Apuntadores láser, 1279
Arco iris, 1026, 1050, 1100
  primario, 1050
  secundario, 1050
Arcos coronales, 864
Área diferencial, 758
Armónicos esféricos, 1266
Arreglo de pixeles, 1013
Astigmatismo (curvatura irregular de la córnea), 1074
Astrofísica, 751
  nuclear, 1358
Astronomía, 1133, 1287, 1288
Átomo(s), 1171, 1288
  en estado base, 1271
  ionización de un, 1255, 1271
  masa del, 687
  multielectrón, construcción de, 1193
Auroras
  australes, 867
  boreales, 867
Autoinducción, 940
Autoinductancia del inductor, 943
Axón, 854

B

Barión omega, 1313
Bariones, 1297, 1299, 1309, 1312
Barn (b), 1291
Barrera de energía potencial, 1263
Bastones, 1071
Batería(s), 749, 816
  efecto de memoria de la, 749
  de ion de litio, 749-750, 853
  ideal, 819
  no ideal, 819
  recargables, 816
  resistencia interna de una, 818
Bequerelio (Bq), 1343
Beta (cantidad), 1135
Big Bang, 1176, 1315-1319, 1358
bit, 947, 1003, 1237
Blindaje electrostático, 728
Brillantez espectral, 1173
  de Planck, 1197

Bobina(s)
de Helmholtz, 904, 906
resistiva, 913
superconductoras, 878, 914
Bocina
grande (*woofer*), 959, 974
para altas frecuencias, 974
para bajas frecuencias, 974
pequeña (*tweeter*), 959, 974
Bomba
de hidrógeno, 1356
sucia, 1353
Boroscopio, 1047
Bosón, 1297
de Higgs, 1299, 1302
de intercambio sin masa, 1300
escalar, 1300
vectorial, 1300
W, 1301
Z, 1302
Bosones, 1192, 1193, 1194, 1277
elementales, 1300
idénticos, 1235
Bucle(s), 840-843
amperiano, 903, 904, 906, 907
conductor de corriente, 881
Byte, 947, 1003, 1237

C

Cadena
de átomos atrapados, 1237
protón-protón, 1354, 1355, 1356
Caída de potencial, 817, 842
para una fuente de fem, 840
Cálculo de los anillos de Newton, 1106
Calor resistivo, 913
Cámara
de burbujas, 871
de proyección del tiempo, 722, 872
de rayos gamma, 1360
digital, 1074
fotográfica, 1074
Campo(s)
concepto de, 711
cruzados, 876
eléctricos
bidimensionales, 713
en el corazón humano, 725
principio de superposición para, 868
electromagnético, 811
estáticos, 866
gravitacional, 746, 866
independientes del tiempo, 866
magnitud del, 713
marginal, 775, 777, 779, 784
vectoriales, 711
Campo eléctrico, 712, 746, 866, 996
constante, 747, 753
de la luz polarizada incidente, 1011
definición de, 711, 755
formas para producir un, 928
fuerza ejercida por un, 721
intensidad del, 746, 777
ley de Gauss para el, 928
líneas de, 712
magnitud del, 747, 779
no uniforme, 712, 726
oscilante, 1026
principio de superposición para el, 712, 713, 716
raíz cuadrático medio, 1006
unidades del, 711
Campo(s) magnético(s), 865, 926, 996
alterno, 934
cero, 914
concepto de, 866
de la tierra, 866, 873, 874
dirección del, 866
en el centro de un alambre circular, 900
inducidos, 934, 994
intensidad del, 911
líneas de, 866
magnitud de un, 868
neto, 909, 912
no homogéneo, 1192
originados por corrientes eléctricas, 893
principio de superposición para, 868, 894
producido por una carga en movimiento, 893
raíz cuadrático medio, 1006
superposición de los, 868
unidad de intensidad del, 869
Cantidad
de ionización, 1343
del movimiento, 1151
relativista, 1151
neta de carga, 806
Cantidad de movimiento
angular
cuadripolar, 1268
dipolar, 1268
monopolar, 1268
de Fermi, 1349
de un fotón, 1179
Cañón de
electrones, 869
riel, 898
Capacidad
de recolectar luz de un telescopio, 1080
del ojo para enfocar, 1072
Capacitancia, 774, 775, 776
aplicación de la, 791
de un capacitor de placas paralelas, 778
del capacitor, 788
equivalente, 781
de un sistema de capacitores en paralelo, 781
Capacitor, 774
cilíndrico, 779
circular, 994
de placas paralelas, 774
descarga de un, 777, 850
equivalente, 781
esférico, 779
geometría del, 778, 779
Capacitores, 816
aplicación de los, 784
con dieléctricos, 788
conectados
en paralelo, 780
en serie, 781
Capas
concepto de, 1265
"cuarto de lambda", 1106
Captura de
antineutrinos, 1338
electrones, 1338
Características geométricas de una lupa, 1067
Carbón activado, 792
Carga(s), 685
cantidad neta de, 806
cuantizada, 687
de color, 1309
de prueba, 712
positiva, 726
unitaria, 712
de un capacitor, 776, 849
del electrón, 686, 687
del protón, 686
diferencial, 718, 719, 758
electrostática, 690, 697
inducida, 690
magnitud de la, 747
negativa, 685, 691, 865
neta, 806
por contacto, 691
por inducción, 692
positiva, 685, 691, 865
total, 806
unidad de, 686
valor absoluto de, 691
Carga(s) eléctrica(s), 684, 685, 865
en movimiento, 805
ley de las, 686, 692
propiedades de la, 684
Carga(s) puntual(es)
aislada, 713
energía potencial eléctrica de un sistema de, 762
positiva, 727, 753
sistema de, 757
única, 753
Catástrofe ultravioleta, 1173, 1176
Cátodo, 749
CD, 1119, 1276
como rejilla de difracción, 1117
Celda(s)
de ion de litio, 749
solares, 816

Ciclo(s)
CNO (carbón, nitrógeno y oxígeno), 1355
de histéresis, 913
de oscilación, 976
por segundo, 996
Ciclotrón, 1297
frecuencia del, 874
Ciclotrones, 874
Ciencia de la complejidad, 1289
Cinemática relativista, 1154
Cinturones de Van Allen, 867, 873, 874
Circuito(s)
capacitivo, 972
con corriente que
no varía con el tiempo, 849
varía con el tiempo, 849
de bucle único, 839
de corriente
alterna (CA), 959, 976
directa (CD), 959
eléctrico(s), 774, 776, 780, 805, 816, 839
elementos del, 776
en resonancia, 970
LC, 959
marcapasos, 852
multiloop, 839, 843
RC, 849, 851, 944, 959
básico, 854
RL, 943, 944, 959
RLC, 964, 965, 996, 1003
en serie, 972
simples, 839
Cobalto radiactivo, 1359
Codificación
con colores, 1216
con protuberancias, 1216
longitudinal, 947
perpendicular, 948
Código
de colores de resistores, 814
genético, 1288
Codones, 1288
Coeficiente de
temperatura de resistividad eléctrica, 814, 815
negativo, 815
transmisión, 1224
Colecciones de *buckyballs*, 1237
Colector de anillo partido, 937
Colisión(es)
de dos cuerpos, 1156
de partículas de más alta energía, 685
oro-oro, 872
perfectamente elásticas, 1007
perfectamente inelásticas, 1007
protón-protón, 872
Colisionador relativista de iones pesados, 1157
Colisionadores de partículas, 1287
Color de la luz reflejada, 1029
Componentes
eléctricos en un circuito, 816
espectrales de la luz, 1252
Compresión-descompresión (codec), 1003
Computación cuántica, 1207
Computadora
clásica, 1237
cuántica, 1237
Concepto de
capas, 1265
campo, 711
magnético, 866
flujo, 725
eléctrico, 725
inflación en la cosmología, 1316
refracción, 1042
Concepto idealizado de un cuerpo negro, 1172
Condensado de Bose-Einstein (CBE), 1197
Condición de normalización para la función de onda, 1209, 1212
Conducción de corriente en sólidos, 815
Conductancia, 811
unidad de, 811
Conductividad, 812
agua de baja, 913
unidades de la, 812
Conductor
móvil, 898
portadores de carga en un, 807
puntiagudo, 735
Conductores, 688
Conectar a tierra, 690
Conexión
a internet DSL, 972
a tierra, 690
en paralelo de resistores, 806
en serie de resistores, 806
Conexiones inalámbricas Wifi, 1003
Conjunto de láser azul, 1119
Conmutador, 880
Cono(s), 1071
de luz, 1136, 1137
negativo, 1136
positivo, 1136, 1137
Conservación de la
cantidad de movimiento angular, 1263
carga eléctrica, 840
energía, 980
Conservación del número de quarks totales, 1298
Constantán (aleación de metal), 815
Constante
dieléctrica, 788
del aire, 789
del vacío, 789
elástica, 1225
gravitacional, 1307
universal de gravitación, valor de la, 699
Constante de
Avogadro, 1330
Boltzmann, 1173, 1176, 1193, 1278, 1307
Coulomb, 692, 746, 910, 1255, 1258, 1293, 1295, 1307
valor de la, 699
Curie, 912
decaimiento exponencial, 1222
estructura fina, 1295, 1306
fase, 962
definición de, 969
gravitación universal, 746
normalización, 1296
Planck, 910, 1173, 1181, 1190, 1256, 1258, 1307
proporcionalidad, 911, 939
Rydberg, 1253, 1257
Stefan-Boltzmann, 1172, 1176
tiempo, 850
grande, 851
pequeña, 851
Construcción de
átomos multielectrón, 1193
Huygens, 1098, 1101, 1109
Continuo de la radiación de frenado, 1275
Contracción de la longitud, 1140, 1141
Convención
de notación compleja, 1265
del calibre de alambres, 813
Conversión de masa en energía, 1155
Convertidor analógico a digital, 1076
Coordenadas esféricas, 1261
Córnea, 1071
Corral cuántico bidimensional, 1216, 1217
Correcciones gravitacionales, 1161
Corriente(s), 817
alterna (CA), 807, 937, 965, 981
bucle conductor de, 881
de desplazamiento, 994
definición de, 909
densidad de, 808, 809
dependientes del tiempo, 849
dirección de la, 807
densidad de, 808
directa, 807, 981
generador de, 937
eléctrica(s), 805, 806, 926
fasor de, 966-968
oscilante, 934
raíz cuadrática media (rcm), 975, 979
transitorias inducidas, 933, 934
Corrimiento
al rojo, 1144
parámetro de, 1144
de la luz hacia el
azul, 1144
rojo, 1144
relativista de la frecuencia, 1144
Cosmología, 1133, 1287
Coulomb (C), 686
constante de, 692, 746, 910, 1255, 1258, 1293, 1295, 1307
ley de, 692

Cría, 1353
de plutonio para uso militar, 1353
Criostatos, 791
Criterio de Rayleigh, 1113
Cromodinámica cuántica, 1313
Cruz de Einstein, 1133
Cuantización de
Bohr, 1256
la cantidad de movimiento angular, 1256
la energía, 1256
Cuanto(s) de
carga, 1258
energía-luz, 1177
Cuarta ley de conservación, 686
Cuchillo gamma, 1359
Cuerpo negro
concepto idealizado de un, 1172
radiación de, 1172
Curie (Ci), 1343

D

Datación de
carbono, 1341
radiocarbono, 1341
Decaimiento(s)
alfa, 1334, 1335
espontáneo, 1336
beta, 1334, 1337
de quarks, 1337
del neutrón, 1332
de núcleos pesados, 1340, 1351
del protón, 1306
doble beta, 1340
en grupo, 1340
gamma, 1334, 1339
nuclear, 1334
radiactivos, 1335
Decapleto, 1313
Declinación magnética, 867
cero, 867
negativa, 867
positiva, 867
Defectos de la visión, 1072
Definición de
amperio, 897
amplificación lineal, 1075
campo eléctrico, 711, 755
constante de fase, 969
corriente, 909
distancia focal, 1061
magnetización de un material, 910
potencial eléctrico, 755
sección transversal, 1291
vértice, 1304
Degeneración del estado de energía, 1193
Densidad de
carga, 1014
corriente, 808, 809, 1014
dirección de la, 808
magnitud de la, 813
energía, 749
eléctrica, 784
Densidad nuclear, 1328
Deposiciones de energía, 1344
Deriva
magnitud de la velocidad de, 878, 882
velocidad de, 878, 882
Derivada
parcial del potencial, 759
regular, 761
Descarga
de un capacitor, 777, 850
disruptiva, 996
Desfibrilador externo automático, 787
Desintegraciones beta, 1297
Detector de metales, 934
Determinante de Slater, 1237
Deuterón, 1355
Deutón, 1332
Día sideral, 1160
Diafonía, 774
Diafragma, 1074
variable, 1074
Diagrama de
Feynman, 1303, 1304
nivel de energía, 1214
niveles de energía, 1258
Diamagnetismo, 912
Diámetro de abertura, 1074
Dieléctrico(s), 788
capacitores con, 788
estructura molecular del, 788
no polar, 792
permitividad eléctrica del, 788
polar, 791
Diferencia(s)
de trayectorias de luz coherente, 1100
en potencial eléctrico entre dos puntos, 748
entre reflexión difusa y especular, 1029
Diferencia de potencial, 776, 816
autoinducida, 940, 943
eléctrico, 748
Hall, 882
instantánea, 784
Difracción, 1097, 1109
de doble rendija, 1114
de la luz, 1185, 1186
por una abertura circular, 1113
de rayos X, 1121
de un sistema de muchas rendijas, 1115
patrón de, 1109
Dilatación
del tiempo, 1138, 1141
relativista del tiempo, 1315
Dinámica de partículas, 1207
Dínodos, 1180
Diodo(s), 817, 827
de silicio, 827
emisor de luz (LED), 827, 1047, 1177
Dioptrías, 1065, 1072
Dipolo(s)
eje del, 716
eléctrico, 716
libres, 910, 911
magnéticos, 881, 910
Dirección de
el campo magnético, 866
la corriente, 807
la densidad de corriente, 808
los rayos, 1029
propagación de la luz, 1026
Disco
Blu-ray, 1119, 1276
duro, unidad de, 947
Discriminador Foster-Seeley, 1003
Dispersión
cromática, 1050
de Bragg, 1121
de rayos X, 1187
de Compton, 1182, 1185, 1189, 1207
de electrones, 1329
de Rutherford, 1292
de una rejilla de difracción, 1116, 1117
hacia delante, 1292
por difracción de ondas, 1292
Dispositivo(s)
acoplado a carga (DAC), 1030
de fem, 816
de transferencia de carga, 1181
de visión nocturna, 1180
semiconductores de óxido metálico complementarios, 1181
Distancia
de la imagen
negativa, 1065
positiva, 1065
focal
de una lente delgada, 1059
definición de, 1061
propia, 1137
Distribución de
Bose-Einstein, 1193, 1196
carga
continua, 758
simetría de la, 731
Fermi-Dirac, 1194, 1196
Maxwell-Boltzmann, 1193
probabilidad, 786
función de, 1193
DLP (*digital light processor*). *Véase* Procesador digital de luz
Dominio magnético, 912
Dosis de absorción
de radiación, 1343
unidad para la, 1343
Dualidad
onda-partícula, 1179
partícula-onda, 1191

DVD, 1119, 1276
como rejilla de difracción, 1117

E

Ecuación
bidimensional de Schrödinger, 1216
de Dirac, 1239, 1240, 1241
de espejo esférico, 1035, 1036
de las lentes delgadas, 1061, 1065, 1068, 1069
de onda para el campo
eléctrico, 1014
magnético, 1014
de Schrödinger, 1211, 1212, 1214, 1239, 1259, 1262
dependiente del tiempo, 1233
independiente del tiempo, 1233
del espejo, 1035
diferencial para movimiento armónico simple, 962
Ecuaciones de Maxwell, 996, 1014, 1305
Edad del universo, 1306
Efecto(s)
de campos marginales en los extremos de un solenoide, 940
de capa delgada, 1100
de la dilatación del tiempo, 1161
de memoria de la batería, 749
dinamo, 867
Doppler, 1144
clásico, 1144
de la radiación electromagnética, 1144
relativista, 1144
fotoeléctrico, 1134, 1171, 1177, 1178, 1207
Hall, 882
Meissner, 914
túnel, 1223, 1335
en microscopios, 806
Eje
del dipolo, 716
óptico de un espejo
cóncavo, 1033
convexo, 1037
plano, 1031
Ejemplos de películas delgadas, 1104
Electricidad, 684, 996
estática, 684, 685
Electrocardiógrafo, 852
Electrocardiograma (ECG), 725, 852
Electrocorticografía (ECoG), 725, 819, 820
Electrodinámica cuántica, 699, 1303
Electroimán, 893
Electrolito, 749
Electromagnetismo, 684, 996
Electrón, 871
carga del, 686, 687
de carga negativa, 1297
energía mínima para liberar un, 1178
masa del, 687
Electrones, 684, 685, 807
cañón de, 869
de conducción, 808, 816
de valencia, 1273
en la superficie de helio líquido, 1237
faltantes, 882
huecos de, 882
libres, 872
Electronvoltio (eV), 749
Electroscopio, 690
Electrostática, 684, 685, 805
Elementos
de imagen, 1003
de la teoría atomista, 1288
del circuito, 776, 839
símbolos para, 776
electrónicos de imagen, 1076
superpesados, 1337
Emisión
de un fotón, 1277
estimulada de fotones, 1277
Emisiones de gas invernadero, 1353
Emisividad espectral de los colores de la luz del sol, 1253
Emitancia espectral, 1172-1174
Endoscopio, 1047
Energía, 1151
atómica, niveles de, 1252
cuantización de la, 1256
de enlace, 1331
por nucleón, 1331, 1332, 1354
de Fermi, 1193
de ionización, 1271
de los fotones, 1003
de separación, 1333, 1349
de una partícula con masa en reposo, 1151
degeneración del estado de, 1193
densidad de, 749
eléctrica, 749
densidad de, 784
transmisión de, 825, 826
Fermi, 1348
valor numérico de la, 1349
limpia, fuentes de, 825
mayor que la altura del pozo de potencial, 1218
menor que la profundidad del pozo de potencial, 1219
mínima para liberar un electrón, 1178
plantas de, 937
química, 749
térmica, 964
Energía cinética, 938
de una partícula, unidad para la, 749
operador de, 1210, 1226
valor de la, 1226
Energía potencial
barrera de, 1263
cero en el infinito, 747
de un dipolo magnético, 1192
de una partícula cargada, 747
eléctrica, 746, 747, 748
almacenamiento de, 784
de un sistema de cargas puntuales, 762
gravitacional, 746, 747
Enfriamiento estocástico de rayos, 1302
Enlace
covalente, 1236
iónico, 1236
Equilibrio estático, primera condición de, 695, 696
Escala de energía de la unificación, 1306
Esfera gaussiana, 727
Eslabonamiento de flujo, 939, 940
Espaciamiento de rejilla, 1116
Espacio
absoluto, 1138
no absoluto, 1138
Espacio libre
permeabilidad magnética del, 894, 940
permitividad eléctrica del, 692, 776, 788, 1000
Espacio-tiempo
curvo, 1158
gráfica en el, 1137
intervalos, 1137
Espectro(s)
amplio, 1253
de cuerpo negro perfecto, 1319
de hidrógeno, 1253, 1254
de línea, 1255
Espectrómetro, 875, 1252
electromagnético, 1001
Espectroscopio de rayo gamma, 1339
Espejismo, 1049
Espejo(s), 1029
cóncavo, 1033
convexo, 1037
dieléctrico omnidireccional, 1029
esférico, 1033
esféricos divergentes, 1036, 1037
parabólicos, 1040
de líquido rotatorio, 1041
plano, 1030
telescópicos, 1041
Espín, 1192
abajo, 1192, 1193, 1236, 1240
arriba, 1192, 1193, 1236, 1240
del electrón, 910
del neutrón, 910
del protón, 910
Espinor, 1239
Estado estacionario de la ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo, 1234
Estado(s)
isómero de vida larga, 1339
ligados, 1214, 1219, 1221, 1222
metaestables, 1278
Estándar
720p de alta definición, 1013
1080i de alta definición, 1013
1080p de alta definición, 1013

Estereorradián (sr), 1292
Estratificación lenticular gravitacional, 1308
Estrellas de neutrones, 1160
Estroma, 1074
Estructura
  a nanoescala de materiales, 1122
  cristalina, 815, 816
  de cuanto, 1026
  electrónica de un material, 689
  molecular del dieléctrico, 788
  ondulatoria, 1026
Estudio de la luz, 1026
Éter, 1133
  luminífero, 1133
Exceso de masa, 1331
Exones, 1288
Experimento de
  dispersión de doble rendija, 1210
  doble rendija de Young, 1101
  Geiger-Marsden, 1292
  interferencia de Young con luz, 1187
  Millikan de la gota de aceite, 687
  pensamiento, 1231
  Stern-Gerlach, 1192
Explosión nuclear, 1353
Exposición, 1343
Expresión matemática de la ley de la corriente de Kirchhoff, 839
  voltaje de Kirchhoff, 841
Extrapolación de rayo reflejado, 1031

F

Fábrica de antimateria, 1241
Faceta, 1040
Factor de
  calidad, 976, 977
  calidad Q, 1355
    de la reacción, 1332, 1336, 1338
    positivo, 1338, 1351
  dilatación de tiempo, 1315
  forma, 1296
  peso de la radiación, 1344
  potencia, 976, 979
Factor *g*, 910
Faradio (F), 776
Faros
  incandescentes, 1040
  LED, 1040
Fasor, 966, 968
  ángulo del, 968
  de corriente, 966-968
  de voltaje, 966, 967, 968, 969
Fasores, velocidad angular de los, 966
Fem
  de activación, 965
  de movimiento, 929, 936
  impulsada por CA, 965
Fenómeno(s)
  de interferencia
    constructivo, 1100
    destructivo, 1100
  de polarización, 1051
  ondulatorios comunes, 1185
Fermiones, 1192, 1193, 1194
  elementales, 1297
  idénticos, 1235
Ferromagnetismo, 912
Ferromagnetización, proceso de, 913
Ferromagnetos, 911
Fibra óptica, 1047
  comercial, 1047
Fibrilación ventricular, 787
Filamentos de niobio-titanio, 914
Filtro(s)
  Bayer, 1076
  de DSL, 972
  de frecuencias, 972
  de línea de abonado digital, 972
  de polarización, 1051
Filtro de paso
  alto, 972-974
  bajo, 972-974
  de banda, 972, 974
Física
  cuántica, 910, 1171
  de las partículas de alta energía, 1133
  de lo muy grande, 1133
  de lo muy pequeño, 1133
  nuclear, 751
Fisión, 1340
  espontánea, 1340, 1352
  fragmentos de, 1352
  nuclear, 1351
Flujo
  concepto de, 725
  de color, 1314
  eléctrico, 725-728, 928
    concepto de, 725
    neto, 726
    total, 726
  luminoso, 827
  magnético, 928
    unidad del, 929
  medida del eslabonamiento de, 939
Fondo de microondas de radiación cósmica (CMB), 1316, 1319
Formación de
  imagen con
    cuatro rayos de luz, 1031
    tres rayos de luz, 1034
  imágenes reales con un espejo convergente, 1034
Formas para producir un campo eléctrico, 928
Fórmula
  de Balmer, 1253
  de Bethe-Weizsäcker, 1347, 1349
  de dispersión
    de Rutherford, 1293, 1294, 1295
    puntual de Rutherford, 1293, 1296
  de Einstein, 1331
  de la amplificación lineal de las lentes, 1065
  de radiación de Planck, 1197
  de Rydberg, 1253, 1254
  de suma
    de velocidades, 1148
    relativista de la velocidad, 1148
  del fabricante de lentes, 1059-1061, 1073, 1074
  empírica de masa, 1347
  para la dispersión de Compton, 1182
  para la energía cinética, 1152
  para la refracción de la luz, 1043
Fotinos, 1308
Fotocátodo, 1177, 1179, 1180
Fotocircuitos, 1177
Fotoelectrón, 1180
Fotografía de rayos gamma, 1360
Fotón, 1171, 1176, 1177, 1178, 1297, 1300
  virtual, 1304
Fotones, 1026, 1153, 1207
  de alta energía, 1275
  de rayos gamma, 1189
  de rayos X, 1182
Fotosensor, 1177
Fragmentos de fisión, 1352
Franja
  brillante, 1102, 1110
  oscura, 1102, 1110
Frecuencia
  angular, 962, 963, 970, 976, 997, 999
    de amortiguación, 977
    de resonancia, 970, 971, 977
  de la luz que viaja en un medio óptico, 1099
  de las ondas electromagnéticas, 1000
  de punto de interrupción, 973, 974
  de resonancia, 971, 976
    del circuito, 976
  del ciclotrón, 874
Frente(s) de onda, 1026
  paralelo, 1098
  plano, 1098
Fuente(s)
  de alimentación de CA, 776
  de energía limpia, 825
  de ondas esféricas, 1098
  luminosas, 1029
  primarias de luz, 1029
Fuente de fem, 816, 943, 946, 959
  caída de potencial para una, 840
  constante, 965
  potencia suministrada por la, 825
  que varía con el tiempo, 965, 968-971
Fuente de luz, 1177
  coherente, 1100
  incoherente, 1100
  láser, 1107
Fuerza(s)
  centrípeta, 871
    neta, 1041
  conservativas, 746
  de atracción, 713
  de Coulomb, 1255

de gravedad, la, 912, 1041
débil, 1332
diamagnética, 912
dirección de la, 712
ejercida por un campo eléctrico, 721
eléctrica, 711, 712
conservativa, 928
unidad de la, 686
eléctricas no conservativas, 928
electrodébil, 685, 1305
electromagnética, 865
electromotriz (fem), 816
electrostática(s), 697, 699
aplicación de, 697
magnitud de la, 746
fuerte, 1305
gravitacional, 699, 1158
magnitud de la, 746
magnética(s), 865, 866, 868
magnitud de la, 712
superposición de, 693
Función
de distribución de probabilidad, 1193
de Fermi, 1329
de partición, 1193
propia, 1234
trabajo, 1178, 1179
Función de onda, 1208
asimétrica, 1235, 1236
condición de normalización para la, 1209, 1212
continua en el espacio, 1211
cuántica de una partícula, 1208, 1210
de dos partículas, 1234
de mecánica cuántica, 1228
de múltiples fermiones, 1237
del hidrógeno, 1260
normalizada, 1211
simetría de intercambio en la, 1236
simétrica, 1235, 1236
Funcionamiento
de un tubo de rayos X, 1275
del interferómetro, 1107-1109
Funciones asociadas de Legendre, 1266
Funciones de onda
bidimensionales, 1216
esféricamente simétricas, 1261
gaussianas, 1226
Fusión
controlada, 1356
estelar, 1354
láser, 1357
nuclear, 1155, 1351, 1354
termonuclear, 1356
terrestre, 1356

G

Gamma (cantidad), 1135
Ganancia de potencial, 842
Gas noble, 1272
Gauss (G), 869
Generador
de corriente directa, 937
eléctrico, 937
Van de Graaff, 728, 751
Generadores eléctricos, 816, 979
Geometría del capacitor, 778, 779
Global Positioning System (GPS). *Véase* Sistema de posicionamiento global
Gluón, 1302
Gluones, 687, 688, 1172
GMR (*giant magnetoresistance*). *Véase* Magnetorresistencia gigante
Gota de aceite, experimento de Millikan de la, 687
Gradiente, 759
Gráfica
de diferencia de potencial contra tiempo, 852
del tipo Moseley, 1276
en el espacio-tiempo, 1137
Gran Colisionador de Hadrones (LHC), 1289
Granjas solares, 825, 826
Gravedad, 1305
cuántica, 685
Gravitación universal, constante de, 746
Gravitón, 1302
Gray (Gy), 1343

H

Hadrones, 1297, 1309
Haz relativista de electrones, 1279
Henry (H), 939, 941
Hertz (Hz), 996
Higgsinos, 1308
Hipermetropía (vista larga o ver sólo de lejos), 1072
Hiperopía, 1072
Hipótesis de
energía cuantizada, 1173, 1177
Planck, 1173, 1177, 1181
Histérisis, ciclo de, 913
Hohlraum, 1357
Huecos de electrones, 882
Huellas digitales atómicas, 1255
Humor
acuoso, 1071
vítreo, 1071

I

Iluminación eléctrica, 805
Imagen
distorsionada, 1039
especular, 1030, 1031, 1032
invertida, 1034
real, 1030, 1034, 1065
virtual, 1030, 1031, 1032, 1034, 1035, 1065
Imágenes
formadas por espejos divergentes, 1037
por resonancia magnética, 815, 913, 1360
Imán
superconductor, 914
toroidal ideal, 907
Imanes
elaborados con
conductores resistivos convencionales, 815
superconductores, 815
permanentes, 865
superconductores, 878
Impedancia, 969, 971, 972, 981
Impresora láser, 698
Impulso, 1151
Índice de refracción, 1041
de la luz, 1252
de un medio óptico, 1050, 1099
del vacío, 1042
en un medio, 1098
para la luz azul, 1050
para la luz roja, 1050
para la luz verde, 1050
Inducción
de impulsos, 934
de Maxwell, 993, 994
electromagnética, 934
mutua, 940, 941
Inductancia, 939, 976
de un solenoide, 940
mutua, 941
unidad de, 941
unidad de, 939
Inductor, 940, 946
autoinductancia del, 943
Inductores ideales, 940
Información digital, 1003
Instalación Nacional de Ignición, 784, 786, 792
Integral sobre una superficie cerrada, 726
Intensidad
específica, 1173
media de la luz, 1006
Intensidad del campo
eléctrico, 746, 777
magnético, 882, 906, 911
Interacción
de Coulomb, 1255, 1326, 1346, 1349
débil, 684, 1301, 1302
electrodébil, 1302
electromagnética, 1306
fuerte, 684, 693, 694, 1297, 1306, 1326
nucleón-nucleón, 1328
Interacciones
de partículas elementales, 871
nucleares, 1328
Interferencia
constructiva de las ondas de luz, 1100-1102, 1105
destructiva de las ondas de luz, 1100-1102, 1106

Interferencia de
doble rendija para la luz, 1186
la luz, 1185, 1186
las ondas de luz, 1100
película delgada, 1101, 1104-1107
rendija doble, 1100-1104
con la difracción, 1101
un sistema, 1115
Young con luz, experimento de, 1187
Interferómetro, 1107
de Michelson, 1107, 1108, 1134
funcionamiento del, 1107
Intervalo de tiempo, 1141
Intervalos espacio-tiempo, 1137
del tipo espacio, 1137
del tipo luz, 1137
del tipo tiempo
invariancia de Lorentz de los, 1147
Intervención quirúrgica LASIK, 1073
Intrones, 1288
Invariancia de Lorentz de los intervalos espacio-tiempo, 1147
Invariante(s), 1147
de Lorentz, 1156
Inversión de población, 1276, 1277, 1278
Ion de litio
batería de, 749-750
celda de, 749
Iones con carga
negativa (aniones), 749
positiva (cationes), 749
Ionización, 1349
de un átomo, 1255, 1271
rastro de, 722
Iontoforesis, 807, 808
iPod, 948
Iris del ojo, 1071
Isótopo(s), 1327
de actínidos, 1330
deuterio, 1327
estables, 1327, 1329
inestables, 1329
ligeros muy ricos en
neutrones, 1339
protones, 1339
tritio, 1327

J

Jaula de Faraday, 729

K

Kaón, 1297
neutro, 1154
Kilofaradios (kF), 793

L

Láser, 786, 1276. *Véase también* Amplificación de luz por emisión estimulada
azul, conjunto de, 1119
de gas, 1279
helio/neón (He-Ne), 1276
de estado sólido, 1119
de rubí pulsante, 1278
Láseres
de colorante, 1279
de dióxido de carbono, 1279
de electrones libres, 1279
de estado sólido, 1279
de rayos X, 1279
ópticos, 1279
químicos, 1279
LASIK (*laser-assisted in situ keratomileusis*). *Véase* Queratomileusis con ayuda de láser
LCD (*liquid crystal display*). *Véase* Pantalla de cristal líquido
Lente(s), 1059
con menisco
convergente, 1062
divergente, 1062
convergente, 1062, 1067
correctivos, 1072
de contacto, 1073
convergente, 1073
divergente, 1073
de desenfoque, 1107
de la cámara, 1074
de la vida real, 1062
de menisco, 1073
del ojo humano, 1071
delgada, 1059
divergente, 1062, 1064
doblemente convexa, 1061
gruesa, 1062
lenta, 1074
objetivo, 1077
de un microscopio, 1083
rápida, 1074
teleobjetivo, 1069
Leptones, 1297
muon, 1299
tauón, 1299
Levitación magnética, 877
Levitrón, 877
Ley de
Ampère, 903, 906, 907, 912, 994
Biot-Savart, 894, 903, 912
Bragg, 1121
Brewster, 1051
Coulomb, 692, 694, 699, 727, 728, 788, 897
Curie, 912
el decaimiento exponencial, 1334
el desplazamiento de Wien, 1173, 1174, 1175, 1319
el número bariónico, 1299
gravitación de Newton, 699, 816
la corriente de Kirchhoff, 839-840, 843, 844, 846
expresión matemática de la, 839
la reflexión, 1033
la refracción, 1059
las cargas eléctricas, 686, 692
Lenz, 927, 929, 932, 933, 940
los rayos, 1027
Malus, 1011
Maxwell-Ampère, 994, 996, 999
Moore, 689
Ohm, 811, 813, 816, 817, 821, 824, 827, 847, 943, 966, 967
Rayleigh-Jeans, 1175, 1176
reflexión, 1030, 1035
refracción, 1042
Snell, 1042-1044, 1046, 1051, 1060, 1098, 1253
tamaño nuclear, 1340
voltaje de Kirchhoff, 840-843, 844, 846, 943, 965, 966, 967
expresión matemática de la, 841
Wien, 1173, 1175, 1176
Ley de conservación
de la cantidad de movimiento, 1182
de la carga, 686
de la energía, 816, 817, 840, 1182, 1211
del número
bariónico, 1299
neto de quarks, 1299
Ley de Gauss, 725, 726, 727, 730, 728, 777, 779, 903
para campos magnéticos, 928, 997
para el campo eléctrico, 928, 997
Ley de inducción de
Faraday, 927-929, 937, 939-941, 980
Maxwell, 993, 994
Ley de radiación de
Planck, 1173, 1175, 1176
para cuerpos negros, 1176
para la emitancia espectral, 1174
Stefan-Boltzmann, 1172, 1175, 1176
Leyes de
Kirchhoff, 839
Newton, 1133
Libertad asintótica, 1314
Light Amplification by Stimulated Emission of Radiation. Véase Amplificación de luz por emisión estimulada; Láser
LIGO (*Laser Interferometer Gravitational Wave Observatory*), 1160
Límite de Maxwell-Boltzmann, 1196
Línea(s) de
campo, 753
eléctrico, 712, 713
magnético, 866
carga finita, 718, 761
corriente, 712
potencial gravitacional constante, 752
transmisión de corriente directa de alta tensión, 826
Líneas del mundo, 1137

Líneas equipotenciales, 752, 753, 775
Líquido en movimiento rotacional, 1041
LISA (*Laser Interferometer Space Antenna*), 1160
Longitud
  contracción de la, 1140, 1141
  de Planck, 1307
  diferencial, 758
  propia, 1140
  variable, 1140
Longitud de onda, 1000
  de Compton, 1183
  de De Broglie, 1185, 1187, 1209, 1292
  de la luz, 1026, 1050
  de luz monocromática, 1116
Longitud focal
  de la lente, 1072, 1075
  de una lente convergente, 1067
  efectiva del sistema de lente
    convergente, 1068, 1069
    teleobjetivo, 1069
  negativa, 1062, 1065
  positiva, 1062, 1068
Longitud focal de un espejo
  convergente, 1033
  divergente, 1037
  parabólico, 1040
Longitudes de onda
  cortas, 1173
  de De Broglie, 1210
  de la luz visible, 1027, 1029
  largas, 1173
  visibles, 1050
Lupa, 1067
Luz, 1000
  blanca, 1050
  coherente, 1100
    monocromática, 1101
  con longitud de onda larga, 1047
  de lámparas, 1100
  de neón, 1253
  en el máximo central, 1119
  estudio de la, 1026
  incoherente, 1100
  intensidad media de la, 1006
  láser, 698, 1100
  naturaleza ondulatoria de la, 1097, 1100
  no polarizada, 1010
  parcialmente polarizada, 1010, 1051
  polarizada, 1010, 1051
    incidente, 1011
  solar, 1004, 1100
  UV, 1006
  visible, 1001, 1026

M

Magnetismo, 684, 865, 996
Magnetita magnética, 865
Magnetización, 910, 911, 947
  de un material, definición de, 910
Magnetorresistencia gigante, 948
Magnitud de
  campo, 713
    eléctrico, 747, 779
  el momento
    de torsión, 723
    dipolar eléctrico, 716
  el vector velocidad, 868
  la carga, 747
  la densidad de corriente, 813
  la fuerza, 712
    electrostática, 746
    gravitacional, 746
  la velocidad
    de deriva, 808, 878
    del movimiento aleatorio, 808
  un campo magnético, 868
Manipulación de hebras de ADN, 1084
Mano derecha, regla de la, 723, 724
Mar de Dirac, 1240, 1241
Marco(s)
  centro de masa, 1156
  del centro de masas, 1292
  del laboratorio, 1156, 1292
Marco(s) de referencia
  en movimiento, 1138
  en reposo, 1138
  inercial(es), 1134, 1139
  no inercial, 1134
Masa
  crítica, 1353
  de Planck, 1307
  del átomo, 687
  del electrón, 687
  del neutrón, 1330
  del protón, 687, 1330
  en energía, conversión de, 1155
  en reposo de la partícula, 1151
  gravitacional, 1158
  inercial, 1158
  reducida, 1255, 1257
  relativista, 1151
Masa-energía del
  neutrón, 1330
  protón, 1330
Materia oscura fría, 1308
Material
  definición de magnetización de un, 910
  estructura electrónica de un, 689
  ferromagnético, 912, 913
Materiales
  diamagnéticos, 911, 912
  magnéticos, 909
  paramagnéticos, 911, 912
Matrices de Dirac, 1239
Máximo central, 1102, 1110, 1116, 1119
Mecánica cuántica, 1133, 1207, 1326
  función de onda de, 1228
  no relativista, 1210, 1240
  relativista, 1240
Medicina nuclear, 1359
Medida del eslabonamiento de flujo, 939
Mesones, 1297, 1309, 1328
Método
  de dispersión paralela, 1122
  de Kramer, 844
  8-14, 1120
Microcoulombs (μC), 686
Microfaradio (μF), 776
Microondas, 993, 1000, 1001
Microscopio, 1077
  de barrido de efecto túnel, 1217
  de escaneo de efecto túnel, 1225
  de rayos gamma, 1189, 1231
Miliamperio-hora (mAh), 816
Milibarn (mb), 1291
Mineral piedra imán, 865
Miopía (corto de vista), 1072
Modelo
  de Bohr del átomo, 1252, 1255
  de gas Fermi del núcleo, 1348, 1350
  de gota líquida, 1346
  de transporte nuclear, 1351
  del átomo de
    hidrógeno de Bohr, 1256
    Rutherford, 1293
  del pudín de ciruela del átomo, 1255
  del pudín de pasas, 1292
  estándar de la física de partículas elementales, 1297
  nuclear por capas, 1349-1351
Momento
  angular intrínseco, 1192
  de torsión, 723, 880, 910
    magnitud del, 723
  magnético, 1192
Momento angular
  conservación de la cantidad de, 1263
  cuantización de la cantidad de, 1256
Momento dipolar eléctrico, 716
  inducido, 792
  inherente, 792
  magnitud del, 716
  permanente, 791
Momento dipolar magnético, 881, 1360
Monopolos magnéticos, 865, 866, 928, 996
Motor eléctrico, 937
Motores de tamaño molecular, 1084
Movimiento
  absoluto, 1139
  armónico simple, ecuación diferencial para, 962
  browniano, 1134
  cargas eléctricas en, 805
  con velocidad constante, 1133
  de la partícula, velocidad angular del, 874
  de precesión de Mercurio alrededor del Sol, 699
  relativista, cantidad de, 1151

MRI (*magnetic resonance imagers*). *Véase* Imagen por resonancia magnética
Multímetro digital, 847
Muon, 1139, 1297
  positivo, 1314
Músculos ciliares, 1071

N

Nanociencia, 948, 1207
Nanocoulombs (nC), 686
Nanotecnología, 948, 1122, 1207
Naturaleza
  cuántica de la luz, 1134
  ondulatoria de la luz, 1097, 1100
Navaja de Occam, 1288
Nervio óptico, 1071
Neurona, 854
Neutralitos, 1308
Neutrino, 1297
Neutrón sin carga, 1297
Neutrones, 1297, 1326
  neutros, 687
NIF (*National Ignition Facility*). *Véase* Instalación Nacional de Ignición
Niveles de energía atómica, 1252
Nodo, 839-842, 846
Nonetos, 1313
Norma MPEG-2, 1003
Nucleones, 1326
Núcleo(s)
  atómicos, 1289, 1297, 1329
  hijo, 1335
  modelo de gas Fermi del, 1348, 1350
  padre, 1335, 1352
  superdeformados, 1339
Número(s)
  atómico, 1327
  cuántico principal, 1213
  de Avogadro, 1330
  de extrañeza cuántica, 1311
  de la lente, 1074
  de onda, 1226
  de rendijas, 1116
  mágicos, 1350
    en los núcleos, 1350
    para la configuración de electrones, 1350
  másico, 1327
  neto de
    leptones electrones, 1299
    quarks, 1299
  total de leptones, 1298
    conservación del, 1298

O

Objetivo, 1079
Objeto(s)
  eléctricamente neutros, 685
  oscuro enorme, 1159
Observaciones mediante luz infrarroja, 1082
Observatorio CHANDRA de rayos X, 1082
Ocular, 1077, 1079
Octeto, 1313
Ohm (Ω), 811
Óhmetro, 847
Ojo humano como instrumento óptico, 1071
Onda(s)
  de materia de De Broglie, 1189
  de radio, 1000, 1026
    y T.V., 993
  esféricas, 1207
    secundarias, 1098, 1101, 1109
  gravitacionales, 1160
  infrarrojas, 1001, 1006
  número de, 1226
  plana, 997, 1026, 1207
    polarizada, 1010
  progresiva, 1209
  viajera, 997
Ondas de luz, 1026
  interferencia constructiva de las, 1100-1102, 1105
  interferencia de las, 1100
  interferencia destructiva de las, 1100-1102, 1106
Onda(s) electromagnética(s), 993, 996
  absorción total de las, 1007
  frecuencia de las, 1000
  polarización de una, 1010
  reflexión total de las, 1007
  viajeras, 1003
Operación de un horno de microondas, principio de, 725
Operador
  de cantidad de movimiento, 1210, 1229
  de energía cinética, 1210, 1226
  gradiente, 1014, 1261
  hamiltoniano, 1234, 1238
  laplaciano, 1258, 1259, 1262
Óptica
  de los cuantos, 1026
  de ondas, 1042
  física, 1097
  geométrica, 1026
Orden
  antiferromagnético perfecto, 912
  ferromagnético perfecto, 912
  de la franja, 1102
Oscilación, ciclo de, 976
Oscilaciones
  críticamente amortiguadas, 964
  de neutrinos, 1300
  electromagnéticas, 959, 960
  sobreamortiguadas, 964
Oscilador
  armónico, 1225, 1259, 1265
    clásico, 1226
    cuántico, 1226
  débilmente amortiguado, 964
  mecánico amortiguado, 971
Osciladores mecánicos, 976
Óxido de hierro, 865

P

Paneles solares fotovoltaicos, 1005
Pantalla de cristal líquido, 1013, 1077
Par de
  adenina (A) y timina (T), 1288
  citosina (C) y guanina (G), 1288
Paradoja de los gemelos, 1141-1143
Paramagnetismo, 912
Parámetro de
  corrimiento al rojo, 1144
  deformación, 1352
  fisionabilidad, 1352
Pararrayos, 735
  con punta aguda, 735
  con punta redonda, 735
Pares
  de quark-antiquark, 1309
  electrón-positrón, 871
Paridad
  de una partícula, 1303
  negativa, 1303
  positiva, 1303
Partícula(s)
  alfa, 1292, 1295
  cargada, energía potencial de una, 747
  clásica, 1193
  cuánticas, 1193
  de más alta energía, colisiones de, 685
  dinámica de, 1207
  distinguibles, 1235
  fermiónicas indivisibles, 1297
  función de onda cuántica de una, 1208, 1210
  paridad de una, 1303
  puntual
    con radio cero, 687
    elemental, 1308
  sin masa, 1153
  unidad para la energía cinética de una, 749
  velocidad de la, 874
  virtual, 1301
Partícula-proyectil, 1291, 1294, 1295
Partículas elementales, 1287, 1289
  con espines
    enteros, 1192
    semienteros, 1192
  interacciones de, 871
  modelo estándar de la física de, 1297
  nuevas, 872
Patrón de
  difracción, 1109
  interferencia
    causado por la reflexión de la luz, 1106
    de rendijas dobles, 1114
Película(s) delgada(s)
  ejemplos de, 1104
  interferencia de, 1104

Pérdidas óhmicas, 964
Permeabilidad magnética, 1000
del espacio libre, 894, 897, 911, 940
efectiva, 913
relativa, 912
Permitividad
del espacio libre, 776, 1000
eléctrica, 912
del dieléctrico, 788
del espacio libre, 692, 788, 897
magnética, 912
Picocoulombs (pC), 686
Picofaradio (pF), 776
Piedra imán, 684
Pila voltaica, 926
Pión, 1328
negativo, 1154
neutral, 1309
positivo, 1154
teoría del intercambio potencial de, 1328
Piones positivos, 1314
Pixel(es), 1003, 1076
Placa(s)
de cuarto de onda, 1120
microcanal, 1171
paralelas
capacitancia de un capacitor de, 778
capacitor de, 774
Plantas de energía, 937
Plasma de quarks-gluones, 1368
Plutonio, 1330
Poder de resolución de una rejilla de difracción, 1117
Polarización de una onda electromagnética, 1010
Polarizador, 1010
Polinomio(s)
asociado de Laguerre, 1264
de Hermite, 1226
de Legendre, 1266
Polo(s)
magnéticos, 928
de la tierra, 865
norte magnético, 865
de la tierra, 867
sur magnético, 865
de la tierra, 867
Poner a tierra, 690
Portadores de carga en
conductores, 807, 882
metales, 882
semiconductores, 882
Positrón, 871, 1240, 1241
Postulado(s) de
Bohr, 1256
Einstein, 1134, 1136
Potencia, 787, 945, 975, 979
de una lente, 1065, 1072
disipada, 826
eléctrica, transmisión de, 979
media, 975, 979
disipada, 976
nuclear de Coulomb, 1272
perdida, 825
suministrada por la fuente de fem, 825
transferencia de, 981
transmitida, 826
Potencial
autoinducida, diferencia de, 940, 943
central
de Coulomb, 1274
1/r, 1225
de Coulomb, 1225, 1236, 1258, 1259, 1350
de frenado, 1178
de Yukawa, 1328
del oscilador, 1225
derivada parcial del, 759
gravitacional, 752
instantánea, diferencia de, 784
negativo, 754
positivo, 754
pozo de, 1225
químico, 1193
Woods-Saxon, 1350, 1351
Potencial eléctrico, 746, 747, 748
definición de, 755
diferencia de, 748
entre dos puntos, diferencia en, 748
unidades para el, 748
Pozo de potencial, 1225
finito, 1217-1221
infinito, 1211-1214
multidimensional, 1215
unidimensional, 1215
Precipitador electrostático (PES), 697
Presas hidroeléctricas, 825
Presión de radiación, 1006
Primer rayo de luz, 1031
Primera
condición de equilibrio estático, 695, 696
ecuación de Maxwell, 1014
Principales decaimientos nucleares, 1335
Principio de
correspondencia, 1232
equivalencia, 1158
exclusión de Pauli, 1193, 1194, 1196, 1235, 1271, 1346, 1349
Fermat, 1043
Huygens, 1043, 1098, 1109, 1182
incertidumbre, 1207
de Heisenberg, 1197, 1294
operación de un horno de microondas, 725
simetría, 685
superposición para
campos eléctricos, 712, 713, 716, 868
campos magnéticos, 868, 894
Principio del tiempo mínimo, 1043
Problema
de signos de fermiones, 1236
separable, 1216
Procesador digital de luz, 1077
Proceso de
acomodación, 1071
aniquilación, 1241
decaimiento alfa, 1224
ferromagnetización, 913
interacción débil, 1355
triple alfa, 1358
Procesos subatómicos, 1003
Producción energética nuclear, 1353
Profundidad de
campo de la imagen, 1075
la penetración, 1344
Propagador, 1303
Propiedades de la carga eléctrica, 684
Protón
carga del, 686
de carga positiva, 1297
masa del, 687
Protones, 1326
cargados, 687
Prueba
carga de, 712
positiva
carga de, 726
unitaria, carga de, 712
Puente de Wheatstone, 845
Pulsar, 1160, 1358
Pulsares binarios, 1160
Punto
de interrupción, frecuencia de, 973, 974
lejano de un ojo normal, 1071
pivote, 723
Punto cercano
de un ojo normal, 1071
del ojo, 1067
Punto focal
de un espejo cóncavo, 1033
de un espejo convexo, 1037
de una lente delgada, 1061
del espejo parabólico, 1040
Puntos cuánticos en semiconductores, 1237

Q

Qbit, 1237
QCD (*quantum chromodynamics*). *Véase* Cromodinámica cuántica
Quark(s), 687, 1172, 1297
arriba y abajo, 688
azul, 1302
bottom, 1298
charm, 1298
cima, 688
down, 1298, 1300, 1301
encanto, 688
extraño, 688
fondo, 688
huon y tau, 688

rojo, 1302
strange, 1298
top, 1298
up, 1298, 1300, 1301
verde, 1302
Quásar (*quasi-stellar object*), 1133
Queratomileusis con ayuda de láser, 1073

R

Rad (rd), 1343
Radiación, 1006
de cuerpo negro, 1172
de desaceleración, 1182
de fondo cósmica, 1176
de frenado, 1275
dosis de absorción de, 1343
electromagnética, 961
espectral, 1172
factor de peso de la, 1344
radiactiva, 1006
térmica, 1172
Radiaciones de alta energía, 866
Radiactividad, 1334, 1335
Radiador de cuerpo negro perfecto, 1176
Radio
AM (amplitud modulada), 1001, 1002
cero, partícula puntual con, 687
de Bohr, 1256, 1257
de curvatura, 1061
de Schwarzschild, 1159, 1160
de un espejo divergente, 1037
FM (frecuencia modulada), 1001, 1002
Rama de un circuito, 839, 841, 846
Rapidez, 868
Rastro de, 722
Rayo(s)
catódicos, tubo de, 869
cósmicos, 866, 1297
de luz, 1026, 1029
extrapolados, 1037
incidente, 1030
láser ultravioleta (UV), 1074
paralelos, 1030
reflejado(s), 1030, 1037, 1051
divergentes, 1035
refractados, 1051
ultravioleta, 1001
X, 993, 1000, 1002, 1003, 1121, 1182, 1275
con longitudes de onda más largas, 1182
Rayos gamma, 1000, 1002, 1003
cámara de, 1360
de alta energía, 1359
fotografía de, 1360
Reacción
de fusión nuclear, 1356
de separación, 1333
en cadena, 1353
endotérmica, 1332
exotérmica, 1332
nuclear, 1332
Reacciones
de fisión nuclear, 1155
d,*p*, 1332
Reactancia
capacitiva, 966, 967, 968, 969, 972
inductiva, 968, 969, 972
total, 969
Reactor
de fusión termonuclear con tecnología de confinamiento magnético, 1357
nuclear de fisión, 1353
Rectificador, 981
de media onda, 981
de onda completa, 981
Red QCD, 1313. *Véase también* Cromodinámica cuántica
Redireccionamiento gravitacional, 1159
Reduccionismo, 1287
Reflectores parabólicos, 1040
Reflexión, 1026
de la luz, patrón de interferencia causado por la, 1106
de las ondas en una cuerda, 1104
de superficie, 1029
desde espejos planos, 1030
difusa, 1029
especular, 1029
interna total, 1046
total de las ondas electromagnéticas, 1007
Refracción, 1026
concepto de, 1042
de la luz, índice de, 1252
en la córnea, 1071
ley de, 1042
por fronteras entre distintos medios, 1029
Región prohibida, 1211, 1222
Registro cuántico, 1238
Regla de
BAC-CAB para productos vectoriales dobles, 1014
de la cadena de diferenciación, 761
del producto del cálculo, 929
Regla de la mano derecha, 723, 724, 868
l (uno), 876, 878, 879, 894, 895, 896, 901, 902
2 (dos), 880, 881
3 (tres), 895, 896, 897, 899, 901, 902
4 (cuatro), 907
Rejilla
ancho de, 1116
de reflexión, 1115
espaciamiento de, 1116
Rejilla de difracción, 1115, 1116
dispersión de una, 1116, 1117
poder de resolución de una, 1117
tridimensional para rayos X, 1121
Relación
de De Broglie, 1209
de energía cinética-cantidad de movimiento, 1186
de indeterminación de Heisenberg, 1348
energía-cantidad de movimiento, 1183
Relación de incertidumbre, 1191
coordenada-cantidad de movimiento, 1190
de Heisenberg, 1189, 1231
energía-tiempo, 1190
Relatividad
de la dilatación del tiempo, 1140
especial, 1143
general de Einstein, teoría de la, 699
Relojes en movimiento corren despacio, 1139
Rem, 1344
Repulsión de Coulomb, 1356, 1358
Resistencia, 811
constante, aleación metálica de, 815
del conductor, 811, 812
del cuerpo humano, 817
dieléctrica, 789
del aire, 789
equivalente de resistores en
paralelo, 821
serie, 818
interna de una batería, 818
Resistividad, 811
eléctrica
coeficiente de temperatura de, 814, 815
negativo, coeficiente de temperatura de, 815
unidades de la, 811
Resistor, 805
de derivación, 848
Resistores, 816
código de colores de, 814
comerciales, 814
conexión en
paralelo de, 806, 821
serie de, 806, 818
en paralelo, resistencia equivalente de, 821
en serie, resistencia equivalente de, 818
no óhmicos, 817, 827
óhmicos, 816, 817, 827
Resolución de un
instrumento óptico, 1110
telescopio, 1078, 1113
Resolución de una cámara, 1113
Resonancia, 959
circuito en, 970
del circuito, frecuencia de, 976
frecuencia angular de, 970, 971, 977
Resonancia magnética nuclear, 1359
Retina del ojo, 1071
Retrodispersión, 1292
RHIC (*relativistic heavy ion collider*). *Véase* Colisionador relativista de iones pesados
Riel
cañón de, 898
electromagnético, acelerador de, 898
Rieles conductores, 898
Roentgen (R), 1343
Rompimiento espontáneo de simetría, 1318

Rotación
ángulo de, 730
de superficies líquidas, 1041
Rutherford (Rd), 1343

S

Saltos, 1074
Sección transversal, 1291
definición de, 1291
diferencial, 1291
Secuencia genética en ADN, 1290
Segunda ecuación de Maxwell, 1014
Segundo rayo de luz, 1031
Selección de bucles, 846
Selector de velocidades, 875, 876
Selectores de color RGB, 1309
Semiconductor, 815, 816
Semiconductores
dopados, 689
tipo n, 689
tipo p, 689
extrínsecos, 689
intrínsecos, 689
Sensor digital
con dispositivo de acoplamiento de carga, 1076
de imágenes, 1074
Señal de
entrada, 854
salida, 854
Señales digitales, 1047
Separación
angular
grande, 1113
pequeña, 1113
de variables, 1233, 1262
Serie de
Balmer en el espectro de hidrógeno, 1253
Brackett en el espectro de hidrógeno, 1253
Lyman en el espectro de hidrógeno, 1253
Paschen en el espectro de hidrógeno, 1253
Sievert (Sv), 1344
Símbolos para elementos del circuito, 776
Simetría
de intercambio en la función de onda, 1236
de la distribución de carga, 731
de traslación, 730
esférica, 731
plana, 730
principios de, 685
rotacional, 730
Singuletes de color, 1309
masivo, 1328
Sistema(s)
de capacitores en
paralelo, capacitancia equivalente de un, 781
serie, capacitancia equivalente de un, 782
de cargas, 761
puntuales, 757
energía potencial eléctrica de un, 762
de dos lentes, 1068
de frenado regenerativo, 938
mecánicos cuánticos, 1213
Sistema de posicionamiento global, 1160, 1161
Solenoide(s), 893, 905, 913
efectos de campos marginales en los extremos de un, 940
ideal, 906, 907, 930
inductancia de un, 940
Solución estacionaria de la ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo, 1234
Soma, el, 854
Sonda Hall, 882
Soporte de fibra óptica de internet, 1047
Spallation Neutron Source, 1122
Stops de *f*, 1074
Supercapacitores, 792
comerciales, 793
Superconductores, 689, 815
a temperatura ambiente, 914
de alta temperatura, 914
crítica, 689
imanes elaborados con, 815
Superficie(s)
cerrada, integral sobre una, 726
cóncava como la ve la luz, 1061
convexa como la ve la luz, 1061
equipotencial(es), 752
tridimensionales, 752, 775
esférica, 1059
gaussiana, 727, 777
cerrada, 728
esférica, 727
Supernova, 1358
Superposición de
dos estados, 1237
fuerzas, 693
los campos magnéticos, 868
Supersimetría, 685, 1308
Susceptibilidad magnética, 911
Sustancia ferromagnética, 948

T

Tabla periódica de los elementos químicos, 1193, 1273
Taquiones, 1136
Técnicas de trazo de rayos, 1031
Telescopio(s), 1041
astronómicos, 1080
de reflexión, 1078
espacial James Webb (TEJW), 1082
refractor, 1078, 1079
SOAR, 1080
Telescopio Espacial Hubble, 1041, 1081, 1159
Telescopio reflector, 1078, 1080
de Cassegrain, 1081
de diseño de Ritcher-Chrétian, 1081
estándar, 1081
newtoniano, 1081
Televisión
de alta definición (HDTV), 1002
UHF (frecuencia ultraalta), 1002
VHF (frecuencia muy alta), 1002
Temperatura
ambiente, superconductores a, 914
de Curie, 913
de Planck, 1307
de resistividad eléctrica
coeficiente de, 814, 815
negativo, coeficiente de, 815
Teorema
de Pitágoras, 1107, 1138, 1139
de trabajo-energía, 762, 899, 1177
del trabajo y la energía, 881
cinética, 1152
del virial, 1257
Teoría(s)
atomista, elementos de la, 1288
de cuerdas, 685, 928, 1303, 1308
de Dirac, 1308
de Glashow-Weinberg-Salam, 1306
de gran unificación, 1306
de grupos, 1306
de la gravedad, 1158
de Newton, 1158
de supercuerdas, 1308
de todo, 685, 1308
del intercambio potencial de pión, 1328
electrodinámica cuántica, 1182
especial de la relatividad, 1133
M, 1308
ondulatoria de la luz de Huygens, 1098
Teoría(s) (*continuación*)
supersimétricas, 1308
unificadas, 928
Teoría de la relatividad
de Einstein, 1133
especial, 1000, 1134, 1151
general, 1158
de Einstein, 699
Tercer rayo de luz, 1031
Tercera ecuación de Maxwell, 1014
Tercera ley de Newton, 896
Término
de asimetría, 1346, 1350
de Coulomb, 1352
volumen, 1346
Termistor, 815
Termómetros infrarrojos, 1176
Tesla (T), 869
Tiempo
absoluto, 1138
campos independientes del, 866
constante de, 850
corrientes dependientes del, 849
de deriva, 872
de Planck, 1307, 1315

de vida
media, 1334
nuclear, 1329
dilatación relativista del, 1315
factor de dilatación de, 1315
fuente de fem que varía con el, 965, 968-971
gráfica de diferencia de potencial contra, 852
grande, constante de, 851
no absoluto, 1138
pequeña, constante de, 851
propio, 1137
variable, 1140
Tierra
campo magnético de la, 866, 873, 874
conectar a, 690
polos magnéticos de la, 865
poner a, 690
Torio, 1330
Toroide, 913
Torsión
magnitud del momento de, 723
momento de, 723
Trabajo, 945
diferencial, 784
Trampa(s)
de ion, 1330, 1331
de rayos láser, 1083
lineal Paul, 1238
ópticas, 1083
Transferencia de
cantidad de movimiento, 1292
potencia, 981
Transformación de
Galileo 1146
la velocidad, 1149
Lorentz, 1146, 1147, 1149, 1152, 1155-1156
Transformación inversa de Lorentz, 1147
Transformada de Fourier, 1296
Transformador, 979
elevador, 979
reductor, 979
Transistores, 817
Transmisión
AM, 1002
de calor, 1006
de energía eléctrica, 825, 826
de la luz incidente, 1084
de luz en fibras ópticas, 1047
de potencia eléctrica, 979
de señales análogas, 1047
de TV vía satélite, 1040
FM, 1003
HDTV, 1003
Transmisiones por teléfono celular, 1003
Transmutación, 1335
Traslación, simetría de, 730
Tren Maglev de Shanghai, 877
Trenes de suspensión magnética (maglev), 877
Tres dimensiones, superficies equipotenciales en, 752
Tubo(s)
de flujo, 1314
de nanocarbono, 793
de rayos catódicos, 869
fotomultiplicador(es), 1171, 1180

U

Ultracapacitores, 792
Unidad
básica de oscilación, 996
de ángulo sólido, 1292
de carga, 686
de conductancia, 811
de corriente, 806
de disco duro, 947
de energía electrón-volt, 1173
de flujo magnético, 929
de inductancia, 939
mutua, 941
de intensidad del campo magnético, 869
de la fuerza eléctrica, 686
de masa atómica, 1330
de potencia, 825
de radiactividad, 1343
de resistencia, 811
1 Rydberg, 1259
Unidad para la
dosis
de absorción, 1343
equivalente, 1344
energía cinética de una partícula, 749
Unidades
de la resistividad, 811
de Planck, 1306
de radiactividad, 1343
del campo eléctrico, 711
para el potencial eléctrico, 748
Uranio, 1330
de grado de armas, 1353

V

Vacío
constante dieléctrica del, 789
de Dirac, 1240
Valle de la estabilidad, 1327, 1331
Valor
absoluto de carga, 691
de la constante
de Coulomb, 699
universal de gravitación, 699
de la energía cinética, 1226
de la velocidad de la luz, 1135
numérico de la energía Fermi, 1349
propio, 1234
Valores
aproximados prácticos de la velocidad de la luz, 1135
esperados, 1229
Vector
de Poynting, 1004
unidades del, 1004
velocidad, magnitud del, 868
Velocidad
constante, movimiento con, 1133
de deriva, 808, 809, 878, 882
magnitud de la, 808
de la luz, 897, 999, 1000, 1014
en un medio físico, 1042
de la onda, 999
de la partícula, 874
de la Tierra alrededor del Sol, 1135
del movimiento aleatorio, magnitud de la, 808
del objeto, 1141
transformación de la, 1149
Velocidad angular
de los fasores, 966
del movimiento de la partícula, 874
Velocidades, selector de, 875, 876
Vértice, definición de, 1304
Vida media, 1334
tiempo de, 1334
Viento solar, 806, 867, 873, 874, 993
Violación de conservación de energía, 1190, 1300
Visión
de gran angular, 1076
periférica humana, 1076
Voltaje, 776, 816
fasor de, 966, 967, 968, 969
Hall, 882
Voltímetro, 847
Voltio (V), 748
definición del, 748
Volumen diferencial, 758

W

Watts por metro cuadrado (W/m^2), 1004
Weber (Wb), 929

Z

Zinos, 1308

Constantes numéricas

Constantes fundamentales

Nombre	Símbolo	Valor
Velocidad de la luz en el vacío	c	$2.99792458 \cdot 10^{8}$ m s^{-1}
Carga elemental	e	$1.602176487(40) \cdot 10^{-19}$ C
Constante universal gravitatoria	G	$6.67428(67) \cdot 10^{-11}$ m^{3} kg^{-1} s^{-2}
Constante de Planck	h	$6.62606896(33) \cdot 10^{-34}$ J s
Constante de Boltzmann	k_{B}	$1.3806504(24) \cdot 10^{-23}$ J K^{-1}
Número de Avogadro	N_{A}	$6.02214179(30) \cdot 10^{23}$ mol^{-1}
Constante universal de los gases	R	8.314472(15) J mol^{-1} K^{-1}
Masa de un electrón	m_{e}	$9.10938215(45) \cdot 10^{-31}$ kg
Masa de un protón	m_{p}	$1.672621637(83) \cdot 10^{-27}$ kg
Masa de un neutrón	m_{n}	$1.674927211(84) \cdot 10^{-27}$ kg
Permeabilidad magnética del espacio libre	μ_0	$4\pi \cdot 10^{-7}$ N A^{-2}
Permitividad eléctrica del espacio libre	$\epsilon_0 = 1/(\mu_0 c^2)$	$8.854187817... \cdot 10^{-12}$ N A^{-2}
Constante de Stefan-Boltzmann	σ	$5.760400(40) \cdot 10^{-8}$ W m^{-2} K^{-4}

Fuente: National Institute of Standards and Technology, http://physics.nist.gov/constants. Los números en paréntesis muestran la incertidumbre en los dígitos finales del número citado. Por ejemplo, 6.67428(67) significa 6.67428 ± 0.00067. Los valores que se muestran sin incertidumbres son exactos.

Otras constantes útiles

Nombre	Símbolo	Valor
Aceleración estándar debida a la gravedad	g	9.81 m s^{-2}
Presión atmosférica estándar a 20 °C	atm	$1.01325 \cdot 10^{5}$ Pa
Volumen de gas ideal a 0 °C y 1 atm		22.413996(39) litro/mol
Equivalente mecánico del calor		4.186 J/cal
Unidad de masa atómica	u	1.660538782(83) kg
Electrón-volt	eV	$1.602176487(40) \cdot 10^{-19}$ J
Equivalente energético de unidad de masa atómica	uc^2	931.494028(23) MeV
Equivalente energético de masa electrónica	$m_{\mathrm{e}}c^2$	0.510998910(13) MeV
Equivalente energético de masa protónica	$m_{\mathrm{p}}c^2$	938.272013(23) MeV
Equivalente energético de masa neutrónica	$m_{\mathrm{n}}c^2$	939.565346(23) MeV
Constante de Planck dividida entre 2π	$\hbar$	$1.054571628(53) \cdot 10^{-34}$ J s
Constante de Planck dividida entre 2π por c	$\hbar c$	197.3269631(49) MeV fm
Radio de Bohr	a_0	$0.52917720859(36) \cdot 10^{-10}$ m

Fuente: National Institute of Standards and Technology, http://physics.nist.gov/constants. Los números en paréntesis muestran la incertidumbre en los dígitos finales del número citado. Por ejemplo, 6.67428(67) significa 6.67428 ± 0.00067. Los valores que se muestran sin incertidumbres son exactos.

Factores de conversión de unidades

Longitud

1 m = 100 cm = 1 000 mm = 10^6 μm = 10^9 nm
1 km = 1 000 m = 0.6214 mi
1 m = 3.281 ft = 39.37 in
1 cm = 0.3937 in
1 in = 2.54 cm (exactamente)
1 ft = 30.48 cm (exactamente)
1 yd = 91.44 cm (exactamente)
1 mi = 5 280 ft = 1.609344 km (exactamente)
1 Angstrom = 10^{-10} m = 10^{-8} cm = 0.1 nm
1 milla náutica = 6 080 ft = 1.152 mi
1 año-luz = $9.461 \cdot 10^{15}$ m

Área

1 m^2 = 10^4 cm^2 = 10.76 ft^2
1 cm^2 = 0.155 in^2
1 in^2 = 6.452 cm^2
1 ft^2 = 144 in^2 = 0.0929 m^2
1 hectárea = 2.471 acres = 10 000 m^2
1 acre = 0.4047 hectáreas = 43 560 ft^2
1 mi^2 = 640 acres
1 yd^2 = 0.8361 m^2

Volumen

1 litro = 1 000 cm^3 = $10^{-3}m^3$ = 0.03531 ft^3 = 61.02 in^3 = 33.81 onzas fluidas
1 ft^3 = 0.02832 m^3 = 28.32 litros = 7.477 galones
1 galón = 3.788 litros
1 cuarto de galón = 0.9463 litro

Tiempo

1 min = 60 s
1 h = 3 600 s
1 día = 86 400 s
1 semana = 604 800 s
1 año = $3.156 \cdot 10^7$ s

Ángulos

1 rad = 57.30° = 180°/π
1° = 0.01745 rad = (π/180) rad
1 rev = 360° = 2π rad
1 rev/min (rpm) = 0.1047 rad/s = 6°/s

Rapidez

1 milla por hora (mph) = 0.4470 m/s = 1.466 ft/s = 1.609 km/h
1 m/s = 2.237 mph = 3.281 ft/s
1 km/h = 0.2778 m/s = 0.6214 mph
1 ft/s = 0.3048 m/s
1 nudo = 1.151 mph = 0.5144 m/s

Aceleración

1 m/s^2 = 100 cm/s^2 = 3.281 ft/s^2
1 cm/s^2 = 0.01 m/s^2 = 0.03281 ft/s^2
1 ft/s^2 = 0.3048 m/s^2 = 30.48 cm/s^2

Masa

1 kg = 1 000 g = 0.0685 slug
1 slug = 14.95 kg
1 kg tiene un peso de 2.205 lb cuando g = 9.807 m/s^2
1 lb tiene una masa de 0.4546 kg cuando g = 9.807 m/s^2

Fuerza

1 N = 0.2248 lb
1 lb = 4.448 N
1 piedra = 14 lb = 62.27 N

Presión

1 Pa = 1 N/m^2 = $1.450 \cdot 10^{-4}$ lb/in^2 = 0.209 lb/ft^2
1 atm = $1.013 \cdot 10^5$ Pa = 101.3 kPa = 14.7 lb/in^2 = 2 117 lb/ft^2 = 760 mm Hg = 29.92 in Hg
1 lb/in^2 = 6 895 Pa
1 lb/ft^2 = 47.88 Pa
1 mm Hg = 1 torr = 133.3 Pa
1 bar = 10^5 Pa = 100 kPa

Energía

1 J = 0.239 cal
1 cal = 4.186 J
1 Btu = 1 055 J = 252 cal
1 kW · h = $3.600 \cdot 10^6$ J
1 ft · lb = 1.356 J
1 eV = $1.602 \cdot 10^{-19}$ J

Potencia

1 W = 1 J s
1 hp = 746 W = 0.746 kW = 550 ft · lb/s
1 Btu/h = 0.293 W
1 GW = 1 000 MW = $1.0 \cdot 10^9$ W
1 kW = 1.34 hp

Temperatura

Fahrenheit a Celsius: $T_C = \frac{5}{9}(T_F - 32\ °F)$
Celsius a Fahrenheit: $T_F = \frac{9}{5}T_C + 32\ °C$
Celsius a Kelvin: $T_K = T_C + 273.15\ °C$
Kelvin a Celsius: $T_C = T_K - 273.15\ K$